

УДК 621.396

**И.В. Баранов, В.В. Езерский**

## МИНИМИЗАЦИЯ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ РАССТОЯНИЯ ПРИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНЫХ ДАЛЬНОМЕРАХ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРИМЕНЕНИЯ

*Получены выражения для методической составляющей погрешности измерения малых расстояний частотным дальномером при весовом усреднении разностной частоты во временной области на основе весовой функции Кайзера-Бесселя. Получена эмпирическая зависимость оптимальных значений параметра формы весовой функции, минимизирующих усреднённую методическую погрешность, от измеряемого расстояния. Исследовано влияние шума для многокаскадного усилителя сигнала разностной частоты.*

**Введение.** В частотных дальномерам промышленного применения необходимо измерять малые расстояния с высокой точностью [1, 2]. В работах [3, 4] исследован весовой метод усреднения частоты разностного сигнала частотного дальномера, при котором расчёт расстояния  $R$  производится по формуле:

$$R = \delta_R S / K_M, \quad (1)$$

где  $\delta_R = c / (4\Delta F)$  - ошибка дискретности (ОД);  $\Delta F$  - диапазон перестройки частоты СВЧ - генератора;  $K_M$  - коэффициент, зависящий от формы функции частотной модуляции;

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^N \alpha(t_i); \quad (2)$$

$\alpha(t_i)$  - значения весовой функции (ВФ) в моменты времени  $t_i$ , соответствующие нулям сигнала разностной частоты (СРЧ);  $N$  — число нулей СРЧ в интервале анализа.

Для обычно используемой симметричной треугольной формы функции модуляции с периодом  $T_M$  получаем  $K_M = 1$  и ВФ имеет период  $T_M / 2$ .

При использовании ВФ в виде тригонометрического ряда в [3, 4] получены аналитические выражения для методической и шумовой составляющих погрешности измерения расстояния при наличии некоррелированного шума, показана возможность оптимизации формы ВФ по критерию минимума погрешности измерения и приведены таблицы, содержащие значения оптимальных параметров. Причём показано, что чем больше слагаемых содержит тригонометрический ряд, тем меньше уровень достижимой погрешности. Однако использованные в упомянутых работах ВФ неудобны для практического

применения, так как необходимо хранить в памяти большое количество коэффициентов или постоянно решать систему уравнений, порядок которой равен числу слагаемых ряда.

Целью данной работы является анализ весового метода усреднения частоты разностного сигнала с использованием ВФ, имеющей ограниченное число параметров формы, но позволяющей при этом изменять форму в широких пределах и тем самым облегчать процедуру оптимизации.

**Выбор весовой функции.** Известно несколько ВФ с такими свойствами [5]. Это весовые функции Дольфа - Чебышева, Кайзера - Бесселя и Барсилона - Темеша. Из перечисленных ВФ выберем ВФ Кайзера-Бесселя (КБ), широко используемую при спектральном анализе. Для симметричного интервала анализа эта ВФ имеет вид:

$$\alpha(t) = I_0 \left[ \pi a \sqrt{1 - \left( \frac{4t}{T_M} \right)^2} \right] / I_0[\pi a], \quad (3)$$

$$t \in [-T_M/4, T_M/4],$$

где  $I_0[*]$  - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка [5];  $a$  - параметр, задающий форму ВФ.

В таком виде эта функция используется при спектральном анализе и она нормирована к единице. В нашем случае необходимо, чтобы ВФ удовлетворяла условию нормировки, приведённому в [3]. Если воспользоваться соотношением  $I_0(x) = J_0(jx)$ , где  $J_0(*)$  - функция Бесселя первого рода, известным интегралом [6]

$$\int_0^y J_0(\sqrt{y^2 - x^2}) dx = \sin y \quad (4)$$

и представить

$$\sin(x) = \frac{e^{-jx} - e^{jx}}{2j}, \quad (5)$$

то можно получить формулу для ВФ КБ с требуемой нормировкой:

$$\alpha(t) = \frac{2\pi a}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} I_0 \left[ \pi a \sqrt{1 - \left( \frac{4t}{T_M} \right)^2} \right]. \quad (6)$$

Учитывая, что реальные значения  $a > 1$  и обычно рассматривается несимметричный интервал анализа, можно записать:

$$\alpha(t) = 2\pi a e^{-\pi a} I_0 \left[ \pi a \sqrt{1 - \left( \frac{4t}{T_M} - 1 \right)^2} \right], \quad (7)$$

$$t \in [0, T_M / 2].$$

Такая ВФ удобна тем, что всего один параметр  $a$  в широких пределах изменяет её форму.

**Методическая погрешность измерения расстояния.** Подставив (7) в (2), получим:

$$\hat{S} = 2\pi a e^{-\pi a} \sum_{i=1}^N I_0 \left[ \pi a \sqrt{1 - \left( \frac{4t_i}{T_M} - 1 \right)^2} \right]. \quad (8)$$

Используя в (8) аналогично [1] нормированное время

$$t_{ni} = 2t_i / T_M = (i - 1 + \varepsilon)\eta, \quad (9)$$

где  $\varepsilon = \rho - \text{Int}(\rho)$ ;  $\rho = [4f_0 R / c - 0,5]$  - уменьшенное на 0,5 число длин волн несущего колебания с частотой  $f_0$ , укладывающихся в измеряемом расстоянии;  $1/\eta = R/\delta_R = M + \chi$  - измеряемое расстояние, нормированное к величине ОД;  $M = \text{Int}(R/\delta_R)$  и  $\chi = R/\delta_R - M$  - соответственно целая и дробная части числа ОД, укладывающихся в измеряемом расстоянии, получаем:

$$\hat{S} = 2\pi a e^{-\pi a} \sum_{i=1}^N I_0 \left[ \pi a \sqrt{1 - (2(i - 1 + \varepsilon)\eta - 1)^2} \right], \quad (10)$$

где  $N = M$  при  $\varepsilon \geq \chi$  или  $N = M + 1$  при  $\varepsilon < \chi$ . Аналогично [3] получаем выражения для нормированной методической ошибки  $\Delta_S$ , учитывая, что точное значение  $\hat{S} = M + \chi$ :

$$\Delta_S = -M - \chi + 2\pi a e^{-\pi a} \sum_{i=1}^N I_0 \left[ \pi a \sqrt{1 - (2(i - 1 + \varepsilon)\eta - 1)^2} \right], \quad (11)$$

где  $N = M$  при  $\varepsilon \geq \chi$  или  $N = M + 1$  при  $\varepsilon < \chi$ .

Результаты расчета методической погрешности по формуле (11) для двух диапазонов рас-

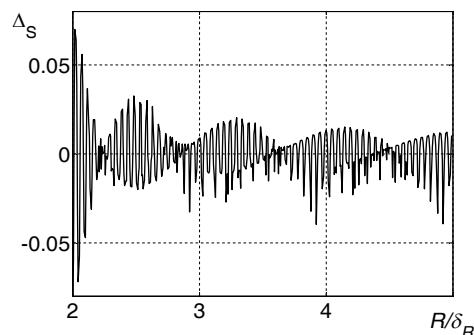
стояний и двух значений параметра  $a = 2$  и  $a = 6$  приведены на рисунке 1 и рисунке 2.

Видно, что погрешность является периодической затухающей функцией расстояния. Наблюдаются два вида периодичности. Первая имеет период, равный половине длины волны несущего колебания. Вторая имеет переменный период. Изменение второго периода сильнее проявляется при увеличении параметра  $a$ . Ошибка очень быстро уменьшается с увеличением расстояния, но при малых расстояниях, когда  $M < 3 \dots 4$ , ошибка может быть недопустимо большой. Количественные значения погрешности и скорость её затухания при увеличении расстояния зависят от величины параметра  $a$  ВФ. По этим рисункам сложно сравнивать ВФ с разными значениями параметров  $a$ . Поэтому в [4] введена в рассмотрение погрешность, усредненная в пределах участков дальности, равных величине одной ОД, т.е. в пределах

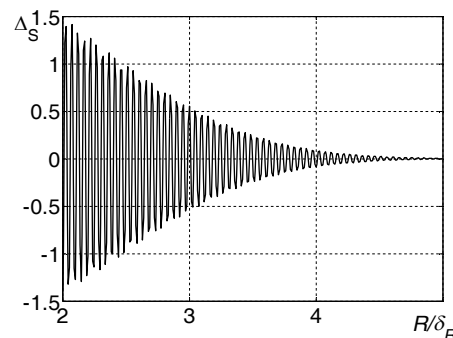
$$M\delta_R < R < [M + 1]\delta_R. \quad (12)$$

В итоге получен средний квадрат ошибки (СКО) в пределах каждого участка:

$$\overline{\Delta_S^2} = \frac{1}{\delta_R} \int_{M\delta_R}^{[M+1]\delta_R} \Delta_S^2(R_{M,k}) dR. \quad (13)$$

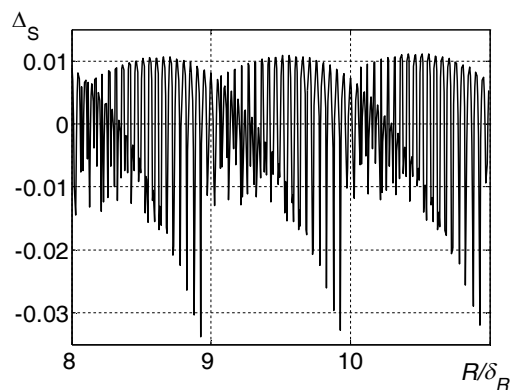


а  $a = 2$

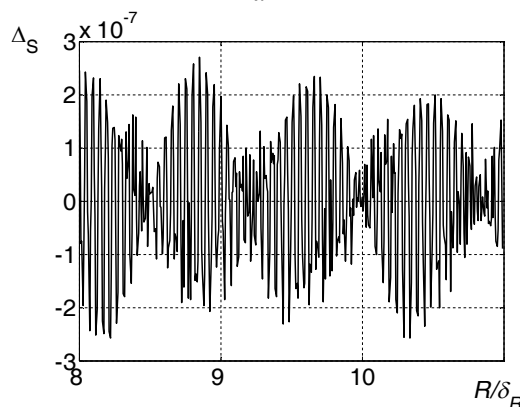


б  $a = 6$

**Рисунок 1 – Зависимость мгновенной нормированной методической погрешности от нормированного расстояния**



а  $a = 2$



б  $a = 6$

**Рисунок 2 – Зависимость мгновенной нормированной методической погрешности от нормированного расстояния**

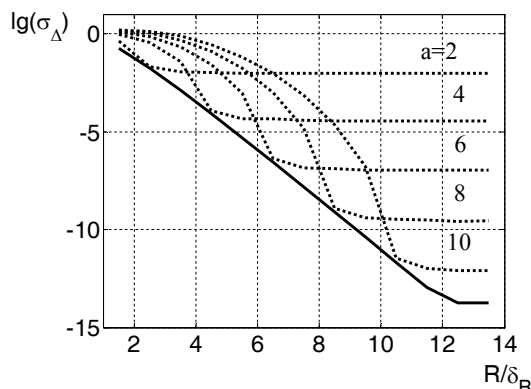
Это соотношение можно записать в дискретном виде:

$$\overline{\Delta_S^2(M)} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \Delta_S^2(R_{M,k}), \quad (14)$$

где  $L = \delta_R / \Delta$ ;  $\Delta$  - шаг по дальности в пределах одного участка;  $R_{M,k}$  -  $k$ -й отсчёт дальности в пределах данного  $M$ -го участка.

На рисунке 3 пунктирными линиями показаны усредненные по формуле (14) зависимости логарифма нормированной погрешности от нормированного расстояния для пяти значений параметра  $a = 2, a = 4, a = 6, a = 8$  и  $a = 10$ .

По этому рисунку видно, что на всех графиках четко выделяются два участка: начальный участок, где погрешность резко меняется, и участок, где усредненная методическая погрешность практически не меняется при изменении расстояния.



**Рисунок 3 – Зависимость нормированной усредненной методической погрешности от нормированного расстояния**

**Минимизация методической погрешности измерения расстояния.** Очевидно, что при изменении расстояния можно находить такое значение параметра  $a$ , при котором достигается минимум усредненной методической погрешности для данного расстояния. Для этого необходимо минимизировать усредненную погрешность (14) по величине параметра формы ВФ  $a$ .

Выполнить эти вычисления аналитически сложно. Поэтому такие расчёты были проделаны численным методом по выражениям (14) и (11) в системе программирования Matlab с использованием функции многомерной оптимизации `fminsearch` для нескольких участков дальности. В результате была получена зависимость оптимальных значений параметра формы ВФ  $a$  от среднего расстояния, соответствующего середине участка усреднения. Оказалось, что эту зависимость можно аппроксимировать прямой линией, получив эмпирическое выражение для оптимального значения параметра формы ВФ:

$$a_{opt} = 1,067(M + 0,5) - 0,6061. \quad (15)$$

Зависимость нормированной усредненной методической погрешности от нормированного расстояния при использовании оптимальных значений параметра  $a_{opt}$  приведена на рисунке 3 сплошной линией.

Видно, что она практически является касательной линией к построенным ранее графикам, соответствующим конкретным значениям параметра  $a$ . Увеличение измеряемого расстояния приводит к снижению погрешности. При величине нормированного расстояния более 12 начинает сказываться шум квантования, обусловленный конечной точностью вычислений на компьютере.

Процесс измерения расстояния с использованием оптимальных значений параметра формы

ВФ должен быть двухэтапным. На первом этапе производится грубое измерение расстояния с минимальным значением параметра формы ВФ  $a = 2$ . По этому результату определяется величина нормированного расстояния и находится номер участка усреднения  $M = \text{Int}(R / \delta_R)$ . Затем по формуле (15) определяется оптимальное значение  $a_{\text{опт}}$  и выполняется новое измерение.

**Влияние шума на погрешность измерения расстояния.** Используя результаты работы [4], можно получить в общем виде выражение для дисперсии нормированной шумовой составляющей погрешности измерения:

$$D_{Su} = \frac{T_m^2 \eta^2}{(2\pi U_m)^2} \left\{ \sigma_u^2 \sum_{i=1}^N \alpha'^2(t_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{j=1}^N \alpha'(t_i) \alpha'(t_j) B(t_i - t_j) \right\}, \quad (16)$$

где  $B(t_i - t_j)$  - отсчёты ковариационной функции шума [6],  $U_m$  - амплитуда СРЧ и  $\sigma_u^2$  - дисперсия шума.

Дисперсия нормированной шумовой составляющей ошибки определяется видом ВФ и ковариационной функцией шума.

Будем считать, что предварительное усиление СРЧ производится многокаскадным резонансным усилителем. Ковариационная функция процесса на выходе усилителя при воздействии на входе белого нормального шума со спектральной плотностью  $N_0$  в наших обозначениях имеет вид [5]:

$$B(i - j) = (-1)^{i-j} \sigma_u^2 e^{-16\pi\eta^2(i-j)^2}, \quad (17)$$

где  $\sigma_u^2 = 2N_0 \Delta f$ ,  $\Delta f = 2/T_m$  - полоса пропускания контура, согласованная с длительностью обрабатываемого сигнала.

Теперь для первого слагаемого в (16), соответствующего некоррелированному шуму, получим:

$$D_{Su1} = \frac{2\eta^2 \pi^2 a^4 e^{-2\pi a}}{q^2} \sum_{i=1}^N \frac{(2t_{ni} - 1)^2}{t_{pi}} I_1^2[2\pi a \sqrt{t_{pi}}], \quad (18)$$

где  $t_{pi} = t_{ni} - t_{ni}^2$ .

Второе слагаемое, учитывающее корреляцию, с учётом (17) имеет вид:

$$D_{Su2} = \frac{2\eta^2 \pi^2 a^4 e^{-2\pi a}}{q^2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left\{ (-1)^{i-j} e^{-16\pi\eta^2(i-j)^2} \times \frac{(2t_{in} - 1)(2t_{jn} - 1)}{\sqrt{t_{pi} t_{pj}}} I_1(2\pi a \sqrt{t_{pi}}) I_1(2\pi a \sqrt{t_{pj}}) \right\}. \quad (19)$$

В (18) и (19)  $N = M$  при  $\varepsilon \geq \chi$  или  $N = M + 1$  при  $\varepsilon < \chi$ .

Результирующая дисперсия шумовой составляющей погрешности измерения равна сумме двух указанных величин:

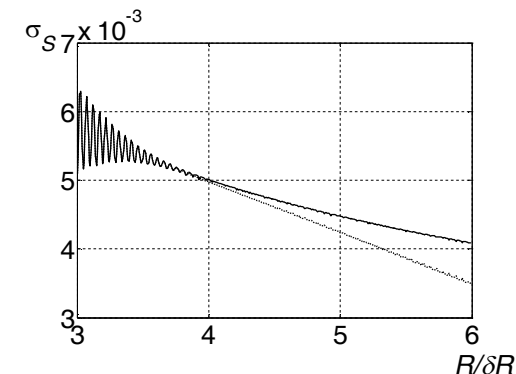
$$D_{Su} = D_{Su1} + D_{Su2}. \quad (20)$$

Результаты расчёта по формуле (18) в виде зависимости нормированного среднеквадратического отклонения (СКО), обусловленного шумами, от нормированного расстояния приведены на рисунке 4 пунктирной линией и по формуле (20) - сплошной линией для значений параметра  $a = 2$  и  $a = 6$  при отношении сигнал-шум  $q = 40 \text{ дБ}$ .

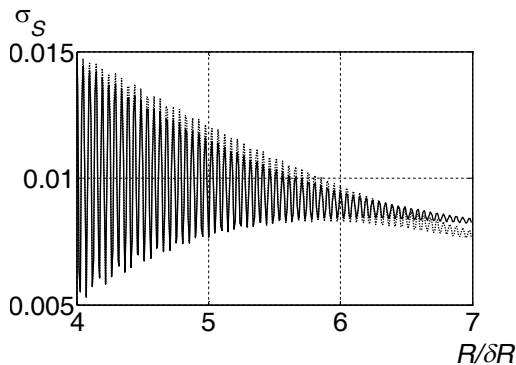
СКО  $\sigma_{Su}$  на малых расстояниях имеет сложный колебательный характер и его общий уровень снижается при увеличении расстояния. Колебательный характер зависимости объясняется наличием точек на графике ВФ, в которых её производная равна нулю. Это две точки на границе интервала анализа и одна точка в центре интервала. Кроме того, имеются точки, расположенные симметрично относительно центра интервала обработки, в которых производные имеют противоположный знак и компенсируются. Соответствующие слагаемые выражения (20) в этих точках обращаются в ноль. Между этими точками производная достигает максимума и соответственно дисперсия тоже максимальна.

На малой дальности мало слагаемых и поэтому их вклад в общую сумму велик. В результате велик размах колебаний погрешности. По мере увеличения дальности вклад этих слагаемых в общую сумму уменьшается и, следовательно, уменьшается амплитуда колебаний СКО шумовой погрешности. В итоге на достаточно большой дальности график зависимости СКО от расстояния вырождается в непрерывную линию, плавно понижающуюся при увеличении расстояния. Конкретный ход графика и величина максимальных значений СКО зависят от вида ВФ. Чем больше параметр формы  $a$ , тем резче изменяется форма ВФ и поэтому при большем расстоянии наступает существенное снижение колебаний СКО и больше общий уровень ошибки.

Снижение общего уровня СКО при увеличении расстояния объясняется эффектом накопления результата, так как происходит увеличение количества нулей сигнала и, следовательно, количества суммируемых зашумленных данных. Наличие корреляции, вызванное фильтрацией СРЧ, также снижает погрешность измерения при увеличении расстояния.



а  $a = 2$



б  $a = 6$

Рисунок 4 – Зависимость нормированной шумовой составляющей погрешности от нормированного расстояния

Представляют интерес суммарная погрешность измерения расстояния

$$D_{Su} = D_S^2 + D_{Su1} + D_{Su2} \quad (21)$$

и её поведение при изменении расстояния и уровня шума для оптимальных значений параметра формы.

На рисунке 5 приведена зависимость логарифма суммарной нормированной, усреднённой в соответствии с выражением (14) погрешности измерения расстояния от нормированного расстояния для нескольких значений отношения сигнал-шум.

Видно, что при изменении расстояния соотношение между методической и шумовой составляющими погрешности изменяется. Для каждого уровня шума существует расстояние, где шумовая составляющая становится больше методической и полностью определяет уровень погрешности. При уменьшении уровня шума

такое расстояние увеличивается.

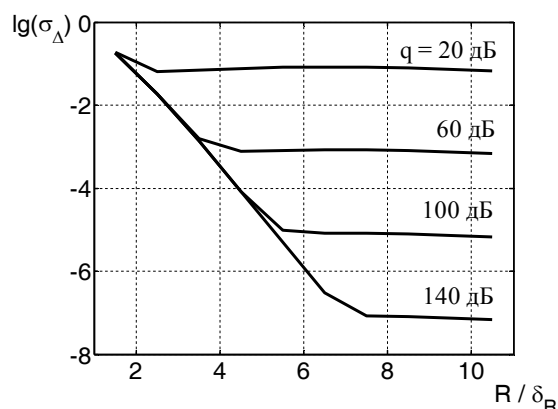


Рисунок 5 – Зависимость логарифма нормированного СКО погрешности от нормированного расстояния

**Выводы.** Полученные результаты позволяют производить анализ методической и шумовой составляющих погрешности измерения расстояния частотным дальномером и свидетельствуют о том, что при использовании весового метода усреднения частоты СРЧ возможно получение весьма малых уровней погрешности измерения малых расстояний. Полученные формулы позволяют производить количественную оценку достижимых погрешностей измерения при наличии шума. В частности, из рисунка 5 следует, что при отношении сигнал-шум 60 дБ и девиации частоты 500 МГц возможно измерение малых расстояний с погрешностью не более 0,15 мм.

#### Библиографический список

1. *Brumbi D.* Fundamentals of Radar Technology for Level Gauging. 3-rd Revision. - Krohne Messtechnik, Duisburg. 1999.
2. *Komarov I.V., Smolskiy S.M.* Fundamentals of Short-Range FM Radar.- Artech House Publishers; Norwood, MA. 2003. - 289 p.
3. *Езерский В.В.* Методическая погрешность датчика расстояния на базе частотно-модулированного дальномера с весовым сглаживанием погрешности дискретности // Измерительная техника. 2003. № 9.- С. 22 .
4. *Езерский В.В., Баранов И.В.* Оптимизация весового метода сглаживания погрешности дискретности на основе частотного дальномера // Измерительная техника. 2004. № 12.- С. 19-23.
5. *Хэррис Дж.* Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье// ТИИР. - 1978. - Т. 66, №1.- С. 60-96.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.- М. : Наука, 1970. - 720 с
7. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. В трёх книгах. Книга первая. Издательство - М.: Сов. радио. - 1974.- 552 с.