

УДК 519.632; 518.517

В.С. Гуров, А.А. Трубицын, Е.В. Мамонтов, А.А. Дягилев РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе развит математический аппарат решения плоской внешней задачи Дирихле и получены формулы для вычисления граничных интегралов, в том числе с сингулярными ядрами. На базе данного аппарата создано программное обеспечение для моделирования электронно-оптических систем, проведены исследование погрешностей вычислений и тестирование на модельных схемах.

Введение. Практика современного эксперимента требует предельно точных оценок выходных параметров проектируемых устройств. Положительное решение указанной проблемы во многом определяется состоянием и возможностями соответствующих математических методов. В электронной оптике, являющейся базой аналитического приборостроения, наибольшего внимания требует проблема численного анализа электрических полей в системах со сложной конфигурацией электродов. Одним из наиболее продвинутых численных методов решения задач теории потенциала является метод граничных элементов [1]. При этом решение внешней задачи Дирихле, в отличие от внутренней, позволяет прогнозировать параметры схем, максимально приближенные к реальным устройствам. Широкий класс электронно-оптических систем на этапе проектирования с высокой степенью достоверности может быть описан в рамках двумерных моделей.

Формализация метода граничных элементов. Решение задачи Дирихле состоит в отыскании потенциала $u(\xi)$ в области $\Omega (\xi \in \Omega)$ при заданном распределении потенциала на границе области. В случае *внешней* задачи Дирихле граница Γ исследуемой области представляется совокупностью замкнутых контуров (электродов реальной толщины и конфигурации), на каждом из которых фиксируется потенциал (рисунок 1).

Получаемые интегральные соотношения базируются на второй формуле Грина:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) d\Omega = \iint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma,$$

где n – модуль внешней нормали, а в качестве весовой функции w выбирается фундаментальное решение уравнения Лапласа w^* :

$$\nabla^2 w^* = -\Delta_{\xi} 2\alpha\pi.$$

Здесь Δ_{ξ} – дельта функция Дирака, отличная от нуля только в точке ξ области Ω , α – коэффициент, зависящий от размерности задачи ($\alpha = 1$ для двумерных, $\alpha = 2$ для трехмерных).

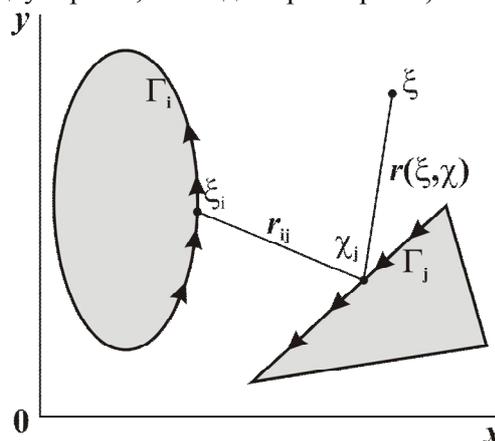


Рисунок 1 – Представление границы области совокупностью замкнутых контуров и разбиение ее на граничные элементы

Данные предпосылки являются основанием для записи интегрального уравнения, формализующего *внутреннюю* плоскую задачу Дирихле в случае отсутствия объемных зарядов:

$$\begin{aligned} \gamma(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(\chi)Q^*(\xi, \chi)d\Gamma(\chi) = \\ = \int_{\Gamma} q(\chi)U^*(\xi, \chi)d\Gamma(\chi), \end{aligned} \quad (1)$$

где $U^*(\xi, \chi) = w^*$, $Q^*(\xi, \chi) = \partial U^* / \partial n$, $q(\chi) = du(\chi) / dn$, $\chi \in \Gamma$, $\xi \in \Omega \cup \Gamma$, функция $\gamma(\xi) = 2\pi$ для $\xi \in \Omega$ и определяется в общем случае конфигурацией границы в точке ξ для $\xi \in \Gamma$.

Физически уравнение (1) интерпретируется как комбинация двойного (первый интеграл) и простого (второй интеграл) заряженных слоев.

Преимущество такой формулировки задачи по сравнению с формулировкой на базе потен-

циала простого слоя заключается в значительном ослаблении требований к гладкости границы [1], что на практике упрощает борьбу с особенностями плотности заряда на изломах граничного контура.

Фундаментальное решение в двумерном случае может быть представлено в виде натурального логарифма от расстояния между точками ξ и χ (рисунок 1):

$$U^*(\xi, \chi) = -\ln r(\xi, \chi) = -\ln \sqrt{[x(\chi) - x(\xi)]^2 + [y(\chi) - y(\xi)]^2} = -\frac{1}{2} \ln \left([x(\chi) - x(\xi)]^2 + [y(\chi) - y(\xi)]^2 \right).$$

Производная фундаментального решения $Q^*(\xi, \chi) = \frac{dU^*(\xi, \chi)}{dn}$ по внешней нормали $\vec{n}(n_x, n_y)$ к границе Γ определяется последовательностью следующих формул:

$$\frac{dU^*(\xi, \chi)}{dn} = \text{grad} U^* \cdot \vec{n},$$

$$\text{grad} U^* = \frac{\partial U^*}{\partial x(\chi)} \vec{i} + \frac{\partial U^*}{\partial y(\chi)} \vec{j},$$

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j},$$

где $\frac{\partial U^*}{\partial x} = -\frac{x(\chi) - x(\xi)}{r^2(\xi, \chi)}, \frac{\partial U^*}{\partial y} = -\frac{y(\chi) - y(\xi)}{r^2(\xi, \chi)}$.

При переходе к внешней задаче Дирихле вводится фиктивная цилиндрическая граница радиуса $R_0 \rightarrow \infty$, охватывающая границу Γ (совокупность замкнутых контуров). Элементарный анализ показывает, что граничное интегральное уравнение для внутренних точек бесконечной регулярной области совпадает по форме с уравнением для конечных областей, т.е. имеет вид (1). При этом предполагается, что каждый контур является ориентированным против часовой стрелки по отношению к его некоторой произвольной внутренней точке.

Для численного решения задачи Дирихле уравнению (1) придается дискретная форма, для чего граница Γ разбивается на N граничных эле-

ментов Γ_j (рисунок 1). С учетом постоянства потенциала на каждом контуре (электроде) и с предположением постоянства нормальной производной потенциала на каждом граничном элементе уравнение записывается в виде:

$$\gamma u(\xi) + \sum_{j=1}^N u_j H_j(\xi) = \sum_{j=1}^N q_j F_j(\xi). \quad (3)$$

Для случая аппроксимации границы Γ отрезками прямых линий (векторами $\vec{\Gamma}_j$) формулы вычисления функций $F_j(\xi)$ и $H_j(\xi)$ имеют вид:

$$F_j(\xi) = \Delta \chi_j \int_0^1 U^*(\xi, \Delta \chi_j \tau + \chi_j) d\tau = \Delta \chi_j \int_0^1 U_j^*(\xi, \tau) d\tau, \quad (4)$$

$$H_j(\xi) = \Delta \chi_j \int_0^1 Q^*(\xi, \Delta \chi_j \tau + \chi_j) d\tau = \Delta \chi_j \int_0^1 Q_j^*(\xi, \tau) d\tau, \quad (5)$$

где для удобства вычислений введена нормированная координата $\tau \in [0, 1]$. Здесь $\Delta \chi_j$ - длина прямолинейного граничного элемента Γ_j , χ_j - положение начала граничного j -го элемента на контуре электрода.

Ниже будет показано, что интегралы (4) и (5) для двумерного случая имеют аналитическое выражение в отличие, например, от аксиально-симметричных задач, где для их оценки используются квадратуры Гаусса [2].

Вычисление регулярного интеграла $F_j(\xi)$.

Декартовы координаты точек j -го граничного элемента через нормированную координату τ интегрирования могут быть выражены как

$$x_j(\tau) = a_j \tau + b_j, \quad y_j(\tau) = c_j \tau + d_j,$$

где $a_j = \cos(\phi_j) \Delta \chi_j$, $c_j = \sin(\phi_j) \Delta \chi_j$, b_j и d_j есть x - и y -координаты начала элемента Γ_j , ϕ_j - угол его наклона к оси x . В таком случае

$$U_j^*(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \ln \left([x_j(\tau) - x(\xi)]^2 + [y_j(\tau) - y(\xi)]^2 \right) = -\frac{1}{2} \ln [T_j \tau^2 - 2D_j(\xi)\tau + P_j(\xi)], \quad (6)$$

где $D_j(\xi) = a_j [x(\xi) - b_j] + c_j [y(\xi) - d_j]$,

$$P_j(\xi) = [x(\xi) - b_j]^2 + [y(\xi) - d_j]^2, \quad T_j = a_j^2 + c_j^2.$$

Интегрирование функции $U_j^*(\xi, \tau)$ по τ [см. (4)] дает выражение для $F_j(\xi)$:

$$F_j(\xi) = \Delta\chi_j \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{D_j(\xi)}{T_j} - 1 \right) \ln(T_j - 2D_j(\xi) + P_j(\xi)) - \right. \\ & \left. - \frac{D_j(\xi)}{T_j} \ln P_j(\xi) \right] \\ & - \frac{Z_j(\xi)}{T_j} \left[\operatorname{arctg} \frac{D_j(\xi)}{Z_j(\xi)} + \operatorname{arctg} \frac{T_j - D_j(\xi)}{Z_j(\xi)} \right] + 1 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где $Z_j(\xi) = \sqrt{T_j P_j(\xi) - D_j^2(\xi)}$.

Вычисление регулярного интеграла $H_j(\xi)$.

С учетом выражений (2) и (6) нормальная производная фундаментального решения может быть записана в виде

$$Q_j^*(\xi, \tau) = \frac{dU_j^*}{dn} = - \frac{(a_j n_x + c_j n_y) \tau + [b_j - x(\xi)] n_x + [d_j - y(\xi)] n_y}{T_j \tau^2 - 2D_j(\xi) \tau + P_j(\xi)}.$$

Поскольку сумма $(a_j n_x + c_j n_y)$ представляет собой скалярное произведение в координатной форме двух взаимно перпендикулярных векторов – граничного элемента $\vec{\Gamma}_j(a_j, c_j)$ и его нормали $\vec{n}_j(n_x, n_y)$ и равняется нулю, то интегрирование нормальной производной Q_j^* [см. (5)] дает следующее выражение для вычисления интеграла $H_j(\xi)$:

$$H_j(\xi) = \Delta\chi_j B_j(\xi) \int_0^1 \frac{d\tau}{T_j \tau^2 - 2D_j(\xi) \tau + P_j(\xi)} = \Delta\chi_j \frac{B_j(\xi)}{Z_j(\xi)} \left[\operatorname{arctg} \frac{D_j(\xi)}{Z_j(\xi)} + \operatorname{arctg} \frac{T_j - D_j(\xi)}{Z_j(\xi)} \right], \quad (8)$$

где $B_j(\xi) = [x(\xi) - b_j] n_x + [y(\xi) - d_j] n_y$.

Расчет поля. Вычисление электростатического поля проводится в два этапа. Сначала с помощью уравнения (3) рассчитывается неизвестный вектор q_j по известному граничному распределению потенциала ($\xi \in \Gamma$), т.е. решается "обратная" задача. Затем используются найденные значения q_j и заданные u_j для определения из уравнения (3) функции $u(\xi)$, $\xi \in \Omega$, т.е. решается "прямая" задача.

Для решения **обратной задачи** используется метод коллокаций, согласно которому точки ξ_i определяются в середине ($\xi_i = 1/2$) каждого *прямолинейного* [тогда $\gamma(\xi) = \pi$] элемента Γ_i и для всей N -совокупности точек ξ_i записывается система N уравнений

$$\pi u(\xi_i) + \sum_{j=1}^N u_j H_{ij} = \sum_{j=1}^N q_j F_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

где $H_{ij} = H_j(\xi_i)$, $F_{ij} = F_j(\xi_i)$.

Однако здесь возникает присущая интегральным методам теории потенциала проблема сингулярности подынтегральных функций. Интегралы (4), (5) с сингулярными ядрами имеют место при $i = j$, т.е. в том случае, когда интегрирование проводится по элементу Γ_j (назовем его сингулярным), содержащему текущий узел коллокации ξ_i .

Вычисление H_{ii} . Поскольку для сингулярных плоских граничных элементов в трехмерных задачах, или для сингулярных прямолинейных элементов в двумерных задачах $\operatorname{grad} U^*(\xi, \chi) \perp \vec{n}$, то $Q^*(\xi, \chi) = \partial U^* / \partial n = \operatorname{grad} U^*(\xi, \chi) \cdot \vec{n} = 0$. Откуда для внутренней задачи Дирихле $H_{ii} = 0$ [3]. Вследствие скачка потенциала двойного слоя при пересечении границы области изнутри наружу [4] будем иметь следующее значение интеграла H_{ii} для внешней задачи:

$$H_{ii} = 2\pi. \quad (10)$$

Вычисление F_{ii} . С учетом значения $\xi_i = 1/2$ и выражений (6) для координат точек i -го граничного элемента сингулярное фундаментальное решение может быть преобразовано к следующему виду

$$U_i^*(\xi_i, \tau) = U_{ii}^*(\tau) = -\ln \left(\tau - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{T_i} \right).$$

Полученное выражение позволяет получить окончательную формулу для вычисления интеграла (4) по сингулярному граничному элементу

$$F_{ii} = \Delta\chi_i \int_0^1 U_{ii}^*(\tau) d\tau = \Delta\chi_i \left(1 + \ln \frac{2}{\sqrt{T_i}} \right). \quad (11)$$

Таким образом, решение q_j обратной задачи в соответствии с уравнением (9) может быть получено из системы линейных уравнений

$$b_i = F_{ij} q_j,$$

где $b_i = \sum_{j=1}^N H_{ij}^* u_j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$; $H_{ij}^* = H_{ij}$, и вычисляется по формуле (8) для $i \neq j$; $H_{ii}^* = \pi + H_{ii} = 3\pi$ [см. (9), (10)]; F_{ij} вычисляется по формуле (7) для $i \neq j$ и по формуле (11) для $i = j$.

Для решения **прямой** задачи используется очевидная формула [см. уравнение (3)]

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^N u_j H_j(\xi) - \sum_{j=1}^N q_j F_j(\xi) \right], \quad \xi \in \Omega.$$

Тестирование методики. На базе представленного алгоритма решения задачи Дирихле создано соответствующее программное обеспечение моделирования двумерных электронно-оптических систем. Разработанная программа позволила протестировать изложенный подход к

вычислению функции распределения потенциала на ряде примеров, имеющих аналитическое решение.

На рисунке 2 представлена зависимость погрешности вычисления потенциала в плоском конденсаторе с отношением расстояния между пластинами к их длине как 1:20. При этом величина погрешности сохранялась для точек, непосредственно примыкающих к границе области – пластинам конденсатора

На рисунке 3 представлена радиальная зависимость погрешности вычислений поля в цилиндрическом конденсаторе с радиусом внутреннего цилиндра 1 отн. ед. и потенциалом 0 В, и радиусом внешнего цилиндра 2 отн. ед. и потенциалом 1 В. Образующие окружности аппроксимировались 360 прямолинейными отрезками. Суммарное количество граничных элементов $N = 2888$. Аналитическое выражение для потенциала в пространстве между цилиндрами – $\ln(r)/\ln(2)$, где r – расстояние между осью конденсатора и расчетной точкой. Зависимость на рисунке 3 демонстрирует «точностные» характеристики метода при анализе систем с криволинейными границами и показывает, что ошибка вычислений в основном определяется погрешностью представления границы и достаточно быстро затухает при удалении от

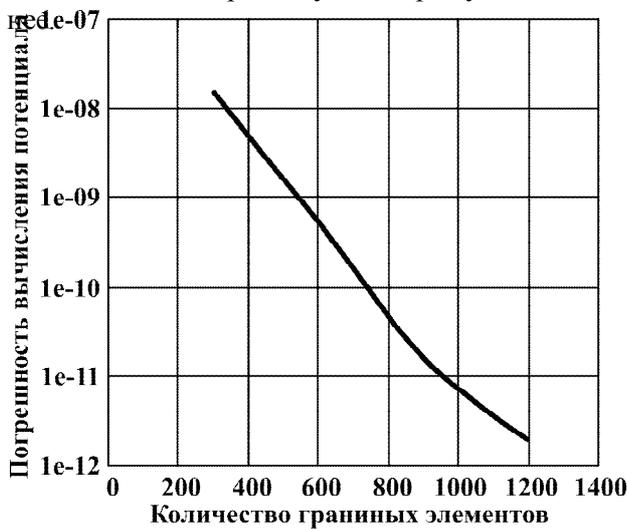


Рисунок 2 – Зависимость погрешности вычисления потенциала в центральной точке плоского конденсатора от количества граничных элементов

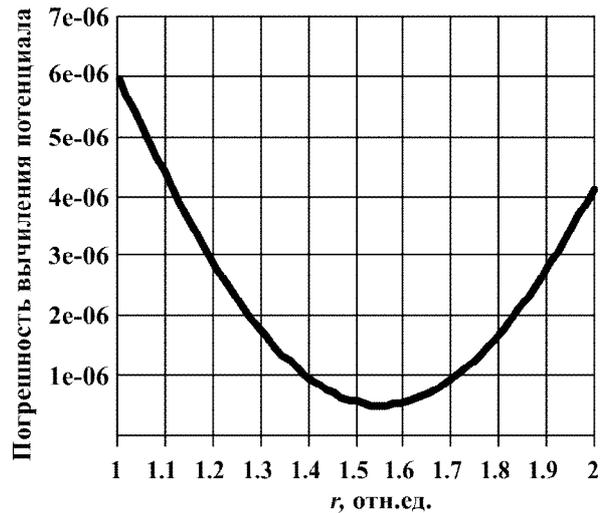


Рисунок 3 – Радиальная зависимость погрешности вычисления потенциала в цилиндрическом конденсаторе

Заключение. Получены формулы вычисления граничных интегралов в методе граничных элементов решения плоской внешней задачи Дирихле. Тестирование предложенной методики на модельных задачах позволило сделать следующие заключения:

- гарантированная точность вычисления потенциала составляет 10^{-4} – 10^{-3} %;
- для ЭОС с прямолинейными сечениями электродов погрешность вычислений в пределе лимитирована лишь ошибками округления;
- для ЭОС с криволинейными электродами погрешность расчетов определяется точностью аппроксимации границы прямолинейными отрезками и не превышает в разработанной авторами программной реализации $\sim 10^{-3}$ %.

Библиографический список

1. Бреббия К., Телес Ж., Вроубель Л. Методы граничных элементов.- М.: Мир, 1987. 524 с.
2. Трубицын А.А. Вычисление сингулярных интегралов задачи Дирихле методом граничных элементов. //ЖВВМФ.1995. Т. 35. № 4. С.532-541.
3. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. Учеб. для вузов/Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. 832 с.