УДК 519.642

А.А. Фефелов

ОЦЕНКА КВАЗИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТРЕХМЕРНЫХ НЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Описывается методика численной оценки интегралов, входящих во вторую формулу Грина, при решении задачи об отыскании значений температуры в точках вблизи определяющих границ трехмерной не осесимметричной области.

Введение. Ряд задач математической физики, таких как отыскание распределения потенциала в области в отсутствие пространственного заряда или расчет поля температур в среде в отсутствие конвекции, описывается дифференциальным уравнением Лапласа

$$\Delta U(M)=0\,, \tag{1}$$

где

$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в трехмерном случае; $U(M)$ - искомая функция некоторой физической величины (например, температуры или электростатического потенциала); M - точка в трехмерной области. В случае сложной геометрии поверхности S области V при решении (1) эффективным является применение метода граничных элементов (МГЭ), позволяющего рассчитать значение функции $U(M)$ в любой точке области V при соответствующим образом заданных на поверхности S граничных условиях. При этом необходимо сделать переход от дифференциальной формы записи задачи, выражаемой уравнением (1), к ее интегральному аналогу, выражаемому некоторым интегральным уравнением (или системой таких уравнений). Один из способов перехода к интегральной форме записи (1) связан с использованием второй формулы Грина [1], поскольку для (1) известно фундаментальное решение

$$\omega(M_0,M)=\frac{1}{r(M_0,M)}:$$

$$\Delta\omega(M_0,M)\equiv 0,\ M_0\in V,\ M\in V \text{ и } M_0\neq M\,.$$

В трехмерном случае интегральный аналог выражения (1) для расчета значения $U(M)$ в области V имеет вид

$$\begin{aligned}\theta(M)U(M)&=4\pi U(M)=\\&=\int_S q(p)\omega(p,M)dS-\int_S U(p)\omega^*(p,M)dS,\end{aligned} \tag{2}$$

где $p\in S,\ M\in\overline{V},\ \overline{V}=V\cup S,$

$$q(p)=\left(\nabla U(p),\mathbf{n}(p)\right),$$

$$\omega^*(p,M)=\left(\nabla\omega(p,M),\mathbf{n}(p)\right),$$

$\mathbf{n}(p)$ - вектор внешней единичной нормали к поверхности S в точке p.

После введения на S сетки из N граничных элементов (ГЭ) можно записать дискретный аналог (2) в виде

$$\begin{aligned}4\pi U(M)&=\sum_{n=1}^{N}q_{\text{n}}\int_{S_{\text{n}}}\omega(p,M_0)dS_{\text{n}}-\\&-\sum_{n=1}^{N}U_{\text{n}}\int_{S_{\text{n}}}\omega^*(p,M_0)dS_{\text{n}}=\\&=\left|I_{\text{n}}=\int_{S_{\text{n}}}\omega(p,M_0)dS_{\text{n}},\ I_{\text{n}}^*=\int_{S_{\text{n}}}\omega^*(p,M_0)dS_{\text{n}}\right|=\\&=\sum_{n=1}^{N}q_{\text{n}}I_{\text{n}}-\sum_{n=1}^{N}U_{\text{n}}I_{\text{n}}^*,\end{aligned} \tag{3}$$

где $\int_{S_{\text{n}}}(\cdot)dS_{\text{n}}$ - интеграл по поверхности ГЭ с номером n, $q_{\text{n}}=const$, $U_{\text{n}}=const$ - значения функций $q(p)$ и $U(p)$ в пределах данного ГЭ.

При расчете по формуле (3) в случае если точка M находится вблизи поверхности S, возникают затруднения с численной оценкой интегралов I_{n} и I_{n}^*, поскольку поведение подынтегральных функций в выражениях для I_{n} и I_{n}^* при таких условиях будет иметь квазисингулярный характер. В работе [2] предложены способы оценки данных интегралов для случая аксиально симметричных задач теории потенциала и в частности описана оригинальная методика оценки квазисингулярных интегралов I_n^*. Применение данной методики для расчета трехмерных не осесимметричных полей, удовлетворяющих (1), требует дополнительной проработки, поскольку подынтегральные функции в случае аксиальной симметрии и в ее отсутствие будут иметь существенно различный вид.

В данной статье рассматривается один из возможных способов повышения точности оценки интегралов I_n и исследуется возможность применения метода оценки интегралов I_n^*, описанного в [2], применительно к трехмерным полям, не обладающим аксиальной симметрией.

1. Постановка задачи. Рассмотрим интеграл I_n в декартовой системе координат O'X'Y'Z', связанной с граничным элементом (ГЭ) с номером *n* (см. рисунок 1).

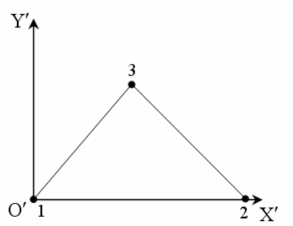

Рисунок 1 – Вид треугольного ГЭ в системе координат O'X'Y'Z'

1, 2, 3 – вершины треугольника с координатами $(x'_{n1}, y'_{n1}, 0)$, $(x'_{n2}, y'_{n2}, 0)$ и $(x'_{n3}, y'_{n3}, 0)$ соответственно.

Тогда интеграл I_n может быть записан в виде

$$I_n = \int_{y'_n}\int_{x'_n} \frac{dx'_n dy'_n}{\sqrt{\left(x'-x'_n\right)^2 + \left(y'-y'_n\right)^2 + z'^2}}. \qquad (4)$$

Первое интегрирование по x'_n дает

$$I_n = y'_{n3} \times$$

$$\times \int_0^1 \ln \left| \frac{\left(x'_{n2}-x'\right) - \left(x'_{n2}-x'_{n3}\right)s + \sqrt{\left(\left(x'_{n2}-x'\right)-\left(x'_{n2}-x'_{n3}\right)s\right)^2 + \left(y'_{n3}s-y'\right)^2 + z'^2}}{x'_{n3}s - x' + \sqrt{\left(x'_{n3}s-x'\right)^2 + \left(y'_{n3}s-y'\right)^2 + z'^2}} \right| ds, \qquad (5)$$

где $s = y'/y'_{n3}$.

На рисунке 2 показано поведение подынтегральной функции $f(s)$:

$$f(s) = \ln \left| \frac{\left(x'_{n2}-x'\right) - \left(x'_{n2}-x'_{n3}\right)s + \sqrt{\left(\left(x'_{n2}-x'\right)-\left(x'_{n2}-x'_{n3}\right)s\right)^2 + \left(y'_{n3}s-y'\right)^2 + z'^2}}{x'_{n3}s - x' + \sqrt{\left(x'_{n3}s-x\right)^2 + \left(y'_{n3}s-y'\right)^2 + z'^2}} \right|$$

на рассматриваемом интервале интегрирования по *s* от 0 до 1.

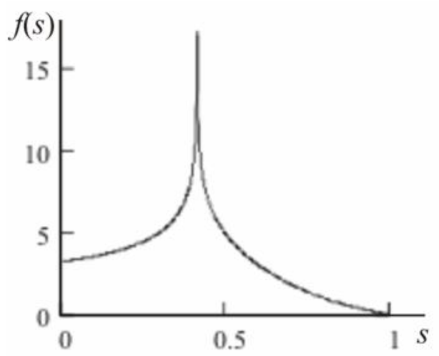

Рисунок 2 – Характер изменения подынтегральной функции $f(s)$ на интервале интегрирования

Функция построена при значениях постоянных $x'_{n1} = 0$, $y'_{n1} = 0$, $x'_{n2} = 0{,}088388$, $y'_{n2} = 0$, $x'_{n3} = x'_{n2}/2$, $y'_{n3} = x'_{n3}$ и $x' = x_{n3}$, $y' = y'_{n3}/3$, $z' = 0{,}0001 x'_{n2}$.

Введем обозначение $\overline{I}_n = \int_0^1 f(s)ds$.

Применение для оценки данного интеграла квадратурной формулы Гаусса с 10-тью узлами дает значение $\overline{I}_n = 3{,}232926$. Вычисление интеграла в среде MathCAD 12 дает $I'_n = 3{,}403081$. Относительная погрешность вычислений

$$\varepsilon = \frac{\left|I'_n - \overline{I}_n\right|}{I'_n} = 0{,}050000.$$

Увеличение количества узлов квадратурной формулы до 20-ти приводит к следующим результатам: $\overline{I}_n = 3{,}340142$, $\varepsilon = 0{,}018495$. Квадратурная формула с числом узлов, равным 40, дает погрешность вычисления интеграла $\varepsilon = 0{,}007072$. Величина $\varepsilon = f(N)$ с ростом N убывает медленно.

Применение численной методики расчета величины I_n, предложенной Хаммером [3], для интегрирования функции

$$F(x'_n, y'_n) = 1\Big/\sqrt{\left(x'-x'_n\right)^2 + \left(y'-y'_n\right)^2 + z'^2}$$

в выражении (4) по плоской треугольной области приводит к таким же по порядку величины значениям погрешности ε, что и квадратуры Гаусса, примененные для подынтегральной функции в (5).

Применение модифицированных квадратурных формул Гаусса-Кронрода [4] для расчета интегралов типа (5) с применением алгоритма, данного в [5], дало возможность получить погрешность вычислений $\varepsilon \approx 0{,}002$. При этом использование квадратуры с 61 узлом потребовало разбиения исходного отрезка интегрирования на две части, что с точки зрения затрат машинного времени аналогично использованию квадратуры Гаусса со 122 узлами.

Применение эффективного метода мультипликативного исключения особенности [6] затруднено ввиду сложного вида подынтегральной функции $f(s)$.

Необходимо отметить, что оценка интегралов $I_{\text{п}}$ с наперед заданной точностью в принципе возможна. Для этого, например, можно использовать формулу трапеций с разбиением исходного отрезка интегрирования на большое число интервалов. Можно также использовать и квадратуры Гаусса (или Кронрода) с большим числом узлов. Однако при численной реализации МГЭ количество интегралов $I_{\text{п}}$, содержащих квазисингулярности, может быть достаточно большим. Поэтому использование громоздких квадратурных формул (с числом узлов 60 или более) крайне нежелательно.

В связи с вышесказанным возникает необходимость в разработке методики оценки интегралов типа (5), позволяющей повысить точность вычислений при использовании квадратурных формул Гаусса с относительно небольшим числом узлов N (не более 6 – 10).

2. Метод численной оценки интегралов $I_{\text{п}}$. Рассматривая (5) вводим обозначения:

$$I_{\text{п}1} = \int_0^1 \ln \left| \begin{matrix} (x'_{\text{п}2} - x') - (x'_{\text{п}2} - x'_{\text{п}3}) s + \\ \sqrt{\begin{matrix} \left((x'_{\text{п}2} - x') - (x'_{\text{п}2} - x'_{\text{п}3}) s\right)^2 \\ + (y'_{\text{п}3} s - y')^2 + z'^2 \end{matrix}} \end{matrix} \right| ds,$$

$$I_{\text{п}2} = \int_0^1 \ln \left| x'_{\text{п}3} s - x + \sqrt{\begin{matrix} (x'_{\text{п}3} s - x)^2 + \\ (y'_{\text{п}3} s - y')^2 + z'^2 \end{matrix}} \right| ds,$$

$$f_1(s) = (x'_{\text{п}2} - x') - (x'_{\text{п}2} - x'_{\text{п}3}) s + \\ + \sqrt{\begin{matrix} \left((x'_{\text{п}2} - x') - (x'_{\text{п}2} - x'_{\text{п}3}) s\right)^2 \\ + (y'_{\text{п}3} s - y')^2 + z'^2 \end{matrix}},$$

$$f_2(s) = x'_{\text{п}3} s - x + \sqrt{\begin{matrix} (x'_{\text{п}3} s - x)^2 + \\ (y'_{\text{п}3} s - y')^2 + z'^2 \end{matrix}}.$$

Рисунок 3 иллюстрирует характер поведения функций $f_1(s)$, $f_2(s)$ на интервале интегрирования.

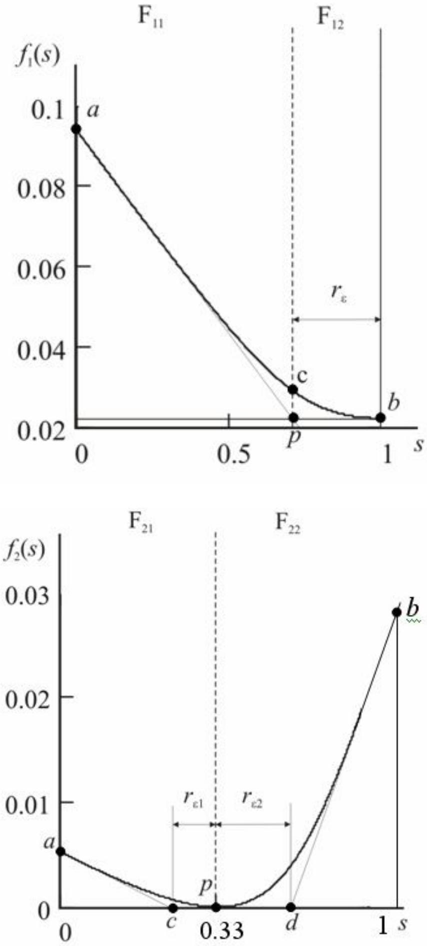

Рисунок 3 – Характер изменения подынтегральных функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$ на интервале интегрирования

Будем искать значения s_1 и s_2, соответствующие минимумам функций $f_1(s)$, $f_2(s)$.

Найдя производные $(f_1)'_s$, $(f_2)'_s$ и приравняв их к нулю, после соответствующих преобразований получим

$$s_1 = \frac{y'}{y'_{\text{п}3}} + \\ + \frac{\pm\sqrt{D_1} - 2(x'_{\text{п}2} - x'_{\text{п}3})^2 \left(\dfrac{y'}{y'_{\text{п}3}} - \dfrac{x'_{\text{п}2} - x'}{x'_{\text{п}2} - x'_{\text{п}3}} \right)}{2\left[(x'_{\text{п}2} - x'_{\text{п}3})^2 + {y'_{\text{п}3}}^2 \right]},$$

$$s_2 = \frac{y'}{y'_{n3}} + \frac{\pm\sqrt{D_2} - 2x'^{\,2}_{n3}\left(\dfrac{y'}{y'_{n3}} - \dfrac{x'}{x'_{n3}}\right)}{2\left[x'^{\,2}_{n3} + y'^{\,2}_{n3}\right]},$$

$$D_1 = 4\left(x'_{n2} - x'_{n3}\right)^4\left(\frac{y'}{y'_{n3}} - \frac{x'_{n2} - x'}{x'_{n2} - x'_{n3}}\right)^2 +$$

$$+4\left[\left(x'_{n2} - x'_{n3}\right)^2 + y'^{\,2}_{n3}\right]\frac{z'^2\left(x'_{n2} - x'_{n3}\right)^2}{y'^{\,2}_{n3}},$$

$$D_2 = 4x'^{\,4}_{n3}\left(\frac{y'}{y'_{n3}} - \frac{x'}{x'_{n3}}\right)^2 +$$

$$+4\left[x'^{\,2}_{n3} + y'^{\,2}_{n3}\right]\left(\frac{z'x'_{n3}}{y'_{n3}}\right)^2.$$

Интервал интегрирования разделим на две части, руководствуясь при этом следующим правилом:

1) если минимум функции находится в пределах интервала [0,1], то границу разделения проводим через этот минимум (см. график функции $f_2(s)$ на рисунке 3);

2) если минимум функции находится за пределами интервала интегрирования (см. график функции $f_1(s)$ на рисунке 3), то:

- строим касательную к функции в точке a, соответствующей $s = 0$ (при $s_1 < 0$) или $s = 1$ (при $s_1 > 1$);
- находим точку p пересечения касательной с прямой, параллельной оси s и проходящей через точку b;
- проводим границу разделения через точку p.

В областях F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22} интерполируем функции $f_1(s)$, $f_2(s)$ многочленами 2-й степени $p_{11}(s)$, $p_{12}(s)$, $p_{21}(s)$, $p_{22}(s)$. При этом руководствуемся следующим правилом. Для функций типа $f_1(s)$ в области F_{12} интерполяцию проводим по трем точкам в малой δ- окрестности радиусом h_δ вблизи точки b. Если $h_\delta \ge r_\varepsilon$, то полагаем $h_\delta = r_\varepsilon$, в противном случае полагаем $h_\delta = h_0 = 0{,}002$ (значение h_0 установлено опытным путем). Таким же образом осуществляем интерполяцию в области F_{11}, проводя ее в малой δ- окрестности радиусом h_δ вблизи точки c. Здесь полагаем $h_\delta = h_0$ независимо от значения r_ε. Для функций типа $f_2(s)$ в области F_{21} интерполяцию проводим по трем точкам в малой δ- окрестности радиусом h_δ вблизи точки p. При этом, если $h_\delta \ge r_{\varepsilon 1}$, то, как и ранее, полагаем $h_\delta = r_{\varepsilon 1}$, иначе $h_\delta = h_0$. Аналогично поступаем при интерполяции функции $f_2(s)$ в области F_{22}.

Проводимая таким образом интерполяция преследует основную цель – максимально точно описать характер поведения функции на интервале интегрирования вблизи точки квазисингулярности, положение которой определяется положением минимума функции.

Далее воспользуемся известной методикой аддитивного исключения особенности [6]. Интеграл (5) представим в виде:

$$I_n = y'_{n3}\left[I_n^{(1)} + I_n^{(2)} - \left(I_n^{(3)} + I_n^{(4)}\right)\right], \qquad (6)$$

где

$$I_n^{(1)} = \int_0^{\chi_1}\left[\ln\left(\left|f_1(s)\right|\right) - \ln\left(\left|p_{11}(s)\right|\right)\right]ds +$$

$$+\int_0^{\chi_1}\ln\left(\left|p_{11}(s)\right|\right)ds,$$

$$I_n^{(2)} = \int_{\chi_1}^{1}\left[\ln\left(\left|f_1(s)\right|\right) - \ln\left(\left|p_{12}(s)\right|\right)\right]ds +$$

$$+\int_{\chi_1}^{1}\ln\left(\left|p_{12}(s)\right|\right)ds,$$

$$I_n^{(3)} = \int_0^{\chi_2}\left[\ln\left(\left|f_2(s)\right|\right) - \ln\left(\left|p_{21}(s)\right|\right)\right]ds +$$

$$+\int_0^{\chi_2}\ln\left(\left|p_{21}(s)\right|\right)ds,$$

$$I_n^{(4)} = \int_{\chi_2}^{1}\left[\ln\left(\left|f_2(s)\right|\right) - \ln\left(\left|p_{22}(s)\right|\right)\right]ds +$$

$$+\int_{\chi_2}^{1}\ln\left(\left|p_{22}(s)\right|\right)ds.$$

Под χ надо понимать абсциссу точки p.

Подынтегральные функции

$$g_{11}(s) = \ln\left(\left|f_1(s)\right|\right) - \ln\left(\left|p_{11}(s)\right|\right),$$

$$g_{12}(s) = \ln\left(\left|f_1(s)\right|\right) - \ln\left(\left|p_{12}(s)\right|\right),$$

$$g_{21}(s) = \ln\left(\left|f_2(s)\right|\right) - \ln\left(\left|p_{21}(s)\right|\right),$$

$$g_{22}(s) = \ln\left(\left|f_2(s)\right|\right) - \ln\left(\left|p_{22}(s)\right|\right)$$

достаточно гладкие, поэтому содержащие их интегралы могут быть оценены численно с высокой точностью с помощью квадратурных формул Гаусса.

Так как интерполяционный многочлен 2-й степени всегда может быть приведен к виду

$$p(s) = c\left[\left(s \pm a\right)^2 \pm b^2\right],$$

интегралы $\int_s \ln(|p(s)|)ds$ берутся аналитически, а именно [7]:

1) если $p(s)=c\left[(s\pm a)^2+b^2\right]$, то

$$\int_s \ln(|p(s)|)ds=\int_s \ln\left(\left|c\left[(s\pm a)^2+b^2\right]\right|\right)ds=$$

$$=\left.\left(\begin{array}{l}\ln|c|s+(s\pm a)\ln\left[(s\pm a)^2+b^2\right]-\\ 2(s\pm a)+2b\cdot\mathrm{arctg}\left(\dfrac{s\pm a}{b}\right)\end{array}\right)\right|_s;$$

2) если $p(s)=c\left[(s\pm a)^2-b^2\right]$, то

$$\int_s \ln(|p(s)|)ds=\int_s \ln\left(\left|c\left[(s\pm a)^2-b^2\right]\right|\right)ds=$$

$$=\left.\left(\begin{array}{l}\ln|c|s+(s\pm a)\ln\left[(s\pm a)^2-b^2\right]-\\ 2(s\pm a)+2b\cdot\ln\left|\dfrac{(s\pm a)+b}{(s\pm a)-b}\right|\end{array}\right)\right|_s.$$

Вычисление по (6) значения интеграла $I_{\text{п}}$ и затем погрешности ε показало, что при использовании квадратурных формул Гаусса с 6-тью узлами для интегрирования функций последняя оказалась равной по модулю $2{,}720453\cdot10^{-6}$. Выигрыш в точности по отношению к рассмотренным выше способам вычисления интегралов $I_{\text{п}}$ объясняется тем, что предлагаемый метод позволяет определить положение особенности подынтегральной функции в (5). Кроме того, функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$ лучше подходят для интерполяции многочленами в окрестности особенности, чем исходная функция $f(s)$.

3. Численная оценка интегралов $I_{\text{п}}^*$. В системе координат O'X'Y'Z' выражение для интеграла $I_{\text{п}}^*$ будет иметь вид

$$I_{\text{п}}^*=\pm z'\int_{y'_{\text{п}}}\int_{x'_{\text{п}}}\frac{dx'_{\text{п}}dy_{\text{п}}}{\left[(x'_{\text{п}}-x')^2+(y'_{\text{п}}-y')^2+z'^2\right]^{3/2}}.$$

После интегрирования по $x'_{\text{п}}$ получаем

$$I_{\text{п}}^*=\pm z'y'_{\text{п3}}\int_0^1\frac{1}{(y'_{\text{п3}}s-y')^2+z'^2}\times$$

$$\times\left(\frac{(x'_{\text{п2}}-x')-(x'_{\text{п2}}-x'_{\text{п3}})s}{\sqrt{\begin{array}{l}\left[(x'_{\text{п2}}-x')-(x'_{\text{п2}}-x'_{\text{п3}})s\right]^2\\+(y'_{\text{п3}}s-y')^2+z'^2\end{array}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{x'_{\text{п3}}s-x'}{\sqrt{(x'_{\text{п3}}s-x')^2+(y'_{\text{п3}}s-y')^2+z'^2}}\right)ds.$$

Характер изменения подынтегральной функции

$$f^*(s)=\frac{1}{(y'_{\text{п3}}s-y')^2+z'^2}\times$$

$$\times\left(\frac{(x'_{\text{п2}}-x')-(x'_{\text{п2}}-x'_{\text{п3}})s}{\sqrt{\begin{array}{l}\left[(x'_{\text{п2}}-x')-(x'_{\text{п2}}-x'_{\text{п3}})s\right]^2\\+(y'_{\text{п3}}s-y')^2+z'^2\end{array}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{x'_{\text{п3}}s-x'}{\sqrt{(x'_{\text{п3}}s-x')^2+(y'_{\text{п3}}s-y')^2+z'^2}}\right)$$

представлен на рисунке 4.

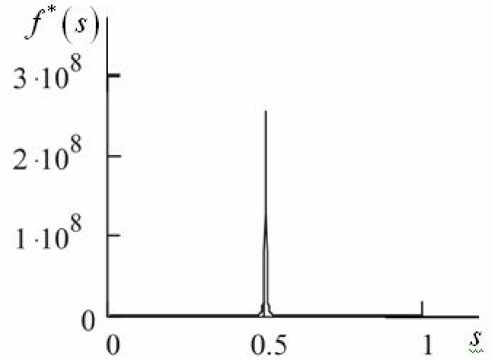

Рисунок 4 – Характер изменения подынтегральной функции $f^*(s)$ на интервале интегрирования

Функция построена при следующих значениях параметров: $x'_{\text{п1}}=0$, $y'_{\text{п1}}=0$, $x'_{\text{п2}}=0{,}088388$, $y'_{\text{п2}}=0$, $x'_{\text{п3}}=0{,}044194$, $y'_{\text{п3}}=0{,}044194$ и $x'=x_{\text{п3}}$, $y'=0{,}5y'_{\text{п3}}$, $z'=0{,}0001x'_{\text{п2}}$.

Вычисленное с применением квадратурной формулы Гаусса с 10-тью узлами значение интеграла $\int_s f^*(s)ds$ оказалось равным $6{,}0966\text{Ч}0^4$. В то же время значение интеграла, даваемое MathCAD, - $1{,}6019\text{Ч}0^6$, т.е. отличается примерно в 26 раз. Такая погрешность не позволяет проводить расчеты значений функции $U(M)$ вблизи границ области с необходимой точностью.

В [2] была предложена методика оценки интегралов I_n^*, согласно которой интеграл I_n^* представляется в виде

$$I_n^* = \overline{I_n^*} + \delta\left(r_{n\xi}\right), \quad (7)$$

где $\overline{I_n^*}$ - значение интеграла, вычисленное с применением квадратурной формулы Гаусса, $\delta\left(r_{n\xi}\right)$ - поправка, величина которой зависит от расстояния $r_{n\xi}$ между узловой точкой ξ n – го ГЭ и точкой M, в которой определяется значение функции $U\left(M\right)$.

Для функции $\delta\left(r_{n\xi}\right)$ было предложено следующее выражение:

$$\delta\left(r_{n\xi}\right) = p \Big/ \left(r_{n\xi}\right)^k. \quad (8)$$

Параметр p для каждого интеграла легко определяется (см. [2]), а значение показателя степени k устанавливается опытным путем для данного вида подынтегральной функции и затем в процессе расчетов является уже известным (в [2] k оказалось равно 4).

Такой способ учета погрешности позволил повысить точность вычисления значений функции $U\left(M\right)$ вблизи определяющих границ тестовой области. Вместе с тем анализ поведения подынтегральной функции на интервале интегрирования по s от 0 до 1 при различных значениях величины $r_{n\xi}$ показал, что степень гладкости функции $f\left(s\right)$ зависит не столько от величины $r_{n\xi}$, сколько от отношения $r_{n\xi}/l_n$, где l_n - характерный размер ГЭ (в ходе отработки численного алгоритма в качестве l_n принималась длина наибольшей стороны треугольного ГЭ). В связи с этим представляется целесообразным записать выражение для $\delta\left(r_{n\xi}\right)$ в виде

$$\delta\left(r_{n\xi}\right) = \frac{p_0}{\left(r_{n\xi}/l_n\right)^k}. \quad (9)$$

Если размеры всех ГЭ одинаковы, т.е. $l_n = const$, то расчеты по (9) аналогичны (8). При этом $p = p_0 l_n^k$. Однако алгоритмы триангуляции поверхности, учитывающие возможное наличие сильных локальных градиентов функции $U\left(M\right)$, приводят к построению гранично-элементной сетки с существенно различающимися размерами ГЭ. В этом случае применение (9) может оказаться полезным.

Значение показателя степени k в формуле (9) устанавливалось путем численного моделирования распределения температуры в тестовой области, имеющей форму куба, на двух противоположных гранях которого заданы значения функции $U_1 > 0$ и $U_2 > 0$, а на остальных гранях $U\left(M\right) = 0$. Полученные в результате расчетов значения $U\left(M\right)$ вблизи границ области сравнивались с известным аналитическим решением [8].

Наилучшее совпадение результатов было получено также при значении $k = 4$.

4. Заключение. Разработана методика расчета квазисингулярных интегралов I_n, позволяющая локализовать положение особенности и повысить точность вычислений.

В выражении для поправки $\delta\left(r_{n\xi}\right)$ в формуле (7) предложено внести уточнение: учесть влияние отношения $r_{n\xi}/l_n$ на гладкость функции $f\left(s\right)$ и рассчитать $\delta\left(r_{n\xi}\right)$ по формуле (9).

Установлено значение показателя степени k в случае расчета значений $U\left(M\right)$ в системах, не обладающих аксиальной симметрией.

Библиографический список

1. *Бреббия К. и др.* Методы граничных элементов: пер. с англ./ *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* - М.: Мир, 1987. - 524 с.

2. *Трубицын А.А.* Вычисление сингулярных интегралов методом граничных элементов // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 1995. Т. 35 № 4.

3. *Hammer P.C., Marlowe O.J. and Stroud A.H.* Numerical integration over simplexes and cones. Math. Tables Other Aids Comput. 10, 1956.

4. *Кронрод А.С.* Узлы и веса квадратурных формул (шестнадцатизначные таблицы). - М.: Наука, 1964. – 144 с.

5. http://alglib.sources.ru/integral/autogk61.php.

6. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособие. - М. : Высш. шк., 1994. – 544 с.

7. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы: пер. с англ. - М.: Наука, 1978. – 224 с.

8. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. - М.: Наука, 1964. - 488 с.