

УДК 621.315.592

А.А. Корнилович, В.Г. Литвинов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАКТОРА ЗАПОЛНЕНИЯ УРОВНЕЙ ЛАНДАУ И НОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДРОБНОГО КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ХОЛЛА В ДВУМЕРНЫХ НАНОСТРУКТУРАХ

Предложена новая интерпретация дробного квантового эффекта Холла в полупроводниковых наноструктурах. Получены соотношения для определения фактора заполнения уровней Ландау ν в зависимости от номера уровня Ландау N , орбитального l , магнитного m и спинового s квантовых чисел. Показано, что при $m = l = N$ проявляется целочисленный квантовый эффект Холла, а при $m \leq l$ наблюдается дробный квантовый эффект Холла. Иерархичность значений ν в квантовом пределе при $N = 1$ объясняется дискретностью изменения орбитального магнитного момента электрона и его проекции на направление магнитного поля.

Ключевые слова: дробный квантовый эффект Холла, фактор заполнения, квантовые числа, орбитальный магнитный момент.

Введение. Классический эффект появления поперечной электродвижущей силы (ЭДС) в результате отклонения движения носителей заряда в магнитном поле, обнаруженный еще в 1879 году студентом 5-го курса университета в Балтиморе, США, Холлом, в настоящее время стал мощным экспериментальным методом определения с высокой точностью концентрации и знака носителей заряда в полупроводниках.

В 70-е годы активно теоретически и практически исследовались свойства электронных систем в структурах с управляемым энергетическим спектром. Энергетический спектр перестраивался либо с помощью инженерии структуры энергетических зон, как, например, в полупроводниковых квантово-размерных гетероструктурах, либо путем внешнего воздействия электрическим, магнитным полем или механической деформацией. Особое внимание уделялось изучению полупроводниковых систем с двумерным газом носителей заряда, как, например, в полупроводниковых структурах с квантовой ямой (КЯ). Примечательно, что в полупроводниковых КЯ оказалось возможным добиться радикальной перестройки энергетического спектра магнитным полем.

В течение ста лет считалось, что в теории и применении эффекта Холла все понятно. Первые теоретически в работах [1, 2] был предсказан квантовый эффект Холла. В 1980 г. немецкий физик К. фон Клитцинг с сотрудниками [3] обнаружил квантование холловского сопротивления в сильном магнитном поле в двумерном

слое полупроводника. В 1985 году К. фон Клитцингу с соавторами была присуждена Нобелевская премия по физике. Весной 1982 года, как раз в то время, когда теоретики полагали, что они, наконец, поняли причину, по которой проводимость Холла должна быть квантована в целых числах e^2/h , где e – элементарный заряд, h – постоянная Планка, американские физики Д. Тсуи, Х. Штёрмер и А. Госсард [4] открыли, что существуют также квантовые состояния с дробным коэффициентом при e^2/h . За экспериментальные исследования и теоретическое объяснение этого эффекта Р. Лафлину, Х. Штёрмеру и Д. Тсуи в 1998 году присуждена Нобелевская премия по физике.

С момента открытия квантового эффекта Холла прошло более 30 лет. Несмотря на большие успехи в исследованиях, окончательная теория дробного квантового эффекта отсутствует. К настоящему времени наибольшее распространение получила теория Лафлина [5], основанная на анализе многоэлектронной волновой функции и введении квазичастиц с дробным зарядом электрона. Теория композитных фермионов Джейна [6] использует квазичастицы, состоящие из электронов и квантов магнитного потока. Иорданский в работе [7] предложил топологическую концепцию, в рамках которой рассматривается вихревая текстура, и воспроизвел результат теории Джейна без привлечения феноменологических представлений о свойствах электрона. Однако в рамках предложенных теорий свойства элементарных зарядовых возбуждений и вычис-

ление проводимости остаются открытыми вопросами.

Цель данной работы – предложить новый подход к изучению дробного квантового эффекта Холла без применения феноменологических модельных описаний свойств электронного газа. Предлагаемый подход основан на применении фундаментальных принципов сохранения энергии, момента импульса и заряда и не использует спорных феноменологических описаний свойств электронного газа. В работе показано, что квантование энергии электрона и распределение плотности состояний происходит не только по уровням Ландау, но и по подуровням, образованным квантованием орбитального магнитного и соответственно механического моментов. Дана интерпретация дробного квантового эффекта Холла на основе дискретного изменения орбитального магнитного момента электрона.

Теоретический расчет фактора заполнения ν в дробном квантовом эффекте Холла. Квантовый эффект Холла исследуют по измеренной зависимости холловского сопротивления ρ_{xy} и продольного сопротивления ρ_{xx} от магнитного поля B [8].

Целичисленный квантовый эффект Холла наблюдают в области локализованных состояний. Холловское сопротивление равно:

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2 N}, \quad (1)$$

где N – номер уровня Ландау.

Дробный квантовый эффект Холла проявляется в переходной области $N \rightarrow N - 1$. Холловское сопротивление в области малых плато на зависимости от индукции равно:

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2 \nu}, \quad (2)$$

где ν – фактор заполнения уровня Ландау. $\nu = p/q$, где p и q – целые числа, причем q – нечетное целое число.

Фактор заполнения в дробном квантовом эффекте Холла определяют экспериментально по известной концентрации электронов n и измеренному значению индукции магнитного поля B_ν в минимуме продольного сопротивления ρ_{xx} :

$$\nu = \frac{nh}{B_\nu e}. \quad (3)$$

Концентрация n определяется в целочисленном квантовом эффекте Холла между переходными областями по измерению значения магнитного поля B_N в минимуме продольного

сопротивления либо по периодам осцилляций ρ_{xx} [9]:

$$n = \frac{B_N e N}{h}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует соотношение:

$$\frac{\nu}{N} = \frac{B_N}{B_\nu}. \quad (5)$$

Одним из основных результатов теорий дробного квантового эффекта Холла [5-7] является вычисление фактора заполнения ν с привлечением различных модельных представлений о свойствах электрона.

Рассмотрим теоретический расчет значений фактора заполнения ν , предложенный в данной работе.

Анализ зависимости фактора заполнения уровней Ландау от квантовых чисел N, l, m, s . Сильное магнитное поле перестраивает плотность состояний по уровням Ландау, снимает спиновое вырождение, квантует орбитальное движение электронов не только по уровням Ландау, но и по подуровням энергии, образующимся в результате квантования орбитального механического и магнитного моментов электрона. Соответственно перестраивается плотность состояний электронов по подуровням энергии. При малых N векторы орбитального L_e и магнитного μ_e моментов электрона не имеют определенного направления и прецессируют вокруг направления оси z , совпадающей с направлением магнитного поля \vec{B} . Потенциальная энергия электрона определяется скалярным произведением векторов $\vec{\mu}_e$ и \vec{B} . Полная энергия электрона будет [9]:

$$E = \frac{m_e V^2}{2} - \mu_e B \cos(\Theta_j), \quad (6)$$

где m_e – масса электрона, V – скорость, Θ_j – дискретное значение угла между векторами $\vec{\mu}_e$ и \vec{B} .

При орбитальном движении электрона в двумерном слое полупроводника $\frac{\pi}{2} \leq \Theta_j \leq \pi$, т.к. векторы $\vec{\mu}_e$ и \vec{B} направлены противоположно друг другу.

Волновая функция электрона постоянна по амплитуде и изменяется лишь по фазе φ :

$$\psi(\varphi) = C \exp\left(\frac{iL_z}{\hbar} \varphi\right), \quad (7)$$

где L_z – проекция орбитального механического момента L_e на ось z , \hbar – постоянная Планка или $h/2\pi$. Из условия цикличности ψ -функции

следует квантование проекции L_z на ось z :

$$L_z = m\hbar, \quad (8)$$

где магнитное квантовое число $m \leq l$.

Соответственно одновременно квантована проекция магнитного момента электрона на ось z :

$$\mu_m = \mu_e \cos(\Theta_j) = \mu_B g^* m, \quad (9)$$

где μ_B – магнетон Бора, g^* – фактор Ланде, учитывающий спин-орбитальное взаимодействие. Из (6) и (9) видно, что энергия электрона квантована по подуровням, образованным в результате квантования орбитального магнитного момента и его проекции μ_m .

Каждый подуровень энергии характеризуется набором четырех квантовых чисел N, l, m, s . Разность значений энергий подуровней составляет

$$E_m - E_{m-1} = \mu_B g^* [B_m m - B_{m-1} (m-1)] \quad (10)$$

и при $m = 1$ совпадает с энергией зеемановского расщепления спиновых подуровней.

В областях целочисленного квантового эффекта Холла $m = l = N$, и все N уровней Ландау заполнены полностью электронами. Орбитальные моменты L_e и μ_e направлены по оси z и равны проекциям L_m и μ_m , угол $\Theta_j = \pi$. В этом случае плоскости орбит лежат в плоскости 2D-слоя исследуемой полупроводниковой наноструктуры.

В центре мини-плато дробного квантового эффекта Холла и минимума продольного сопротивления (см. рисунок) орбитальный механический момент равен дробному числу \hbar :

$$L_v = v\hbar. \quad (11)$$

Квантование по уровням $E_{l,m}$ допустимо при малых N при условии, что диаметр орбиты $2r_B$ меньше толщины 2D-слоя d , а $d \leq \lambda$, где λ – Фермиевская длина волны электрона.

Плато в зависимости холловского сопротивления ρ_{xy} начинают формироваться при $l \pm 1/2$ для целочисленного и $l \pm \beta/2$, где $\beta = m/N$, для дробного квантового эффекта Холла. Отношение магнитных моментов можно заменить отношением механических моментов:

$$\frac{L_v}{L_N} = \frac{L_{l \pm \frac{m}{2N}}}{L_{l \pm \frac{1}{2}}}. \quad (12)$$

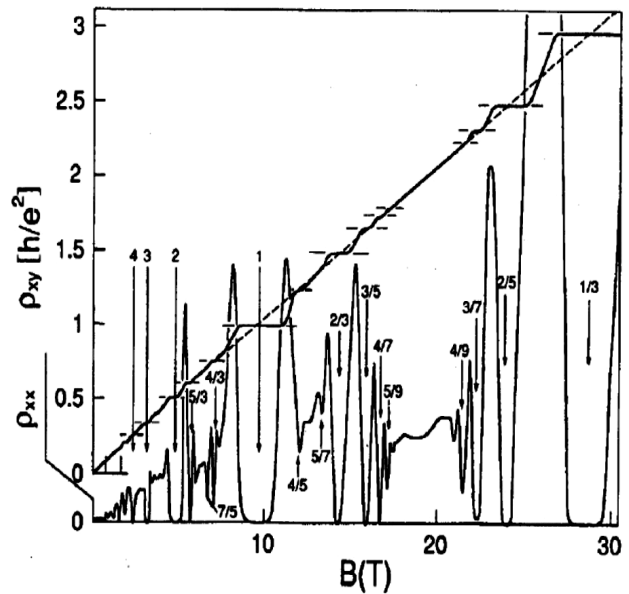
Отсюда получаем:

$$\frac{v}{N} = \frac{l \pm \frac{m}{2N}}{l \pm \frac{1}{2}}; \quad v = \frac{2Nl \pm m}{2l \pm 1}. \quad (13)$$

Если N_L слева от переходной области

$N \rightarrow N - 1$ в зависимости ρ_{xy} от магнитного поля, то в знаменателе следует выбрать знак “плюс”, а если $N_L = N_L - 1$ справа от переходной области, то в знаменателе выбирается знак “минус”. В середине переходной области $m = 0$. При уменьшении магнитного поля v возрастает, тогда в числителе знак “плюс”. При увеличении магнитного поля от $m = 0$ v убывает, тогда в числителе знак “минус”. В большинстве случаев, согласующихся с экспериментом, удобно пользоваться формулой

$$v = \frac{2Nl - m}{2l + 1}. \quad (14)$$



Зависимость продольного сопротивления от индукции магнитного поля из работе [8]

При этом положительные значения m уменьшают v , а при $m < 0$ v возрастает. Следует заметить, что реально магнитное квантовое число $m > 0$ при орбитальном движении электронов в 2D-слоях полупроводника.

Рассмотрим частные случаи. При $m = l$ и $N = 1$:

$$v = \frac{l}{2l + 1}. \quad (15)$$

При $m = l - i$, где i – целое число,

$$v = \frac{l + i}{2l + 1}. \quad (16)$$

В ультраквантовом пределе в переходной области $1 \rightarrow 0$ значения l не ограничены значением $N = 1$ и проявляется квантование орбитального магнитного момента при $l > 1$.

При $l = 1, 2, 3 \dots$ из (15) и (16) следуют значения v , совпадающие с экспериментальными результатами, приведенными на рисунке из работы [8]. Из (15) следует выражение для плотности состояний:

$$g = \frac{B_v e}{h} \cdot \frac{l}{2l+1}. \quad (17)$$

Выражение (17) отличается от правила Джейна [6] тем, что содержит значение реального магнитного поля B_v в минимуме продольного сопротивления ρ_{xx} вместо эффективного магнитного поля.

Из (14) при $l = N$ следует:

$$\nu = \frac{2N^2 - m}{2N + 1}. \quad (18)$$

При $m = -N_l$ $\nu = N_l$ и начинается плато ЦКЭХ слева от переходной области $N_l \rightarrow N_l$.

В случае когда уровень Ферми входит справа в переходную область, в знаменателе (14) следует выбрать знак “минус”, подставляя в (14) значение N справа от переходной области. Тогда имеем:

$$\nu = \frac{2N^2 - m}{2N - 1}. \quad (19)$$

При $m = N_l = N_l - 1$ $\nu = N_l$, что соответствует области плато ЦКЭХ справа от переходной области $N_l \rightarrow N_l$. При изменении магнитного квантового числа $\Delta m = \pm 1$ и $l = N$ в переходной области проявляется дробный квантовый эффект Холла.

В середине переходной области при магнитном поле, когда разность энергий спиновых подуровней Ландау меньше энергии кулоновского взаимодействия, возможна смешанная поляризация электронов. Тогда, заменяя m на спин электрона $1/2$, из (14) и (19) получаем одинаковые значения фактора заполнения:

$$\nu = N_l - \frac{1}{2} = N_l + \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Для переходной области $3 \rightarrow 2$ из (14) при $m = -1$ следует $\nu = 19/7$; из (19) при $m = +1$ следует $\nu = 7/3$, при $m = 1/2$ из (14) и (19) получаются одинаковые значения фактора заполнения с четным знаменателем $\nu = 5/2$. Для переходной области $2 \rightarrow 1$ при $N = 2$, $l < N$, $m \leq l$ из (14) получаются значения ν , совпадающие с экспериментальными результатами [8].

Следует заметить, что при $l = N$ выполняется соотношение:

$$\frac{B_N}{B_v} = \frac{B_{N \pm \frac{1}{2}}}{B_{N \pm \frac{m}{2N}}}. \quad (21)$$

Из (5) и (21) легко получаются выражения (18) и (19).

В случае наблюдения дробного квантового эффекта Холла в инверсионном двумерном слое,

создаваемом на поверхности кремниевой структуры, сильное квантующее магнитное поле поддерживается постоянным, а с изменением потенциала на затворе изменяется концентрация в двумерном слое и соответственно изменяется значение энергии Ферми. Простой расчет показывает, что в этом случае выполняется соотношение, аналогичное (21), только индукцию магнитного поля следует заменить концентрацией электронов n :

$$\frac{n_N}{n_v} = \frac{n_{N \pm \frac{1}{2}}}{n_{N \pm \frac{m}{2N}}}. \quad (22)$$

Из (22) снова получаются выражения (18) и (19).

Заключение. Из анализа известных значений толщин двумерных слоев GaAs и величин магнитного поля, используемых в экспериментальных работах, следует, что при малых номерах уровней Ландау N выполняется условие наблюдения дробного квантового эффекта Холла, при котором диаметры орбит меньше толщины 2D-слоя, а толщина слоя меньше длины волны де Бройля электрона.

Прецессия орбит вокруг направления магнитного поля возможна и в случаях, когда диаметры орбит больше толщины слоя, например при угле наклона орбиты к плоскости 2D-слоя, равном $\pi/3$, и $N = 2$ магнитное квантовое число изменяется на единицу и проявляется ДКЭХ. При этом фактор заполнения $\nu = 7/3$ и совпадает с экспериментальными результатами в известных работах, например в [10]. В отсутствие случайного потенциала дискретные уровни Ландау многократно вырождены. Наличие неоднородностей в 2D-слое создает случайный потенциал, который снимает вырождение уровней Ландау и подуровней, образованных квантованием магнитного момента электрона. В результате образуются зоны расширенных делокализованных состояний, в которых проявляется дробный квантовый эффект Холла.

Всякий раз, когда уровень Ферми пересекает дискретные значения как уровня Ландау, так и подуровней, образованных при квантовании орбитального магнитного момента электрона, плотность состояний возрастает резонансным образом. Происходит рассеяние электронов, и осуществляется их переход с одной орбиты на другую. В условиях квантования по подуровням возможны упругие либо туннельные переходы электронов с одной орбиты на другую без диссипаций.

Из результатов настоящей работы следует,

что механизм образования плато для целочисленного и дробного квантового эффекта Холла является единым. Что касается учета межэлектронного взаимодействия в дробном квантовом эффекте Холла, предложенного в работах [5, 6], то нет основания считать, что оно отсутствует в случае целочисленного эффекта Холла и появляется в случае дробного квантового эффекта. Квантованное значение орбитального магнитного момента $\Delta\mu_{l,m} = \mu_B g^*$ пропорционально g^* -фактору, учитывающему спин-орбитальное взаимодействие. Поэтому перспективно наблюдать дробный квантовый эффект Холла в двумерных структурах, характеризующихся высоким значением g^* -фактора. Такие структуры могут быть созданы на основе узкозонных материалов АЗВ5, характеризующихся малым значением эффективной массы, высокой подвижностью носителей заряда и большим значением энергии спин-орбитального расщепления валентной зоны. Это позволит увеличить разрешение, уменьшить экспериментальное значение индукции магнитного поля и выполнять эксперимент при повышенных значениях температуры. При малых радиусах орбит проще выполнить условия для наблюдения дробного квантового эффекта Холла.

В заключение заметим, что перспективно исследовать дробный квантовый эффект Холла бесконтактным способом [11, 12]. Воздействуя излучением на центральную часть образца, можно исключить влияние пограничного тока на глубину минимумов продольного сопротивления ρ_{xx} . Таким образом, результаты работы имеют также практическую ценность, поскольку будут способствовать развитию электрических методов диагностики полупроводниковых материалов и наноструктур с двумерным газом носителей заряда. А именно представляет реальный интерес изучение заселенности мини-зон размерного квантования в 2D-системах при различных внешних воздействиях электрическим, магнитным полем, что будет способствовать развитию новой элементной современной наноэлектроники.

С уменьшением магнитного поля возрастают N и радиусы электронных орбит r_N . При r_N больше толщины 2D-слоя дробный квантовый эффект Холла исчезает. При значительном снижении магнитного поля уменьшаются энергетические интервалы между уровнями Ландау и не проявляется целочисленный квантовый эффект Холла. Таким образом, подход, предложенный в работе, позволяет заключить, что природа дробного и целочисленного квантового

эффекта Холла является общей, а дробный квантовый эффект Холла обусловлен квантованием энергии орбитального движения электронов в двумерных слоях наноструктур не только по уровням Ландау, но и по подуровням, возникающим при квантовании орбитального магнитного момента электрона.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, в региональном центре зондовой микроскопии коллективного пользования (РЦЗМкп) и научно-образовательном центре неупорядоченных и наноструктурированных материалов и устройств на их основе (НОЦ «ННМУ») при Рязанском государственном радиотехническом университете.

Библиографический список

1. Ando T., Matsumota Y., Uemura Y. Theory of Hall Effect in a Two-Dimensional Electron System // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V.39. P.279-288.
2. Баскин Э.М., Магарилл Л.И., Энтин М.В. Двумерная электрон-примесная система в сильном магнитном поле // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. С. 723-734.
3. Klitzing K.V., Dorda G., Pepper M. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance // Phys. Rev. Lett. 1980, V. 45. P. 494-497.
4. Tsui D.C., Störmer H.L., Gossard A.C. Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit // Phys. Rev. Lett. 1982. V.48. P. 1559-1562.
5. Laughlin R.B. Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations // Phys. Rev. Lett. 1983. V.50. P. 1395-1398.
6. Jain J.K. Composite fermion approach for fractional quantum Hall effect // Phys. Rev. Lett. 1989. V.63. P. 199-202.
7. Иорданский С.В. Дробный квантовый эффект, правило Джайна и топологические структуры // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т.77. С. 292-295.
8. Willett R., Eisenstein J.P., Störmer H.L., Tsui D.C., Gossard A. C. and English J.H. Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum Hall effect // Phys. Rev. Lett. 1987. V.59. P. 1776-1779.
9. Корнилович А.А. Физика в примерах. Новосибирск, 2003. 280 с.
10. Квантовый эффект Холла / под ред. Р. Пренджа и С. Гирвина. М.: Мир, 1989. 408 с.
11. Корнилович А.А. Способ бесконтактного определения квантованного холловского сопротивления полупроводников. Патент РФ № 2368982. 2009.
12. Корнилович А.А., Литвинов В.Г., Ермачихин А.В., Кусакин Д.С. Установка для определения параметров полупроводниковых структур по магнитным квантовым эффектам и спектроскопии адмиттанса // Приборы и техника эксперимента. 2014. № 4. С. 111-119.