РАДИОТЕХНИКА, РАДИОЛОКАЦИЯ И СИСТЕМЫ СВЯЗИ

УДК 621.319

В.К. Клочко, В.П. Кузнецов, А.В. Левитин, А.В. Жирицкий, В.П. Семилетников, А.Н. Усачев

АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ДВИЖУЩИХСЯ ЦЕЛЕЙ НА БАЗЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ДОПЛЕРОВСКОЙ РЛС

Рассмотрены алгоритмы определения координат движущихся целей, обнаруженных в многоканальной доплеровской РЛС, основанные на вторичной обработке сигналов во временной и спектральной областях после прохождения тракта первичной обработки. Показана работоспособность алгоритмов методом компьютерного моделирования.

Ключевые слова: *радиолокация, доплеровская РЛС, оценивание координат движущихся целей.*

Введение. В настоящее время актуальна задача повышения эффективности систем обнаружения движущихся целей [1, 2], которая решается за счет совершенствования алгоритмов обработки принимаемых сигналов.

Целью работы является разработка алгоритмов определения координат движущихся целей, обнаруженных в многоканальной доплеровской РЛС, основанных на вторичной обработке сигналов во временной и спектральной областях после прохождения ими тракта первичной обработки.

Модель сигнала и постановка задачи. Антенная система работает в режиме непрерывного излучения в сантиметровом диапазоне длин волн на проходе цели, движущейся с большой скоростью на малой высоте. Отраженный сигнал принимается плоской антенной решеткой (АР). Приемные элементы АР расположены в Q точках с координатами x_q, y_q и $z_q = 0$, $q = \overline{1,Q}$, в антенной прямоугольной системе координат o,x,y,z. Наблюдение за целью ведется в сферической системе o,R,φ,θ, где R – наклонная (радиальная) дальность, φ – азимут, θ – угол места. Угол φ отсчитывается от оси oz в горизонтальной плоскости oxz, угол θ – относительно плоскости oxz. Ось oz показывает максимум диаграммы направленности антенны (ДНА).

Сигнал, отраженный от цели в заданном поясе дальности R и принятый центральным элементом антенны в начальные моменты времени t описывается моделью:

$$s_ц(t) = u(t)\, G(\varphi,\theta) \sin(\omega_0 (t-\tau) + \phi_0 + \eta),$$

где $u(t)$ − флуктуирующая амплитуда сигнала; $G(\varphi,\theta)$ − амплитудная ДНА; $\omega_0 = 2\pi c/\lambda$ − несущая круговая частота, зависящая от скорости света c и длины волны λ; τ − задержка сигнала: $\tau = 2R/c$, $2R$ − путь, пройденный сигналом; ϕ_0 − начальная фаза; η − случайная составляющая фазы, равномерно распределенная на $[0,2\pi]$.

Радиальная дальность до цели R, определяемая как расстояние между целью и центром антенны, меняется во времени: $R = R(t)$ и с точностью до второй производной может быть представлена зависимостью:

$$R(t) = R_0 - (v_R t + a_R\, t^2/2),$$

где R_0 − начальная дальность в поясе дальности; v_R и a_R − радиальные скорость и ускорение. Тогда $\tau = 2R/c = (2R_0 - 2v_R t - a_R\, t^2)/c$ и

$$\omega_0(t-\tau) = \omega_0 t - (2\pi/\lambda)2R = \\ = \omega_0 t - 4\pi(R_0 - v_R t - a_R t^2/2)/\lambda = \\ = \omega_0 t - 4\pi R_0 + \omega_{дц} t,$$

где $\omega_{дц} = 2\pi(2v_R + a_R t)/\lambda$ − доплеровское изменение частоты за счет движения цели, зависящее от t.

С учетом этого имеем:

$$s_ц(t) = u(t)\, G(\varphi,\theta)\sin(\omega_0 t - 4\pi R_0 / \lambda + \omega_{дц} t + \xi),$$

где случайная величина $\xi = \phi_0 + \eta \in [0,2\pi]$.

Сигнал, принятый другими (боковыми) элементами антенны, проходит больший или меньший путь в зависимости от положения цели. Обозначим приращение пути для боковых элементов (по сравнению с центром) символом δ_q, где q – номер приемного элемента антенны ($q = \overline{1,Q}$). С учетом δ_q путь, пройденный сигналом: $2R(t) = 2R_0 + \delta_q - 2v_R t + a_R t^2$,

и модель принятого в q-м элементе антенны сигнала ($q = \overline{1,Q}$) будет:

$$s_{qц}(t) = u(t)\, G(\varphi,\theta)\sin(\omega_0 t - 4\pi R_0 / \lambda - 2\pi\delta_q / \lambda + \omega_{дц} t + \xi). \qquad (1)$$

Непосредственно величину δ_q можно определить как разность расстояний: $\delta_q = R - R_q$, где R – удаление цели с координатами x, y, z от центра антенны; R_q – удаление цели от центра q-го приемного элемента антенны с координатами $x_q, y_q, 0$. Получаем нелинейную зависимость δ_q от R, x, y:

$$\delta_q = R - \sqrt{R^2 - 2(x_q x + y_q y) + x_q^2 + y_q^2}.$$

Для практического расчета δ_q примем следующее допущение. Представим сферический фронт отраженной от цели волны, достигшей центра антенны, касательной плоскостью (плоским фронтом) с нормальным вектором

$$\vec{n} = (x, y, z) = R(\cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta,\ \cos\theta\cos\varphi)$$

или ортом вектора нормали:

$$\vec{n}^0 = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta, \cos\theta\cos\varphi).$$

Считаем, что плоский фронт волны с таким же нормальным вектором достигает центра приемных элементов антенны. Тогда величина δ_q определится как отклонение центра q-го приемного элемента (точки с координатами $x_q, y_q 0$) от плоскости, проходящей через начало координат с вектором нормали $\vec{n}^0$, по формуле:

$$\delta_q = x_q \cos\theta\sin\varphi + y_q \sin\theta,$$

или с учетом $\cos\theta\sin x / R,\ \sin\theta = y / R$ имеем:

$$\delta_q = (x_q x + y_q y) / R. \qquad (2)$$

Формула (2) дает линейную зависимость δ_q от R, x, y. Искомые координаты цели x, y при известной дальности R могут быть определены из величин δ_q, $q = \overline{1,Q}$, измеренных тем или иным способом.

По истечении некоторого времени после приема отраженного от цели сигнала (1) в данном поясе дальности приходит сигнал от цели, отраженный от подстилающей поверхности (сигнал переотражения), который носит интегральный характер:

$$s_{qп}(t) = u(t) \iint\limits_{D_{\varphi,\theta}} G(\varphi,\theta)\sin(\omega_0 t - 4\pi R_0 / \lambda - 2\pi(\delta_q + \delta_{qп}) / \lambda + \omega_{дп} t + \xi)\, d\varphi\, d\theta, \qquad (3)$$

где $D_{\varphi,\theta}$ – область интегрирования по подстилающей поверхности в пределах ДНА; $\delta_{qп} = \delta_{qп}(\varphi,\theta)$ – дополнительное запаздывание сигнала при отражении от элементов поверхности с угловыми координатами φ, θ; $\omega_{дп} = \omega_д + \Delta\omega_п$, $\Delta\omega_п = \Delta\omega_п(\varphi,\theta)$ – малое изменение доплеровской частоты при отражении от элементов поверхности.

Дополнительно принимается сигнал отражения от подстилающей поверхности, который подобно (3) носит интегральный характер, но не содержит доплеровской частоты. Такой сигнал отсекается режекторным фильтром и в модели приемного сигнала не рассматривается.

После прохождения тракта первичной обработки несущая частота ω_0 заменяется на промежуточную частоту $\omega_{пр}$.

После дискретизации по времени на выходе блока аналого-цифрового преобразования (АЦП) в каждом q-м приемном канале имеем n-е дискретные отсчеты суммарного сигнала в моменты времени t_n:

$$s_q(t_n) = s_{qц}(t_n) + s_{qп}(t_n) + m_q(t_n) + p_q(t_n), \qquad (4)$$

где $n = \overline{1,N}$; $m_q(t_n)$ – составляющая сигнала (смещение), медленно зависящая от t и вызванная изменением температурного режима; $p_q(t_n)$ – центрированный нормальный белый шум с дисперсией σ_p^2, обусловленный шумами аппаратуры.

Обнаружение полезной составляющей $s_{qц}(t_n)$ в составе (4) осуществляется по факту превышения амплитудой сигнала $s_q(t_n)$ порога обнаружения во всех q-х каналах ($q = \overline{1,Q}$).

З а д а ч а заключается в нахождении оценок координат цели x, y, содержащихся в (2). Третья координата определяется как

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Фазовый метод решения задачи. Идеи фазовых методов известны из источников [1, 3], а также рассматривались в [4, 5]. Используем эти идеи применительно к решаемой задаче с построением конкретных алгоритмов. Элементы приемной антенны удобно расположить так, чтобы δ_q зависело только от одной координаты. Возьмем координаты центров пяти ($Q = 5$) приемных элементов: центрального $(x_0, y_0) = (0,0)$ и боковых $(x_1, y_1) = (a,0)$, $(x_2, y_2) = (-b,0)$, $(x_3, y_3) = (0,a)$, $(x_4, y_4) = (0,-b)$, $a > 0$, $b > 0$.

Обозначим в (1): $u_q = \gamma_q U_0 G(\varphi, \theta)$,

$\psi_q = -4\pi R_0/\lambda - 2\pi\delta_q/\lambda + \xi$, $\omega = \omega_{пр} + \omega_д$.

Тогда полезный сигнал в приемных каналах на выходе АЦП:

$$s_{qц}(t_n) = u_q \sin(\omega\, t_n + \psi_q).$$

Разности фаз, взятые вдоль осей координат, дают зависимости:

$$\Delta\psi_1 = \psi_0 - \psi_1 = (2\pi/\lambda)\delta_1 = (2\pi/\lambda)ax/R, \quad (5)$$
$$\Delta\psi_2 = \psi_0 - \psi_2 = (2\pi/\lambda)\delta_2 = -(2\pi/\lambda)bx/R,$$
$$\Delta\psi_3 = \psi_0 - \psi_3 = (2\pi/\lambda)\delta_3 = (2\pi/\lambda)ay/R,$$
$$\Delta\psi_4 = \psi_0 - \psi_4 = (2\pi/\lambda)\delta_4 = -(2\pi/\lambda)by/R.$$

Из (5) следует, что взаимнооднозначное соответствие между δ_q и $\Delta\psi_q$ будет тогда, когда при отклонении $0 \le \delta_q \le \lambda$ разность фаз $0 \le \Delta\psi_q \le 2\pi$. В этом случае искомые координаты x, y однозначно (без учета ошибок измерения) определяются из (5) на основе измеренных $\Delta\psi_q$. Соответственно при отклонении $-\lambda \le \delta_q \le 0$ разность фаз $-2\pi \le \Delta\psi_q \le 0$. Таким образом, устанавливается взаимнооднозначное соответствие:

$$\Delta\psi_q = (2\pi/\lambda)\delta_q, \quad -\lambda \le \delta_q \le \lambda, \quad (6)$$
$$-2\pi \le \Delta\psi_q \le 2\pi.$$

Если $\delta_q \in [-2\lambda, -\lambda) \cup (\lambda, 2\lambda]$, то в силу (6) $\Delta\psi_q \in [-4\pi, -2\pi) \cup (2\pi, 4\pi]$. Однако разность фаз $\Delta\hat{\psi}_q$ – оценка величины $\Delta\psi_q$, измеряемая фазовым детектором, будет принимать значения: $\Delta\hat{\psi}_q \in [-2\pi, 2\pi]$. Далее:

$$\delta_q \in [-3\lambda, -2\lambda) \cup (2\lambda, 3\lambda] \quad \Rightarrow$$
$$\Delta\psi_q \in [-6\pi, -4\pi) \cup (4\pi, 6\pi] \;\Rightarrow\; \Delta\hat{\psi}_q \in [-2\pi, 2\pi].$$

Для устранения возникающей неоднозначности между $\Delta\hat{\psi}_q$ и $\Delta\psi_q$, δ_q воспользуемся идеей несимметричного (например: $3a = 2b$) расположения боковых элементов антенны [3, с.424].

Величину a можно выбрать для заданного предельного значения угла α падения плоского фронта волны, при котором еще действует взаимнооднозначное соответствие (6): $a = \lambda/\sin\alpha$. Величина b находится из заданного соотношения (например: $b = 3a/2$).

Для 1-го приемного элемента антенны: $(x_1, y_1) = (a,0)$ вводится в рассмотрение переменная величина X: $X = \sin\alpha = \delta_1/a$. Для промежутка однозначности: $\delta_1 \in [-\lambda, \lambda]$ $\Rightarrow X \in [-\lambda/a, \lambda/a]$, $a > \lambda$. Подставив $\delta_1 = aX$ в (6), при $q = 1$ получим:

$$\Delta\hat{\psi}_1 = k_1 X, \quad k_1 = 2\pi a/\lambda, \quad X \in [-\lambda/a, \lambda/a]. \quad (7)$$

Из (7) находим X_1 – оценку X: $X_1 = \Delta\hat{\psi}_1/k_1$. Тогда из (5): $\delta_1 = aX_1 = ax/R$. Отсюда определяем X_1 – первую оценку координаты x: $x_1 = X_1 R$.

Для 2-го приемного элемента: $(x_2, y_2) = (-b,0)$ вводится в рассмотрение переменная величина Y: $Y = \sin\alpha = -\delta_2/b$. Для промежутка однозначности: $\delta_2 \in [-\lambda, \lambda]$ $\Rightarrow$ $Y \in [-\lambda/b, \lambda/b]$, $b > \lambda$. Подставив $\delta_2 = -bY$ в (6), при $q = 2$ получим:

$$\Delta\hat{\psi}_2 = -k_2 Y, \quad k_2 = 2\pi b/\lambda, \quad Y \in [-\lambda/b, \lambda/b]. \quad (8)$$

Из (8) находим Y_1 – оценку Y: $Y_1 = -\Delta\hat{\psi}_2/k_2$. Из (5): $\delta_2 = -bY_1 = -bx/R$ и определяем x_2 – вторую оценку координаты x: $x_2 = Y_1 R$.

Так как при нахождении оценок x_1 и x_2 точность определения X_1 и Y_1 по измеренным значениям $\Delta\hat{\psi}_1$ и $\Delta\hat{\psi}_2$ определяется угловыми коэффициентами k_1 и k_2, то разумно взять суммарную оценку координаты x с весами:

$$\hat{x} = (ax_1 + bx_2)/(a+b).$$

Перейдем от (7), (8) к общим зависимостям, справедливым как для промежутка однозначности, так и для промежутка неоднозначности. Дадим i-е ($i = 0,1,2,\ldots$) периодическое продолжение (7) с периодом $T_1 = \lambda/a$:

$$\Delta\hat{\psi}_1 = k_1(X - iT_1), \text{ если } X \in (iT_1, (i+1)T_1],$$
$$\Delta\hat{\psi}_1 = k_1(X + iT_1), \text{ если } X \in (-(i+1)T_1, -iT_1].$$

При этом выполняется ограничение: $(i+1)T_1 = (i+1)\lambda/a \le 1$, так как $|\sin\alpha| \le 1$, или $i \le a/\lambda - 1$ (например, при $\lambda = 2$, $a = 4 \Rightarrow i = 0; 1$).

Также дадим j-е (j = 0,1,2,3,…) периодическое продолжение (8) с периодом $T_2 = \lambda/b$, $T_2 < T_1$ (например, для случая $3a = 2b$: $T_2 = 2T_1/3$):

$\Delta\hat{\psi}_2 = -k_2(Y - jT_2)$, если $Y \in (jT_2, (j+1)T_2]$,

$\Delta\hat{\psi}_2 = -k_2(Y + jT_2)$, если $Y \in (-(j+1)T_2, -jT_2]$, где $j \le b/\lambda - 1$ (например, при $\lambda = 2$, $a = 4$, $b = 3a/2 \Rightarrow j = 0;\ 1;\ 2$).

Для измеренных значений $\Delta\hat{\psi}_1$, $\Delta\hat{\psi}_2$ рассмотренные зависимости дают значения аргументов

$$X_{i+1} = \Delta\hat{\psi}_1 / k_1 + iT_1, \quad i = 0,1,\ldots,$$

$$Y_{j+1} = -\Delta\hat{\psi}_2 / k_2 - jT_2, \quad j = 0,1,2,\ldots,$$

например, для $3a = 2b$: X_1, X_2 и Y_1, Y_2, Y_3.

Одна из комбинаций X_i, Y_j теоретически (без учета ошибок измерения фаз) должна совпадать с реальным значением $\sin\alpha$:

$$X_i = Y_j = \sin\alpha .$$

Алгоритмически фазовый метод нахождения оценок координат сводится к следующему:

1. Определяются разности фаз $\Delta\hat{\psi}_1$ и $\Delta\hat{\psi}_2$.

2. Если $\Delta\hat{\psi}_1 > 0$, то $X_i = \Delta\hat{\psi}_1 / k_1 + iT_1$,
Если $\Delta\hat{\psi}_1 \le 0$, то $X_i = \Delta\hat{\psi}_1 / k_1 - iT_1$, $i = 0, 1,...$

3. Если $\Delta\hat{\psi}_2 > 0$, то $Y_j = \Delta\hat{\psi}_2 / k_2 - jT_2$,
Если $\Delta\hat{\psi}_2 \le 0$, то $Y_j = \Delta\hat{\psi}_4 / k_2 + jT_2$, $j = 0, 1, 2,...$

4. Находится наиболее близкая пара X_i, Y_j с наименьшим отклонением $|X_i - Y_j|$. Для данной пары вычисляются оценки координаты *x*: $x_1 = X_i R$ и $x_2 = Y_j R$, а также усредненная оценка: $\hat{x} = (ax_1 + bx_2)/(a+b)$.

Одновременно выполняются такие же операции для нахождения оценки y:

1. Определяются разности фаз $\Delta\hat{\psi}_3$ и $\Delta\hat{\psi}_4$.

2. Если $\Delta\hat{\psi}_3 > 0$, то $X_i = \Delta\hat{\psi}_3 / k_1 + iT_1$,
Если $\Delta\hat{\psi}_3 \le 0$, то $X_i = \Delta\hat{\psi}_3 / k_1 - iT_1$, $i = 0, 1,...$

3. Если $\Delta\hat{\psi}_4 > 0$, то $Y_j = \Delta\hat{\psi}_4 / k_2 - jT_2$,
Если $\Delta\hat{\psi}_4 \le 0$, то $Y_j = \Delta\hat{\psi}_2 / k_2 + jT_2$, $j = 0, 1, 2,...$

4. Находится наиболее близкая пара X_i, Y_j с наименьшим отклонением $|X_i - Y_j|$. Для данной пары вычисляются оценки координаты *y*: $y_1 = X_i R$ и $y_2 = Y_j R$, а также усредненная оценка: $\hat{y} = (ay_1 + by_2)/(a+b)$.

Поправка на сферичность. На малой дальности *R* и при малых значениях *x*, *y* целесообразно ввести поправку на сферичность фронта волны. Величина поправки Δ определяется как модуль разности между точным значением

$$\delta_q^* = R - R_q = R - \sqrt{R^2 - 2(x_q x + y_q y) + x_q^2 + y_q^2}$$

отклонения фронта волны и приближенным $\delta_q = (x_q x + y_q y)/R$, вычисляемым по формуле (2). Для приемного элемента с координатами центра $(a, 0)$ получаем поправку: $\Delta_1 = |\delta_1^* - \delta_1| = |R - \sqrt{R^2 - 2ax + a^2} - ax/R|$, где вместо *x* берется оценка, полученная в предыдущем поясе дальности. При приближенном представлении корня формула упрощается: $\Delta_1 \approx a^2/(2R)$. Для приемного элемента с координатами $(-b, 0)$ имеем:

$$\Delta_2 = |\delta_2^* - \delta_2| = |R - \sqrt{R^2 + 2bx + b^2} + bx/R| \approx$$

$\approx b^2/(2R)$. Аналогично вычисляется поправка для координаты *y*. Знак поправки берется противоположно знаку δ_q, то есть для малых значений *R*, *x*, *y* учет сферичности дает меньшую разность фаз, чем без учета. Тогда при нахождении оценок $x_1 = X_i R$, $x_2 = Y_j R$ величины $X_i = \delta_1 / a$, $Y_j = -\delta_2 / b$ меняются на $X_i = (\delta_1 \pm \Delta_1)/a$, $Y_j = -(\delta_2 \pm \Delta_2)/b$, и оценки соответственно будут: $x_1 = (X_i \pm \Delta_1 / a)R$, $x_2 = (Y_j \pm \Delta_2 / b)R$. Аналогично вносятся поправки в оценки y_1 и y_2.

Рассмотрим алгоритмы оценивания координат цели, основанные на фазовом методе.

Алгоритм 1. Алгоритм основан на спектральном подходе, применяемом в системах СДЦ [1], и сводится к следующим операциям:

1. После прохождения отраженного сигнала тракта первичной обработки в данном поясе дальности *R* в каждом *q*-м канале ($q = \overline{1, Q}$) на выходе АЦП образуются временные последовательности $s_q(t_n)$, $n = \overline{1, N}$.

2. В последовательностях $s_q(t_n)$, $n = \overline{1, N}$, рассматриваются *k*-е подпоследовательности − выборки объема *m* (*m* < *N*): $\{\dot{s}_q(t_n)\}_k$, $n = \overline{(k-1)m + 1, km}$, $m < N$, $k = \overline{1, M}$, общим числом *M* без перекрытия во времени t_i или с перекрытием на *p* единиц:

$$i = \overline{(k-1)m + 1 - p, km - p} .$$

3. Выборки $\{s_q(t_n)\}_k$ одновременно в *q*-х каналах ($q = \overline{1, Q}$) подаются на блоки быстрого преобразования Фурье (БПФ) и обрабатываются независимо. Результатом БПФ являются частотные последовательности комплексных величин $\{\dot{s}_q(f_n)\}_k$, $q = \overline{1, Q}$, в полосе доплеровских частот.

4. Выделяется частота $f_{\max}$, на которой амплитуды $|\dot{s}_q(f_{\max})|, q = \overline{1, Q}$, превышают порог обнаружения сигнала от цели во всех *Q* каналах.

5. Берутся фазы на данной частоте: $\hat{\psi}_q = \arg\{\dot{s}_q(f_{\max})\}$, $q = \overline{1,Q}$, и вычисляются разности фаз $\Delta\hat{\psi}_q$, которые подаются на вход алгоритмов нахождения оценок $\hat{x}, \hat{y}$ координат x, y.

6. Оценки $\hat{x}, \hat{y}$ находятся независимо в каждой k-й выборке $\{s_q(t_n)\}_k$ в соответствии с алгоритмом, изложенным выше. Получается последовательность оценок $\hat{x}_k, \hat{y}_k$, $k = \overline{1,M}$.

7. Так как измеряемые фазы $\hat{\psi}_q$ при достижении предельного значения 2π делают скачок до нуля не одновременно в Q каналах, то и разности фаз $\Delta\hat{\psi}_q$ совершают подобный скачок. Это сказывается на скачкообразном изменении (выбросов) оценок координат $\hat{x}_k, \hat{y}_k$. Для обнаружения и исключения выбросов последовательность $\{\hat{x}_k, \hat{y}_k\}$ подвергается дополнительной траекторной обработке [6]: оценки координат сравниваются с экстраполированными координатами траектории движения цели (завязка траектории осуществляется в начальном поясе дальности при обнаружении цели). Если оценки координат попадают в доверительный интервал, то они рекуррентно усредняются. Если нет, то фиксируется пропуск, и оценки экстраполируются с увеличением доверительного интервала. Сброс ложной траектории осуществляется при наличии двух пропусков подряд.

8. Усреднение координат в данном поясе дальности прекращается, как только обнаруживается сбой при выполнении операций п. 4, то есть частота $f_{\max}$ не выделяется одновременно во всех Q каналах. Причиной сбоя является начало действия переотраженного сигнала (3).

9. На выход алгоритма выдаются усредненные значения оценок координат x, y, которые вместе с оценкой $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ передаются на устройство управления системой наблюдения.

10. Работа алгоритма повторяется для следующего пояса дальности.

Алгоритм 2. Алгоритм основан на методе многомерной калмановской фильтрации [7 – 9] во временной области. Известно, что случайный процесс вида (4) с дискретным временем t_n может быть описан авторегрессионной (АР) моделью. Рассмотрим модель АР(2):

$$\widetilde{s}_q(t_n) = b_1\widetilde{s}_q(t_{n-1}) + b_2\widetilde{s}_q(t_{n-2}),$$

или, заменив символ t_n на n:

$$\widetilde{s}_q(n) = b_1\widetilde{s}_q(n-1) + b_2\widetilde{s}_q(n-2), \quad n = 2,3,\ldots, \qquad (9)$$

с начальными значениями $\widetilde{s}_q(0), \widetilde{s}_q(1)$, где b_1, b_2 – параметры модели. При определенном выборе параметров b_1, b_2 модель (9) может аппроксимировать процесс (4). Уравнение (9) представляет собой однородное разностное уравнение. Если корни характеристического уравнения лежат на единичной окружности, то однородное уравнение имеет вид [10]:

$$\widetilde{s}_q(n) - 2a\widetilde{s}_q(n-1) + \widetilde{s}_q(n-2) = 0, \qquad (10)$$

и его решением является гармоническая функция

$$\widetilde{s}_q(n) = c_1\cos\omega n + c_2\sin\omega n = u\sin(\omega n + \psi), \quad (11)$$

где $u = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\psi = arctg(c_1/c_2)$.

$$\omega = arctg(\sqrt{1-a^2}/a).$$

Следовательно, поиск частоты ω можно свести к оценке параметра a. Упрощенно полагаем, что a не меняет своего значения на малом промежутке времени: $a(n) = a(n-1)$ при начальном условии $a(0) = a$. Если далее ввести в рассмотрение белый шум $w_q(n)$, то он придаст решению (11) стохастичность, присущую калмановской модели. Запишем (10) в виде системы:

$$\begin{cases} a(n) = a(n-1), \\ x_1(n) = x_2(n-1), \\ x_2(n) = -x_1(n-1) + 2ax_2(n-1), \end{cases} \qquad (12)$$

где $x_1(n) = \widetilde{s}_q(n)$, $x_2(n) = x_1(n+1)$, а (9) дополним белым шумом $w_q(n)$ с дисперсией σ_w^2:

$$s_q(n) = \widetilde{s}_q(n) + w_q(n) = x_1(n) + w_q(n). \qquad (13)$$

Обозначим $X_n = (a(n), x_1(n), x_2(n))^T$ – вектор состояния, T – символ транспонирования;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2a \end{pmatrix}, \qquad H = (0 \quad 1 \quad 0).$$

Из (12) получаем векторно-матричное уравнение изменения вектора X_n:

$$X_n = AX_{n-1}, \qquad (14)$$

а из (13) – модель измерения:

$$s_q(n) = HX_n + w_q(n). \qquad (15)$$

Задача заключается в нахождении оценки $\hat{X}_n$ вектора X_n на основании (14), (15). В такой одномерной постановке применим одномерный фильтр Калмана, известные рекуррентные соотношения которого (например, [6, 7]) сводятся к следующему:

$$R_{n,n-1} = AR_{n-1}A^T, \quad K_n = R_{n,n-1}H^T(HR_{n,n-1}H^T + \sigma_w^2)^{-1}, \tag{16}$$

$$\hat{X}_n = A\hat{X}_{n-1} + K_n(s_q(n) - HA\hat{X}_{n-1}), \quad R_n = R_{n,n-1} - K_nHR_{n,n-1}, \quad n = 1,2,... \tag{17}$$

Здесь $R_{n,n-1}$ − априорная ковариационная матрица ошибок оценивания, R_n − апостериорная ковариационная матрица ошибок оценивания, начальное значение которой R_0 примем равным единичной матрице; K_n − коэффициент усиления калмановского фильтра. Начальный вектор оценок $\hat{X}_0$ примем нулевым. В полученном векторе оценок $\hat{X}_n$ нас интересует его первый элемент – оценка $\hat{a}_n$ параметра $a(n)$.

Замечание. Так как матрица A зависит от оцениваемого параметра $a(n)$, то при вычислении матрицы $R_{n,n-1}$ в (16) используется прием линеаризации [9], а именно: вместо матрицы A берется производная от правой части (14) по вектору X_{n-1}:

$$R_{n,n-1} = (\partial AX_{n-1} / \partial X_{n-1})R_{n-1}(\partial AX_{n-1} / \partial X_{n-1})^T =$$

$$= \widetilde{A}R_{n-1}\widetilde{A}^T, \quad \text{где} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x_2(n-1) & -1 & 2a \end{pmatrix}.$$

Для учета измерений $s_q(n)$, полученных во всех Q каналах ($q = \overline{1,Q}$), осуществляется расширение вектора состояния X_n и соответствующее увеличение размерности в выражениях (16), (17) в соответствии с многомерным фильтром Калмана [8].

Алгоритм измерения фаз сводится к следующему:

1. На вход алгоритма поступают временные последовательности $s_q(t_n)$, $n = \overline{1,N}$, $q = \overline{1,Q}$, полученные в поясе дальности. Алгоритм обнаруживает момент времени t_k появления сигнала от цели во всех Q каналах по факту превышения порога обнаружения оценкой дисперсии сигнала. Для этого последовательность $s_q(t_n)$ центрируется вычитанием из $s_q(t_n)$ рекуррентно вычисляемой оценки $\hat{m}_q(t_n)$ среднего $m_q(t_n)$ − смещения в (4).

2. Осуществляется оценивание частоты сигнала от цели. Для этого берется первая выборка объема m ($m<N$): $\{s_q(t_n)\}$, $n = \overline{k+1, k+m}$, $k + m < N$. В каждый n-й момент времени формируется Q-мерный вектор наблюдений $S_n = (s_1(t_n), s_2(t_n),..., s_Q(t_n))^T$, который подается на вход многомерного калмановского фильтра.

3. Фильтр Калмана последовательно с изменением номера n находит оценку $\hat{X}_n$ расширенного вектора состояния. Первый элемент вектора $\hat{X}_n$ представляет оценку $\hat{a}_n$ параметра a в модели (10), (11). Эта оценка используется для вычисления оценки частоты:

$$\hat{\omega}_n = arctg(\sqrt{1 - \hat{a}_n^2} / \hat{a}_n).$$

4. В процессе работы основного фильтра Калмана параллельно и рекуррентно вычисляются оценки $\hat{\psi}_q(n)$ фазы ψ_q в q-х каналах ($q = \overline{1,Q}$). Для этого используется дополнительный фильтр Калмана, настроенный на модель наблюдений, вытекающую из (11):

$$\hat{x}_1(n) = c_1 \cos\hat{\omega}_n n + c_2 \sin\hat{\omega}_n n + e(n),$$

где $\hat{x}_1(n)$ − составляющая вектора оценок $\hat{X}_n$; $e(n)$ − погрешность оценивания, дисперсия которой содержится в матрице R_n.

Вводятся вектор состояния $Y_n = (y_1(n), y_2(n))^T$, где $y_1(n) = c_1$, $y_2(n) = c_2$, подчиненный уравнению

$$Y_n = AY_{n-1}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и модель измерения вида

$$\hat{x}_1(n) = C_nY_n + e(n), \quad C_n = (\cos\hat{\omega}_n n, \ \sin\hat{\omega}_n n).$$

Дополнительный фильтр Калмана работает аналогично (16), (17) и выдает последовательно оценки $\hat{Y}_n$ вектора Y_n, компоненты которого:

$$\hat{y}_1(n) = \hat{c}_1(n), \quad \hat{y}_2(n) = \hat{c}_2(n).$$

5. На основании $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ вычисляется оценка фазы:

$$\hat{\psi}_q(n) = arctg(\hat{c}_1(n) / \hat{c}_2(n)).$$

6. Совместная обработка фаз $\hat{\psi}_q(n)$, $q = \overline{1,Q}$, осуществляется в соответствии с алгоритмом оценивания координат, изложенным ранее.

Алгоритм 3. В отличие от алгоритма 2, где задача оценивания частоты и фазы решается с единой позиции калмановской фильтрации применительно к регрессионной модели, данный алгоритм основан на комбинированном (инженерном) подходе к решению задачи. Здесь случайный процесс $s_q(t)$, определенный в (4), отдельно в каждом q-м канале на промежутке времени $[t_{n-1}, t_n]$ представлен суммой:

$$s_q(t) = y_q(t) + w_q(t), \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \qquad (18)$$

где $y_q(t)$ − детерминированная функция:

$$y_q(t) = y_q(t_{n-1}) + y'_q(t_{n-1})(t - t_n) +$$
$$+ y''_q(t_{n-1})(t - t_{n-1})^2 / 2, \qquad (19)$$

включающая значение $y_q(t_{n-1})$, скорость $y'_q(t_{n-1})$ и ускорение $y''_q(t_{n-1})$ полезного сигнала от цели в момент времени t_{n-1}; $w_q(t)$ − случайная функция с нулевым средним, некоррелированная по дискретному времени t_n. Взяв от $y_q(t)$ производные по t:

$$y'_q(t) = y'_q(t_{n-1}) + y''_q(t_{n-1})(t - t_{n-1}), \qquad (20)$$
$$y''_q(t) = y''_q(t_{n-1})$$

и обозначив $X_n = (x_1(n), x_2(n), x_3(n))^T$ − вектор состояния, где $x_1(n) = y_q(t_n)$, $x_2(n) = y'_q(t_n)$, $x_3(n) = y''_q(t_n)$, перейдем от (19), (20) к разностному уравнению:

$$X_n = A X_{n-1}, \qquad (21)$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & t_n - t_{n-1} & (t_n - t_{n-1})^2/2 \\ 0 & 1 & t_n - t_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

и от (18) – к модели измерения:

$$s_q(t_n) = y_q(t_n) + w_q(t_n), \text{ или}$$
$$s_q(n) = HX_n + w_q(n), \quad H = (1, 0, 0)^T. \qquad (22)$$

Получена калмановская модель (21), (22), совпадающая по форме с (14), (15), к которой применим алгоритм (16), (17) с нулевым вектором $\hat{X}_0$.

В найденном векторе оценок $\hat{X}_n$ нас интересует элемент $x_3(n)$ − вторая производная от $y_q(t)$. Так как $y_q(t)$ аппроксимирует полезный сигнал на $[t_{n-1}, t_n]$, то изменение знака $x_3(n)$ соответствует переходу синусоиды через ноль (достаточный признак изменения знака выпуклости). На этом основана идея нахождения оценки частоты ω в q-х каналах, реализованная в следующем алгоритме:

1. В поясе дальности R в последовательностях $s_q(t_n)$, $n = \overline{1, N}$, рассматриваются k-е подпоследовательности − выборки объема m ($m < N$): $\{\dot{s}_q(t_n)\}_k$, $n = \overline{(k-1)m+1, km}$, $m < N$, $k = \overline{1, M}$, общим числом M.

2. Каждая k-я последовательность $\{s_q(t_n)\}_k$ в q-м канале ($q = \overline{1, Q}$) подается на вход калмановского фильтра (16), (17). Для упрощения коэффициент усиления K_n принимается постоянным: $K_n = K$ и вычисляется заранее на момент окончания переходного процесса фильтра, что не влияет на его сходимость. На выходе фильтра получается последовательность оценок ускорения $\{\hat{x}_3(n)\}$.

3. По числу L изменений знака $\hat{x}_3(n)$ в последовательности $\{t_n\}$ на промежутке $[t_{(k-1)m}, t_{km}]$, что определяет число полупериодов синусоиды, вычисляется k-я оценка частоты в q-м канале:

$$\hat{\omega}_q(k) = 2\pi / T_k, \quad T_k = (t_{km} - t_{(k-1)m})/(L/2) \quad \Rightarrow$$
$$\hat{\omega}_q(k) = \pi L / (t_{km} - t_{(k-1)m}).$$

4. Для оценок частоты $\hat{\omega}_q(k)$, $q = \overline{1, Q}$ вычисляются средняя по q оценка частоты $\overline{\omega}(k)$ и СКО оценки $\sigma_{\hat{\omega}}$. Соответствие k-й подпоследовательности полезному сигналу от цели проверяется сравнением $\sigma_{\hat{\omega}}$ с порогом. Если $\sigma_{\hat{\omega}}$ меньше заданного порога, то выполняются операции п. 5.

5. Для оценки частоты $\overline{\omega}(k)$ определяются оценки $\hat{\psi}_q(k)$ фаз ψ_q в q-х каналах в последовательности $\{t_n\}$ на промежутке $[t_{(k-1)m}, t_{km}]$. Для модели полезного сигнала вида $s_q(t_n) = u \sin(\overline{\omega}\, t_n + \psi_q)$ произведения $s_q(t_n)$ на $\cos(\overline{\omega}\, t_n)$ и $\sin(\overline{\omega}\, t_n)$ дают:

$$A_q(t_n) = s_q(t_n)\cos(\overline{\omega}\, t_n) = \qquad (23)$$
$$= (u/2)\sin(2\overline{\omega}\, t_n + \psi_q) + (u/2)\sin\psi_q,$$
$$B_q(t_n) = s_q(t_n)\sin(\overline{\omega}\, t_n) =$$
$$= (u/2)\cos\psi_q - (u/2)\cos(2\overline{\omega}\, t_n + \psi_q).$$

При усреднении левых частей (23) по времени t_n в k-й последовательности $\{s_q(t_n)\}_k$ остаются константы правых частей и по усредненным значениям $\overline{A}_q$ и $\overline{B}_q$ находятся $\sin\psi_q = (2/u)\overline{A}_q$ и $\cos\psi_q = (2/u)\overline{B}_q$, пара значений которых определяет $\hat{\psi}_q(k) \in [0, 2\pi]$.

6. В последовательности оценок фаз $\{\hat{\psi}_q(k)\}$ могут быть резкие скачки $\hat{\psi}_q(k)$ на величину 2π. Для устранения выбросов в качестве оценки $\hat{\psi}_q$ в данном поясе дальности берется медиана последовательности $\{\hat{\psi}_q(k)\}$.

7. Найденные в q-х каналах оценки фаз $\hat{\psi}_q$, $q = \overline{1,Q}$ обрабатываются далее в соответствии с операциями алгоритма оценивания координат.

Результаты моделирования работы алгоритмов. Для моделирования работы алгоритмов разрабатывалась компьютерная модель тракта первичной обработки принимаемых сигналов в поясах дальности. На множестве реализаций эксперимента имитировалось прямолинейное движение цели с заданной начальной скоростью и ускорением.

Траектория движения задавалась случайным образом в зоне видимости РЛС. Цель начинала движение на заданной дальности и двигалась в сторону РЛС. В зависимости от текущей радиальной скорости вычислялась доплеровская частота. Координаты траектории запоминались в текущем дискретном времени с частотой дискретизации АЦП в каждом стробе дальности.

Сигналы на выходе АЦП в пяти приемных каналах моделировались в соответствии с изложенным выше математическим описанием.

В таблице даны среднеквадратические отклонения оценок угловых координат целей, найденных алгоритмами, от моделируемых угловых координат (в радианах), в разных опытах.

N п/п	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3
1	0.034	0.078	0.220
2	0.056	0.005	0.100
3	0.110	0.090	0.100
4	0.084	0.042	0.148
5	0.070	0.067	0.106
6	0.039	0.036	0.002
7	0.036	0.032	0.033
8	0.030	0.006	0.019
9	0.060	0.025	0.008
10	0.030	0.025	0.019
11	0.040	0.045	0.001
12	0.036	0.018	0.003
13	0.038	0.013	0.013
14	0.031	0.004	0.007
15	0.036	0.007	0.013
16	0.039	0.003	0.052
17	0.041	0.018	0.004
18	0.033	0.051	0.015
19	0.040	0.034	0.026
Средн.	0.046	0.032	0.047

Окончание таблицы

Выводы. Полученные значения позволяют сделать вывод, что алгоритмы 1 и 3 имеют близкую точность определения координат. Алгоритм 2 показывает более высокую точность по сравнению с алгоритмами 1 и 3.

Библиографический список

1. Радиолокационные системы: учебник для вузов по специальности "Радиоэлектронные системы" направления "Радиотехника" / *П.А. Бакулев*. 2-е изд., перераб. и доп . М.: Радиотехника, 2007. 376 с.

2. Защита радиолокационных систем от помех. Состояние и тенденции развития / под ред. *А.И. Канащенкова* и *В.И. Меркулова*. М.: Радиотехника, 2003. 416 с.

3. *Финкельштейн М.И.* Основы радиолокации: учебник для вузов. М.: Радио и связь, 1983. 536 с.

4. *Клочко В.К., Усачев А.Н.* Математическая модель и методы оценивания угловых координат воздушных целей с помощью наземной доплеровской РЛС // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 47. С. 41 – 46.

5. *Клочко В.К., Усачев А.Н., Нгуен Ч.Т.* Алгоритм формирования изображений объектов на основе фазового метода измерения пространственных координат // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 49. С. 128 – 131.

6. *Кузьмин С.З.* Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. М.: Радио и связь, 1986. 352 с.

7. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / пер. с англ. под ред. Б.Р. Левина. М.: Связь, 1976. 495 с.

8. *Кузнецов В.П., Чураков Е.П.* Система фильтров Калмана для оценки параметров отраженного сигнала // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2015. № 51. С. 9 – 14.

9. Математические основы теории систем: учеб. пособие / *Л.Д. Певзнер, Е.П. Чураков*. М.: Высш. шк., 2009. 503 с.