СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 517.9

М.Т. Терёхин

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЯЕМОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТАБИЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Исследована управляемая математическая модель экономической системы с заранее заданными краевыми условиями. Определены условия, при которых будут выполнены (не выполнены) плановые задания в условиях внешних воздействий. Определен допустимый объем внешних возмущений, при котором возможно стабильное развитие экономической системы при заданном стабилизационном объеме.

Ключевые слова: *стабилизационный объем, объем внешних возмущений, ранг матрицы, минор, оператор, неподвижная точка.*

Введение. На развитие любой экономической системы существенным образом влияют не только инвестиционные вложения, но и внешние возмущения, возникающие чаще всего неожиданно: внезапное изменение тарифных ставок на энергоносители, воду, повышение налоговых и арендных платежей, природные явления и многое другое. Поэтому возникает необходимость определить такой способ управления системой, который обеспечивал бы стабильное развитие экономической системы в условиях внешних воздействий, то есть такое развитие системы, при котором в условиях внешних воздействий, при заданном начальном объеме производственных фондов был бы получен запланированный результат.

Цель работы – исследовать проблему развития экономической системы в условиях внешних воздействий.

Постановка задачи. В статье в качестве математической модели развития экономической системы рассматривается система дифференциальных уравнений вида [1-3].

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + S(t)\,\mu + f(t) + \varphi(t,u,\mu), \qquad (1)$$

в которой $x - n$-мерный вектор-объем производственных фондов, $u - m$-мерный вектор-управление, $\mu - k$-мерный вектор внешних воздействий, *A(t)*, *B(t)*, *S(t)* – матрицы, характеризующие влияние текущего объема производственных фондов, управления, внешних воздействий на темп развития системы, вектор-функция $\varphi(t,u,\mu)$ определяет нелинейное влияние векторов управления и внешних воздействий на темп развития экономической системы, вектор-функция $f(t)$ определяет инвестиционные вложения в развитие системы в отсутствие внешних воздействий (плановые инвестиции в экономическую систему в соответствии с утвержденными тарифами на энергоносители, воду, налоговыми и арендными платежами).

Экономическая задача ставится так: для сохранения стабильного развития экономической системы определить объем инвестиционных вложений, компенсирующих возможные потери в результате внешних воздействий.

Далее будем предполагать, что матрицы *A(t)*, *B(t)*, *S(t)* и вектор-функция $f(t)$ непрерывны на сегменте $[0,T]$, $T>0$ – некоторое число, вектор-функция $\varphi(t,u,\mu)$ непрерывна на множестве $[0,T]\times E_m \times E_k$, $E_S - s$-мерное векторное пространство, $\varphi(t,0,0)\equiv 0$ на сегменте $[0,T]$, $|y|=\max_i\{|y_i|\}$.

Определение. Вектор-функция $x(t)$, определенная на сегменте $[0,T]$, называется решением системы (1), соответствующим управлению u и внешним воздействиям μ, если $x(t)$ при любом $t\in[0,T]$ удовлетворяет равенству (1).

Рассматривая $\alpha\in E_n$ как начальный вектор-объем производственных фондов $(t=0)$, $\beta\in E_n$ – вектор-объем производственных фондов, который планируется достичь к моменту T, сформулированную выше экономическую задачу математически можно поставить так: найти соотношение между координатами вектора управления и вектора внешних воздействий, при котором гарантируется стабильное развитие экономической системы.

Очевидно, что в отсутствие внешних воздействий ($\mu=0$, следовательно и $u=0$) математической моделью развития экономической системы является система уравнений вида

$$\dot{x}=A(t)x+f(t). \qquad (2)$$

Пусть $x_0(t)$ – решение системы (2), удовлетворяющее краевым условиям $x(0)=\alpha$, $x(T)=\beta$. Заменой переменных $\bar{x}=x-x_0$ система (2) преобразуется в систему (сохранив прежние обозначения)

$$\dot{x}=A(t)x, \qquad (3)$$

решение $x_0(t)$ системы (2) – в решение $x\equiv 0$ системы (3), система (1) преобразуется в систему

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+S(t)\mu+\varphi(t,u,\mu). \qquad (4)$$

Поставленная выше математическая задача теперь может быть сформулирована следующим образом: найти условия существования векторов u и μ, $|u|+|\mu|\neq 0$ и соответствующее им решение $x(t)$ системы (4), удовлетворяющее краевым условиям $x(0)=x(T)=0$.

Теоретические исследования. Для удобства рассуждений далее в системе (4) u будем называть стабилизирующим вектор-объемом (или просто стабилизирующим объемом), μ – вектор-объемом (или просто объемом) внешних воздействий.

I. Исследуем сначала случай, когда $\varphi(t,u,\mu)\equiv 0$ на множестве $[0,T]\times E_m\times E_k$. Решение системы (4), удовлетворяющее условию $x(0)=\alpha$, запишем в виде

$$x(t)=X(t)\alpha+X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)[B(\xi)u+S(\xi)\mu]d\xi,$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x}=A(t)x$, $X(0)=E$, E – единичная матрица.

Учитывая краевые условия $x(0)=x(T)=0$ и то, что $\det X(t)\neq 0$, получаем:

$$\int_0^T X^{-1}(t)[B(t)u+S(t)\mu]dt=0. \qquad (5)$$

Тогда, полагая $\int_0^T X^{-1}(t)B(t)dt=P$, $\int_0^T X^{-1}(t)\times S(t)dt=Q$, систему (5) можно записать так:

$$Pu+Q\mu=0. \qquad (6)$$

Следовательно, проблема поиска решения поставленной математической задачи свелась к проблеме разрешимости системы (6). Найдем условия разрешимости системы (6), то есть определим условия существования векторов u и μ, $|u|+|\mu|\neq 0$, удовлетворяющих равенству (6).

Далее всюду будем предполагать, что $\mu\neq 0$ (внешние воздействия существуют).

1. Пусть $rang P=n$. Для простоты рассуждений положим, что минор порядка n, отличный от нуля, расположен на первых n столбцах матрицы P. Тогда, представив матрицу P равенством $P=(P_1,P_2)$, $\det P_1\neq 0$, вектор u – равенством $u=(u_1,u_2)$, u_1 – n-мерный вектор, получим:

$$u_1+P_1^{-1}P_2u_2=-P_1^{-1}Q\mu. \qquad (7)$$

Равенство (7) определяет часть u_1 стабилизационного объема, которая вместе с его частью u_2 обеспечивает стабильное развитие экономической системы.

Отметим, что общий стабилизационный объем u определяется равенством $u=(u_1,u_2)$. Из равенства (7) следует, что часть u_1 стабилизационного объема зависит от части u_2. Поэтому u_2 можно выбрать произвольно и даже равным нулю.

2. Пусть $rang\,Q=n$. Тогда, аналогично рассуждая, получаем, что

$$\mu_1+Q_1^{-1}Q_2\mu_2=-Q_1^{-1}Pu. \qquad (8)$$

(Здесь $Q=(Q_1,Q_2)$, $\det Q_1\neq 0$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, μ_1 – n-мерный вектор, для определённости предположено, что минор порядка n, отличный от нуля, расположен на первых n столбцах матрицы Q).

С точки зрения экономической системы равенство (8) определяет объем внешних воздействий, который система может преодолеть посредством заранее запланированного стабилизационного объема.

3. Пусть $rang P < n$, $rang Q < n$, $r = m + k$. Матрицу R определим равенством $R = [P, Q]$, вектор γ – равенством $\gamma = (u, \mu)$. Система (6) запишется в виде

$$R\gamma = 0. \quad (9)$$

3.1. Предположим, что $r \le n$ и $rang R = r$. Единственным решением системы (9) является $\gamma = 0$. Экономическая система не жизнеспособна, отсутствует стабилизационный объем, любые внешние воздействия уничтожают экономическую систему.

3.2. Предположим, что $r \le n$ и $rang\ R = \lambda$, $\lambda < r$. Для простоты рассуждений будем предполагать, что минор порядка λ, отличный от нуля, расположен в левом верхнем углу матрицы R. Тогда элементарными преобразованиями систему (9) можно свести к системе

$$R_1\gamma_1 + R_2\gamma_2 = 0, \quad (10)$$

в которой R_1 $-\lambda \times \lambda$ -матрица, $\det R_1 \ne 0$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 -$ λ -мерный вектор. Следовательно,

$$\gamma_1 = -R_1^{-1}R_2\gamma_2. \quad (11)$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) пусть $\gamma_1 = u$, $\gamma_2 = \mu$. Тогда $u = -R_1^{-1}R_2\mu$. Экономическая система стабильно развивается, стабилизационный объем достаточен для нейтрализации внешних воздействий;

б) пусть $\gamma_1 = \mu$, $\gamma_2 = u$. Тогда $\mu = -R_1^{-1}R_2 u$ и следовательно, определён допустимый объем внешних воздействий, при котором возможно стабильное развитие экономической системы при заранее заданном стабилизационном объеме;

в) предположим $\gamma_1 = (u_1, \mu_1)$, $\gamma_2 = (u_2, \mu_2)$, $L = -R_1^{-1}R_2$. Тогда равенство (11) можно записать так: $u_1 = L_1\gamma_2$, $\mu_1 = L_2\gamma_2$, где $L = colon(L_1, L_2)$. Это значит, что

$$u_1 - L_{11}u_2 = L_{12}\mu_2, \ L_{21}u_2 = +\mu - L_{22}\mu_2, \quad (12)$$

$L_1 = (L_{11}, L_{12})$, $L_2 = (L_{21}, L_{22})$. Из равенства (12) следует, что экономическая система стабильно развивается тогда и только тогда, когда существует часть u_2 стабилизационного объема, удовлетворяющая равенству (12).

3.3. Пусть $r > n$ и $rang\ R = n$. Для простоты рассуждений предположим, что минор порядка ν матрицы R, отличный от нуля, расположен на первых n столбцах матрицы R. Тогда элементарными преобразованиями систему (9) можно свести к системе, аналогичной системе (10) [сохраним обозначения системы (10)]. Исследование этого случая и выводы аналогичны исследованиям и выводам случая 3.2.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Экономическая система (математическая модель (4) при $\varphi(t,u,\mu) \equiv 0$) не жизнеспособна, если выполнено одно из следующих условий:

i₁). $r \le n$, $rang\ R = r$;

i₂). существует часть стабилизационного объема, не удовлетворяющая системе (12)
и стабильно развивается во всех остальных случаях.

II. Пусть $\varphi(t,u,\mu) \not\equiv 0$. Решение $x(t)$ $(x(0) = \alpha)$ системы (4) примет вид

$$x(t) = X(t)\alpha + X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)[B(\xi)u + S(\xi)\mu + \varphi(\xi,u,\mu)]d\xi.$$

Используя ранее принятые обозначения, полагая $\varphi^*(u,\mu) = \int_0^T X^{-1}(t)\varphi(t,u,\mu)dt,$ учитывая краевые условия $x(0) = x(T) = 0$ и то, что $\det X(T) \ne 0$, $\gamma = (u, \mu)$, получаем, что

$$R\gamma + \varphi^*(\gamma) = 0. \quad (13)$$

Из свойств вектор-функции $\varphi(t,u,\mu)$ следует, что $\lim_{\gamma\to 0}\varphi^*(\gamma) = 0$. Далее будем предполагать, что $\lim_{\gamma\to 0}\varphi^*(\gamma)/|\gamma| = 0$.

Найдем условия стабильного развития экономической системы, математической моделью которой является система (4).

i₃). Пусть $r = n$, $rang\ R = r$. Заменой переменных $\gamma = \rho l$, $\rho > 0$, $|l| = 1$, система (13) сведется к системе $Rl + O(\rho) = 0$, в которой $\lim_{\rho\to 0}O(\rho) = \lim_{\rho\to 0}\varphi^*(\rho l)/|\rho|$ равномерно относительно l.

При любом l $|Rl|>0.$ Поэтому по теореме Вейерштрасса существует число $m>0$ такое, что при любом l $(|l|=1)$ $|Rl|\geq m.$ Из того, что $\lim\limits_{\rho\to 0}O(\rho)=0,$ следует существование числа $\rho^*>0,$ при котором для любого $\rho\in(0,\rho^*]$ выполняется неравенство $|O(\rho)|<m$ и, следовательно, неравенство $|Rl+O(\rho)|\geq\big\||Rl|-|O(\rho)|\big\|>0.$ Это значит, что при любых l $(|l|=1),$ $\rho\in(0,\rho^*]$ равенство (13) не выполняется, следовательно, экономическая система не жизнеспособна, отсутствует стабилизационный объем, внешние воздействия уничтожают систему.

i₄). Пусть $r>n$ и $rang\,R=n.$ Предположим для простоты рассуждения, что минор порядка $n,$ отличный от нуля, расположен на первых n столбцах матрицы $R.$ Тогда систему (13) можно записать так:

$$R_1\gamma_1+R_2\gamma_2+\varphi^*(\gamma)=0,$$

где R_1- $n\times n$-матрица, $\det R_1\neq 0,$ $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2).$ Следовательно, $\gamma_1=-R_1^{-1}[R_2\gamma_2+\varphi^*(\gamma)].$

Убедимся, что оператор $\Gamma,$ определенный равенством $\Gamma\gamma_1=-R_1^{-1}[R_2\gamma_2+\varphi^*(\gamma)],$ имеет ненулевую неподвижную точку. С этой целью заметим, что $\lim\limits_{\gamma\to 0}\varphi^*(\gamma)/|\gamma|=0.$ Следовательно, существует число $\delta>0$ такое, что при любом γ $(|\gamma|\leq\delta)$ выполнено неравенство $|R_1^{-1}\varphi^*(\gamma)|<\frac{1}{2}\delta.$

Из того, что $\lim\limits_{\gamma_2\to 0}R_2\gamma_2=0,$ следует, что число $\delta_1\in(0,\delta]$ можно выбрать так, что при γ_2 $(|\gamma_2|\leq\delta_1)$ выполнено неравенство $|R_1^{-1}R_2\gamma_2|<\frac{1}{2}\delta.$ Это значит, что при любом фиксированном γ_2 $(|\gamma_2|\leq\delta_1),$ при любом γ_1 $(|\gamma_1|\leq\delta)$ выполнено неравенство $|\Gamma\gamma_1|=|-R_1^{-1}[R_2\gamma_2+\varphi^*(\gamma)]|<\delta,$ то есть оператор Γ при любом фиксированном γ_2 $(|\gamma_2|\leq\delta_1)$ множество $\{\gamma_1:|\gamma_1|\leq\delta\}$ отображает в себя и, следовательно, имеет на этом множестве неподвижную точку. Непрерывность оператора Γ на множестве $\{\gamma_1:|\gamma_1|\leq\delta\}$ следует из его определения.

Фиксируем γ_2^* $(0<|\gamma_2^*|\leq\delta_1).$ Тогда существует точка γ_1^* $(|\gamma_1^*|\leq\delta),$ удовлетворяющая равенству

$$\gamma_1^*+R_1^{-1}R_2\gamma_2^*=-R_1^{-1}\varphi^*(\gamma^*). \qquad (14)$$

Равенство (14) определяет соотношение между стабилизационным объемом и объемом внешних воздействий, при котором имеет место стабильное развитие экономической системы.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Согласно математической модели (4) экономическая система в условиях внешних воздействий не жизнеспособна, если $r=n$ и $rang\,R=n,$ и может стабильно развиваться, если $r>n$ и $rangR=n$.

i₅). Пусть $rangR=v<n,$ $r\geq n,$ вектор-функция $\varphi^*(\gamma)$ представима равенством $\varphi^*(\gamma)=\varphi_k(\gamma)+o(|\gamma|^k)$, в котором $\varphi_k(\gamma)$ – вектор-форма порядка k относительно вектора γ, $\lim o(|\gamma|^k)/|\gamma|^k=0$.

Для определённости положим, что минор порядка v, отличный от нуля, расположен в верхнем углу матрицы $R.$ Тогда элементарными преобразованиями матриц системы (13) можно привести к системе

$$\begin{cases} R^*(\gamma)=+o(|\gamma|^k)=0,\\ \varphi_k^*(\gamma)+o(|\gamma|^k)=0, \end{cases} \qquad (15)$$

в которой R^*- $v\times r$-матрица, $rang\,R^*=v,$ $\varphi_k^*(\gamma)-$ вектор-форма порядка k относительно вектора γ, $\lim\limits_{\gamma\to 0}o(|\gamma|^k)=0,$ $\lim\limits_{\gamma\to 0}o(|\gamma|^k)=0$, $\lim\limits_{\gamma\to 0}o(|\gamma|^k)/|\gamma|^k=0.$

Полагая $\gamma=\rho\,l$, $\rho>0$, систему (15) преобразуем в систему

$$colon(R^*l,\varphi_k^*(l))+O(\rho,|l|)=0. \qquad (16)$$

Как и в пункте *i₃),* убеждаемся, что если при любом l $(|l|=1)$ $colon(R^*l,\varphi_k^*(l))\neq 0,$ то существует число $\rho^*>0$ такое, что при любых $\rho\in(o,\rho^*)$ и l $(|l|=1)$ равенство (16) не выполняется.

Предположим, что существует вектор l^* $(|l^*|=1)$, удовлетворяющий равенству

$$colon(R^*l^*,\varphi_k^*(l^*))=0.$$

Тогда в окрестности точки l^* систему (16) можно записать так:

$$R^*(l-l^*)+O_1(\rho,|l|)=0,$$

$$D(l^*)(l-l^*)+O(\left|l-l^*\right|^i)+O_2(\rho,|l|)=0, \quad (17)$$

где $D(l^*)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $\varphi_k^*(l)$ в точке l^*, $\lim\limits_{l\to l^*} O(|l-l^*|^i)=0$, при любом $j\in\{1,2\}$ $\lim\limits_{\rho\to 0} O_j(\rho,|l|)=0$ равномерно относительно l $(|l|<\Delta, \Delta>1)$, $i\geq 2$.

Положив для простоты записей $l-l^*=\tau$, систему (17) сведем к системе

$$Y\tau+\overline{O}(|\tau|^i)+O(\rho,|l|)=0, \quad (18)$$

в которой $Y=colon(R^*,D(l^*))$, $\overline{O}(|\tau|^i)=colon(0, O(|\tau|^i))$, $O(\rho,|l|)=colon(O_1(\rho,|l|),O_2(\rho,|l|))$.

Пусть $rang\,Y=n$. Тогда систему (17) можно представить равенством

$$Y_1\tau_1+Y_2\tau_2+\overline{O}(|\tau|^i)+O(\rho,|l|)=0,$$

где $\det Y_1\neq 0$, $\tau=(\tau_1,\tau_2)$ (принято для определенности, что минор порядка n, отличный от нуля матрицы Y, расположен на первых n столбцах матрицы Y). Следовательно,

$$\tau_1=-Y_1^{-1}[Y_2\tau_2+O(|\tau|^i)+O(\rho,|l|)].$$

Оператор Γ_1 определим равенством

$$\Gamma_1\tau_1=-Y_1^{-1}[Y_2\tau_2+\overline{O}(|\tau|^i)+O(\rho,|l|)].$$

Докажем, что оператор Γ_1 имеет неподвижную точку. Действительно, из того, что $\lim\limits_{\tau\to 0} Y_1^{-1}\times$ $\times\overline{O}(|\tau|^i)/|\tau|=0$, следует, что существует число $\sigma>0$ такое, что при любом τ $(|\tau|\leq\sigma)$ выполняется неравенство $|-Y_1^{-1}O(|\tau|^i)|<\dfrac{\sigma}{3}$.

Из того, что $\lim\limits_{\tau\to 0} Y_1^{-1}Y_2\tau_2=0$, следует, что число $\sigma_1\in(0,\sigma]$ можно выбрать так, что при любом τ_2 $(|\tau_2|<\sigma_1)$ справедливо неравенство $|Y_1^{-1}Y_2\tau_2|<\dfrac{\sigma}{3}$. Это значит, что при любых фиксированных $\rho\in(0,\rho_0)$, τ_2 $(|\tau_2|<\sigma_1)$ и любом τ_1 $(|\tau_1|\leq\sigma)$ [и, следовательно, при любом τ $(|\tau|<\sigma)$] выполнено неравенство $|\Gamma_1\tau_1|=|Y_1^{-1}\times$ $\times[Y_2\tau_2+O(|\tau|^i)+O(\rho,|l|)|<\sigma$, то есть оператор Γ_1 имеет неподвижную точку. Непрерывность оператора следует из его определения.

Фиксируем τ_2^* $(0<|\tau_2^*|<\sigma_1)$, $\overline{\rho}\in(0,\rho_0)$. Тогда существует точка τ_1^* такая, что $\Gamma_1\tau_1^*=\tau_1^*$ и выполнено равенство

$$R\overline{\gamma}+\varphi^*(\overline{\gamma})=0, \quad (19)$$

в котором $\overline{\gamma}=\overline{\rho}(e^*+\tau^*)$, $\tau^*=(\tau_1^*,\tau_2^*)$.

Равенство (19) устанавливает связь между стабилизационным объемом и объемом внешних воздействий, при которой имеет место стабильное развитие экономической системы.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Согласно математической модели (4) экономическая система в условиях внешних воздействий может оказаться не жизнеспособной, если при любом l $(|l|=1)$ $colon(R^*\gamma, \varphi_k^*(\gamma))\neq 0$, и может стабильно развиваться, если $rang Y=n$.

Экспериментальные исследования. В качестве экспериментальной экономической системы рассматривается её математическая модель вида

$$\dot{x}=B(t)u+S(t)\mu+f(t), \quad (20)$$

в которой $B(t)=[colon(4t,0,1),colon(1,4t,0)]$, $S(t)=[colon(1,1,0),colon(6t,8t,2),colon(0,1,2t)]$, $f(t)=colon(2t^2+3,t+1,t^2+4)$.

При отсутствии внешних воздействий $(\mu=0$, следовательно, и $u=0)$ моделью развития экономической системы является система уравнений $\dot{x}=f(t)$, решение которой – вектор-функция $x_0(t)=colon(\frac{2}{3}t^3+3t,\frac{t^2}{2}+t,\frac{t^3}{3}+4t)$, $x_0(0)=0$, $x_0(1)=colon(\frac{11}{3},\frac{3}{2},\frac{13}{3})$. Следовательно, $\alpha=0$ – нулевой начальный объем производственных фондов, $\beta=colon(\frac{11}{3},\frac{3}{2},\frac{13}{3})$ – объем производственных фондов, который система достигнет к моменту $T=1$ при отсутствии внешних воздействий.

Выясним, способна ли экономическая система [согласно модели (20)] стабильно развиваться в условиях внешних воздействий, то есть при $\alpha=0$ получит ли система к моменту $T=1$ запланированный объем β.

Заменой переменных $\overline{x}=x-x_0(t)$ система (20) сведется к системе (сохраним прежние обозначения) $\dot{x}=B(t)u+S(t)\mu$, решением которой является вектор-функция

$$x(t) = \int_0^t B(\xi) u d\xi + \int_0^t S(\xi) \mu d\xi,$$

где $\int_0^t B(\xi) d\xi = [colon(2t^2, 0, t), colon(t, 2t^2, 0)]$, $\int_0^t S(\xi) d\xi$ $= [colon(t, t, 0), colon(3t^2, 4t^2, 2t), colon(0, t, t^2)]$.

Для определения векторов u и μ согласно краевым условиям $x(0) = x(1) = 0$ можно получить систему уравнений вида

$$Pu + Q\mu = 0, \qquad (21)$$

в которой $P = [colon(2,0,1), colon(1,2,0)]$, $Q =$ $= [colon(1,1,0), colon(3,4,2), colon(0,0,1)]$. Тогда, учитывая, что $\det Q \neq 0$, из системы (21) будем иметь $\mu = -Q^{-1} Pu$.

Пусть $u_0 = (1,2)$. Непосредственным вычислением устанавливаем, что $\mu_0 = (1,5,4)$. С точки зрения экономической системы [модель (20)] вектор $u_0 = (1,2)$ определяет стабилизационный объем. Следовательно, экономическая система стабильно развивается, если объем внешних воздействий определяется равенством $\mu_0 = (1,5,4)$, экономическая система не жизнеспособна, если объем внешних воздействий удовлетворяет неравенству $\mu \neq \mu_0$.

Выводы. В результате исследований установлено, что для экономической системы (модель – система дифференциальных уравнений) в предположении, что нелинейная связь между вектором управления и вектором внешних воздействий отсутствует, определены (теорема 1) как условия, при которых экономическая система стабильно развивается, так и условия, при которых экономическая система не жизнеспособна.

В условиях существования нелинейной связи между вектором управления и вектором внешних воздействий в системе дифференциальных уравнений по свойствам линейных и нелинейных частей системы установлены случаи стабильного развития и случаи нежизнеспособности экономической системы.

Предложена практическая реализация теоретических исследований к изучению конкретной математической модели экономической системы. Численно определены условия стабильного развития (жизнеспособности) экономической системы.

Библиографический список

1. *Максимов В.П.* О некоторых обобщениях дифференциальных уравнений, краевых задач и их приложениях к задачам экономики // Вестник Пермского государственного технического университета. Функционально-дифференциальные уравнения. 1997. № 4. С. 103-120.

2. *Терёхин М.Т., Свирилина Т.В.* Циклы в нелинейных моделях двухсекторной экономики// Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2004. № 15. С. 91-97.

3. *Терёхин М.Т., Ермакова С.А.* Исследование математической модели развития многосекторной экономики // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2006. № 18. С. 108-115.