

В.А. Коротченко, Д.В. Суворов

**САМОСОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ
ФОРМИРОВАНИЯ ОБЪЕМНОГО РАЗРЯДА.
II. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ РАЗРЯДА**

Представлена численная реализация модели формирования объемного разряда. Описаны особенности алгоритма модели, обеспечивающие устойчивость численного расчета. Приведены результаты моделирования для азотного лазера с накачкой поперечным разрядом.

Введение. В предыдущей части работы [7] представлена система дифференциальных уравнений с частными производными, описывающая развитие разряда. Данная система, включающая сложные граничные и начальные условия, а также уравнения внешней цепи и уравнение для расчёта напряженности поля, аналитического решения не имеет. Поэтому необходимо применять численные методы, позволяющие получить приближенное решение задачи. В этой части работы изложена методика численного решения, основанная на методе конечных разностей.

1. Расчетная сетка. В одномерной численной модели разрядный промежуток разбивается на две расчетных области – прикатодная область с высокими значениями напряженности поля и область плазмы. Прикатодная область разбивается на mk слоев с шагом Δx_k , а область плазмы разбивается на mp слоев с шагом Δx_p . Таким образом, реализуется неоднородная сетка (рисунок 1), обеспечивающая значительное повышение экономичности модели.

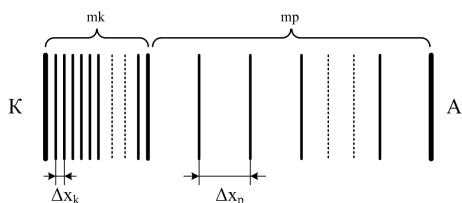


Рисунок 1 – Неоднородная расчетная сетка: mk и mp – количества элементарных слоёв прикатодной области и области плазмы

Величина $mk \cdot \Delta x_k$ выбиралась таким образом, чтобы формирующаяся область резкого градиента потенциала, соответствующая катодному падению, полностью помещалась в интервал $mk \cdot \Delta x_k$ на всей стадии развития разряда. Типовые значения величин: $mk=200$, $\Delta x_k=0.02 \cdot \Delta x_p$, $mp=1000$. Общее число слоев – n .

Каждому из слоев сопоставляется набор величин: число электронов N_e , число ионов N_p , число возбужденных частиц j -го сорта N_{ph_j} , ве-

личина напряженности поля E , разность потенциалов на его границах U .

2. Численный расчет электродинамики цепи совместно с процессами в газоразрядном промежутке. В конечно-разностном виде система уравнений внешней цепи записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U_{Cs}^{i+1} &= U_{Cs}^i - \frac{I_C^i}{Cs} \Delta t, \\
 U_{Cp}^{i+1} &= U_{Cp}^i + \frac{I_C^i - I_D^i}{Cp} \Delta t, \\
 I_C^{i+1} &= I_C^i + \frac{\Delta t}{L1} [U_{Cs}^i - U_{Cp}^i - I_C^i \cdot R_T], \\
 R_T^i &= 0.08 + \frac{1}{4 \cdot 10^7 t}, \\
 I_D^{i+1} &= I_D^i + \frac{\Delta t}{L2} [U_{Cp}^i - I_D^i \cdot R - U_A^i],
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где U_{Cs} , U_{Cp} – напряжения на накопительной и обострительной емкостях, I_C – ток контура заряда обострительной емкости, I_D – ток разряда, $L1$, $L2$ – индуктивности цепи, R_T – динамически изменяющееся сопротивление ключа на тиратроне (определяется параметрами тиратрона), R – сопротивление проводников контура разряда.

Для расчета напряженности электрического поля внутри промежутка каждый из слоев расчетной сетки представлялся параллельным соединением источника тока и емкости. Слои прикатодной области в сравнении с областью плазмы характеризуются существенно большими значениями ёмкости. Слои между собой соединены последовательно (рисунок 2).

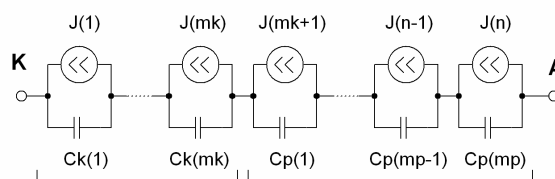


Рисунок 2 – Схема замещения разрядного промежутка: J , Ck и Cp – генераторы тока и емкости элементарных слоёв

Значения виртуальных емкостей C_k и C_p рассчитываются по формуле плоского конденсатора:

$$C_k = \varepsilon_0 \frac{S}{\Delta x_k}, \quad C_p = \varepsilon_0 \frac{S}{\Delta x_p}, \quad (2)$$

где S – площадь электродов, Δx_k и Δx_p – величины пространственных шагов расчетных областей, ε_0 – электрическая постоянная.

Выбранная эквивалентная схема замещения разрядного промежутка основана на уравнении полного тока [2], согласно которому через емкости проходит ток смещения, а источники тока соответствуют току переноса заряженных частиц между слоями.

Для расчета динамики электрического поля задаются начальные значения напряжения на каждой из емкостей. Далее изменения напряжения на виртуальных емкостях и напряженности поля в слое за временной шаг описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} U_k^{i+1} &= U_k^i + \frac{\Delta t [I_D^i - J_k]}{C}, \\ E_k^{i+1} &= \frac{U_k^{i+1}}{\Delta x}, \\ U_A^{i+1} &= \sum_{k=1}^n U_k^{i+1}, \\ C &= \begin{cases} C_k, & 0 \leq k \leq mk \\ C_p, & mk \leq k \leq n \end{cases}, \\ \Delta x &= \begin{cases} \Delta x_k, & 0 \leq k \leq mk \\ \Delta x_p, & mk \leq k \leq n \end{cases}, \end{aligned} \quad (3)$$

где U_k^i , U_k^{i+1} – напряжения на емкости k -го слоя, для i -го (предыдущего) и $i+1$ -го (последующего) временных шагов, I_D^i – ток разряда, J_k – ток переноса k -го слоя (ток элементарного источника), E_k^{i+1} – напряженность поля в слое, C и Δx – емкость и длина слоя, n – общее число слоев.

Описанная схема замещения разрядного промежутка позволяет достичь высокой стабильности численного расчета процесса формирования газового разряда. С её помощью возможен расчет не только для плоской системы электродов, но и для случаев, в которых начальное распределение поля одинаково по каждому из направлений развития разряда.

3. Расчетная схема образования и перемещения частиц в разрядном промежутке. Движение и образование заряженных частиц внутри промежутка описываются системой уравнений непрерывности. Дрейфовые потоки заряженных частиц (электронов и ионов) из слоя

в слой определяются количеством заряженных частиц и их подвижностью, являющейся функцией приведенной напряженности поля в слое. В условиях объемного разряда основным механизмом образования заряженных частиц является ионизация электронным ударом. Частота ионизации σ_{ion} (число ионизаций, совершаемых электроном в единицу времени) определяется, с одной стороны, сечением ионизации атома или молекулы, а с другой – энергетическим спектром электронного газа, то есть функцией распределения электронов по энергиям. Частота ионизации и подвижность, как функции приведенной напряженности поля, вычисляются предварительно решением уравнения Больцмана в двухчленном приближении [4].

В численной модели уравнения непрерывности удобно представить в виде изменяющихся во времени потоков электронов и ионов через границы слоев. Для обеспечения работоспособности модели при возможной инверсии электрического поля в алгоритм включены как прямые, так и обратные потоки заряженных частиц. Введём обозначения:

$$\begin{aligned} v_{eff_e} &= \frac{v_e(E_k) + v_e(E_{k+1})}{2} = \frac{E_k \mu_e(E_k) + E_{k+1} \mu_e(E_{k+1})}{2}, \\ v_{eff_p} &= \frac{v_p(E_k) + v_p(E_{k+1})}{2} = \frac{E_k \mu_p(E_k) + E_{k+1} \mu_p(E_{k+1})}{2}, \\ \lambda_e &= \frac{v_{eff_e} \Delta t}{\Delta x}, \\ \lambda_p &= \frac{v_{eff_p} \Delta t}{\Delta x}, \\ \Delta x &= \begin{cases} \Delta x_k, & 0 \leq k \leq mk \\ \Delta x_p, & mk \leq k \leq n \end{cases}, \end{aligned} \quad (4)$$

где v_{eff_e} , v_{eff_p} – эффективные скорости электронов и ионов внутри слоя (средние между значениями скорости на границах слоя), Δx – длина слоя, μ_e и μ_p – подвижности электронов и ионов λ_e и λ_p – коэффициенты переноса частиц между слоями.

Перемещение и образование частиц в слоях описываются системой:

при $v_{eff_e} \geq 0$ (нормальное поле, прямой поток):

$$\begin{aligned} P_e^{R-}(k) &= Ne_k \cdot \lambda_e, \\ P_e^{L+}(k+1) &= Ne_k \cdot \lambda_e (1 + \sigma_{ion} \Delta t), \\ \Delta Ne(k) &= Ne_k \sigma_{ion} \Delta t (1 - \lambda_e), \\ P_p^{L-}(k) &= Np_k \cdot \lambda_p, \\ P_p^{R+}(k-1) &= Np_k \cdot \lambda_p, \\ \Delta Np(k) &= Ne_k \sigma_{ion} \Delta t (1 - \lambda_e), \\ \Delta Np(k+1) &= Ne_k \sigma_{ion} \Delta t \lambda_e, \end{aligned} \quad (5)$$

при $v_{eff} < 0$ (инверсное поле, обратный поток):

$$\begin{aligned}
 P_e^{L-}(k) &= Ne_k \cdot \lambda_e, \\
 P_e^{R+}(k-1) &= Ne_k \cdot \lambda_e (1 + \sigma_{ion} \Delta t), \\
 \Delta Ne(k) &= Ne_k \cdot \sigma_{ion} \Delta t (1 - \lambda_e), \\
 P_p^{R-}(k) &= Np_k \cdot \lambda_p, \\
 P_p^{L+}(k+1) &= Np_k \cdot \lambda_p, \\
 \Delta Np(k) &= Ne_k \cdot \sigma_{ion} \Delta t (1 - \lambda_e), \\
 \Delta Np(k+1) &= Ne_k \cdot \sigma_{ion} \Delta t \lambda_e,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где P_e^{R-}, P_p^{R-} – числа электронов и ионов, выходящих из слоя через правую границу, P_e^{L-}, P_p^{L-} – числа электронов и ионов, выходящих из слоя через левую границу, P_e^{R+}, P_p^{R+} – числа электронов и ионов, входящих в слой через правую границу, P_e^{L+}, P_p^{L+} – числа электронов и ионов, входящих в слой через левую границу, $\Delta Ne, \Delta Np$ – приращение заряженных частиц за счёт ионизации, Ne_k, Np_k – числа электронов и ионов в k -м слое, σ_{ion} – частота ионизации, Δt – временной шаг.

Для газовой смеси образование и движение ионов каждого сорта рассчитываются отдельно. При вычислении частоты ионизации используется среднее значение напряженности поля в слое. Поле считается нормальным, если знак напряженности соответствует распределению потенциала в начальный момент времени, и инверсным в противоположном случае. В модели используется линейная сплайн-интерполяция гидродинамических коэффициентов, полученных решением уравнения Больцмана [4]. Схема расчета приведена на рисунке 3.

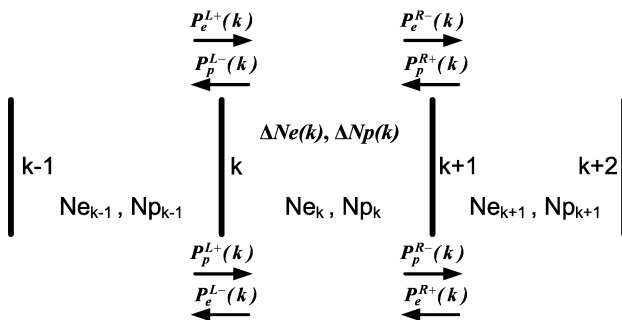


Рисунок 3 – Схема расчета движения и образования заряженных частиц для k -го слоя расчетной сетки. Ne, Np – количества электронов и ионов в слоях; Pe, Pp – количества электронов и ионов, пересекающих границу слоя за временной шаг

Существенной особенностью модели является использование переменного (адаптированного) временного шага Δt , определяемого соотношением:

$$\Delta t = \frac{\Delta x_k}{E_{max} \mu e(E_{max})}, \tag{7}$$

где E_{max} – максимальная напряженность поля в промежутке. Физически это означает, что за один временной шаг частицы не перемещаются на расстояние, превышающее минимальный пространственный шаг. Математически это соответствует выполнению условия Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ), необходимого для решения уравнений переноса и минимизации численной дисперсии и диссипации [3].

Таким образом, при переходе к следующему временному шагу количество частиц в слоях изменяется в соответствии со следующей схемой:

$$\begin{aligned}
 Ne_k^{i+1} &= Ne_k^i + \Delta Ne(k) + \\
 &+ [P_e^{R+}(k) + P_e^{L+}(k) - P_e^{R-}(k) - P_e^{L-}(k)] \\
 Np_k^{i+1} &= Np_k^i + \Delta Np(k) + \\
 &+ [P_p^{R+}(k) + P_p^{L+}(k) - P_p^{R-}(k) - P_p^{L-}(k)]
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь член в скобках описывает изменение числа заряженных частиц вследствие их дрейфа под действием электрического поля.

Для расчета перераспределения электрического поля внутри промежутка в соответствии с системой уравнений (3) используется ток переноса через правую границу слоя:

$$J_k = e \frac{[P_e^{R-}(k) - P_e^{R+}(k)] + [P_p^{R+}(k) - P_p^{R-}(k)]}{\Delta t}. \tag{9}$$

4. Численный расчет возбуждения и высвечивания частиц газа. В граничные условия системы уравнений, описывающих разряд, входит величина n^* – концентрация возбужденных частиц газа. Частицы в основном возбуждаются ударами электронов. Расчет процесса возбуждения основан на вычислении частоты возбуждения каждого уровня частицы (числа возбуждений, совершаемых одним электроном в единицу времени). Частота возбуждения является функцией приведенной напряженности поля и вычисляется решением уравнения Больцмана [4].

Динамика частиц в j -м возбужденном состоянии в k -м слое расчетной сетки описывается соотношением:

$$N_j^{*i+1}(k) = N_j^{*i}(k) + \Delta t \left[v_j^{ext}(k) \cdot Ne_k^i - \frac{N_j^{*i}(k)}{\tau_j} \right], \tag{10}$$

где $N_k^{*i+1}(k), N_k^{*i}(k)$ – числа возбужденных частиц на следующем и предыдущем временных шагах, Ne_k^i – число электронов в k -м слое, $v_j^{ext}(k)$ – частота возбуждения j -го уровня, τ_j – время жизни частицы в состоянии j .

Для смеси газов рассчитывается динамика возбуждения и излучения частиц каждого газа. Расчет динамики частиц в возбужденном состоянии представляет существенную практиче-

скую ценность, так как объемный разряд применяется для накачки газовых лазеров.

5. Расчет вторичных процессов на катоде.

В модели учитывается выход электронов из катода под действием потока ионов и в результате фотоэмиссии, вызываемой излучением разряда. Число электронов N_0 , выходящих из катода за один временной шаг, описывается уравнением:

$$N_0 = \gamma_{ion} P_p^{L-}(0) + \sum_{j=1}^z \sum_{k=0}^n \eta_j \left(\frac{0.5}{800x+1} \right) \frac{N_j^*(k)}{\tau_j},$$

$$x = \begin{cases} \Delta x_k \cdot k, & 0 \leq k \leq mk \\ \Delta x_k \cdot k + \Delta x_p \cdot (k - mk), & mk < k \leq n \end{cases} \quad (11)$$

где γ_{ion} – коэффициент ион-электронной эмиссии, $P_p^{L-}(0)$ – число ионов, поступающих на катод за один временной шаг; z – число возбужденных состояний частицы газа, при излучательном переходе которых образуются фотоны с энергией, превышающей работу выхода материала катода; η_j – квантовый выход для фотона, испущенного частицей газа в j -м состоянии; член в скобках под знаком суммы – аппроксимация геометрического фактора (соотношение б в первой части работы). Для газовой смеси токи вторичной ион- и фотоэлектронной эмиссии рассчитываются отдельно для частиц каждого газа.

6. Последовательность операций численного расчета. В модели, включающей расчет электрического поля через уравнение Пуассона [5, 6], значение тока разряда I_D^{i-1} для предыдущего временного шага подставляется в уравнения для внешней цепи и далее вычисляется анодное напряжение U_A^i для последующего шага. Затем, используя полученное значение U_A^i , решают уравнение Пуассона и вычисляют распределение напряженности поля внутри промежутка, а после этого рассчитывают перемещение и образование частиц внутри промежутка и вычисляют ток I_D^i . Иными словами, в пределах одного временного шага из напряжения на промежутке вычисляют значение тока:

$$\dots \rightarrow I_D^{i-1} \rightarrow U_A^i \rightarrow I_D^i \rightarrow U_A^{i+1} \rightarrow \dots \quad (12)$$

Именно здесь при численном расчёте вносится экспоненциально возрастающая погрешность (выражение 11 в первой части работы [7]).

В представленной модели используется более рациональная последовательность вычислений:

$$\dots \rightarrow U_A^{i-1} \rightarrow I_D^i \rightarrow U_A^i \rightarrow I_D^{i+1} \rightarrow \dots \quad (13)$$

Здесь на одном временном шаге сначала определяются потоки частиц внутри промежутка, затем вычисляется ток I_D^i и подставляется в уравнения внешней цепи, решением которых определяется анодное напряжение U_A^i . Таким

образом, погрешность вычислений не возрастает экспоненциально, как в предыдущем случае.

7. Примеры результатов моделирования.

В качестве примера (рисунки 4 и 5) представлены результаты моделирования объемного разряда для условий азотного лазера с накачкой поперечным разрядом: давление – 760 Торр, межэлектродное расстояние – 1,5 см, состав газовой смеси – 95 % гелия и 5 % азота, величина обострительной емкости 2 нФ, накопительной – 10 нФ индуктивность разрядного контура L2 – 1 нГн, контура накачки – 200 нГн, сопротивление разрядного контура – 7 мОм, начальное напряжение накопительной емкости – 20 кВ, площадь электродов – $5,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, материал катода – медь, коэффициенты вторичной ион-электронной эмиссии для ионов гелия и азота полагались равными 0,02 и 0,05 соответственно, начальная концентрация электронов – 10^{12} м^{-3} .

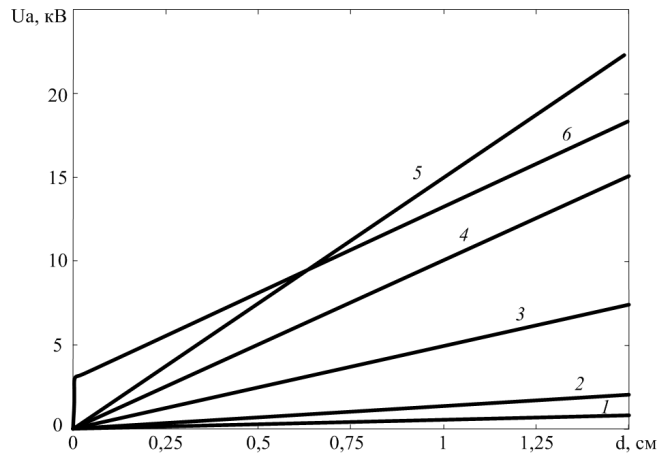


Рисунок 4 – Распределение потенциала в промежутке в различные моменты времени развития разряда: 1 – 10 нс, 2 – 20 нс, 3 – 30 нс, 4 – 40 нс, 5 – 50 нс, 6 – 60 нс.

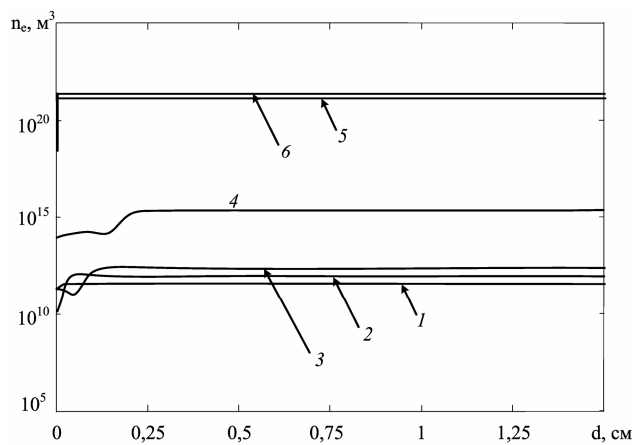


Рисунок 5 – Распределение концентрации электронов в промежутке в различные моменты времени развития разряда: 1 – 10 нс, 2 – 20 нс, 3 – 30 нс, 4 – 40 нс, 5 – 50 нс, 6 – 60 нс

Представленные результаты по порядку величин соответствуют экспериментальным данным [1]. Расчет формирования разряда в описанных условиях для заданного временного интервала (100 нс) занимает около одного часа машинного времени на ЭВМ конфигурации: процессор Celeron D 2,4 ГГц, объем ОЗУ – 512 Мбайт.

Заключение. Разработана полностью самосогласованная модель объемного разряда, включающая в себя совместный расчет электродинамики внешней цепи и процесса формирования разряда. Особенности модели являются вычисление фотоэмиссии электронов с катода отдельно для каждой спектральной линии излучения разряда и определение электрического поля в промежутке через уравнение сохранения полного тока. Предложенный подход позволяет более точно моделировать динамику реальных физических процессов и обеспечивает высокую стабильность и экономичность численного расчета.

Библиографический список

1. Месяц Г.А., Осипов В.В., Тарасенко В.Ф. Импульсные газовые лазеры. М.: Наука, 1991. 272 с.
2. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Искровой разряд. М.: МФТИ, 1997.
3. Ращиков В.И., Рошаль А.С. Численные методы решения физических задач. СПб.; «Лань», 2005. 208 с.
4. <http://www.siglo-kinema.com> – Kinema Software & CPAT.
5. S. Macheret, M. Shneider, R. Miles. Modeling of Air Plasma Generation by Repetitive High-Voltage Nanosecond Pulses. // IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE, VOL. 30, NO. 3, JUNE 2002. P. 1301–1314.
6. Коротченко В.А., Панкратов Е.И. Компьютерная модель развития тлеющего разряда в перенапряжённом режиме Вестник РГРТА. Вып. 15. Рязань: РГРТА. 2004. с. 79 – 85.
7. Коротченко В.А., Суворов Д.В. Самосогласованная модель формирования объемного разряда. I. Физико-математическая основа модели. Вестник РГРТА. Вып. 20. Рязань: РГРТУ, 2007.