УДК 5517.925.51

Ю.С. Митрохин, А.Н. Андреев

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается вопрос построения функций, с помощью которых определяются вопросы устойчивости решения системы трех разностных уравнений. Данный метод позволяет исследовать нелинейные системы, чего пока нет в отечественных и зарубежных публикациях.

Пусть в результате преобразований получилась система трех разностных уравнений. В векторной форме:

$$\bar{x}_{k+1} = \hat{A}(\bar{x}_k), \tag{1}$$

где $\hat{A} = (a_{ij})_{3,3}$ - постоянная матрица. Необходимо определить устойчивость, неустойчивость и асимптотическую устойчивость относительно состояния покоя $\bar{x}_k \equiv 0$, $k \in N$, N - множество натуральных чисел [3].

Определение [1]. Решение $\bar{x}_k \equiv 0$ системы (1), $k \in N$ называется устойчивым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ и при любых начальных условиях $|\bar{x}_0| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\bar{x}_k| < \varepsilon$ для каждого $k \in N$. Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ при $|\bar{x}_0| < \delta(\varepsilon)$ и выполняется неравенство $|\bar{x}_k| > \varepsilon$ для каждого $k \in N$, то решение $\bar{x}_k \equiv 0$, $k \in N$, называется неустойчивым. Устойчивое решение $\bar{x}_k \equiv 0$, $k \in N$, называется асимптотически устойчивым, если $\lim\limits_{k\to\infty}|\bar{x}_k| = 0$.

По аналогии с системами дифференциальных уравнений для системы (1) составим функцию $V(\bar{x}_k)$ [1,3]: $V(\bar{x}_k) = (\Delta\bar{x}_k, \Delta^2\bar{x}_k, \Delta^3\bar{x}_k)$, где $(\Delta\bar{x}_k, \Delta^2\bar{x}_k, \Delta^3\bar{x}_k)$ - смешанное произведение трех векторов [1,3].

Учтя:

1) $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = (a_{11}-1)x_k + a_{12}y_k + a_{13}z_k$,

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = a_{21}x_k + (a_{22}-1)y_k + a_{23}z_k$,

$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = a_{31}x_k + a_{32}y_k + (a_{33}-1)z_k$,

т.е. в векторном виде

$\Delta\bar{x}_k = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k = (\hat{A} - E)\bar{x}_k$,

где E - единичная матрица;

2) $\Delta^2\bar{x}_k = \Delta\bar{x}_{k+1} - \Delta\bar{x}_k = (\hat{A}-E)\bar{x}_{k+1} - (\hat{A}-E)\bar{x}_k = (\hat{A}-E)^2\,\bar{x}_k$;

3) $\Delta^3\bar{x}_k = \Delta^2\bar{x}_{k+1} - \Delta^2\bar{x}_k = (\hat{A}-E)^2\,\bar{x}_{k+1} - (\hat{A}-E)^2\,\bar{x}_k = (\hat{A}-E)^3\,\bar{x}_k$,

получим

$$V(\bar{x}_k) = \left((\hat{A}-E)\bar{x}_k, (\hat{A}-E)^2\bar{x}_k, (\hat{A}-E)^3\bar{x}_k\right) = \left|\hat{A}-E\right|\left(\bar{x}_k, (\hat{A}-E)\bar{x}_k, (\hat{A}-E)^2\bar{x}_k\right).$$

Т.к. устойчивость системы исследуется на основании анализа функции $V(\bar{x}_k)$ и $\Delta V(\bar{x}_k)$ [1,3], и если $\left|\hat{A}-E\right| \neq 0$, то

$$V(\bar{x}_k) = \left(\bar{x}_k, (\hat{A}-E)\bar{x}_k, (\hat{A}-E)^2\bar{x}_k\right),$$

$$|V(\bar{x}_k)| = \left|\left(\bar{x}_k, (\hat{A}-E)\bar{x}_k, (\hat{A}-E)^2\bar{x}_k\right)\right|,$$

$$\Delta|V(\bar{x}_k)| = |V(\bar{x}_{k+1})| - |V(\bar{x}_k)| = \left(|\hat{A}|-1\right)|V(\bar{x}_k)|.$$

По теореме 1 [1]:

– если $|\hat{A}|-1 > 0$, то система неустойчива;

– если $|\hat{A}|-1 \le 0$, то система устойчива;

– если $|\hat{A}|-1 < 0$, то система асимптотически устойчива в целом.

Рассмотрим $V(\bar{x}_k)$. Т.к. $V(\bar{x}_k) = \left(\bar{x}_k, (\hat{A}-E)\bar{x}_k, (\hat{A}-E)^2\bar{x}_k\right)$ есть определитель третьего порядка, то его можно представить в виде:

$$V(\bar{x}_k) = \sum_{i,j,m=0}^{3} B_{ijm} x_k^i y_k^j z_k^m,$$

где B_{ijm} - коэффициенты при различных комбинациях x_k, y_k, z_k.

Рассмотрим случай, когда $V(\bar{x}_k)$ можно представить в виде произведения линейной и квадратичной форм. Т.е.

$$V(\bar{x}_k) = V_1(\bar{x}_k) \cdot V_2(\bar{x}_k),$$

где $V_1(\bar{x}_k) = A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k$ - линейная комбинация x_k, y_k, z_k;

$V_2(\bar{x}_k) = A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + $
$+ A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2$ - квадратичная форма.

Подробнее остановимся на каждой из функций.

Рассмотрим функцию $V_1(\bar{x}_k)$. В пространстве R_3 $V_1(\bar{x}_k)$ - плоскость, проходящая через начало координат: $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$.

$V_1(\bar{x}_k) = A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k$,

$|V_1(\bar{x}_k)| = |A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k|$,

$\Delta|V_1(\bar{x}_k)| = |V_1(\bar{x}_{k+1})| - |V_1(\bar{x}_k)| =$

$= |A_{11}x_{k+1} + B_{11}y_{k+1} + C_{11}z_{k+1}| - |A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k|$.

Возможны случаи:

1) если $\Delta|V_1(\bar{x}_k)|$<0, то многообразие

$$A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$$

асимптотически устойчиво по теореме 2 [1];

2) если $\Delta|V_1(\bar{x}_k)| \le 0$, то многообразие

$$A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$$

устойчиво по теореме 2 [1];

3) если $\Delta|V_1(\bar{x}_k)|$>0, то многообразие

$$A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$$

неустойчиво по теореме 2 [1].

Также возможно рассмотрение поведения траекторий на плоскости. Для этого надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_{11}x_k + a_{12}y_k + a_{13}\left(-\dfrac{A_{11}}{C_{11}}x_k - \dfrac{B_{11}}{C_{11}}y_k\right), \\ y_{k+1} = a_{21}x_k + a_{22}y_k + a_{23}\left(-\dfrac{A_{11}}{C_{11}}x_k - \dfrac{B_{11}}{C_{11}}y_k\right) \end{cases}$$

описанным выше способом. Т.е. надо найти $V(x_k, y_k)$ и $\Delta V(x_k, y_k)$ для полученной системы.

При этом начало координат устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво [1]

Рассмотрим функцию $V_2(\bar{x}_k)$. $V_2(\bar{x}_k)$ - представляет собой кривую второго порядка в пространстве R_3:

$$V_2(\bar{x}_k) = A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + \\ + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2.$$

Запишем определитель [2]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22}/2 & A_{23}/2 \\ A_{22}/2 & A_{24} & A_{25}/2 \\ A_{23}/2 & A_{25}/2 & A_{26} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22}/2 \\ A_{22}/2 & A_{24} \end{vmatrix}$>0, то $V_2(\bar{x}_k)$ - квадратичная форма знакоопределенного положительного (A_{21}>0 и Δ>0) или отрицательного (A_{21}<0 и Δ>0) знака [2].

Пусть $|V_2(\bar{x}_k)| \ne 0$ и

$$\Delta|V_2(\bar{x}_k)| = (|\Delta| - 1)|V_2(\bar{x}_k)|,$$ тогда:

– если $|\Delta| - 1$<0, то по теореме 2 [1] многообразие

$$A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + \\ + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$$

асимптотически устойчиво;

– если $|\Delta| - 1$>0, то по теореме 2 [1] многообразие

$$A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + \\ + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$$

неустойчиво;

– если $|\Delta| - 1$=0, то по теореме 2 [1] многообразие

$$A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + \\ + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$$

устойчиво.

Пусть Δ_1<0. В этом случае квадратичная форма $V_2(\bar{x}_k)$ знакопеременная и ее можно разложить на линейные множители:

$$V_2(\bar{x}_k) = V_{21}(\bar{x}_k) \cdot V_{22}(\bar{x}_k),$$

где $V_{21}(\bar{x}_k) = A_{211}x_k + B_{211}y_k + C_{211}z_k$,

$V_{22}(\bar{x}_k) = A_{221}x_k + B_{221}y_k + C_{221}z_k$.

Рассмотрение $V_{21}(\bar{x}_k)$ и $V_{22}(\bar{x}_k)$ происходит аналогично $V_1(\bar{x}_k)$.

Для определения экстремума функции $V_2(\bar{x}_k)$ необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_2(\bar{x}_k)}{\partial x_k} = 2A_{21}x_k + A_{22}y_k + A_{23}z_k = 0, \\ \dfrac{\partial V_2(\bar{x}_k)}{\partial y_k} = A_{22}x_k + 2A_{24}y_k + A_{25}z_k = 0, \\ \dfrac{\partial V_2(\bar{x}_k)}{\partial z_k} = A_{23}x_k + A_{25}y_k + 2A_{26}z_k = 0. \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} 2A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{22} & 2A_{24} & A_{25} \\ A_{23} & A_{25} & 2A_{26} \end{vmatrix} \neq 0$, то $V_2(0,0,0) = 0$, иначе если $\begin{vmatrix} 2A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{22} & 2A_{24} & A_{25} \\ A_{23} & A_{25} & 2A_{26} \end{vmatrix} = 0$, то $V_2(L) = 0$,

где $L = \begin{cases} 2A_{21}x_k + A_{22}y_k + A_{23}z_k = 0, \\ A_{22}x_k + 2A_{24}y_k + A_{25}z_k = 0, \\ A_{23}x_k + A_{25}y_k + 2A_{26}z_k = 0, \end{cases}$

т.е. L – прямая, полученная при решении системы уравнений.

Таким образом, $V(\bar{x}_k)$ можно представить как $V(\bar{x}_k) = V_1(\bar{x}_k) \cdot V_2(\bar{x}_k)$ либо,

$$V(\bar{x}_k) = V_1(\bar{x}_k) \cdot V_{21}(\bar{x}_k) \cdot V_{22}(\bar{x}_k)$$

в зависимости от знака Δ_1.

Рассмотрим различные ситуации:

1) $V(\bar{x}_k) = V_1(\bar{x}_k) \cdot V_2(\bar{x}_k)$, где многообразия $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$ и $A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + {}$

$$+ A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$$

– асимптотически устойчивы, значит, и состояние покоя системы (1) также асимптотически устойчиво в целом.

Данная ситуация подходит под случаи, когда:

– многообразие $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$ - устойчиво, а многообразие $A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + {}$ $+ A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$ - асимптотически устойчиво, значит, состояние покоя системы (1) устойчиво в целом;

– многообразие $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$ - неустойчиво, а многообразие $A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + {}$ $+ A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$ - асимптотически устойчиво, значит, состояние покоя системы (1) неустойчиво в целом;

2) $V(\bar{x}_k) = V_1(\bar{x}_k) \cdot V_2(\bar{x}_k)$, где многообразия $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$ и $A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + {}$ $+ A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$ - устойчивы, значит, и состояние покоя системы (1) также устойчиво в целом.

Для данной ситуации подходят случаи:

– многообразие $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$ - асимптотически устойчиво, а многообразие

$$A_{22}x_k y_k + A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + {}$$

$+ A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$ - устойчиво, значит, состояние покоя системы (1) устойчиво в целом;

– многообразие $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$ - неустойчиво, а многообразие $A_{21}x_k^2 + {}$ $+ A_{22}x_k y_k + A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + + A_{25}y_k z_k + {}$ $+ A_{26}z_k^2 = 0$ - устойчиво, значит, состояние покоя системы (1) неустойчиво в целом;

3) $V(\bar{x}_k) = V_1(\bar{x}_k) \cdot V_2(\bar{x}_k)$, где многообразия $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$ и $A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + {}$

$A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$ - неустойчивы, значит, и состояние покоя системы (1) также неустойчиво в целом.

Для данной ситуации подходят случаи:

– многообразия: $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$ - асимптотически устойчиво, а $A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + {}$

$+ A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$ - неустойчиво, значит, состояние покоя системы (1) неустойчиво в целом;

– многообразия: $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$ - устойчиво, а $A_{21}x_k^2 + A_{22}x_k y_k + A_{23}x_k z_k + A_{24}y_k^2 + {}$ $+ A_{25}y_k z_k + A_{26}z_k^2 = 0$ - неустойчиво, значит, состояние покоя системы (1) неустойчиво в целом;

4) $V(\bar{x}_k) = V_1(\bar{x}_k) \cdot V_{21}(\bar{x}_k) \cdot V_{22}(\bar{x}_k)$, где многообразия $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$, $A_{211}x_k + B_{211}y_k + {}$ $+ C_{211}z_k = 0$ и $A_{221}x_k + B_{221}y_k + C_{221}z_k = 0$ - асимптотически устойчивы, значит, и состояние покоя системы (1) также асимптотически устойчиво в целом;

5) $V(\bar{x}_k) = V_1(\bar{x}_k) \cdot V_{21}(\bar{x}_k) \cdot V_{22}(\bar{x}_k)$, где многообразия $A_{11}x_k + B_{11}y_k + C_{11}z_k = 0$, $A_{211}x_k + B_{211}y_k + {}$

$+C_{211}z_k=0$ и $A_{221}x_k+B_{221}y_k+C_{221}z_k=0$ - неустойчивы, значит, и состояние покоя системы (1) также неустойчиво в целом;

6) $V(\bar{x}_k)=V_1(\bar{x}_k)\cdot V_{21}(\bar{x}_k)\cdot V_{22}(\bar{x}_k)$, где многообразия: $A_{11}x_k+B_{11}y_k+C_{11}z_k=0$ - неустойчиво, а $A_{211}x_k+B_{211}y_k+C_{211}z_k=0$ и $A_{221}x_k+B_{221}y_k+$ $+C_{221}z_k=0$ - асимптотически устойчивы, значит, состояние покоя системы (1) также неустойчиво в целом;

7) $V(\bar{x}_k)=V_1(\bar{x}_k)\cdot V_{21}(\bar{x}_k)\cdot V_{22}(\bar{x}_k)$, где многообразия $A_{11}x_k+B_{11}y_k+C_{11}z_k=0$ - и $A_{221}x_k+B_{221}y_k+$ $+C_{221}z_k=0$ - неустойчивы, а $A_{211}x_k+B_{211}y_k+$ $+C_{211}z_k=0$ - асимптотически устойчиво, значит, состояние покоя системы (1) также неустойчиво в целом;

8) $V(\bar{x}_k)=V_1(\bar{x}_k)\cdot V_{21}(\bar{x}_k)\cdot V_{22}(\bar{x}_k)$, где многообразия: $A_{11}x_k+B_{11}y_k+C_{11}z_k=0$ - неустойчиво, $A_{211}x_k+B_{211}y_k+C_{211}z_k=0$ - асимптотически устойчиво, а $A_{221}x_k+B_{221}y_k+C_{221}z_k=0$ - устойчиво, значит, состояние покоя системы (1) неустойчиво в целом.

Библиографический список

1. *Митрохин Ю.С., Андреев А.Н.(гр237).* Исследование на устойчивость систем разностных уравнений // Математические методы в научных исследованиях: Сб. науч. тр.- Рязань, 2006. - С. 40 – 46.
2. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости.-М.: Наука, 1967. - С. 18.
3. *Митрохин Ю.С.* Устойчивость систем, описанных разностными уравнениями // Математические методы в научных исследованиях: Сб. науч. тр. - Рязань, 1994. - С. 49.