

# 1. Цифровая обработка сигналов – Информатика реального времени

## 1.2. Предмет и задачи ЦОС

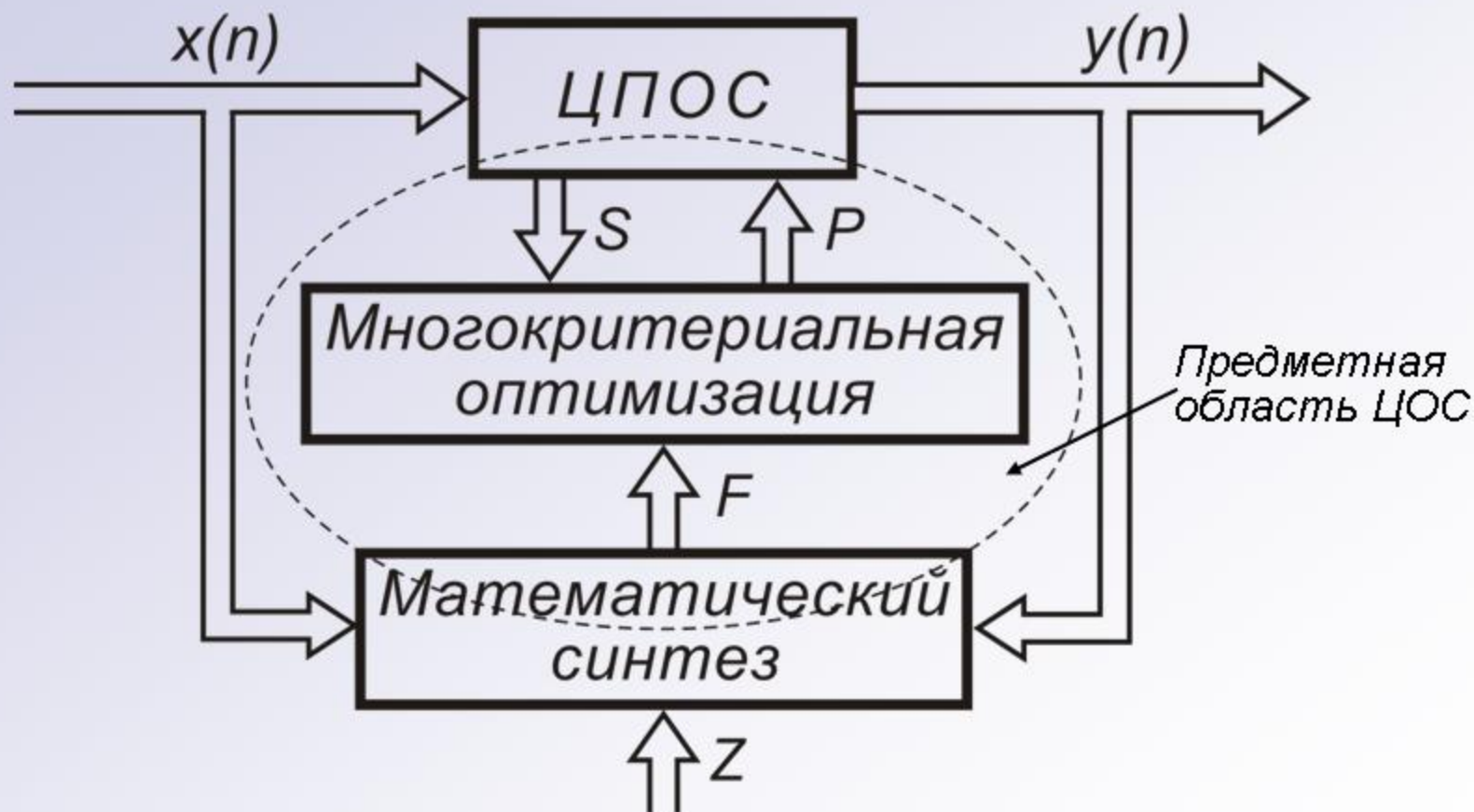


Рис. 1.1. Общая схема проектирования систем ЦОС

## Проблемы и задачи теории и техники ЦОС:

1. Проблема представления аналогового сигнала в цифровой форме.

2. Проблема выбора класса цифровых цепей и преобразований, обеспечивающих воспроизведение заданного математического оператора  $F$  или его функции с априорно заданной точностью.

3. Проблема аппроксимации математического оператора  $F$  в заданном классе цифровых цепей.

4. Проблема синтеза (выбора) структуры оператора  $P$  и оптимизации ее параметров.

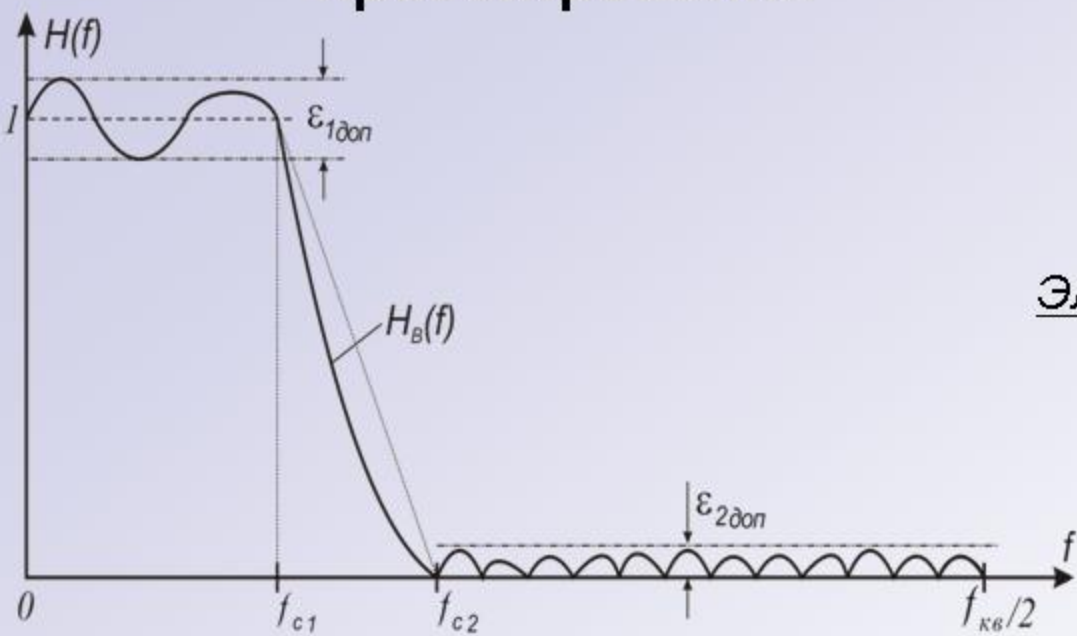
5. Проблема анализа влияния собственных шумов и неточного представления параметров оператора  $P$  на точность воспроизведения желаемых характеристик.

6. Проблема синтеза малошумящих и нечувствительных к неточному представлению коэффициентов структур оператора преобразования  $P$ .

7. Проблема выбора схемотехнического решения и оптимизации программного обеспечения.

## 2. Цифровая частотная селекция сигналов: оптимальное проектирование на сигнальных процессорах

### 2.1. Математическая постановка задачи оптимального проектирования



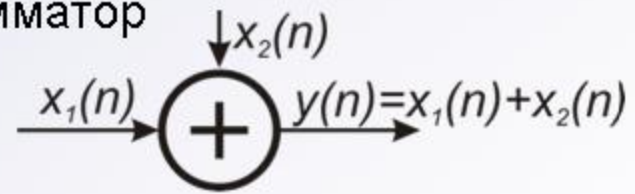
$f_{c1}$  - частота среза полосы пропускания;  
 $f_{c2}$  - частота среза зоны непрозрачности;  
 $\epsilon_{1\delta on}$  - допустимая неравномерность (спад) АЧХ в полосе пропускания;  
 $\epsilon_{2\delta on}$  - допустимый уровень боковых лепестков АЧХ в зоны непрозрачности.

$$x(nT) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow y(nT) = F\{x(nT)\}$$

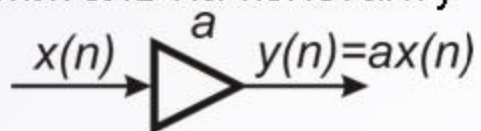
$\omega = 2\pi fT$  – приведенная круговая частота  
 $\omega = 0,2\pi$

#### Элементарные цифровые звенья:

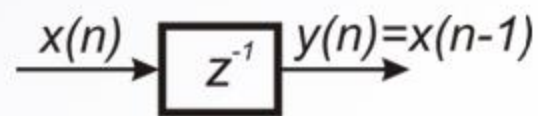
1. Сумматор



2. Умножитель на константу



3. Элемент задержки



- Правило, по которому цифровая цепь отображает входное воздействие  $x(nT)$  в реакцию  $y(nT)$ , обозначим  $F$  и назовем оператором преобразования.

- Будем полагать, что различным структурным реализациям оператора  $F$  соответствуют различные подклассы  $G_F^P$  класса операторов  $G_F$ , обеспечивающих воспроизведение желаемой функции передачи  $H(j\omega)$  с наперед заданной точностью

$$F \in G_F^P \subset G_F$$

- Пространство функций передачи  $H_B(j\omega)$ , строго воспроизводимых в классе операторов  $G_F$ , обозначим  $R$ , т.е.  $H_B(j\omega) \in R$ . При этом желаемая функция передачи, как правило,  $H(j\omega) \notin R$ .

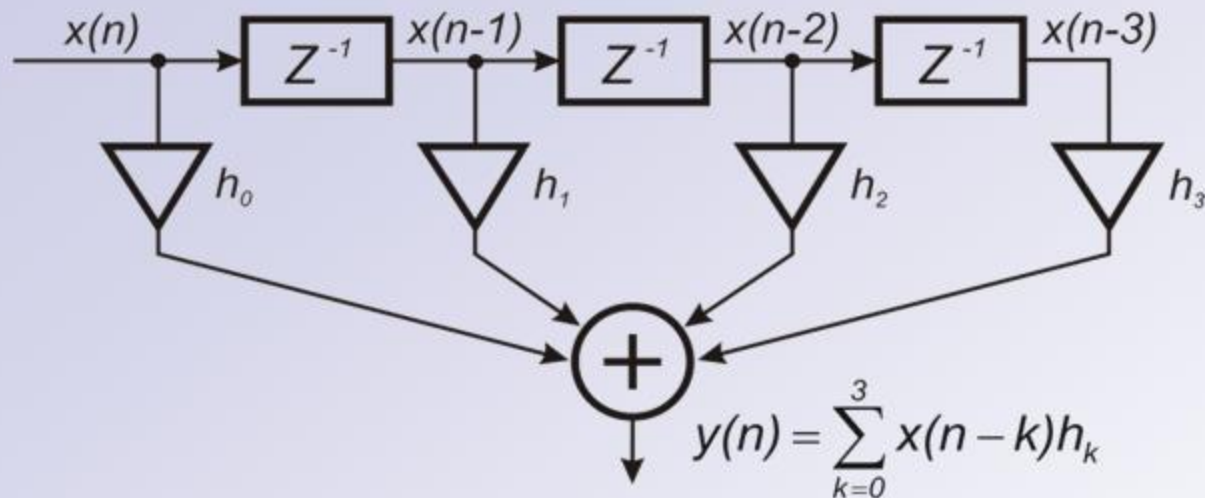
Однако для произвольной  $H(j\omega)$  должна существовать в  $R$  такая последовательность строго воспроизводимых функций передачи  $H_B^l(j\omega) \in R, l=1,2,3,\dots$ , для которой при любом сколь угодно малом  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $n$ , при котором для всех  $l \geq n$  имеет место неравенство

$$\rho[H_B^l(j\omega), H(j\omega)] \leq \varepsilon,$$

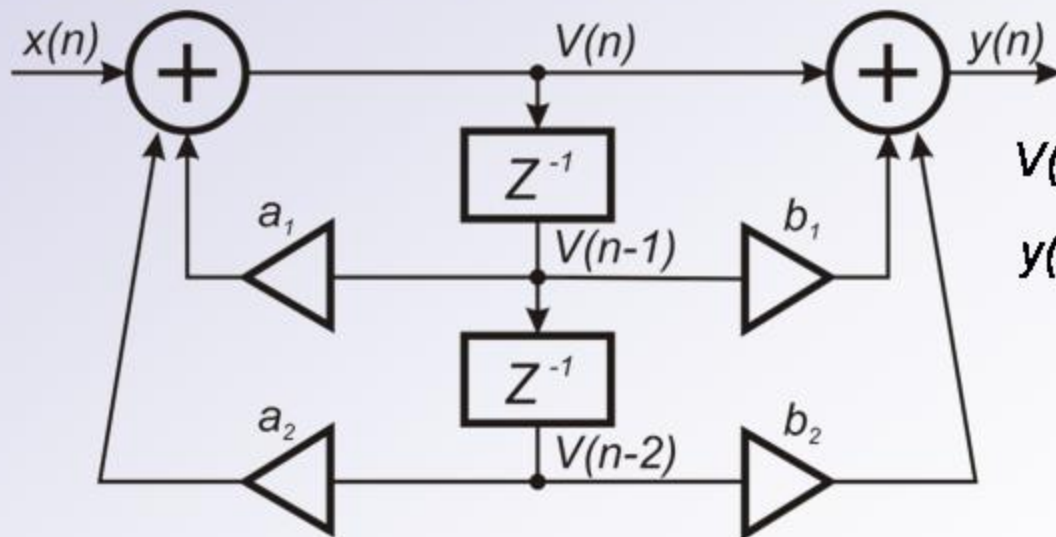
где  $\rho$ - метрика пространства функций  $R$ .

## Примеры подклассов цифровых цепей.

Пример 1: Цифровой КИХ-фильтр 4-го порядка (N=4)



Пример 2: Цифровой БИХ-фильтр 2-го порядка (M=L=2)



$$V(n) = x(n) + a_1V(n-1) + a_2V(n-2)$$

$$y(n) = V(n) + b_1V(n-1) + b_2V(n-2)$$

Для фильтров частотной селекции, общепринятой является метрика вида:

$$\rho [H_B^1(j\omega), H(j\omega)] = \max_{\omega} \rho(\omega) |H_B(j\omega) - H(j\omega)|,$$

$$\text{где } \rho(\omega) = \begin{cases} \delta, & \text{если } |\omega| \leq \omega_{c_1}; \\ 1, & \text{если } |\omega| \geq \omega_{c_2}; \\ 0, & \text{если } \omega_{c_1} < |\omega| < \omega_{c_2}. \end{cases} \quad \delta = \frac{\varepsilon_{2\text{доп}}}{\varepsilon_{1\text{доп}}}$$

Задача проектирования линейной цифровой цепи (фильтра):

найти подкласс  $G_F^P \subset G_F$  и оператор  $F \in G_F^P$ , такие, что

$$\rho [H_B^1(j\omega), H(j\omega)] \leq \varepsilon_{\text{доп}},$$

где  $\varepsilon_{\text{доп}}$  - допустимое отклонение, в смысле метрика пространства  $R$ , функции передачи  $H_B(j\omega)$  от желаемой  $H(j\omega)$ .

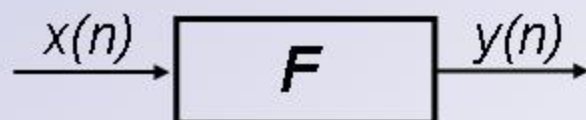
Задача оптимального проектирования: найти  $G_F^P \subset G_F$  и  $F \in G_F^P$ , такие, что:

$$\begin{cases} \rho [H_B(j\omega, G_F^P, F), H(j\omega)] \leq \varepsilon_{\text{доп}}; \\ \bar{J}(G_F^P, F) > \bar{\theta}_{\text{доп}}; \\ \Phi(G_F^P, F) \rightarrow \min_{G_F^P, F} (\max), \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\Phi(G_F^P, F)$  - целевая функция,  $\bar{J}(G_F^P, F)$  - вектор граничных условий.

## 2.2. Описание и формализация класса операторов линейных цифровых цепей

### 2.2.1. Общее математическое описание цифровых цепей (ЦЦ) инвариантных к сдвигу



Сигнал  $y(n)$  на выходе инвариантной к сдвигу ЦЦ связан с сигналом  $x(n)$  на ее входе следующим выражением общего вида:

$$y(n) = F\{x(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = x(n) ** h(n), \quad (2.2)$$

где  $h(n)$  – импульсная характеристика ЦЦ

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ 0, & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

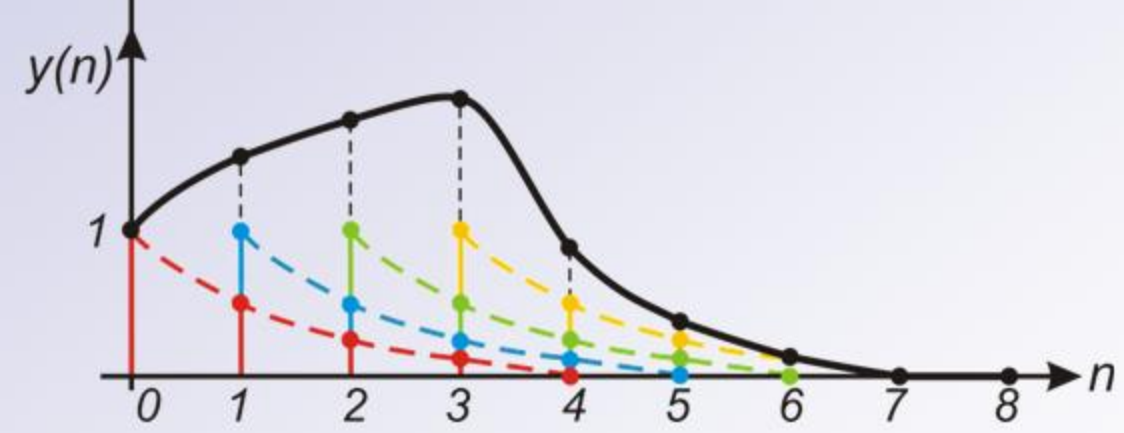
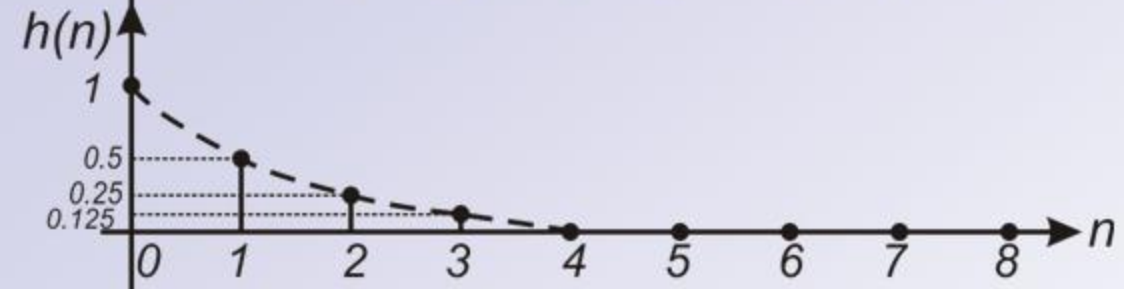
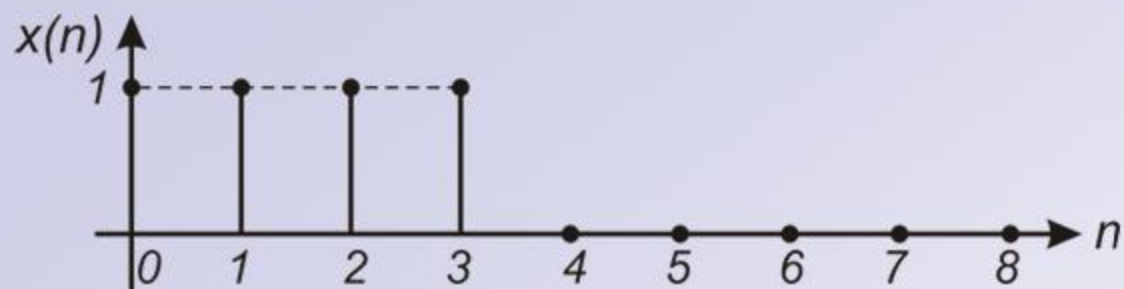
Из свойства инвариантности ЦЦ следует, что если  $h(n)$ - реакция на  $\delta(n)$ , то реакцией на  $\delta(n-k) \rightarrow h(n-k)$ .

Фундаментальное свойство линейных инвариантных к сдвигу ЦЦ:

все свойства и характеристики цепи полностью определяются ее импульсной характеристикой

$$H(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}, \quad \text{где} \quad h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(j\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (2.3)$$

Вычисление реакции  $y(n)$  на выходе ЦЦ по заданной последовательности  $x(n)$  отсчетов входного сигнала и импульсной характеристики  $h(n)$



$y(n) = 1; 1,5; 1,75; 1,875; 0,875; 0,375; 0,125; 0$   
 $n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

Проблема устойчивости и физической реализуемости

Устойчивость ЦЦ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Физическая реализуемость

$h(n) = 0$ , для всех  $n < 0$



## 2.2.2. Математический синтез ЦФ в классе КИХ-цепей. Постановка и решение задачи аппроксимации

В классе КИХ-цепей  $N$ -го порядка вход  $x(n)$  и выход  $y(n)$  фильтра связаны сверткой вида:

$$y(n) = F\{x(n)\} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} x(n-k)h(k) \quad (2.4)$$

$$y(n) = F\{x(n)\} = \sum_{k=0}^N x(n-k)h^p(k), \text{ где } h^p(k) = h\left(k - \frac{N}{2}\right).$$

Пространство  $R_N$  строго воспроизводимых функций передачи в классе КИХ-цепей  $N$ -го порядка

$$H_B(j\omega, N) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} h(n)e^{-j\omega n} \quad (2.5)$$

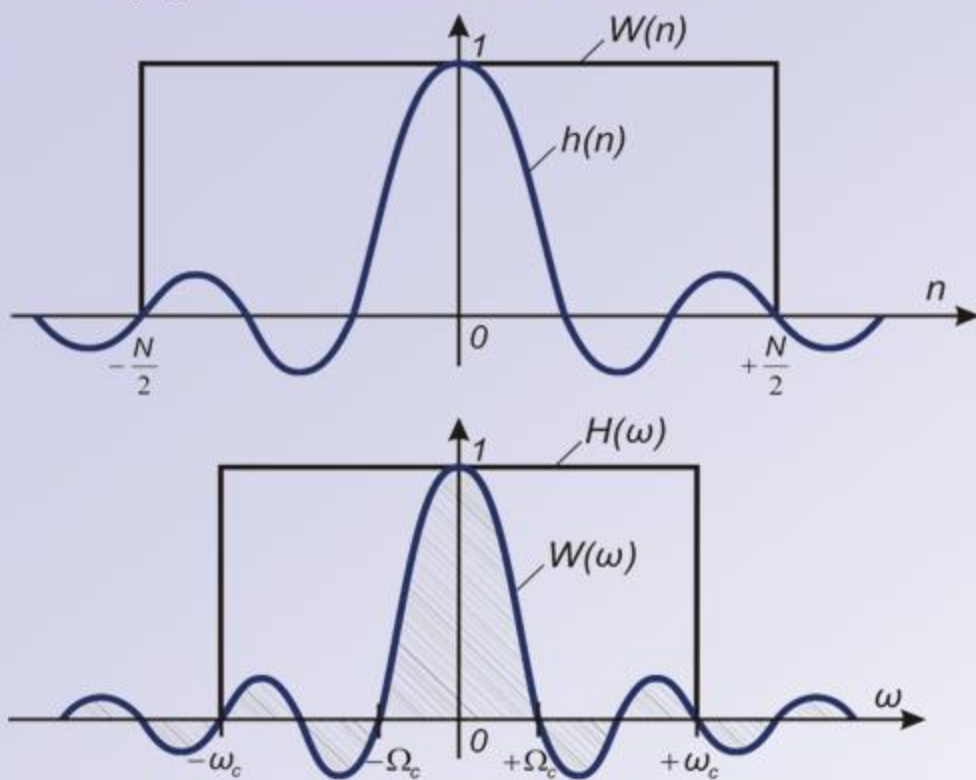
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_B(j\omega, N) e^{j\omega n} d\omega$$

Если  $h(-n) = \overline{h(n)}$  для всех  $n = \overline{1, N/2}$ , то

$$H_B(\omega, N) = h(0) + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h(n) \cos \omega n - \quad (2.6)$$

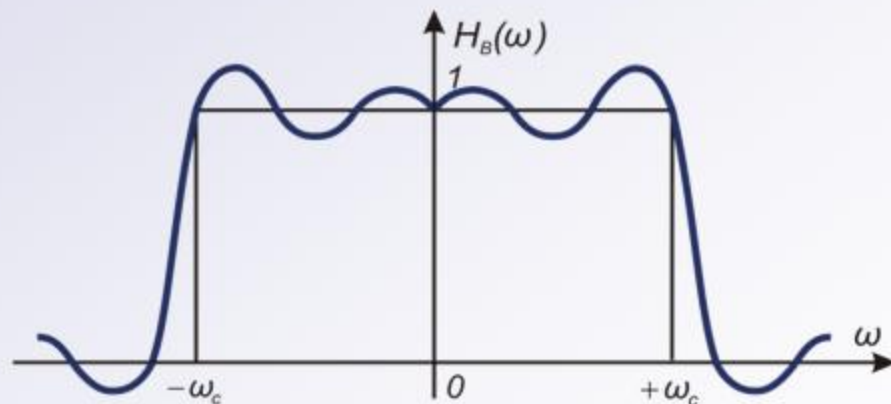
тригонометрический полином

## Эффект колебаний Гиббса



Если  $h'(n) = h(n) W(n)$ , то

$$H_B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) W(\omega - \Omega) d\Omega$$



Задачу аппроксимации в классе КИХ-цепей сформулируем следующим образом: найти минимальный порядок  $N$  и импульсную характеристику  $h(n)$  цепи  $N$ -го порядка, которая в смысле выбранного критерия близости функций обеспечит выполнение неравенства вида

$$\max_{\omega} p(\omega) |H_B(\omega, N) - H(\omega)| \leq \varepsilon_{\text{доп}}, \quad (2.7)$$

где  $H_B(\omega, N) = h(0) + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h(n) \cos \omega n$

### 2.2.3. БИХ-цепи: математическое описание и свойства

В классе БИХ-цепей  $M$ -го порядка вход  $x(n)$  и выход  $y(n)$  фильтра связаны разностным уравнением вида:

$$\sum_{k=0}^M a_k y(n-k) = \sum_{l=0}^L b_l x(n-l), \quad (2.8)$$

где  $a_k, b_l$  – коэффициенты фильтра.

$$y(n) = \sum_{l=0}^L b_l x(n-l) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \quad (2.9)$$

Для последовательности  $x(n)$ , заданной при всех  $n$ , Z-преобразование определяется следующим образом:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (2.10)$$

где  $z$  – комплексная переменная

Применяя Z-преобразование к обеим частям уравнения (2.8) с учетом подстановок  $m = n - k$  и  $r = n - l$ , получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^M a_k y(n-k) \right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^L b_l x(n-l) \right] z^{-n};$$

$$\sum_{k=0}^M a_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-m-k} = \sum_{l=0}^L b_l \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)z^{-r-l}$$

$$\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) z^{-m} = \sum_{l=0}^L b_l z^{-l} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) z^{-r} \quad (2.11)$$

Здесь:  $Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) z^{-m}; \quad X(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) z^{-r}$

Тогда:  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^L b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}$  — передаточная функция линейной БИХ-цепи (2.12)

Подставив в (2.12)  $z = e^{j\omega}$ , получим

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{l=0}^L b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^M a_k e^{-j\omega k}} \quad \text{— функция передачи (комплексная частотная характеристика)} \quad (2.13)$$

В частном случае, когда  $M = 0$ :

$$H(z) = \sum_{l=0}^L b_l z^{-l}, \quad H(j\omega) = \sum_{l=0}^L b_l e^{-j\omega l} \quad \text{— характеристики КИХ-цепи}$$

## 2.2.4. Постановка и решение задачи аппроксимации в классе БИХ-цепей

В классе БИХ-цепей  $M$ -го порядка вход  $x(n)$  и выход  $y(n)$  связаны при прямой форме реализации уравнением вида:

$$y(n) = \sum_{l=0}^L b_l x(n-l) + \sum_{k=1}^M a_k y(n-k)$$

Пространство  $R_D$  строго воспроизводимых функций передачи в классе БИХ-цепей  $M$ -го порядка, согласно (2.13)

$$H_B(j\omega, \overline{AB}) = \frac{\sum_{l=0}^L b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^M a_k e^{-j\omega k}},$$

где  $\overline{AB} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_M, b_0, b_1, b_2, \dots, b_L)$  –  $D=(M+L+2)$ -мерный вектор.

Задачу аппроксимации в классе БИХ-цепей сформулируем следующим образом: найти минимальный порядок  $D$  и вектор параметров  $\overline{AB}$  такие, что имеет место неравенство вида

$$\max_{\omega} p(\omega) \left| |H_B(j\omega, \overline{AB})| - |H(j\omega)| \right| \leq \varepsilon_{\text{доп}}, \quad (2.14)$$

где  $p(\omega)$  – весовая функция;  $\varepsilon_{\text{доп}}$  – допустимое отклонение воспроизводимой функции передачи от желаемой

## 2.3. Методы построения структур ЦФ в классе БИХ-цепей и их свойства

### 2.3.1. Формы построения БИХ-фильтров

Пусть передаточная функция цифрового фильтра  $H(z) = \frac{\sum_{l=0}^L b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}$  (2.15)

Тогда вход и выход фильтра связаны выражением вида

$$y(n) = \sum_{l=0}^L b_l x(n-l) + \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \quad (2.16)$$

Прямая форма построения принимает следующий вид

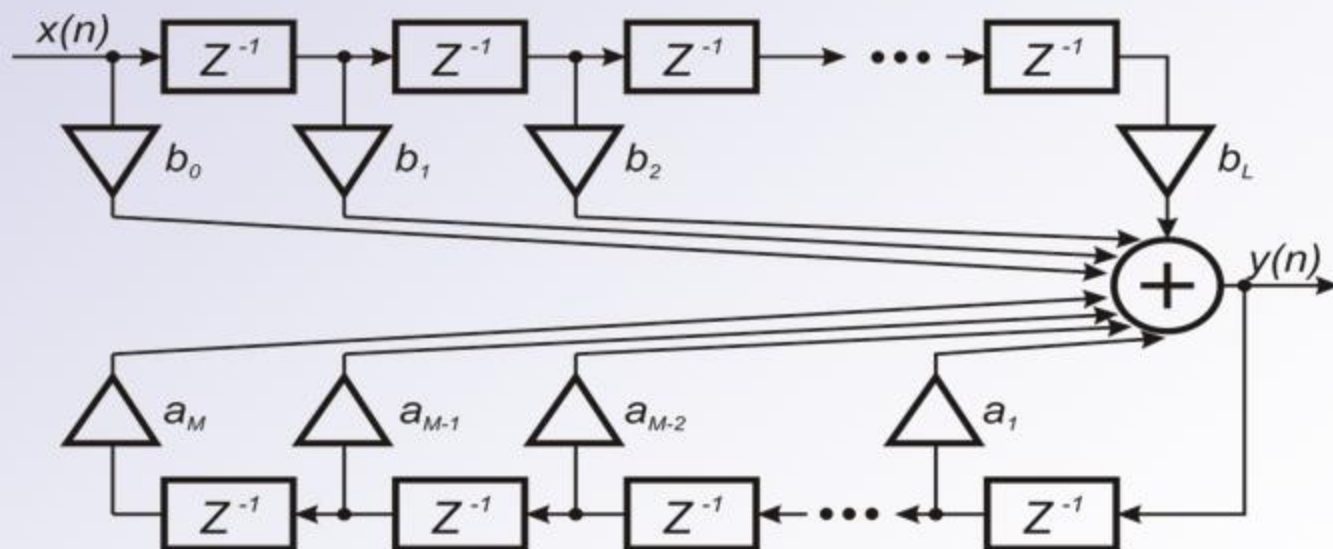


Рис 2.3. Прямая форма БИХ-фильтра M-го порядка

Меняя порядок формирования нулей и полюсов, получим

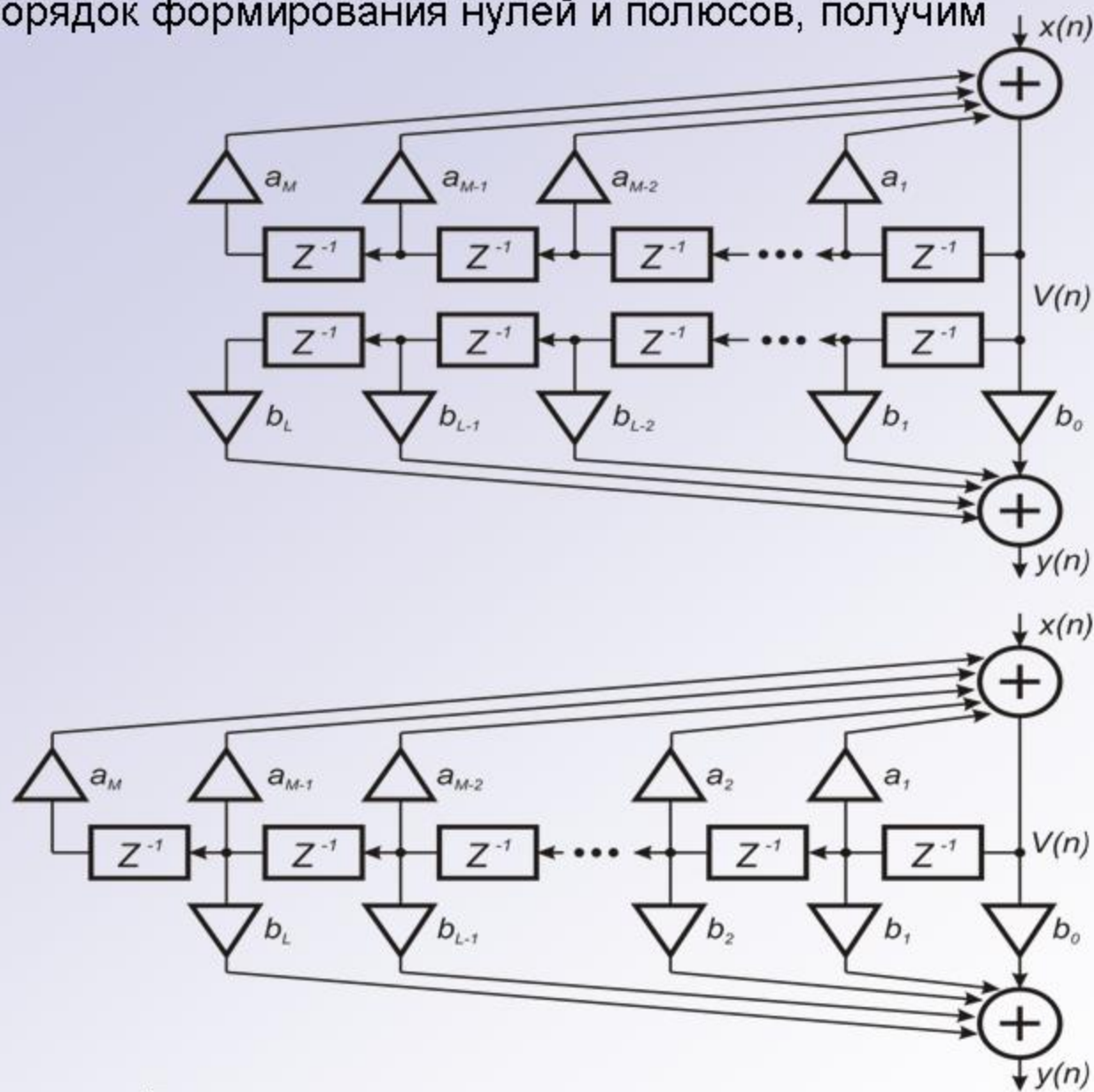


Рис 2.4. Каноническая форма БИХ-фильтра

Представим передаточную функцию (2.15) в форме разложения на простые дроби (*параллельная форма*)

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 + B_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{C_k + D_k z^{-1}}{1 + E_k z^{-1} + F_k z^{-2}} \quad (2.17)$$

и в форме разложения числителя и знаменателя на простые многочлены (*последовательная форма*)

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M_1} \frac{A_k}{1 + B_k z^{-1}} \cdot \prod_{k=1}^{M_2} \frac{C_k + D_k z^{-1} + G z^{-2}}{1 + E_k z^{-1} + F_k z^{-2}} \quad (2.18)$$

Пример последовательной формы реализации ( $M=5, L=3$ )

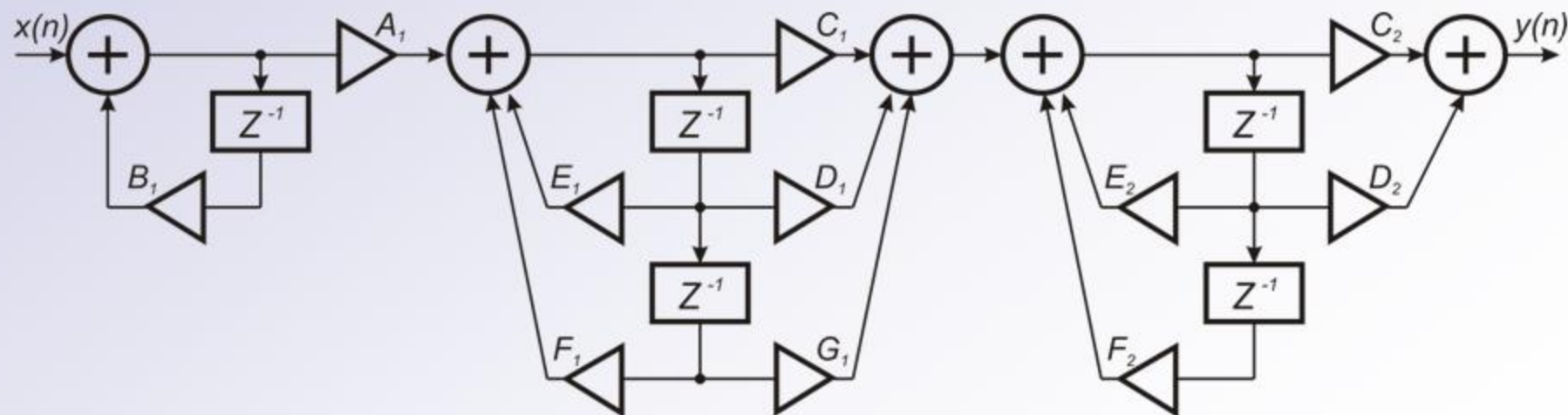


Рис 2.5. Последовательная (каскадная) форма БИХ-фильтра



## 2.3.2. БИХ-фильтры 2-го порядка: основные характеристики и свойства

Передаточная функция  $H(z) = \frac{A}{1 - Ez^{-1} - Fz^{-2}} = \frac{Az^2}{z^2 - Ez - F}$

имеет двукратный нуль  $z_{0,2} = 0$  и два полюса  $z_{p_{1,2}} = \frac{E}{2} \pm \sqrt{\frac{E^2}{4} + F^2}$

Прямая (каноническая) форма реализации:

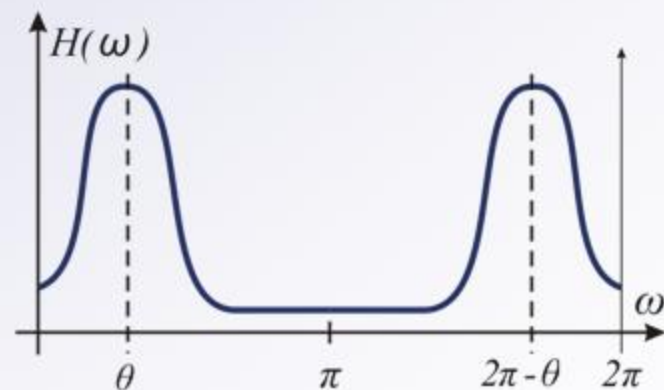
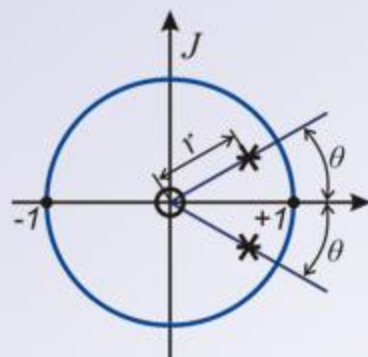
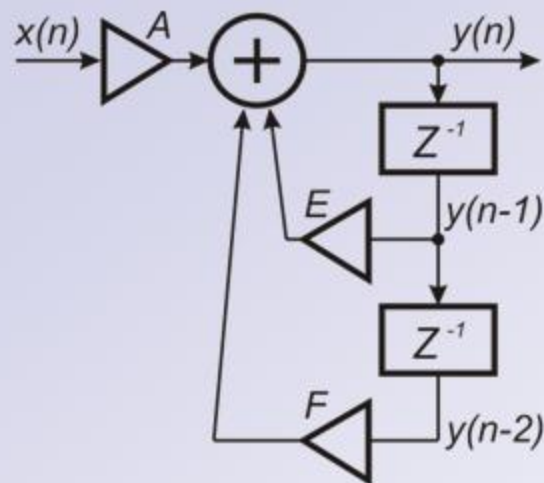


Рис 2.6. Структурная схема и положение нулей и полюсов передаточной функции БИХ-фильтра 2-го порядка

$$H(\omega) = \frac{A}{\sqrt{(1 - E \cos \omega - F \cos 2\omega)^2 + (E \sin \omega + F \sin 2\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{E \sin \omega + F \sin 2\omega}{1 - E \cos \omega - F \cos 2\omega}$$

(2.19)

## 2.4. Методы построения структур ЦФ в классе КИХ-цепей

### 2.4.1. Классификация методов построения

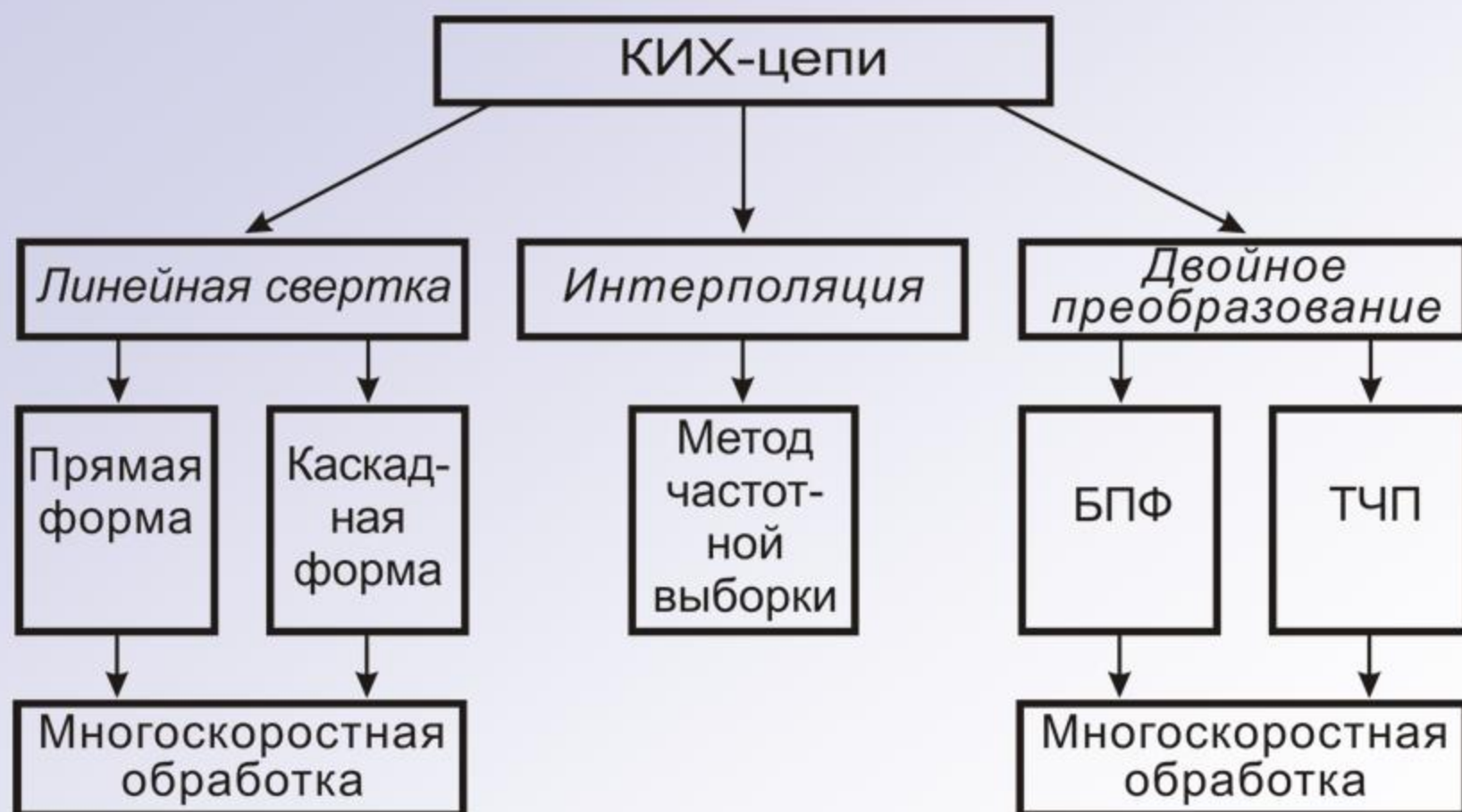


Рис 2.7. Классификация методов построения ЦФ в классе КИХ-цепей

Линейная свертка:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h(k) \leftrightarrow H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (2.20)$$

Метод частотной выборки:

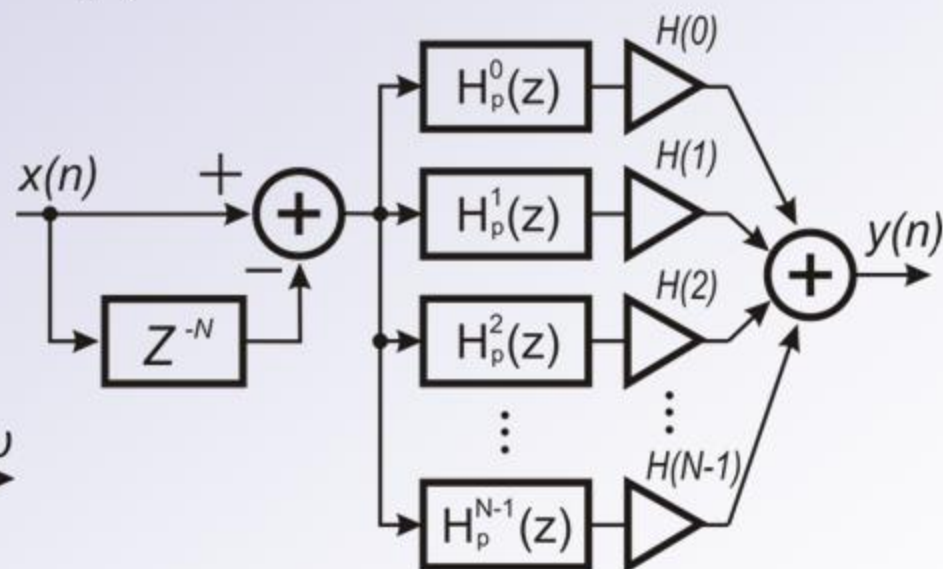
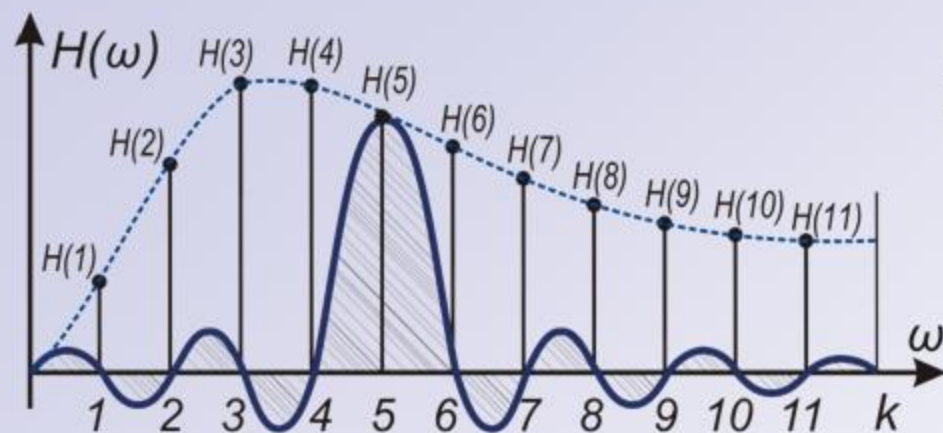


Рис 2.8. Структурная схема ЦФ на основе метода частотной выборки

$$H(z) = \left( \frac{1-z^{-N}}{N} \right) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1}{1-W_N^{-k}z^{-1}}, \quad W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi k}{N}} \quad (2.21)$$

$$H_B(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi \left[ j \left( \omega - \frac{2\pi k}{N} \right) \right], \quad \text{где} \quad \Phi(j\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{N \sin(\omega / 2)} e^{-j\frac{\omega N}{2}}$$

### 2.4.3. Алгоритм БПФ и его свойства

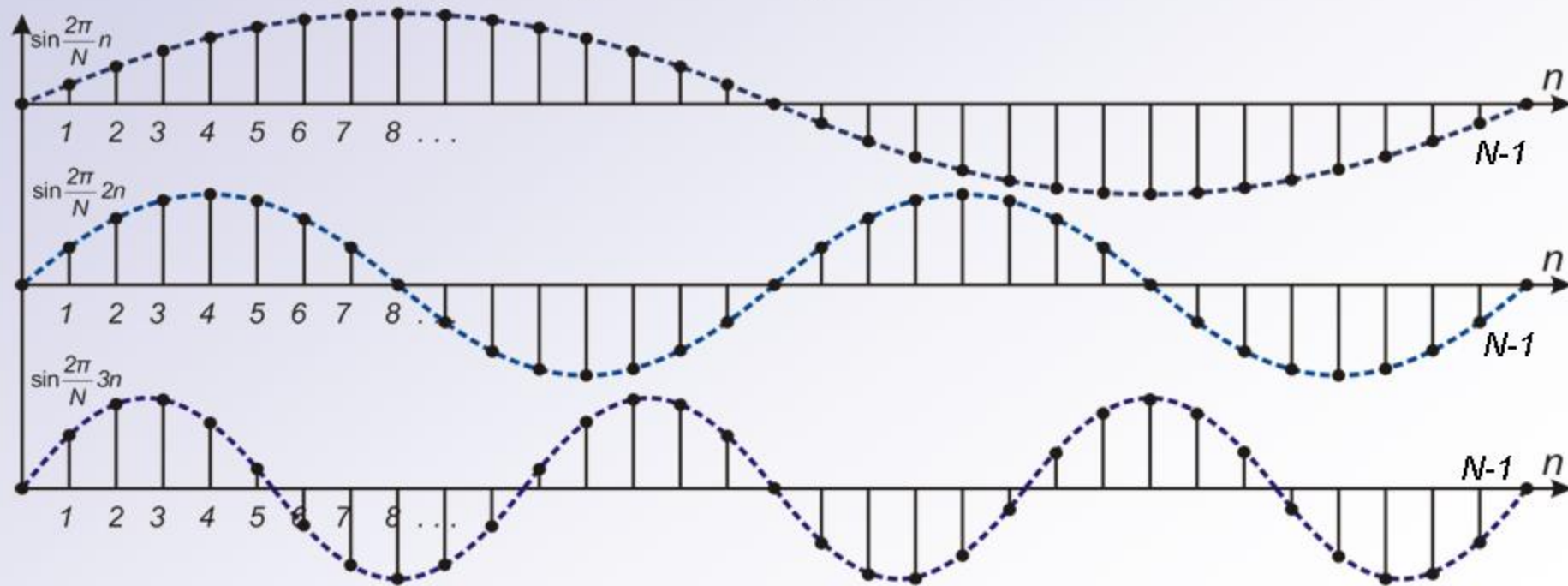
Дискретное преобразование Фурье:

Пусть  $x(n)$  отлична от нуля при  $n=0, N-1$

Тогда 
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{-- прямое ДПФ} \quad (2.22)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{-- обратное ДПФ}$$

Здесь: 
$$W_N^{-kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \cos \frac{2\pi}{N}kn - j \sin \frac{2\pi}{N}kn$$



## Алгоритм БПФ

Разделив  $x(n)$  на две последовательности: с четными и нечетными номерами отсчетов, получим

$$X(k) = \sum_{n\text{-четные}} x(n)W_N^{-kn} + \sum_{n\text{-нечетные}} x(n)W_N^{-kn}$$

Заменяя индексы суммирования на  $n=2r$  - для четных и  $n=2r+1$  - для нечетных  $n$ , получим

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{-2kr} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{-k(2r+1)} = \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(W_N^2)^{-kr} + W_N^{-k} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)(W_N^2)^{-kr} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$W_N^2 = e^{j2\frac{2\pi}{N}} = e^{j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{\frac{N}{2}}$$

Тогда 
$$X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{-kr} + W_N^{-k} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{-kr}$$

Следовательно,

$$X(k) = X_1(k) + W_N^{-k} X_2(k)$$

(2.23)

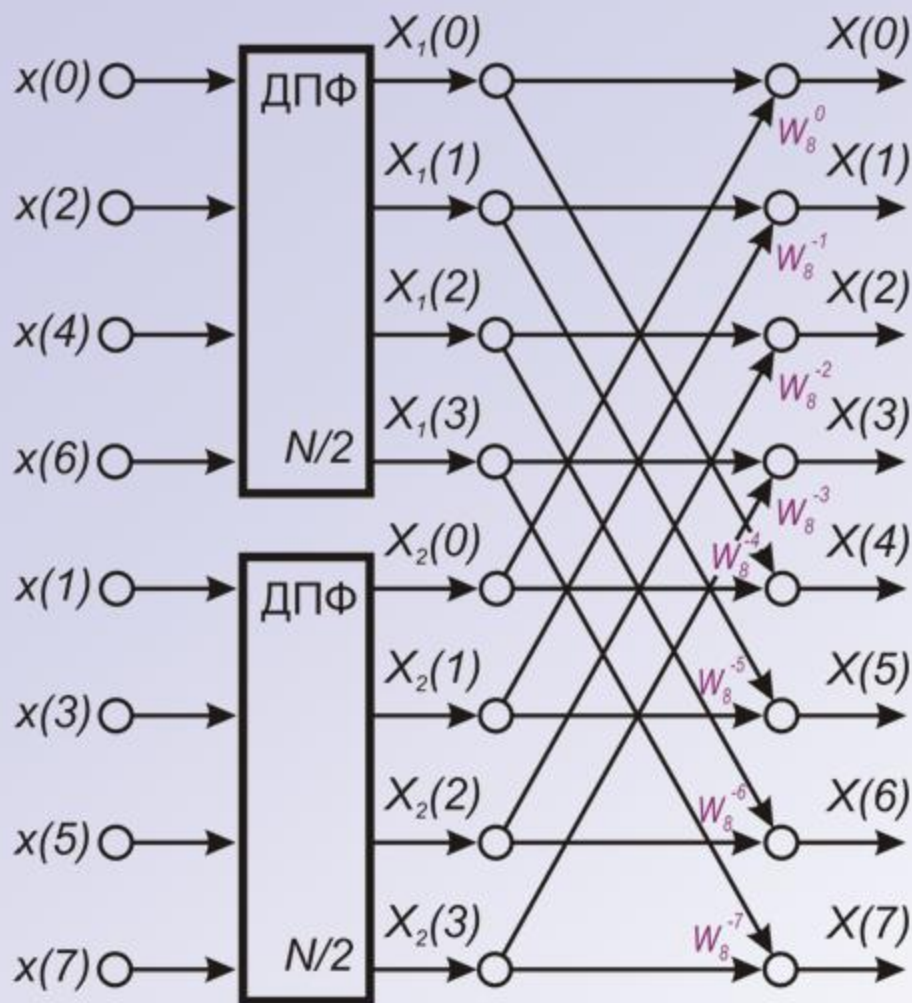


Рис 2.9. Графическое отображение алгоритма (2.23)

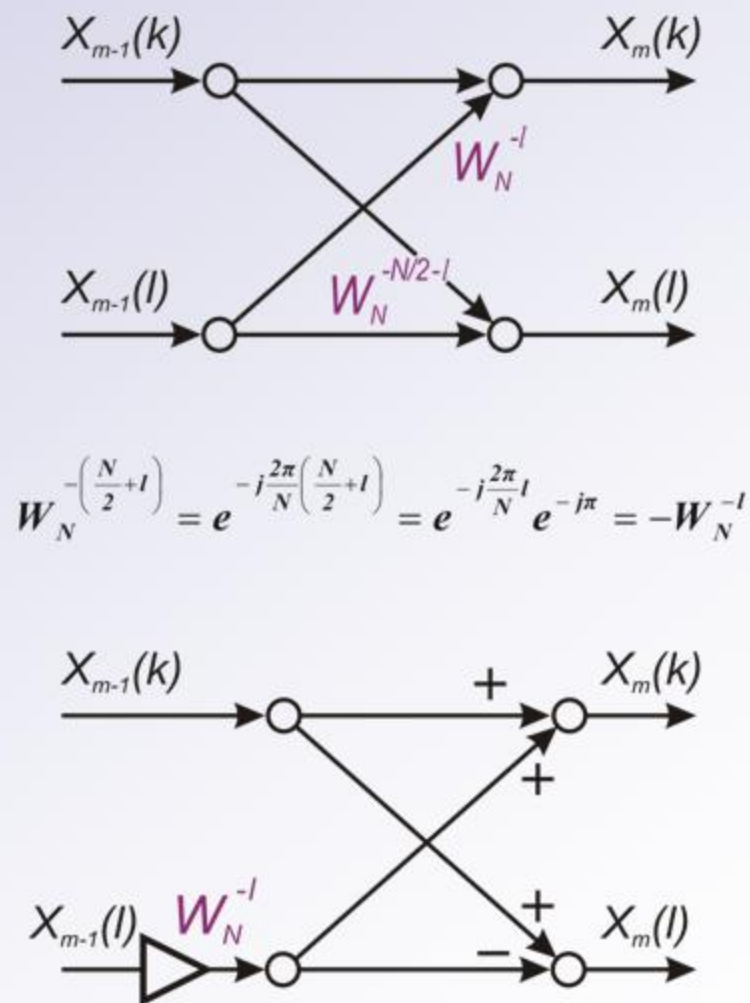
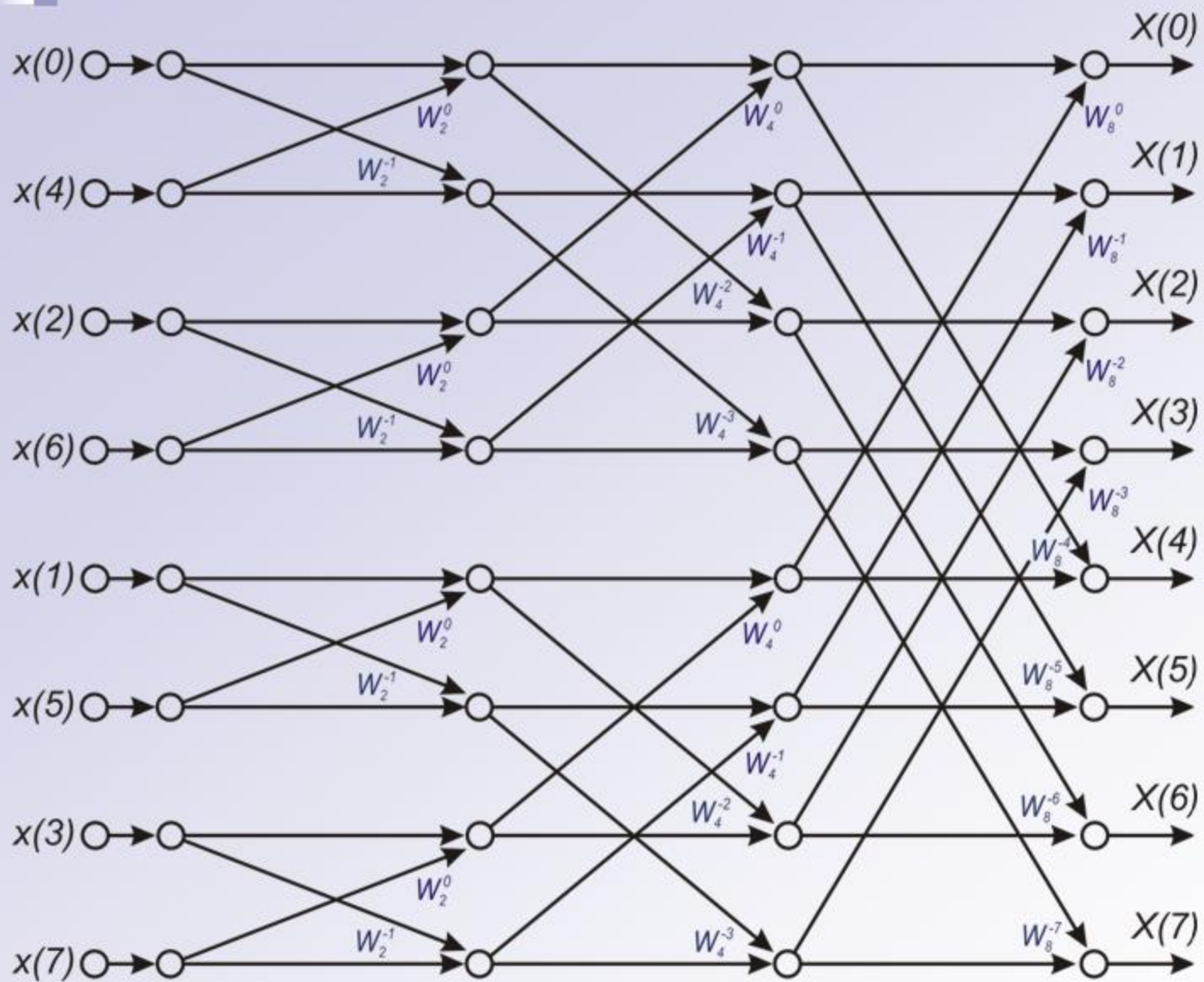


Рис 2.10. Варианты выполнения операции "бабочка"



Оценка затрат:

$$V_{\text{БПФ}}(N) = N \log_2 N$$

Эффективность:

$$J_{\text{БПФ}} = \frac{V_{\text{ДПФ}}}{V_{\text{БПФ}}} = \frac{N}{\log_2 N}$$

Рис 2.11. Граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени (N=8)

## 2.4.4. Быстрая свертка на основе двойного БПФ

Пусть  $x(n)$  задана при  $n=0, 1, 2, 3 \dots M-1$ , а  $h(n)$  – при  $n=0, 1, 2, \dots N-1$ , при этом  $M \geq N$ . Дополняя  $h(n)$  нулями для всех  $N < n \leq M-1$ , получим две периодические последовательности  $x(n)$  и  $h(n)$  с периодом, равным  $M$ .

Тогда имеет место круговая свертка вида

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)h(k)$$

**Алгоритм** секционирования и двойного БПФ для вычисления быстрой свертки:

1. Секционирование входной последовательности  $x(n)$ :

$$\overset{\circ}{x}(n) = \begin{cases} x(n), & \text{при } n < L; \quad (L \geq 2N); \\ 0, & \text{при остальных } n. \end{cases}; \quad \overset{\circ}{h}(n) = \begin{cases} h(n), & \text{при } n < N; \\ 0, & \text{при остальных } n. \end{cases}$$

2. Прямое БПФ:

$$\overset{\circ}{X}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \overset{\circ}{x}(n) W_L^{-kn}; \quad \overset{\circ}{H}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \overset{\circ}{h}(n) W_L^{-kn}; \quad k = \overline{0, L-1};$$

$$V_{\text{БПФ}} = 2N \log_2 2N \quad (\text{при } L = 2N)$$

3. Перемножение Фурье-образов:

$$\overset{\circ}{Y}(k) = \overset{\circ}{X}(k) \overset{\circ}{H}(k), \quad k = \overline{0, L-1}; \quad V_{\text{УМН}} = 2N.$$

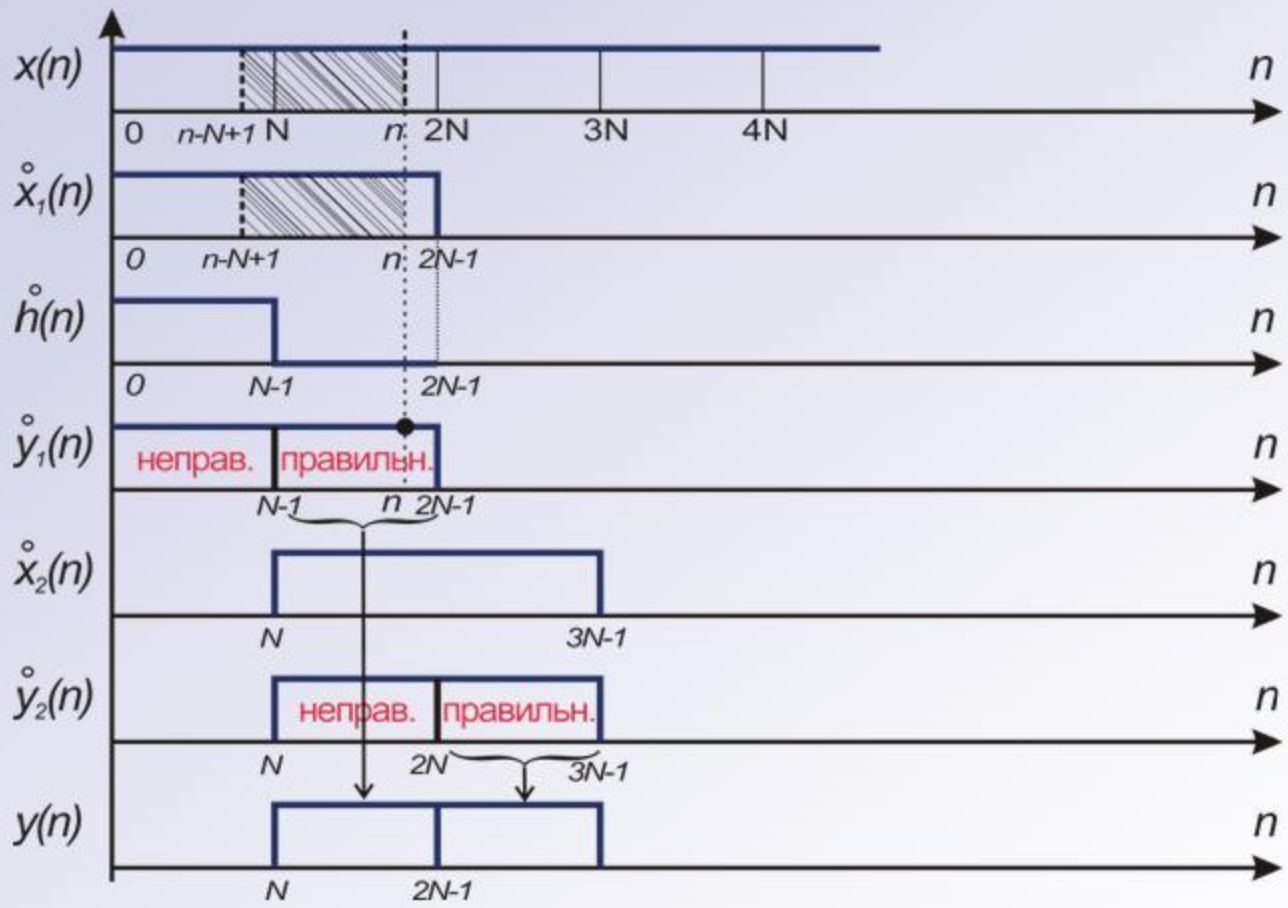


4. Обратное БПФ:

$$y(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} Y(k) W_L^{nk}; \quad V_{\text{ОБПФ}} = 2N \log_2 2N$$

5. Накопление в памяти:

$$y(n) = \overset{\circ}{y}(n) \text{ для всех } n = \overline{L-N, L-1} \quad (n = \overline{N, 2N-1}, \text{ при } L = 2N)$$



Оценка затрат:

$$V_{\text{БС}} = 4N \log_2 2N + 2N$$

Эффективность:

$$J_{\text{БС}} = \frac{V_{\text{ПС}}}{V_{\text{БС}}} = \frac{N}{4 \log_2 2N + 2}$$

Рис 2.12. Графическая иллюстрация алгоритма секционирования