УДК 621.391

С.Н. Бузыканов

ЗАДАЧА РЕДУКЦИИ К ИДЕАЛЬНОМУ ПРИБОРУ В МОДИФИЦИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Рассмотрена задача редукции к идеальному прибору при обработке сигналов в модифицированном пространстве Соболева. Предложена структурная схема системы и обоснован цифровой алгоритм, позволяющий снизить влияние искажений в каналах обработки по сравнению с аналогичными системами в пространстве L_2. Показано, что для моделируемых систем выигрыш может составлять 1.5…7 раз.

Ключевые слова: *редукция к идеальному прибору, некорректные задачи, модифицированное пространство Соболева W_2^1, цифровая обработка изображений.*

Введение. Задача редукции к идеальному прибору возникает во многих технических системах. В частности, данная задача стоит в системах цифровой обработки сигналов и изображений, когда отсутствует возможность использования идеального прибора, не вносящего искажений в ходе наблюдений, измерений, обработки и т. д. [1…3]. Для решения данной задачи применяются различные алгоритмы обработки: на основе спектральных преобразований [1…3], на основе различных методов решения некорректно поставленных задач [4], методами оптической обработки [5] и т.д.

Редукцией к идеальному прибору называют математический аппарат, позволяющий учесть несовершенство измерительной аппаратуры и получить полное представление о сигнале, действующем на входе по регистрируемому отклику.

Рассмотрим решение задачи редукции к идеальному прибору в пространстве L_2 на основе спектральных преобразований. Основой данного метода является математический аппарат, связывающий сигнал на входе $f_{вх}(t)$ и на выходе $f_{вых}(t)$ линейной системы в спектральной и временной области:

$$\begin{gathered} f_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{вх}(x)h(t-x)dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_{вых}(\omega)=F_{вх}(\omega)H(\omega), \end{gathered} \tag{1}$$

где $h(t)$ – импульсная характеристика прибора, $F_{\hat{a}\hat{u}\,\tilde{o}}(\omega)$ – комплексный спектр сигнала на выходе, $F_{\hat{a}\tilde{o}}(\omega)$ – комплексный спектр сигнала на входе, $H(\omega)$ – передаточная функция прибора. С учетом (1) решением задачи является следующее выражение:

$$F_{\hat{a}\tilde{o}}(\omega)=F_{\hat{a}\hat{u}\,\tilde{o}}(\omega)/H(\omega). \tag{2}$$

В идеале (2) дает нам точное решение. Однако ситуация меняется при наличии в канале обработки сигналов собственных шумов и искажений. В этом случае при применении выражения (2) получаем следующий результат:

$$\begin{gathered} F_{вх}(\omega)=\left(F_{вых}(\omega)+N(\omega)\right)\big/H(\omega)= \\ =F_{вых}(\omega)/H(\omega)+N(\omega)/H(\omega), \end{gathered} \tag{3}$$

где $N(\omega)$ – спектр аддитивной помехи $n(t)$. Ошибка решения (3) является случайной из-за случайного характера помехи $n(t)$. Дисперсия решения равна:

$$\sigma^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P_n(\omega)}{\left|H(\omega)\right|^2}d\omega, \tag{4}$$

где $P_n(\omega)$ – спектральная плотность шума $P_n(\omega)=\left|N(\omega)\right|^2$.

Так как передаточная функция системы $H(\omega)$ стремится к нулю при $\omega\to\infty$, а реальная помеха обычно содержит компоненту белого шума ($P_n(\omega)$ стремится к конечному пределу при $\omega\to\infty$), дисперсия решения оказывается бесконечной.

Из-за наличия в подынтегральном выражении (4) при $\omega\to\infty$ малых значений $H(\omega)$ возникают высокочастотные составляющие, которых не должно быть в сигнале $F_{\hat{a}\hat{u}\,\tilde{o}}(\omega)$, дающие в решении бесконечно большие осцилляции. Данное решение задачи является неустойчивым, а сама задача – некорректно поставленной [4].

Одним из широко применяемых методов решения некорректно поставленных задач в пространстве L_2 является метод регуляризации Тихонова [4]. Основой метода является ограничение множества решений данной задачи пространством Соболева. Как показано в [4], такое ограничение приводит к переходу задачи в разряд корректных и позволяет определить ее решение, называемое регуляризованным.

Цель работы: разработка и анализ алгоритма редукции к идеальному прибору в модифицированном пространстве Соболева.

Теоретические основы. Для решения некорректной задачи предлагается проводить обработку сигналов в модифицированном пространстве Соболева [6, 7]. Модифицированное пространство Соболева определяется скалярным произведением функций вида:

$$\big(f(x), g(x)\big)_W = (1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx + \alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}\frac{dg(x)}{dx}dx, \qquad (5)$$

где $0 \le \alpha < 1$ – коэффициент модифицированного пространства Соболева [6].

Ранее был предложен ряд алгоритмов [1, 8], использующих информацию о производной сигнала, однако во всех случаях обработка велась в пространстве L_2. В модифицированном пространстве Соболева W_2^1 система обработки сигналов имеет вид (рисунок 1).

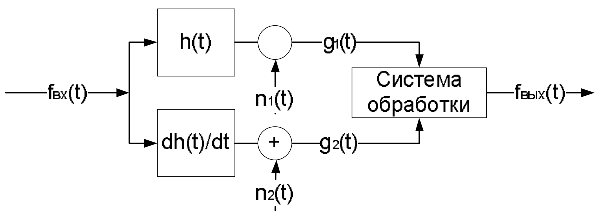

Рисунок 1 – Структурная схема системы обработки в модифицированном пространстве Соболева

Здесь $h(t)$ – импульсная характеристика линейной системы, $dh(t)/dt$ – производная импульсной характеристики линейной системы, $n_1(t)$, $n_2(t)$ – собственные аддитивные искажения в прямом канале и канале производной соответственно. При рассмотрении системы следует учесть аспекты практической реализации данных фильтров, а именно нормировку реальной производной импульсной характеристики фильтра $\hat{h}'(t) = Mh'(t)$, где M – нормирующий множитель, определяемый из условий физической реализуемости (например, из условия равенства энергий в каналах). С учетом теории, представленной в [6], сигнал в спектральной области на выходе системы обработки описывается выражением:

$$F_{\text{вых}}(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left[(1-\alpha)g_1(t) - j\alpha\omega g_2(t)\right]\exp(-j\omega t)dt}{2\pi\left(1-\alpha+\alpha\omega^2\right)}, \qquad (6)$$

где

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\hat{a}\tilde{o}}(x)h(t-x)dx + n_1(t),$$

$$g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{вх}}(t-x)\frac{dh(x)}{dx}dx + n_2(t).$$

При учете собственных шумов в каждом канале обработки, раскрыв скобки и проведя преобразование Фурье, получим итоговое выражение для восстановления исходного сигнала в спектральной области:

$$F_{\hat{a}\tilde{o}}(\omega) = \frac{F_{\hat{a}\hat{u}\,\tilde{o}}(\omega)}{H(\omega)} - \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\omega^2}\frac{N_1(\omega)}{H(\omega)} + \frac{j\alpha\omega M}{1-\alpha+\alpha\omega^2}\frac{N_2(\omega)}{H(\omega)}, \qquad (7)$$

где $N_1(\omega)$, $N_2(\omega)$ – спектры искажений в прямом канале и канале производной соответственно. Ошибка вычисления спектра сигнала равна:

$$\Delta^2(\omega) = \left[\frac{(1-\alpha)N_1(\omega) - j\alpha\omega M N_2(\omega)}{\left(1-\alpha+\alpha\omega^2\right)H(\omega)}\right]^2. \qquad (8)$$

Для определения оптимального значения α_{opt} возьмем производную выражения (8) по α и приравняем ее к нулю. В результате получим выражение:

$$\alpha_{opt} = \frac{P_{n1}(\omega)}{P_{n1}(\omega) + MP_{n2}(\omega)}, \qquad (9)$$

при котором значение ошибки вычисления принимает вид:

$$\Delta^2_{\alpha_{opt}}(\omega) = \frac{M^2 P_{n1}(\omega)P_{n2}(\omega)}{\left[M^2 P_{n2}(\omega) + \omega^2 P_{n1}(\omega)\right]H^2(\omega)}. \qquad (10)$$

Для случая $P_{n1}(\omega) = P_{n2}(\omega) = P_n(\omega)$ (например, при идентичности применяемых схемных решений или при использовании одной матрицы регистрации в видеосистемах) выражение (10) принимает более простой вид

$$\Delta^2_{\alpha_{opt}}(\omega) = \frac{M^2 P_n(\omega)}{\left[M^2 + \omega^2\right]H^2(\omega)}. \qquad (11)$$

В данном случае устойчивость решения определяется скоростью стремления к нулю передаточной функции системы $H(\omega)$. Если при $\omega \to \infty$ в пределах полосы обработки $\omega^2 H(\omega)$ не стремится к нулю, то решение является устойчивым.

Результаты численного моделирования. Пусть каналы системы обработки в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 идентичны. Для первого эксперимента в качестве импульсной характеристики прибора используем выражение

$$h(t) = \sin(\gamma t)/t,$$

где значение $\gamma = 6.3$ является характеристикой оптической системы. Данная характеристика соответствует диафрагме в виде узкой щели при когерентном освещении [1]. Передаточная функция прибора описывается выражением:

$$H(\omega) = \begin{cases} 0.5 & \text{при} \quad |\omega| \le \gamma, \\ 0 & \text{при} \quad |\omega| > \gamma. \end{cases}$$

Для данного случая получим:

$$M = 3.6\,,$$
$$\alpha_{opt} = 0.216\,.$$

На рисунке 2 приведены зависимости $\Delta^2_{\alpha_{opt}}(\omega)$ для пространств L_2 и W_2^1.

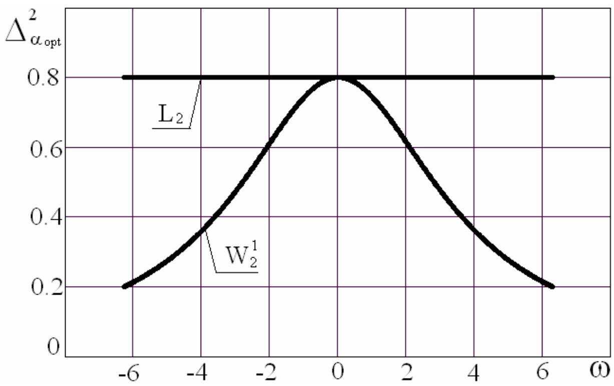

Рисунок 2 – зависимости $\Delta^2_{\alpha_{opt}}(\omega)$ для пространств L_2 и W_2^1

Из анализа рисунка 2 следует, что в этом случае интегральная ошибка $\int \Delta^2_L(\omega)d\omega \Big/ \Big/ \int \Delta^2_w(\omega)d\omega$ в модифицированном пространстве Соболева в 1.6 раза меньше, чем в пространстве L_2.

Для второго эксперимента в качестве импульсной характеристики прибора используем выражение

$$h(t) = \left(\sin(\gamma t)/t\right)^2.$$

Данная характеристика соответствует диафрагме в виде узкой щели при некогерентном освещении [1]. Соответствующая передаточная функция имеет вид:

$$H(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{2}\left(1 + \dfrac{\omega}{2\gamma}\right) & \text{при} \quad -2\gamma \le \omega \le 0, \\ \dfrac{\gamma}{2}\left(1 - \dfrac{\omega}{2\gamma}\right) & \text{при} \quad 0 < \omega \le 2\gamma. \end{cases}$$

Исходя из выражения для импульсной характеристики получим:

$$M = 4\,,$$
$$\alpha_{opt} = 0.2\,.$$

На рисунке 3 приведены зависимости $\Delta^2_{\alpha_{opt}}(\omega)$ для пространств L_2 и W_2^1.для данной импульсной характеристики.

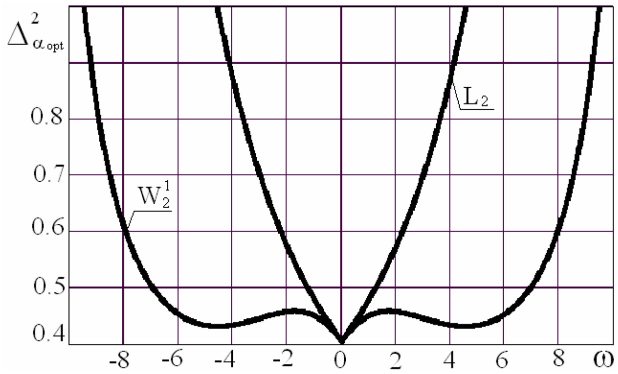

Рисунок 3 – зависимости $\Delta^2_{\alpha_{opt}}(\omega)$ для пространств L_2 и W_2^1

Таким образом, при некогерентном освещении диафрагмы в виде узкой щели интегральная ошибка в модифицированном пространстве Соболева в 7 раза меньше, чем в пространстве L_2.

Вывод. Построение системы обработки сигналов на основе алгоритмов в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 позволяет существенно снизить влияние собственных шумов системы на результаты обработки, а также получить устойчивое решение задачи редукции к идеальному прибору. За счет обработки в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 для промоделированных систем снижение ошибки, вызванной собственными искажениями системы регистрации, составило 1.5…7 раз.

Библиографический список

1. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике. – М. Наука, 1971. – 408 с.

2. *Василенко Г.И.* Теория восстановления сигналов. - М.: Советское радио, 1979. – 272 с.

3. *Василенко Г.И., Тараторин А.М.* Восстановление изображений. – М.: Радио и связь, 1986. – 303 с.

4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. - М: Наука, 1979. – 285 с.

5. *Vander Lugt A.* Operational notation for the analysis and synthesis of optical data-processing systems. – Proc. IEEE, 1966, v. 54, № 8.

6. *Кириллов С.Н., Бузыканов С.Н.* Алгоритм дискретного спектрального анализа сигналов в модифицированном пространстве Соболева // Автометрия. 2003. № 1. С. 88–94.

7. *Кириллов С.Н., Бузыканов С.Н.* Алгоритм восстановления аналогового сигнала в модифицированном пространстве Соболева // Автометрия. 2005. № 2. С. 75–80.

8. *Fienup J.R.* Phase retrieval algorithms: a comparison. – Applied Optics, 1982, vol. 21, no. 15, pp. 2758–2769.