VII Межрегиональная студенческая физико-математическая Олимпиада имени Г.Н. Шуппе
(II тур Всероссийской студенческой олимпиады)
Рязанский государственный радиотехнический университет
24 марта 2018 года

Задача 1. 10 баллов. Пусть для матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$ выполнено $A^2=A^T$.

Требуется:

1) Доказать или опровергнуть, что $A^4=A$;

2) найти все различные комплексные $\lambda_i\in\mathbb{C}$ - собственные числа матрицы A;

3) найти максимальный порядок матрицы A такой, что $\lambda_i\neq\lambda_j$ для любых $i\neq j$ и предложить примеры таких матриц.

Решение.

1) Очевидно, что $A^4=\left(A^2\right)^2=\left(A^T\right)^2=\left(A^2\right)^T=\left(A^T\right)^T=A$.

2) Из уравнения $A^4-A=\Theta \iff A\left(A^3-E\right)=\Theta$, где Θ и E - нулевая и единичная матрицы, получим аналогичное уравнение для собственных чисел: $\lambda\left(\lambda^3-1\right)=0$ с корнями $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

3) Этим числам соответствуют матрицы:

$$A=\left(0\right),\qquad A=\left(1\right),\qquad A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Как видим, максимальный порядок матрицы равен 4.

Задача 2. 6 баллов. Пусть $f'\left(x_0\right)\neq 0$, прямые $\left(l\right)$ и $\left(n\right)$ соответственно касательная и нормальная прямые к $f\left(x\right)$ в точке $x=x_0$. Точки A и B - точки пересечения прямых $\left(l\right)$ и $\left(n\right)$ с осью Ox соответственно, точка C - основание перпендикуляра, опущенного из точки $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ на ось Ox. Найти отношение длин отрезков $AC:BC$.

Решение.

Прямые $\left(l\right)$ и $\left(n\right)$ заданы уравнениями:

$$y=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) \quad\text{и}\quad y=f\left(x_0\right)-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right).$$

Координаты точек пересечения с осью Ox находятся из системы:

$$f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x_A-x_0\right)=0 \qquad f\left(x_0\right)-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x_B-x_0\right)=0.$$

Откуда $AC=\left|x_0-x_A\right|=\left|\dfrac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}\right|$ и $BC=\left|x_0-x_B\right|=\left|f\left(x_0\right)f'\left(x_0\right)\right|$.

Тогда $AC:BC=1\big/\left(f'\left(x_0\right)\right)^2$.

Задача 3. 7 баллов. Пусть каждая из трёх переменных P, V, T является дифференцируемой функцией двух других, рассматриваемых как независимые. Найти произведение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T .$$

Решение.

Рассмотрим неявную функцию

$$f(P,V,T)=0 .$$

Тогда полный дифференциал

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_{V,T} dp+\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{P,T} dV+\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{P,V} dT\equiv 0 .$$

Пусть $P=\text{const}$. Тогда

$$\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{P,T}=-\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{P,V}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P .$$

То есть

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{P,T}}{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{P,V}} .$$

Аналогично, при $V=\text{const}$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{P,V}}{\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_{V,T}} .$$

И, наконец, при $T=\text{const}$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_{V,T}}{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{P,T}} .$$

Тогда произведение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=-1$$

Задача 4. 5 баллов. Доказать, что для прямолинейного движения частицы, необходимо и достаточно, чтобы вектор ускорения был бы коллинеарен вектору скорости в любой момент времени.

Решение.

Обозначим: $\mathbf{r}(t)$ - радиус-вектор, $\mathbf{v}(t)=\dot{\mathbf{r}}(t)=\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ - скорость, $\mathbf{a}(t)=\dot{\mathbf{v}}(t)=\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ - ускорение частицы.

<u>Необходимость.</u> Пусть $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{a}(t)$ коллинеарны в любой момент времени t.

Тогда $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}=c(t)\mathbf{v}$, где $c(t)$ - некоторая функция, зависящая только от времени.

Откуда получаем: $\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0 e^{\int c(t)dt}$, где $\mathbf{v}_0=\mathbf{v}(0)$. Далее интегрируя, получаем:

$\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0=\mathbf{v}_0\int e^{\int c(t)dt}dt=\mathbf{v}_0 f(t)$, где $f(t)=\int e^{\int c(t)dt}dt$. Откуда получаем, что

$$\frac{x-x_0}{v_{0x}}=\frac{y-y_0}{v_{0y}}=\frac{z-z_0}{v_{0z}}=f(t)$$ - уравнение прямой.

Достаточность. Пусть траектория движения частицы – прямая, т.е. задается уравнением

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=f(t).$$

Тогда $\dot{x}=l\dot{f}(t)$, $\dot{y}=m\dot{f}(t)$, $\dot{z}=n\dot{f}(t)$ и $\ddot{x}=l\ddot{f}(t)$, $\ddot{y}=m\ddot{f}(t)$, $\ddot{z}=n\ddot{f}(t)$.

Следовательно, $\ddot{\mathbf{r}}(t)=\dfrac{\ddot{f}(t)}{\dot{f}(t)}\dot{\mathbf{r}}(t)$, то есть $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{a}(t)$ коллинеарны.

Задача 5. 6 баллов.

Дед Максим решил сделать к празднику спиртосодержащую жидкость. Для этой цели он купил 1000 литров 96% этилового спирта и перегонный аппарат достаточно большого объема, работающий по следующему принципу: каждую минуту в аппарат равномерно вливается 3 литра чистой воды, равномерно перемешивается и равномерно выводится 2 литра спиртосодержащей смеси. Через какое время и в каком объёме он получит в перегонном аппарате 40%-ю спиртосодержащую жидкость?

Решение. Пусть в момент времени t в растворе находилось x литров чистого спирта. Так как за t минут добавилось $3t$ литра воды, а убыло $2t$ литра смеси, то в момент времени t количество раствора равно $1000+t$ литров, а концентрация спирта равна $\dfrac{x}{1000+t}$. Тогда в каждую минуту из аппарата убывает $\dfrac{2x}{1000+t}$ литра спирта. В силу равномерности задачи получаем уравнение $\dfrac{2x\,dt}{1000+t}=-dx$ с очевидным решением $x(t)=\dfrac{c}{(1000+t)^2}$. В силу начальных условий: $x(0)=960$ литров, $c=0.96\cdot 10^9$.

Итак, $x(t)=\dfrac{0.96\cdot 10^9}{(1000+t)^2}$ литров чистого спирта находится в растворе в момент времени t, количество раствора равно $1000+t$ литров, то дед Максим получит в перегонном аппарате 40% спиртосодержащей жидкости $\dfrac{0.96\cdot 10^9}{(1000+t)^3}=0.4$ через 339 минут.

Задача 6. 8 баллов.

Пусть $f(x)$ непрерывная на $[0,1]$ и дифференцируемая $(0,1)$ функция. При этом выполнено: $f(0)=4$, $f(1)=2$ и $f'(x)\geq -2$ для любого $x\in(0,1)$. Доказать, что $f(x)$ - линейная функция.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=f(x)+2x-4$.

Так как $g(0)=g(1)=0$, то, по теореме Ролля существует $\xi\in(0,1)$ такая что $g'(\xi)=0$. С другой стороны: $g'(x)=f'(x)+2$. Так как по условию $f'(x)\geq 2$, то $g'(x)\geq 0$ для любого $x\in(0,1)$. Таким образом $g(x)$ неубывающая функция. Так как существует $\xi\in(0,1)$ такая что $g'(\xi)=0$, то $g'(x)=0$ для любого $x\in(0,1)$. То есть, $g(x)=c$. Тогда $f(x)=-2x+4+c$ - линейная функция.

Задача 7. 7 баллов. Найдите первые пять членов разложения функции $y=1+xe^y$ по степеням x.

Решение. Очевидно, что $y(0)=1$. Тогда разложение в степенной ряд представимо в виде:

$$y=1+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n+....$$

Исходную функцию представим в виде $y-1=xe^{y-1}e$. Тогда

$$a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n+...=xee^{a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n+...}$$

Откуда, используя стандартное разложение экспоненты, получаем

$$a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n+...=xee^{a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n+...}=$$

$$=xe\left[\left(1+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n+...\right)+\frac{\left(a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n+...\right)^2}{2!}+...\right].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем:

$$a_1=e,\ a_2=a_1e=e^2,\ \ a_3=a_2e+\frac{a_1^2e}{2}=\frac{3}{2}e^3,\ \ a_4=\frac{8}{3}e^4\ldots\ldots..$$

Окончательно: $y(x)=1+ex+e^2x^2+\dfrac{3e^3}{2}x^3+\dfrac{8e^4}{3}x^4...$

Задача 8. 6 баллов. Найти наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}$ при условиях $x,y,z>0$ и $x+y+z=4$.

Решение.

Данное выражение представляет собой сумму модулей векторов $\mathbf{a}=(x,1)$, $\mathbf{b}=(y,1)$, $\mathbf{c}=(z,1)$, причем $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=(x+y+z,3)=(4,3)$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|=5$. Так как $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|+|\mathbf{c}|\geq|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|=5$, а сумма модулей равна модулю суммы в случае, если вектора являются коллинеарными, т. е. $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}$ при $x=y=z=4/3$.

Задача 9. 4 балла. Известно, что $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$. Вычислить: а) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$; б) x.

Решение.

а)

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-3\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right)=0.$$

б) $\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2}-3=0$; $\dfrac{\left(x^2+1\right)^2-3x^2}{x^2}=0$; $\dfrac{\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)}{x^2}=0$, откуда $x=\dfrac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$.

Задача 10. 9 баллов. Существует ли степень числа 3, которая оканчивается на …001?

Решение.

Рассмотрим 1001 число вида 3^k. Согласно принципу Дирихле, существует хотя бы два числа 3^m и 3^n (пусть $m>n$), которые имеют одинаковые остатки от деления на 1000. Тогда $3^m-3^n=3^n\left(3^{m-n}-1\right)$ будет делиться на 1000, что возможно только тогда, когда $3^{m-n}-1$ делится на 1000. Отсюда получаем, что число 3^{m-n} оканчивается на …001, значит, такая степень существует.

Замечание.

По замыслу организаторов данная задача является «ловушкой». На самом деле, в условии задачи не указаны требования к степени, следовательно, в силу непрерывности функции $y=3^x$

она принимает все значения из области значений. Например: $3^x = 1001$, откуда $x = \log_3 1001$. Студентам, указавшим на это решение, присвоены дополнительные баллы/

Задача 11. 8 баллов.

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$,

Решение. Известны разложения функций по формуле Маклорена: $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o\left(x^6\right)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$. Преобразуем знаменатель $\arcsin x - \sin x = \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)$. Таким образом, искомый порядок числителя равен 3. Тогда числитель $\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2 = \dfrac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.

Окончательно: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x} = 2$.

Задача 12. 9 баллов

Необходимо выкопать колодец за 4 дня. Колодец имеет форму цилиндра глубиной $H = 16$ метров. Распределите работу по извлечению грунта поровну на каждый день. (Каждый день должна выполняться четверть работы).

Решение.

$dA = ghdm = \rho Sghdh$

$$A\left(H\right) = \int\limits_0^H \rho Sghdh = \rho Sg\frac{H^2}{2} = CH^2$$

Откуда получаем: $H_1 = \dfrac{H}{2}$, $H_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}H$, $H_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}H$.

Задача 13. 15 баллов.

Какова вероятность того, что при бросании монеты серия из трех орлов подряд выпадет раньше, чем серия из двух решек подряд?

Решение.

Будем обозначать выпадение орла как 0, а решку – как 1. Найдем, сколько существует последовательностей из 0 и 1 длины n таких, которые заканчиваются ровно тремя нулями и не содержат других троек нулей и пар единиц (*). Обозначим это количество как $X\left(n\right)$.

Очевидно, что $X\left(1\right) = X\left(2\right) = 0$, $X\left(3\right) = 1$: цепочка 000. Далее цепочки длины $n+1$ можем получить из цепочек длины n, подставляя в качестве первого символа 0 или 1 так, чтобы выполнялось условие (*). Получим:

n	$X\left(n\right)$	Возможные цепочки
1	0	-
2	0	-
3	1	000
4	1	1000
5	1	01000
6	2	101000, 001000
7	2	0101000, 1001000
8	3	10101000, 00101000, 01001000
9	4	010101000, 100101000, 101001000, 001001000

Так как всего цепочек длины n, состоящих из 0 и 1, 2^n, то вероятность того, что три орла выпадут раньше двух решек после ровно n бросков, равна $\frac{X(n)}{2^n}$, а общая вероятность равна сумме $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X(n)}{2^n}=\frac{X(1)}{2^1}+\frac{X(2)}{2^2}+\frac{X(3)}{2^3}+\ldots$.

Выведем общую формулу для $X(n)$. Для этого введем 3 вспомогательные величины.

$A(n)$ - количество цепочек из 0 и 1 длины n, удовлетворяющих условию (*) и начинающихся с 00.

$B(n)$ - количество цепочек из 0 и 1 длины n, удовлетворяющих условию (*) и начинающихся с 01.

$C(n)$ - количество цепочек из 0 и 1 длины n, удовлетворяющих условию (*) и начинающихся с 10.

$X(n)=A(n)+B(n)+C(n)$.

При образовании цепочки длины $n+1$, перед каждой цепочкой, начинающейся с 00, для соблюдения условия (*) можно ставить только 1, перед цепочками, начинающимися на 10, - только 0, перед цепочками, начинающимися на 01, можно ставить и 0, и 1.

Тогда

$A(n+1)=B(n)$; $B(n+1)=C(n)$; $C(n+1)=A(n)+B(n)$.

$X(n+1)=A(n)+2B(n)+C(n)$

Далее:

$A(n+2)=B(n+1)=C(n)$;

$B(n+2)=C(n+1)=A(n)+B(n)$;

$C(n+2)=A(n+1)+B(n+1)=B(n)+C(n)$.

Далее:

$A(n+3)=B(n+2)=A(n)+B(n)$;

$B(n+3)=C(n+2)=B(n)+C(n)$;

$C(n+3)=A(n+2)+B(n+2)=A(n)+B(n)+C(n)$.

Тогда $X(n+3)=A(n+3)+B(n+3)+C(n+3)=2A(n)+3B(n)+2C(n)=X(n+1)+X(n)$.

Получили рекуррентную формулу для $X(n)$.

$$S=\frac{X(3)}{2^3}+\frac{X(4)}{2^4}+\frac{X(5)}{2^5}+\frac{X(6)}{2^6}+\frac{X(7)}{2^7}+\ldots.$$

$$\frac{S}{4}=\frac{X(3)}{2^5}+\frac{X(4)}{2^6}+\frac{X(5)}{2^7}+\frac{X(6)}{2^8}+\frac{X(7)}{2^9}+\ldots.$$

$$\frac{S}{8}=\frac{X(3)}{2^6}+\frac{X(4)}{2^7}+\frac{X(5)}{2^8}+\frac{X(6)}{2^9}+\frac{X(7)}{2^{10}}+\ldots.$$

$$\frac{S}{4}+\frac{S}{8}=\frac{X(3)}{2^5}+\frac{X(3)+X(4)}{2^6}+\frac{X(4)+X(5)}{2^7}+\frac{X(5)+X(6)}{2^8}+\frac{X(6)+X(7)}{2^9}+\frac{X(7)+X(8)}{2^{10}}+\ldots=$$

$$=\frac{X(3)}{2^5}+\frac{X(6)}{2^6}+\frac{X(7)}{2^7}+\frac{X(8)}{2^8}+\frac{X(9)}{2^9}+\frac{X(10)}{2^{10}}+\ldots=\frac{X(3)}{2^5}+S-\frac{X(3)}{2^3}-\frac{X(4)}{2^4}-\frac{X(5)}{2^5}.$$

Отсюда получаем:

$\frac{S}{4}+\frac{S}{8}=\frac{1}{32}+S-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}$, откуда $\frac{5S}{8}=\frac{3}{16}$, $S=\frac{3}{10}$.

Ответ: 30%.