Физико-математическая Олимпиада РГРТУ
среди школьников и абитуриентов,
посвященная 110-летию со дня рождения
академика И.К. Кикоина

1 этап. 22 апреля 2018 года.
Математика.

Задача 1.
Найдите все числа x, y, z удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x^4+y^4+z^4=3 \\ x^5+y^5+z^5=3 \\ x^6+y^6+z^6=3 \end{cases}.$$

Решение. Очевидно, что

$$\left(x^4+y^4+z^4\right)-2\left(x^5+y^5+z^5\right)+\left(x^6+y^6+z^6\right)=0,$$

Откуда

$$x^4\left(1-2x+x^2\right)+y^4\left(1-2y+y^2\right)+z^4\left(1-2z+z^2\right)=0,$$

$$x^4\left(1-x\right)^2+y^4\left(1-y\right)^2+z^4\left(1-z\right)^2=0,$$

Что возможно лишь при $x=y=z=1$.

Задача 2.
При каких α уравнение $1+\sin^2\alpha x=\cos x$ имеет единственное решение?
Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2\alpha x=0 \\ \cos x=1 \end{cases}$$

Данная система будет иметь единственное решение если α - иррациональное число.

Задача 3.
Решите уравнение $x^3-[x]=4$, где $[x]$ – целая часть числа x.
Решение. Заметим, что $0<x<2$. Пусть $[x]=0$, т.е. $x<1$. Тогда из уравнения следует, что $x=\sqrt[3]{4}>1$ - противоречие. Значит $[x]=1$. Ответ: $x=\sqrt[3]{5}>1$.

Задача 4.

Натуральные числа a и b таковы, что a^2+ab+1 делится нацело на b^2+ab+1. Докажите, что $a=b$.

<u>Решение.</u> Из тождества $b\left(a^2+ab+1\right)-a\left(b^2+ab+1\right)=b-a$ и из условия задачи следует, что $\left(b^2+ab+1\right)c=b-a$, где $c\in\mathbb{Z}$. То есть, $b-a$ делится нацело на b^2+ab+1. Это возможно лишь при $a=b$.

Задача 5.

Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна 2, $\angle BAD=\pi/4$ точки E и F расположены на диагонали BD, причем $\angle AEB=\angle CFD=\dfrac{\pi}{2}$, $BF=\dfrac{3}{2}BE$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

<u>Решение.</u> Обозначим $BE=x$, $AD=y$. Тогда $FD=x$, $EF=x/2$ и по теореме Пифагора $AE^2=4-x^2=y^2-\dfrac{9x^2}{4}$. По теореме косинусов для треугольника ABD получим $4+y^2-2\sqrt{2}y=\dfrac{25x^2}{4}$. Откуда получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{25x^2}{4}=4+y^2-2\sqrt{2}y\\ y^2=4+\dfrac{5x^2}{4}\end{cases}.$$

С решением $x=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$, $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$. Тогда искомая площадь равна 3.