МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

Ю.С. МИТРОХИН, Г.С. ЛУКЬЯНОВА,
М.Е. ИЛЬИН, В.К. КЛОЧКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рязань 2005

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанская государственная радиотехническая академия

Ю.С. МИТРОХИН, Г.С. ЛУКЬЯНОВА,

М.Е. ИЛЬИН, В.К. КЛОЧКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Рязань 2005

УДК 517.075

Дифференциальное исчисление функции действительных переменных: Учеб. пособие / Ю.С. Митрохин, Г.С. Лукьянова, М.Е. Ильин, В.К. Клочко. Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2005. 84 с. ISBN 5-7722-0251-0.

Содержит методику изложения теоретического материала по разделам введения в анализ, дифференциального исчисления функции одной и нескольких переменных. Отдельные теоремы и утверждения приведены с доказательствами и графическими иллюстрациями. Теоретический материал дополняется большим числом типовых задач. Задачи приведены либо с подробным решением, либо с указаниями к их решению. К каждому разделу даны задачи и примеры для самостоятельного решения с ответами.

Предназначено для студентов всех специальностей заочной формы обучения.

Ил. 36.

Комплексные числа, предел последовательности, предел функции, непрерывность функции в точке и на множестве, дифференциальное исчисление функции одной и многих переменных

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанской государственной радиотехнической академии.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанской государственной радиотехнической академии (зав. кафедрой доц., канд. экон. наук А.И. Новиков)

М и т р о х и н Юрий Сергеевич
Л у к ь я н о в а Галина Сергеевна
И л ь и н Михаил Евгеньевич
К л о ч к о Владимир Константинович

Дифференциальное исчисление
функции действительных переменных

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 05.05.05. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,25.
Уч.-изд. л. 5,25. Тираж экз. Заказ
Рязанская государственная радиотехническая академия.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТА.

ISBN 5-7722-0251-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Одним из основных понятий в математическом анализе является понятие величины, которая измеряется с помощью чисел, принимает постоянные или переменные значения. Величина, которая принимает только одно числовое значение, называется постоянной. Величина, принимающая два и более возможных значений, называется переменной. Если рассмотреть все возможные значения переменной величины, то получим множество значений этой величины. В математике под множеством понимается совокупность (семейство, система, набор и т.д.) объектов различной физической природы. Например, множество студентов в аудитории, семейство звёзд Большой медведицы, множество всех целых чисел и т.д. Из этих примеров видно, что множество может содержать конечное или бесконечное число произвольных объектов. Соответствующие множества называются конечными или бесконечными. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами или точками.

Если элементы удаётся пронумеровать, то множество называется счетным (конечным или бесконечным). Условимся множества обозначать большими буквами, а их элементы – маленькими. Запись $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ означает, что множество X состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Запись $x \in X$ означает, что элемент x принадлежит множеству X, а $x \notin X$ – не принадлежит. Запись $X \subset Y$ или $Y \supset X$ означает, что множество X содержится в множестве Y или что X есть подмножество множества Y, а $X \not\subset Y$ – X не содержится в Y или X не есть подмножество Y. Например, Y – множество студентов в потоке, а $X \subseteq Y$ – подмножество тех из них, кто учится на «хорошо» и «отлично»; или Y – множество действительных чисел, а $X \subset Y$ – подмножество целых чисел. Элементы множества можно задать, указав свойство, которому они удовлетворяют. Например, $X = \{x \mid 1 < x < 3\}$ – множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $1 < x < 3$, $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ – совокупность корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым и обозначается символом $\varnothing$, например $\{x \mid x > 3 \text{ и } x < 2\} = \varnothing$. В дальнейшем мы будем рассматривать числовые множества, элементы которых – действительные (вещественные) числа. Среди числовых множеств важное место занимают множества типа «вещественная ось» и «область плоскости». Множество типа «вещественная ось» геометрически может быть представлено в виде точек, без просвета заполняющих числовую ось, причем если взять две сколь угодно близко расположенные точки M_1 и M_2, то между ними всегда найдётся бесконечное множество других точек – математическая модель, отражающая неисчерпаемость реального мира. Каждой точке M на оси можно поставить в соответствие вещественное число x, представленное в виде конечной или бесконечной дроби, и наоборот: каждому вещественному числу x соответствует некоторая точка M на числовой прямой. В дальнейшем под x будем понимать вещественное число, а слово «вещественное» – опускать.

Отметим некоторые наиболее употребительные множества на числовой прямой.

Пусть a и b – два числа, причем $a < b$, тогда

$$X = \{x | a \le x \le b\} \text{ – отрезок (сегмент);}$$

$\{x | a < x \le b\} = (a, b]$, $\{x | a \le x < b\} = [a, b)$;

$\{x | a \le x\} = [a, +\infty)$, $\{x | x \le b\} = (-\infty, b]$ – полуинтервалы;

$\{x | a < x < b\} = (a, b)$, $\{x | a < x\} = (a, +\infty)$, $\{x | x < b\} = (-\infty, b)$, $\{x | -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, +\infty)$ – интервалы.

Все указанные множества называются промежутками: конечными (например, (a, b), $[a, b]$) или бесконечными [например, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$].

Множество $(-\infty, +\infty)$ называется также числовой прямой, так как его изображением служит вся числовая прямая. Пусть a – произвольная точка числовой прямой и δ – положительное число. Интервал $(a - \delta, a + \delta)$ называется δ-окрестностью точки a и иногда обозначается $\delta_a = (a - \delta, a + \delta)$.

Рассмотрим понятие множества типа «область на плоскости» (плоская область). Обозначим такое множество символом D. Геометрически D представляет множество точек M на плоскости, без просвета заполняющих некоторую плоскую область, которая, будем считать, не содержит «дыр». Каждой точке M соответствует пара вещественных чисел (x, y) и наоборот. Числовое множество D можно задать, указав свойство, которому удовлетворяют числа x и y, например:

$$D = \{(x, y) | 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2x\},\ \ D = \{(x, y) | x^2 + y \ \ \le a^2\}.$$

Для множества D справедливы ранее принятые обозначения и понятия, например:

$$(1,2) \in \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\},\ \ \{x^2 + y^2 \le -1\} = \varnothing.$$

Множество $\{-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$ геометрически представляет всю плоскость. В дальнейшем будем рассматривать только ограниченные области D.

Рассматривают открытые и замкнутые области. Закрытая область D включает в себя некоторую границу Г, которая представляет множество точек, образующих замкнутую линию на плоскости, ограничивающую эту область.

Под δ-окрестностью точки M на плоскости понимается открытый круг радиусом δ с центром в точке M.

Множество D называется областью только в том случае, если для любой внутренней точки $M \in D$ всегда можно указать некоторую, пусть малую, окрестность, а любые две точки $M_1, M_2 \in D$ всегда можно соединить линией, состоящей из точек, принадлежащих D.

Над множествами (над символами этих множеств) можно совершать операции по правилам алгебры множеств. Укажем основные операции и их свойства.

1. Объединением (суммой) двух множеств X и Y называется новое множество, которое состоит из элементов, принадлежащих или X ,или Y, или X и Y одновременно, и обозначается:

$$X \cup Y = X + Y = \{x | x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Например, $(-1,2] \cup [0,3] = (-1,3]$.

2. Пересечением (произведением) двух множеств X и Y называется множество, которое состоит из элементов, принадлежащих X и Y одновременно, и обозначается:

$$X \cap Y = XY = \{x | x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

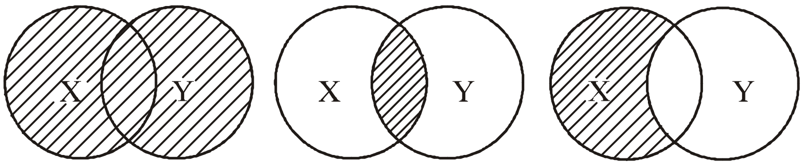
Например, $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}, (-1,2] \cap [0,3] = [0,2]$.

3. Разностью двух множеств X и Y вида $X \setminus Y$ называется множество, состоящее из тех элементов X, которые не принадлежат Y:

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Например, $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$, $(-1,2] \setminus [0,3] = (-1.0)$.

Операции над множествами типа «область на плоскости» геометрически изображены на следующих рисунках:



$X \cup Y$ $\quad$ $X \cap Y$ $\quad$ $X \setminus Y$

Свойства операций:

1) $X + Y = Y + X$, $XY = YX$ – свойство переменности;

2) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$, $(XY)Z = X(YZ)$ – свойство сочетательности;

3) $X(Y + Z) = XY + XZ$ – свойство распределительности.

Некоторые из операций над множествами аналогичны соответствующим операциям над числами, например $X + \varnothing = X$, $X\varnothing = \varnothing$, другие операции не имеют аналогов: $X + X = X$, $XX = X$.

Понятие множеств используется не только как удобная математическая символика. С помощью множеств доказываются различные теоремы в математическом анализе. Алгебра множеств является фундаментом ряда современных математических разделов, например теории вероятностей.

Языку математики свойственна лаконичность. Укажем несколько наиболее употребительных так называемых логических символов, которые используются для обозначения следующих слов:

$\forall$ – любой, каждый, всякий (перевернутое А от английского слова Any – любой);

$\exists$ – существует, найдётся (перевернутое Е от английского слова Existence – существование);

$\in$ – принадлежит; $\notin$ – не принадлежит;

$\subset$ – включается, входит в состав, есть подмножество;

$\not\subset$ – не включается.

Например, запись $\forall x \in X : \alpha$ означает, что «для любого числа x из множества X выполняется (или имеет место) утверждение α»; $\forall x \in X \ \exists\ y \in Y$ – «для любого x, принадлежащего X, всегда найдётся y, принадлежащее Y».

Для облегчения чтения логических символов часто при их записи пользуются разделительными скобками, например:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq x_0; |x - x_0| < \delta),\ |f(x) - A| < \varepsilon \text{, т.е.}$$

«Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$». Другие символы:

$\alpha \Rightarrow \beta$ – «из предложения α следует предложение β»;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ – «предложения α и β равносильны», т.е. из α следует β и из β следует α;

$\overline{\alpha}$ – « не α», т.е. отрицание предложения α;

$x = \max\{x_1,...,x_n\}$ – x есть максимальное из чисел $x_1,...,x_n$;

$x = \min\{x_1,...,x_n\}$ – x есть минимальное из чисел $x_1,...,x_n$;

$\operatorname{sgn} x$ – знак x;

$[x]$ – целая часть числа x;

$x \rightarrow y$ – x отображается в y.

В математическом анализе часто встречается понятие абсолютной величины числа и используются неравенства, связанные с абсолютными величинами.

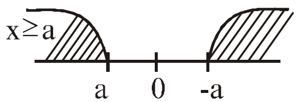
Абсолютной величиной $|x|$ (или модулем) числа x называется число x, если $x \geq 0$, или число $-x$, если $x < 0$;

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

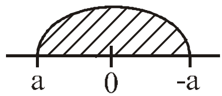
Абсолютную величину можно определить: $|x| = \sqrt{x^2}$. Из определения $|x|$ вытекают следующие свойства абсолютной величины (на рисунках дана геометрическая иллюстрация некоторых из них):

1. $|x| \ge 0$.

2. $|x| = |-x|$.



3. $\forall a > 0 : |x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$.



4. $\forall a > 0 : |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$.

5. $|x + y| \le |x| + |y|$; $|x - y| \le |x| + |y|$.

6. $|x - y| \ge |x| - |y|$.

7. $\forall x, y : |xy| = |x||y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \ne 0$.

Эти свойства предлагается проверить самостоятельно на конкретных числовых примерах.

2. ФУНКЦИЯ.
ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие функции является одним из основных в курсе высшей математики. Введению этого понятия в математику способствовало то, что некоторые явления в жизни взаимосвязаны и зависимы друг от друга.

Пусть указано некоторое множество X числовой оси $0x$, элементы которого будем обозначать символом x. Пусть также задано другое числовое множество Y, элемент которого обозначим символом y. Если каждому значению x из множества X по какому-нибудь правилу поставлено в соответствие одно определённое значение другой величины y из множества Y, то говорят, что эта величина y есть функция величины x или что величины x и y связаны между собой функциональной зависимостью.

При этом величина x называется аргументом функции y, а множество X – областью определения или областью допустимых значений (ОДЗ). Значение аргумента x из области X определения функции y мы можем выбрать по нашему усмотрению произвольно; поэтому величина x называется независимой переменной. Значение же функции y, когда значение независимой переменной уже определено, мы выбрать произвольно не можем; это значение будет строго определённым именно тем, которое соответствует выбранному значению независимой переменной. Значение функции зависит от значений, принимаемых независимой переменной, и обычно изменяется при её изменении. Поэтому функцию называют ещё зависимой переменной.

Определение. Величина y называется функцией переменной величины x в области определения X, если каждому значению x из указанной области соответствует одно определённое значение величины y.

Для обозначения того факта, что переменная y есть функция переменной x, используется символическая запись $y = f(x)$, где знак f – знак функции.

Областью определения функции может быть любое числовое множество, но мы ограничимся рассмотрением простейших:

1) X – множество неотрицательных точек числовой оси, т.е. $x = 0,1,2,\ldots$ (или некоторая часть этого множества);

2) один или несколько интервалов (конечных или бесконечных) числовой оси.

В первом случае мы имеем функцию целочисленного аргумента или числовую последовательность, во втором случае – функцию непрерывного аргумента.

Множество значений, принимаемых функцией y, называется областью значений функции.

Среди всех функций можно указать наиболее простые, которые называются простейшими элементарными функциями. К ним относятся:

1) степенная функция: $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$;

2) показательная функция: $y = a^{x}$, где $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометрическая функция: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$;

5) обратные тригонометрические функции:

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \mathrm{arctg}\, x.$$

Графики этих простейших элементарных функций приведены на рис. 2.1, а-и.

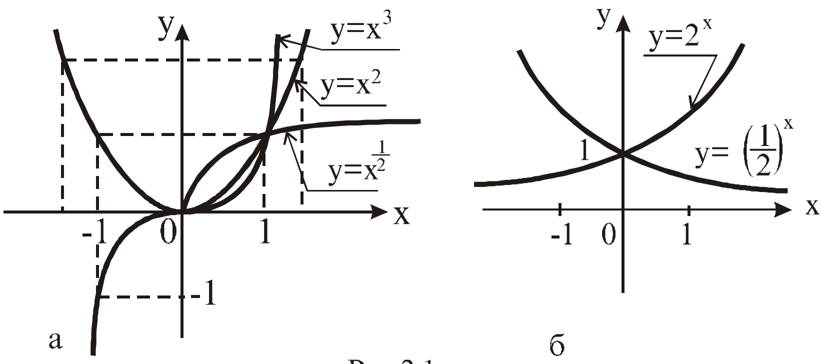


Рис.2.1

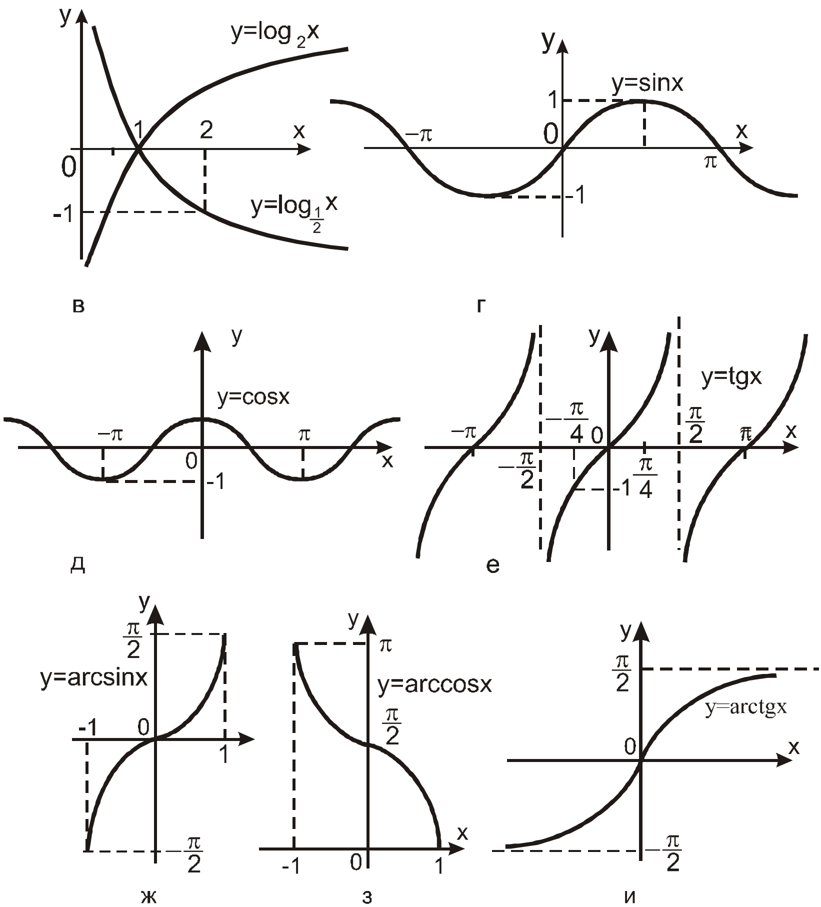


Рис.2.1(окончание)

3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение 3.1. Комплексным числом $\mathbf{z}$ называется выражение $\mathbf{z = x + iy}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – действительные числа, $\mathbf{i}$ – мнимая единица. $\mathbf{i^2 = -1}$. Если $\mathbf{y = 0}$, то $\mathbf{x + i \cdot 0 = x}$ – действительное число, если $\mathbf{x = 0}$, то $\mathbf{0 + iy = iy}$ – чисто мнимое число. Действительной частью числа $\mathbf{z = x + iy}$ называется число $\mathbf{x}$ и обозначается $\mathbf{x = Re\,z}$, а число $\mathbf{y}$ называется мнимой частью числа $\mathbf{z}$ и обозначается $\mathbf{y = Im\,z}$.

Определение 3.2. Числа $\mathbf{z_1 = x_1 + iy_1}$ и $\mathbf{z_2 = x_2 + iy_2}$ называются равными, если $\mathbf{x_1 = x_2}$ и $\mathbf{y_1 = y_2}$.

Определение 3.3. Число $\mathbf{\bar{z} = x - iy}$ называется сопряженным к числу $\mathbf{z = x - iy}$.

Любое комплексное число $z = x + iy$ можно представить на плоскости xOy точкой $M(x, y)$ или вектором $\overline{OM}$, где O – начало координат. При этом плоскость xOy называется комплексной плоскостью, а оси Ox и Oy – соответственно действительной и мнимой осью.

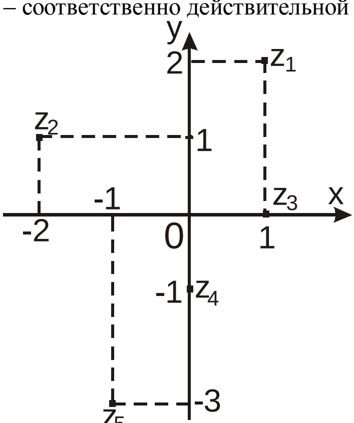


Рис.3.1

Пример 3.1. Изобразить на комплексной плоскости числа

$$z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = -2 + i,$$

$$z_3 = 1,\ z_4 = -i,\ z_5 = -1 - 3i.$$

Решение. Смотрите рис. 3.1.

Представим число $z = x + iy$ вектором $\overline{OM}$. Длина r вектора $\overline{OM}$ называется модулем комплексного числа z и обозначается $r = |z|$ (рис.3.2).

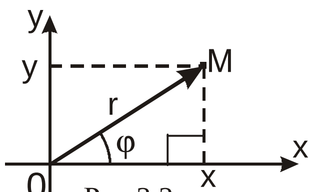


Рис.3.2

Из теоремы Пифагора следует, что $\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Величина угла φ между вектором $\overline{OM}$ и положительным направлением оси Ox называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = \arg z$.

Очевидно, что одному и тому же вектору $\overline{OM}$ соответствует бесконечно много значений величины угла, которые отличаются на величину $2\pi R,\ R \in Z$. Поэтому договоримся рассматривать $\varphi \in (-\pi; \pi]$.

Для числа $z = 0$ аргумент не определён.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ может быть найден по формуле

$$\boxed{\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \text{ при } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \text{ при } x < 0,\ y > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \text{ при } x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ при } x = 0 y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ при } x = 0 y < 0. \end{cases}}$$

Кроме алгебраической формулы записи комплексного числа z в виде $x + iy$, существуют ещё тригонометрическая и показательные формы записи этого числа.

Запись числа z в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой, а в виде $z = re^{i\varphi}$ – показательной формой.

Пример 3.2. Записать комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = i$, $z_3 = -\sqrt{3} + i$, $z_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. 1. Для z_1 $x = 1, y = -1$ (рис.3.3). Поэтому

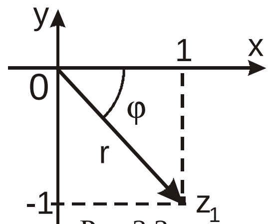


Рис.3.3

$$r = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \arg z_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

2. Для z_2 $x = 0$, $y = 1$,

$$r = |z_2| = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$ (рис.3.4).

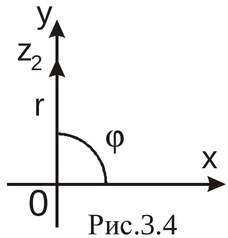


Рис.3.4

Поэтому

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

3. Для z_3 $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$ (рис. 3.5),

$$r = |z_3| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2,$$

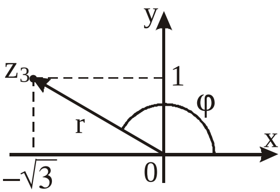


Рис.3.5

$$\varphi = \arg z_3 = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Поэтому

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

4. Для z_4 $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ (см.рис.3.6),

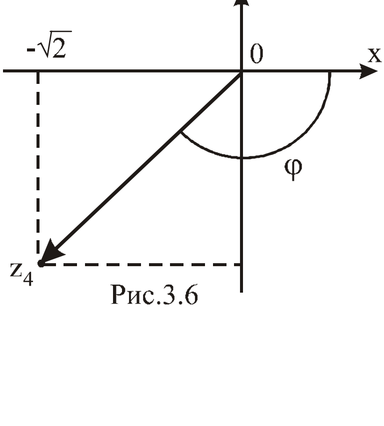


Рис.3.6

$$r = |z_4| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2+2} = 2,$$

$$\varphi = \arg z_4 = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right) =$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg}1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}.$$

Поэтому

$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right) = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Рассмотрим теперь арифметические действия над комплексными числами.

Определение 3.4. Суммой двух чисел

$$\mathbf{z_1 = x_1 + iy_1} \quad \text{и} \quad \mathbf{z_2 = x_2 + iy_2}$$

называется комплексное число

$$\mathbf{z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \text{ (рис.3.7, а).}$$

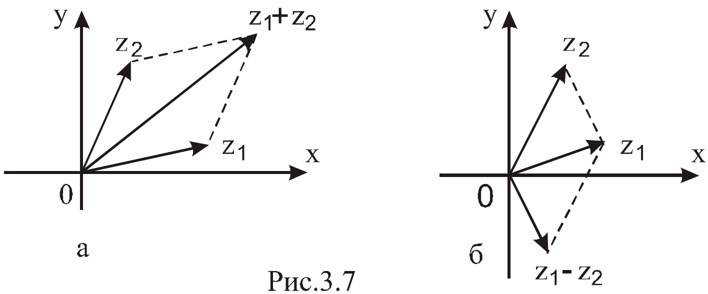


Рис.3.7

Разность чисел $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{z_2}$ находится по формуле (рис.3.7, б)

$$\mathbf{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)}.$$

Произведением чисел $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{z_2}$ называется комплексное число

$$\boxed{\mathbf{z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)}}.$$

Из определения следует, что $i^2 = -1$.

Замечание. На практике произведение двух комплексных чисел удобно находить как произведение двух многочленов, где $i^2 = -1$. Например,

$$(2+3i)(4-5i) = 2\cdot 4 + 3i\cdot 4 - 2\cdot 5i - 3i\cdot 5i =$$

$$= 8 + 12i - 10i - 15i^2 = 8 + 2i - 5(-1)^2 = 8 + 15 + 2i = 23 + 2i\,.$$

Произведение двух взаимно сопряженных чисел

$z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ – действительное число

$$z\cdot\bar{z} = (x - iy)\cdot(x - iy) =$$

$$= \left(x^2 + y^2\right) + i(-xy + xy) = x^2 + y^2 = |z|^2\,.$$

Частное двух чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ находится по формуле

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}}\,.$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путём умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное к знаменателю

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Пример 3.3. Вычислить: а) $(1-3i)+(2+5i)$;

б) $(7+5i)-(2-2i)$; в) $(2+4i)(3-i)$;

г) $\dfrac{3+i}{1-2i}$; д) $\dfrac{1+5i}{3+i} + \dfrac{-2+i}{1-2i}$.

Решение: а) $(1-3i)+(2+5i)=(1+2)+i(-3+5)=3+2i$;

б) $(7+5i)-(2-2i)=(7-2)+i(5-(-2))=5+7i$;

в) $(2+4i)(3-i)=(2\cdot 3-4\cdot(-1))+i(2(-1)+4\cdot 3)=$

$=(6+4)+i(-2+12)=10+10i$;

г) $\dfrac{3+i}{1-2i}=\left|\begin{array}{l}\text{домножим на сопряженное}\\ \text{число к знаменателю}\end{array}\right|=$

$$=\frac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{(3-2)+i(6+1)}{1+2^2}=\frac{1+7i}{5}=$$

$$=\frac{1}{5}+i\frac{7}{5}=0{,}2+1{,}4i;$$

д) $\dfrac{1+5i}{3+i}+\dfrac{-2+i}{1-2i}=\dfrac{(1+5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}+\dfrac{(-2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=$

$=\dfrac{(3+5)+i(15-1)}{9+1}+\dfrac{(-2-2)+i(-4+1)}{1+4}=$

$=\dfrac{8+14i}{10}+\dfrac{-4-3i}{5}=0{,}8+1{,}4i+(-0{,}8-0{,}6i)=$

$=(0{,}8-0{,}8)+i(1{,}4-0{,}6)=0+0{,}8i=0{,}8i$.

Умножение и деление комплексных чисел удобно производить в комплексной или тригонометрических формах.

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Тогда $z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$

$$=r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+$$
$$+i(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2))=$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по формулам косинуса и синуса} \\ \text{суммы двух аргументов} \end{array} \right| =$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right).$$

Таким образом,

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)}$$

или в показательной форме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}.$$

Пример 3.4. Вычислить $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$,

$$z_2 = -\sqrt{3} - i.$$

Решение. Представим оба числа в тригонометрической форме (см.рис.3.8).

Для $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ $\quad r_1 = \left|z_1\right| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \cdot$$

.

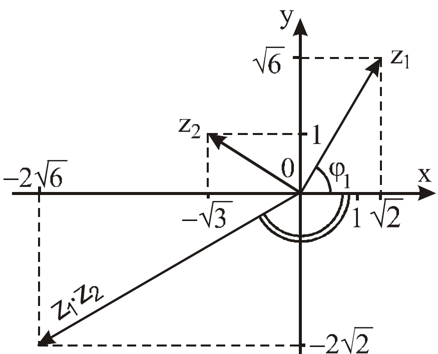


Рис.3.8

Следовательно,

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right).$$

Для $z_2 = -\sqrt{3} - i$

$$r_2 = \left|z_2\right| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\varphi_2 = \arg z_2 =$$

$$= \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Следовательно, $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

=|или в алгебраической форме|=

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{6} - i2\sqrt{2}\ .$$

Из формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме следует, что если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

то

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

и, в общем случае,

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi i\sin n\varphi)}.$$

Последняя формула носит название формулы Муавра.

Пример 3.5. Вычислить z^{20}, где $z = 2 - 2\sqrt{3}i$.

Решение. Запишем данное число z в тригонометрической форме

$$r = |z| = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6},$$

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Далее по формуле Муавра

$$z^{20} = 4^{20}\left(\cos\left(\frac{-20\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-20\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 4^{20}\left(\cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4^{20}\left(\cos\left(4\pi - \frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(4\pi - \frac{10\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4^{20}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{40}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{39} + i2^{39}\sqrt{3}.$$

Извлечение корня n-й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т.е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то по определению корня и формуле Муавра получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $p^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$

То есть $\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид

$$\boxed{\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Получим n различных значений корня. При других значениях k, в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при $k = n$ имеем

$$\omega_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = \omega_0$$

$(k = 0)$.

Итак, для любого $z \neq 0$ корень n-й степени из числа z имеет ровно n различных значений.

Пример 3.6. Найти значения: а) $\sqrt[3]{i} = \omega$; б) $\sqrt{-1} = \omega$.

Решение: а) запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Стало быть,

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right),$$

$k = 0, 1, 2$.

При $k = 0$ имеем $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$;

при $k = 1$ имеем

$$\omega_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 2$ имеем

$$\omega_2=\cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i;$$

б) снова запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $-1=\cos\pi+i\sin\pi$.

Поэтому

$$\sqrt{-1}=\sqrt{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2},\ k=0,1.$$

При $k=0$ получаем $\omega_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, а при $k=1$ получаем $\omega_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$. Таким образом, $\sqrt{-1}=i$ и $\sqrt{-1}=-i$.

Отметим одно замечательное свойство корней n-й степени из числа z: точки ω_k, $k=0,1,\ldots,n-1$ являются вершинами правильного n-угольника.

Пример 3.7. Изобразить на комплексной плоскости $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$.

Решение. $z=-2+2\sqrt{3}i$, где $x=-2$, $y=2\sqrt{3}$.

$$r=|z|=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=4,$$

$$\varphi=\arg z=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

Найдем все корни 4-го порядка из числа z по формуле

$$\omega_k=\sqrt[4]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi(1+3k)}{12}+i\sin\frac{2\pi(1+3k)}{12}\right)$$

, где $k=0,1,2,3$.

Получим:

$$\omega_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right),$$

$$\omega_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

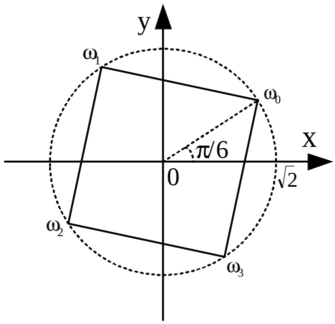


Рис.3.9

$$\omega_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right),$$

$$\omega_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Изобразим полученные корни на комплексной области и получим квадрат (рис. 3.9).

4. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

4.1. Основные определения и понятия

Из элементарного курса математики мы имеем представление о числовых последовательностях. Примерами числовых последовательностей могут служить:

1) последовательность всех элементов арифметической и геометрической прогрессий;
2) последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность;
3) последовательность $x_1 = 1,\ x_2 = 1{,}4,\ x_3 = 1{,}41, \ldots$ приближенных значений числа $\sqrt{2}$ и т.д.

Определение 4.1. Если каждому числу n натурального ряда чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$ ставится в соответствие по определённому закону некоторое вещественное число x_n, то множество пронумерованных вещественных чисел

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

называется числовой последовательностью или просто последовательностью.

Изобразим элементы числовой последовательности на числовой оси (см. рис. 4.1).

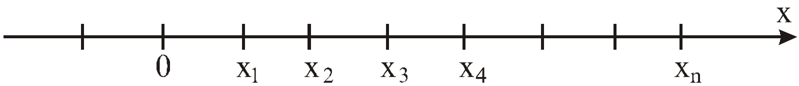


Рис. 4.1

Введем определение числовой последовательности как функции целочисленного аргумента. Пусть X – произвольное множество действительных чисел.

Определение 4.2. Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое вполне определённое число $f(x)$, то говорят, что на множестве X определена числовая функция f. Множество X называется областью определения, а множество $E = \{y \in R : y = f(x),\ x \in X\}$ – множеством значений числовой функции f.

Определение 4.3. Числовой последовательностью называется функция $f : N \to R$, определённая на множестве всех натуральных чисел. Число $x_n = f(n)$ называется n-м (общим) членом последовательности $\{x_n\}$.

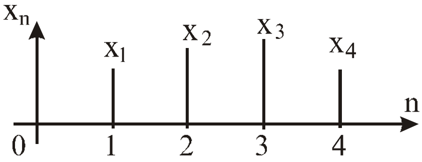


Рис. 4.2

Введём понятие арифметических операций над числовыми последовательностями. Пусть даны произвольные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Суммой этих последовательностей назовём последовательность

$$\{x_n + y_n\} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots\},$$

разностью – последовательность

$$\{x_n - y_n\} = \{x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n, \ldots\}$$

произведением – последовательность

$$\{x_n y_n\} = \{x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n, \ldots\}$$

частным – последовательность

$$\left\{ {x_n}/{y_n} \right\} = \left\{ {x_1}/{y_1}, {x_2}/{y_2}, \ldots, {x_n}/{y_n}, \ldots \right\}.$$

При определении частного все элементы последовательности $\{y_n\}$ должны быть отличны от нуля.

Определение 4.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое действительное число M (число m), что каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $x_n \le M (x_n \ge m)$.

Определение 4.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, т.е. если существуют числа m и M такие, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам: $m \le x_n \le M$.

Определение 4.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной , если для любого положительного числа A найдётся элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$.

Пример 4.1. Исследовать на ограниченность следующие последовательности:

$$\text{а) } \left\{-n^2\right\}; \qquad \text{б) } \left\{\frac{1}{n}\right\}; \qquad \text{в) } \left\{\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)+1\right\}.$$

Решение:

а) последовательность $\left\{-n^2\right\}=\left\{-1,-4,-9,\ldots,-n^2,\ldots\right\}$ ограничена сверху и не ограничена снизу, так как $-n^2 \le 1$ для всех $n \in Z$ (см. рис.4.3,а);

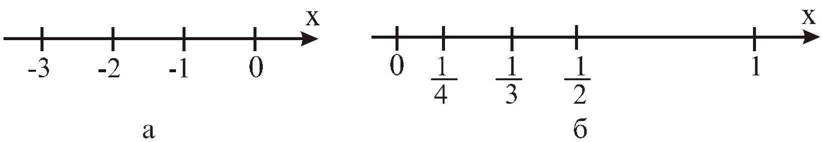


Рис. 4.3

б) последовательность $\left\{n^{-1}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$ ограничена, так как $0 \le \frac{1}{n} \le 1$ для всех $n \in Z$ (см. рис.4.3,б);

в) последовательность $\left\{\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)+1\right\}=\left\{1,\ 2,\ 2,\ldots\right\}$ ограничена сверху и снизу.

Определение 4.7. (определение предела последовательности).

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае говорят, что последовательность сходится к a, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Используя логическую символику, это определение можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \in N\left(n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right).$$

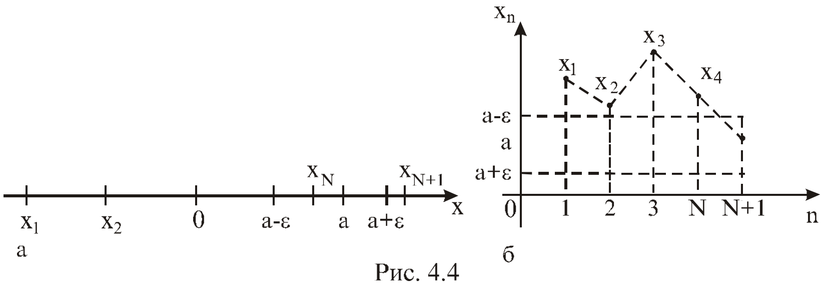


Рис. 4.4

Замечание. Неравенство $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$ эквивалентно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Последние неравенства означают, что все элементы x_n последовательности $\{x_n\}$, начиная с x_n, находятся в ε-окрестности числа a, т.е. внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (см. рис.4.4, а или 4.4, б).

Определение 4.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall \in N\big(n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |x| < \varepsilon\big).$$

Геометрический смысл определения 4.8 заключается в том, что внутри произвольного отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ числовой оси находятся все точки, изображающие элементы числовой последовательности, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon) + 1$ (см. рис.4.5).

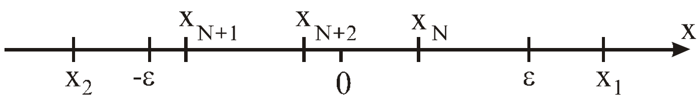


Рис. 4.5

Определение 4.9. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой (сходящейся к бесконечности), если для любого числа $E > 0$, сколь угодно большого, существует номер $N(E)$ такой, что для всех $n > N(E)$ выполняется неравенство $\left|x_n\right| > E$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Если при этом все члены последовательности, начиная с некоторого, положительны (отрицательны), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \right).$$

4.2. Свойства предела последовательности

Теорема 4.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где a и b –4 конечных действительных числа, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n \pm y_n \right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n \cdot y_n \right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$.

4.3. Свойства бесконечно малых и больших последовательностей

1. Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

2. Разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

3. Бесконечно малая последовательность ограничена.

4. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность представляет собой бесконечно малую последовательность.

5. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого N, определена последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, которая является бесконечно малой. Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{y_n\}$ не равны нулю, то последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ бесконечно большая.

6. Сумма двух бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность.

7. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

8. Произведение двух бесконечно больших последовательностей есть последовательность бесконечно большая.

9. При делении двух бесконечно больших последовательностей получаем неопределенность типа $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$.

10. При вычитании двух бесконечно больших последовательностей одного знака получаем неопределенность типа $|\infty - \infty|$.

11. При умножении бесконечно малой последовательности на бесконечно большую получаем неопределенность типа $|0 \cdot \infty|$.

12. При делении двух бесконечно малых последовательностей получаем неопределенность типа $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Пример 4.2. Доказать, что предел последовательности $\{n/(n+1)\}$ равен 1.

Решение. Так как $\frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1}$, то для доказательства достаточно убедиться в том, что для любого наперед заданного ε следует построить $N(\varepsilon)$ такое, чтобы, начиная с $n > N(\varepsilon)$, выполнялось условие $|1/(n+1)| < \varepsilon$. Последнее условие выполняется при $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$.

Например, можно положить

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 & \text{при } \varepsilon \le 1; \\ 1 & \text{при } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}01$. Тогда $N(0{,}01) = 100$. Если же $\varepsilon = 0{,}0001$, то $N(\varepsilon) = 10000$.

Пример 4.3. Найти предел последовательностей:

$$\text{а) } \left\{\frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n}\right\}; \qquad \text{б) } \left\{\sqrt{n^2 + n} - n\right\}.$$

Решение:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \left|\begin{matrix}\text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } n^2\end{matrix}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{пользуясь третьим свойством}\\ \text{пределов последовательностей,}\\ \text{имеем}\end{array}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{2}{1} = 2,$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \left|\infty-\infty\right| =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{умножим числитель и знаме –}\\ \text{натель на множитель, сопря –}\\ \text{женный с числителем n}\end{array}\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

4.4. Монотонная последовательность и ее предел. Второй замечательный предел

Определение 4.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется:

а) неубывающей, если для всех $n \in N$ справедливо $x_{n+1} \ge x_n$, т.е. $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le \ldots$;

б) невозрастающей, если для всех $n \in N$ $x_{n+1} \le x_n$;

в) возрастающей, если для всех $n \in N$ справедливо $x_{n+1} > x_n$;

г) убывающей, если для всех $n \in N$ справедливо $x_{n+1} < x_n$.

Все перечисленные последовательности называются также монотонными.

Теорема 4.2. Если $\{\mathbf{x_n}\}$ – монотонная и ограниченная последовательность: неубывающая и ограничена сверху $\mathbf{x_{n+1}} \geq \mathbf{x_n}$, $\mathbf{x_n} \leq \mathbf{M_0}$ или невозрастающая и ограниченная снизу $\mathbf{x_{n+1}} \leq \mathbf{x_n}$, $\mathbf{x_n} \geq \mathbf{m_0}$, то она имеет предел, где $\mathbf{m_0}$ и $\mathbf{M_0}$ – постоянные действительные числа.

Пример 4.4. Исследовать на монотонность и ограниченность следующие последовательности:

а) $\left\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots\right\}$; б) $\{1,1,2,2,\ldots,n,n,\ldots\}$; в) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Решение:

а) последовательность $\left\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots\right\}$ – невозрастающая. Она ограничена сверху своим первым элементом, равным единице, а снизу – нулем;

б) последовательность $\{1,1,2,2,\ldots,n,n,\ldots\}$ – неубывающая. Она ограничена снизу своим первым элементом, равным единице, а сверху не ограничена;

в) последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ – возрастающая. Она ограничена с обеих сторон: снизу – своим первым элементом $\frac{1}{2}$, а сверху, например, единицей.

Примером монотонной возрастающей последовательности, ограниченной сверху, служит последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, которая по теореме 4.2 имеет конечный предел. Предел этой последовательности называют числом e.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828$ – второй замечательный предел.

Второй замечательный предел раскрывает неопределенность $\left|1^{\infty}\right|$.

Пример 4.5. Вычислить предел последовательности $\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n} = \left|1^{\infty}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{2} = e^{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Какие из указанных последовательностей будут ограниченными, неограниченными, бесконечно большими или бесконечно малыми: 1) $\left\{n^{2}\right\}$; 2) $\left\{\frac{1}{n^{2}}\right\}$; 3) $\left\{1{,}00001^{n}\right\}$; 4) $0{,}99999^{n}$;

5) $\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$. (Указание. Воспользоваться неравенством $\sin x \le x$ при $x > 0$); 6) $\left\{\cos\frac{\pi n}{3}\right\}$; 7) $\left\{n\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$. (Указание. Рассмотреть случаи четных и нечетных n)?

Ответы: 1) бесконечно большая; 2) бесконечно малая; 3) бесконечно большая; 4) бесконечно малая; 5) бесконечно малая; 6) ограниченная; 7) неограниченная.

2. Доказать, что предел указанных последовательностей равен числу b. Определить номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\left|x_n - b\right| < \varepsilon$ при всех $n > N(\varepsilon)$, если

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $b=0$, $\varepsilon=0{,}01$;

2) $\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$, $b=0$, $\varepsilon=0{,}01$ (воспользоваться указанием к задаче 1.5);

3) $\left\{1+\frac{1}{2^n}\right\}$, $b=1$, $\varepsilon=\frac{1}{1024}$;

4) $\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2\right\}$, $b=2$, $\varepsilon=\frac{1}{16}$.

3. Найти пределы последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2-4n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-6n}{3n+1}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-a^2}\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^n$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n}$.

Ответы: 1) $\frac{2}{3}$; 2) 0; 3) ∞; 4) –2; 5) $\frac{5}{2}$; 6) $\sqrt{3}$;

7) 1; 8) $\frac{1}{2}$; 9) e^{-5}; 10) e^4; 11) e^{-2}.

5. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

5.1. Основные определения и понятия

В первом разделе мы ввели определение функции, далее рассмотрим понятие предела функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X. Рассмотрим некоторую точку , быть может, не принадлежащую множеству X, но обладающую тем свойством, что в любой окрестности точки x_0 имеются точки промежутка X, отличные от x_0.

Определение 5.1. Число $\mathbf{A}$ называется пределом функции $\mathbf{f(x)}$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}$ (пишут $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \mathbf{f(x)} = \mathbf{A}$), если для любого $\varepsilon > \mathbf{0}$ существует $\delta(\varepsilon > \mathbf{0})$ такое, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ из условия $\mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $|\mathbf{f(x)} - \mathbf{A}| < \varepsilon$. Используя логическую символику, это определение можно записать так:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \mathbf{f(x)} = \mathbf{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta(\varepsilon) > \mathbf{0}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

$$\mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\mathbf{f(x)} - \mathbf{A}| < \varepsilon.$$

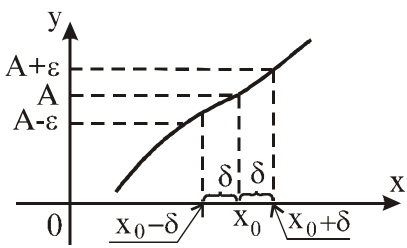


Рис. 5.1

Рис. 5.1 дает геометрическую иллюстрацию определения 5.1.

Определение 5.2. Число A называют пределом функции $\mathbf{f(x)}$ при $\mathbf{x} \to \infty$ (и пишут $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \infty} \mathbf{f(x)} = \mathbf{A}$), если для любого $\varepsilon > \mathbf{0}$ существует число $\mathbf{M}(\varepsilon) > \mathbf{0}$ такое, что из неравенства $|\mathbf{x}| > \mathbf{M}(\varepsilon)$ следует неравенство $|\mathbf{f(x)} - \mathbf{A}| < \varepsilon$ или

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in X, |x| > M(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Рис. 5.2 дает геометрическую иллюстрацию определения 5.2.

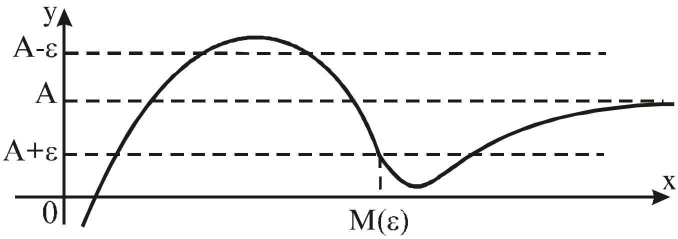


Рис. 5.2

Пример 5.1. Записать, используя логическую символику высказывания $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$, и дать геометрическую иллюстрацию данного высказывания.

Если $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A$, то график функции $f(x)$ при неограниченном возрастании $|x|$ приближается к прямой $y = A$.

Прямая $y = A$ в этом случае называется горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$. Часто на практике используется понятие одностороннего предела.

Определение 5.3. Число $\mathbf{A}$ называется пределом функции $\mathbf{f(x)}$ при $\mathbf{x}$, стремящемся к $\mathbf{x_0}$ справа (слева): пишут $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ $\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \right)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ $(-\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0)$ следует, что $|f(x) - A| < \varepsilon$. Аналогично вводится понятие одностороннего предела на бесконечности $\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ и } \lim_{x \to -\infty} f(x) \right)$.

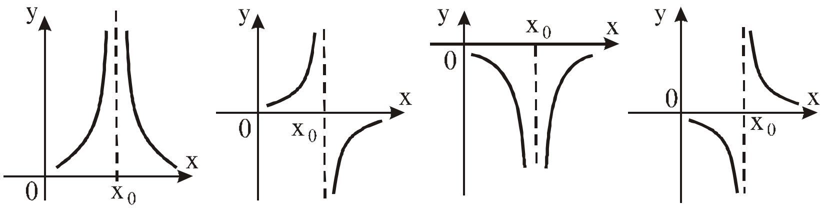
Определение 5.4. Функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ называется бесконечно большой при $\mathbf{x}$ ® $\mathbf{x_0}$, если для любого числа $\mathbf{E} > \mathbf{0}$ существует число $\delta(E) > 0$ такое, что из неравенства $\mathbf{0} < \mathbf{x} - \mathbf{x_0} < d$ следует неравенство $|\mathbf{f}(\mathbf{x})| > \mathbf{E}$. В этом случае пишут $\lim\limits_{\mathbf{x} ® \mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) =$ ¥ .

Используя логическую символику, это определение можно записать так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in X :$$

$$0 < |x - x_0| < \delta(E) \Rightarrow |f(x)| > E.$$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то график функции $f(x)$ при приближении к точке x_0 асимптотически приближается к прямой. $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$. График имеет один из следующих четырех вариантов (рис. 5.3)



$\lim\limits_{x=x_0} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x=x_0-0} f(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x=x_0+0} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x=x_0} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x=x_0-0} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x=x_0+0} f(x)=+\infty$

Рис. 5.3

Пример 5.2. Записать, используя логическую символику, высказывание $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ и дать геометрическую иллюстрацию данного высказывания.

Определение 5.5. Функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ называется бесконечно малой при $\mathbf{x}$ ® $\mathbf{x_0}$ (и пишут $\lim\limits_{\mathbf{x} ® \mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$), если для любого числа $e > \mathbf{0}$ существует число $d(e) > \mathbf{0}$ такое, что из неравенства $\mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|$ следует неравенство $|\mathbf{f}(\mathbf{x})| < e$.

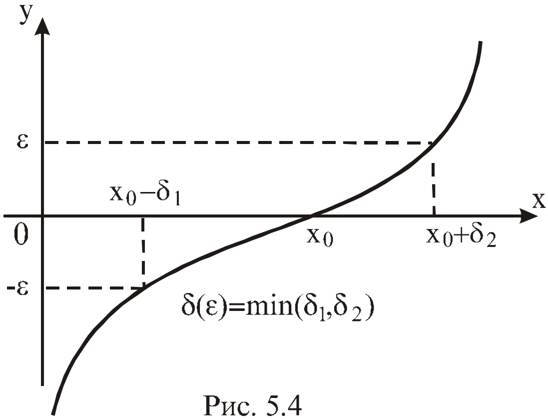


Рис. 5.4

Рис 5.4 дает геометрическую иллюстрацию определения 5.5.

Пример 5.3 Показать, пользуясь только определением предела, что

$$\lim_{x\to 1}(2x-3)=-1.$$

Проиллюстрировать это на рисунке.

Решение. Пусть дано произвольное число $\varepsilon > 0$. Нужно указать такое $\delta(\varepsilon)$, чтобы из неравенства $|x-1| < \delta$ следовало выполнение неравенства $|2x-3-(-1)| < \varepsilon$. Имеем

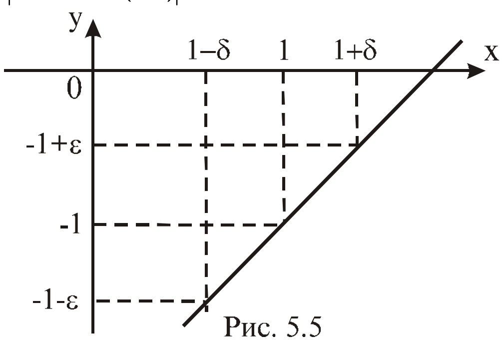


Рис. 5.5

$$|2x-3+1| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ и

$$|x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |2x3+1| < \varepsilon \text{, т.е. } \lim_{x\to 1}(2x-3) = -1 \text{ (см. рис. 5.5).}$$

Поскольку вопрос о пределе функции можно свести к вопросу о сходимости некоторой последовательности значений функций, то все утверждения, сформулированные для последовательностей, будут справедливы и для функций.

5.2. Свойства предела функции

Теорема 5.1. Если $\lim\limits_{\mathbf{x} ® \mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ и $\lim\limits_{\mathbf{x} ® \mathbf{x_0}} j(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$,где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – конечные действительные числа, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm \varphi(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A \pm B$,

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot \varphi(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A \cdot B$,

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Пример 5.4. Найти предел функции $\dfrac{x+3}{x+2}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x \to 1}(x+3) = 4$, $\lim\limits_{x \to 1}(x+2) = 3$, то можно применить вычисление предела частного двух дробей

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x+3)}{\lim\limits_{x \to 1}(x+2)} = \frac{4}{3}.$$

5.3. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций

Теорема 5.2. Сумма конечного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.

Теорема 5.3. Разность двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Теорема 5.4. Произведение бесконечно малой функции при $x \to x_0$ на функцию, ограниченную в окрестности точки x_0, есть функция бесконечно малая.

Теорема 5.5. Сумма бесконечно больших функций одного знака является бесконечно большой функцией того же знака.

Теорема 5.6. Произведение бесконечно большой при $x \to x_0$ функции на функцию, имеющую при $x \to x_0$ предел, не равный нулю, есть бесконечно большая функция.

Теорема 5.7: а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Поведение же функции, являющейся отношением бесконечно малых $\left(\text{неопределенность} \left|\dfrac{0}{0}\right|\right)$, бесконечно больших $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x \to x_0$, суммой бесконечно больших разных знаков $|\infty - \infty|$, произведением бесконечно малой на бесконечно большую $|0 \cdot \infty|$, требует исследования.

Исключительно важное значение имеет понятие непрерывности функции, которое мы подробно рассмотрим позже. Сейчас приведем только одно из определений: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Преимущественно вычисление пределов функции основывается на следующей теореме.

Теорема 5.8. Все элементарные функции непрерывны в своей области определения. Таким образом, если элементарная функция определена в точке $\mathbf{x_0}$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Рассмотрим далее простейшие приемы вычисления пределов функции. Неопределенность $\left|\dfrac{0}{0}\right|$. Напомним, что под неопределенностью этого вида понимается отношение бесконечно малых функций. Итак, пусть требуется вычислить $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$. В этом случае и в числителе, и в знаменателе этой дроби можно выделить множители $(x - x_0)$ в некоторой положительной степени. Пусть

$$f(x) = (x - x_0)^{\alpha} f_1(x), \quad \varphi(x) = (x - x_0)^{\beta} \varphi_1(x),$$

причем функции $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ уже не являются бесконечно малыми при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)^{\alpha-\beta}\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\right]$$

и неопределенность устраняется.

Пример 5.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3-8}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Пример 5.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

Снова имеем неопределенность вида $\left|\dfrac{0}{0}\right|$. В этом случае удобно избавиться от иррациональности в числителе. С этой целью умножим числитель и знаменатель дроби на выражение

$$\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)}+1.$$

В числителе тогда получится разность кубов данных величин $\left(a^3-b^3\right)=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)}+1}=\frac{1}{3}.$$

Неопределенность $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$. В случае вычисления отношения бесконечно больших функций $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ нужно поделить числитель и знаменатель дроби на такую величину $g(x)$, чтобы хотя бы одно из выражений $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ стремилось к конечному пределу.

Пример 5.7. Покажем, что предел отношения двух многочленов при $x \to \infty$ степени n равен отношению коэффициентов при x^n. Для этого поделим числитель и знаменатель на x^n. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_n}{x^n}} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Замечание. Точно так же можно показать, что отношение многочленов $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ является малой функцией при $x \to \infty$, если $n < m$, и бесконечно большой, если $n > m$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$, если $n < m$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \infty$, если $n > m$.

Пример 5.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[4]{x^4+2}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$. Неопределенность будет устранена, если поделить числитель и знаменатель дроби на x. Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[4]{x^4+2}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}+\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^4}}}=1.$$

Неопределенность вида $|\infty-\infty|$. Различными преобразованиями превращаем данную разность бесконечно больших функций в отношение бесконечно больших или бесконечно малых функций.

Пример 5.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 3}\frac{x+3-6}{x^2-9}=$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

5.4. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – функции бесконечно малые при $x \to x_0$.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, то говорят, что функция $\alpha_1(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$. В этом случае пишут $\alpha_1(x) = 0(\alpha_2(x))$ при $x \to x_0$.

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$, то говорят, что функция $\alpha_2(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha_1(x)$ при $x \to x_0$.

3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = k \neq 0$, то $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to x_0$.

4. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, то $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называют эквивалентными бесконечно малыми при $x \to x_0$ и обозначают $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Теорема 5.9. Если $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$, $\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} f(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)} f(x) \right).$$

Пример 5.10. Сравнить бесконечно малые функции:

а) $\alpha(x) = 3x^2 + x^3$, $\beta(x) = 2x^2$ при $x \to 0$;

б) $\alpha(x) = x^2 - 6x^3$, $\beta(x) = x^2$ при $x \to 0$.

Решение: а) функции $\alpha(x)=3x^2+x^3$ и $\beta(x)=2x^2$ при $x\to 0$ одного порядка малости, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x^3}{2x^2}=\dfrac{3}{2}\neq 0$;

б) функции $\alpha(x)=x^2-6x^3$ и $\beta(x)=x^2$ эквивалентно малые при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-6x^3}{x^2}=1$.

При вычислении пределов часто используются следующие замечательные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\left|\dfrac{1}{x}=y\right|=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y=e$.

Первый предел называется первым замечательным пределом, который раскрывает неопределенность $\left|\dfrac{0}{0}\right|$, второй предел называется вторым замечательным пределом, который раскрывает неопределенность $\left|1^\infty\right|$.

Из указанных замечательных пределов может быть получена таблица эквивалентных бесконечно малых при $x\to 0$:

$$\sin x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \mathrm{tg}x\sim x,\ \mathrm{arctg}x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,$$

$$a^x-1\sim x\ln a,\ e^x-1\sim x,\ \sqrt[m]{1+x}-1\sim\frac{x}{m},\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}.$$

Пример 5.11. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\mathrm{tg}7x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}\mathrm{sn}3x\sim 3x\\ \mathrm{tg}7x\sim 7x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{7x}=\frac{3}{7}.$$

Пример 5.12. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\\ \sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{4}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 5.13. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$.

Решение. В этом случае $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{2x+1}=1$, показатель $(x+1)$ стремится к ∞.

Следовательно, мы имеем неопределенность $\left|1^\infty\right|$. Воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+1}-1\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{-2x+1}{2}}\right)^{-\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x-2}{2x+1}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Пример 5.14. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\left|1^\infty\right|=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{1/x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right)^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Указать область определения функций:

1) $y=\sqrt{x^2-3x}=2$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

3) $y=\sqrt{1-|x|}$; 4) $y=\lg\left(25-x^2\right)$.

Ответы: 1) $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$; 2) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$;

3) $[-1;1]$; 4) $(-5;5)$.

2. Показать, пользуясь только определением предела, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$. Проиллюстрировать это на рисунке.

3. Сравнить бесконечно малые функции:

1) $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$; $\beta(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x\to\infty$;

2) $\alpha(x)=1-\sqrt{x}$; $\beta(x)=x-1$ при $x\to 1$.

Ответы: 1) $\alpha(x)=0(\beta(x))$; 2) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые одного порядка малости в точке $x=1$.

4. Сравнить бесконечно большие функции;

1) $A(x)=x^2$; $B(x)=\sqrt{x}$ при $x\to\infty$;

2) $A(x)=\dfrac{1}{1-x}$; $B(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)}$ при $x\to 1$.

Ответы: 1) $A(x)$ имеет при $x\to\infty$ более высокий порядок роста, чем $B(x)$; 2) функции $A(x)$ и $B(x)$ имеют при $x\to 1$ одинаковый порядок роста.

5. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+kx)}{x}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Ответы: 1) $\dfrac{2}{5}$; 2) $\dfrac{3}{5}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) 1; 5) $\dfrac{2}{3}$; 6) 1;

7) $\dfrac{3}{2}$; 8) $\dfrac{1}{2}$; 9) $\dfrac{2}{\pi}$; 10) e; 11) k; 12) $e^{\frac{2}{3}}$.

6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

6.1. Основные определения и понятия

Определение 6.1. Функция $\mathbf{f(x)}$ называется непрерывной в точке $\mathbf{x_0}$, если (см. рис. 6.1):

1) она определена в точке $\mathbf{x_0}$ и некоторой ее окрестности;

2) существует предел $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \mathbf{f(x)}$;

3) этот предел равен значению функции в точке $\mathbf{x_0}$, т.е.

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x_0}).$$

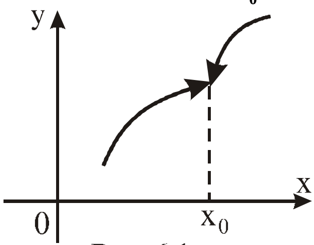


Рис. 6.1

Условие 3 можно переписать в виде

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Обозначая $x - x_0 = \Delta x$ (приращение аргумента) и $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ (приращение функции), условие непрерывности можно записать так: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е. функция непрерывна в том и только в том случае, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (рис. 6.2).

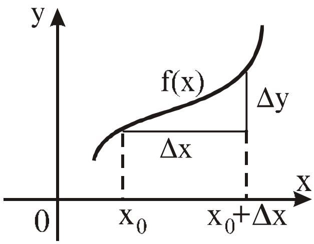


Рис. 6.2

Определение 6.2. Функция $\mathbf{f(x)}$ называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример 6.1. Доказать, что функция $y = x^2$ непрерывна на всей числовой оси.

Решение. Пусть x_0 – произвольная точка. Давая аргументу приращение Δx, получаем приращение функции

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 .$$

Если теперь $\Delta x \to 0$, то $\Delta y = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ и функция $y = x^2$ непрерывна на всей числовой оси.

6.2. Точки разрыва функции и их классификация

Определение 6.3. Точки, в которых нарушается условие непрерывности функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, называются точками разрыва этой функции.

Точки разрыва первого рода

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ и } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причем не все три числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равны между собой, то x_0 называется точкой разрыва I-го рода.

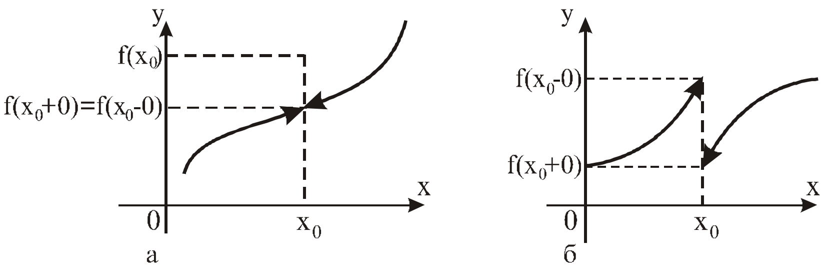


Рис. 6.3

Точки разрыва I-го рода подразделяются, в свою очередь, на точки устранимого разрыва

$$\left(\text{когда } f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)\right),$$

т.е. когда левый и правый пределы функции в точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке (см. рис. 6.3,а), и на точки скачка

$$\left(\text{когда } f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)\right);$$

в последнем случае разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции в точке x_0 (см. рис. 6.3,б).

Пример 6.2. Исследовать непрерывность в точке функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x\neq 0;\\ 2, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ имеет в точке $x=0$ устранимый разрыв, поскольку $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 2$.

Пример 6.3. Исследовать непрерывность функции

$$f(x)=\begin{cases}2^{1/2}, & \text{если } x<0;\\ x-1, & \text{если } 0\le x\le 1;\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ в промежутках $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$ совпадает с элементарными функциями $2^{\frac{1}{x}}$, $(x-1)$, $\cos\dfrac{\pi x}{2}$ соответственно. Следовательно, нарушение непрерывности может иметь место лишь в точках $x_1=0$, $x_2=1$, где меняется аналитическое выражение функции $f(x)$. Исследуем сначала точку $x_1=0$. При $x<0$ $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$. Далее, $f(x)=x-1$ при $x>0$ (но меньшем 1), поэтому $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x-1)=-1$. Односторонние пределы существуют, но не равны между собой, т.е. $x_1=0$ – точка разрыва I-го рода (скачок равен -1).

Исследуем теперь $x_2=1$. Имеем $f(1)=0$,

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x-1)=0,\quad \lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}\cos\frac{\pi x}{2}=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$, т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_2 = 1$. Для построения графика найдем $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$. Следовательно, при $x \to \infty$ график приближается к прямой (см. рис. 6.4).

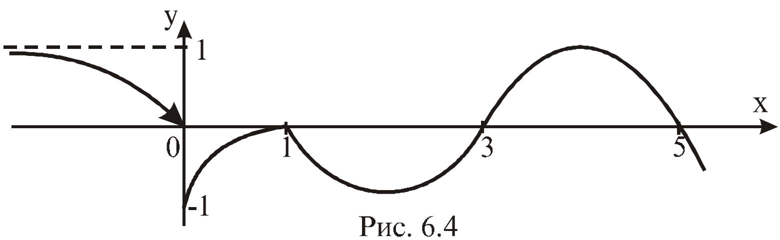


Рис. 6.4

Точки разрыва II-го рода

Если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 не существует (в частности, бесконечен), то x_0 называется точкой разрыва II-го рода (см. рис. 6.5).

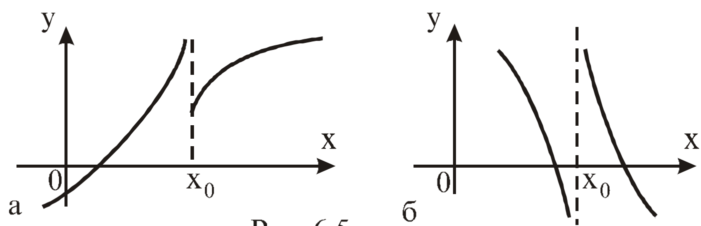


Рис. 6.5

Пример 6.4. Исследовать непрерывность функции

$$f(x) = 1 + 2^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. Эта функция непрерывна на всей числовой оси, кроме, может быть, точки $x = 0$. Найдем право- и левосторонний пределы $f(x)$ при $x \to 0$:

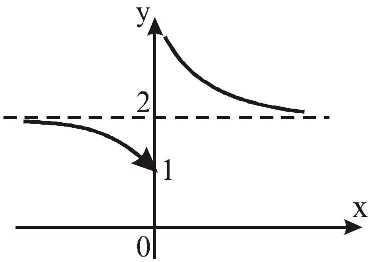


Рис. 6.6

$$\lim_{x\to 0-0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)=\left|\begin{matrix}2^{\frac{1}{x}}\to 0\\ x\to 0-0\end{matrix}\right|=1;$$

$$\lim_{x\to 0+0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)=\left|\begin{matrix}2^{\frac{1}{x}}\to 0\\ x\to 0+0\end{matrix}\right|=\infty.$$

Значит, $x=0$ – точка разрыва II-го рода (см. рис. 6.6).

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что $f(x)=\sin x$ непрерывна на всей числовой оси.

2. Исследовать непрерывность следующих функций, установить характер точек разрыва, построить графики:

а) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 3x-x^2 & \text{при } x>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$;

в) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$; г) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Ответы к задачам 2а 2б (рис.6.7).

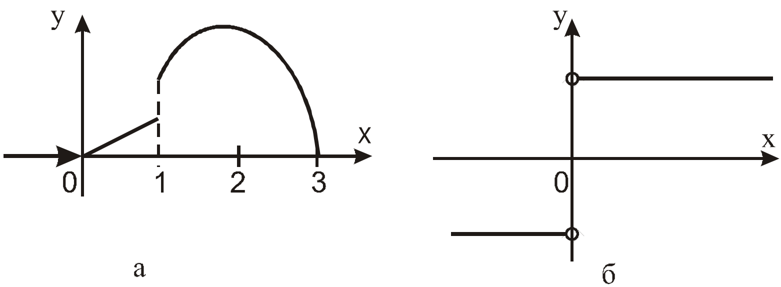


Рис.6.7

7. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Производная и ее вычисление

Определение 7.1. Производной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$ называется предел отношения приращения $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в этой точке к соответствующему приращению $\Delta\mathbf{x}$ аргумента x, когда $\Delta\mathbf{x}$ стремится к нулю:

$$\mathbf{y}' = \lim_{\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta\mathbf{x}} = \lim_{\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}.$$

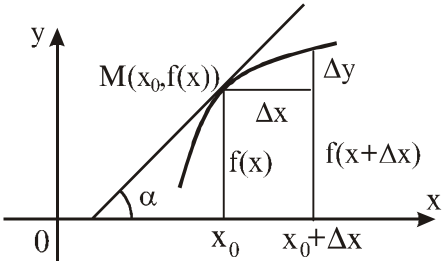


Рис. 7.1

Производная обозначается также y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Если требуется подчеркнуть, что производная вычисляется в точке x_0, то пишут $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Если функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x_0)$ в точке x_0, то ее график в соответствующей точке имеет касательную с угловым коэффициентом $tg\alpha = f'(x_0)$ (см. рис. 7.1).

Производная $f'(x)$ называется скоростью изменения функции $f(x)$ в точке x.

Отыскание производной называется дифференцированием функции.

Определение 7.2. Если функция $\mathbf{f(x)}$ имеет производную в каждой точке x множества $\mathbf{X}$, то она на этом множестве называется дифференцируемой.

Пример 7.1. Исходя из определения производной найти производную функции $y = 3x^2 - 4x$.

Решение. Находим

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$$

$$= \underbrace{3(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x)}_{f(x+\Delta x)} - \underbrace{(3x^2 - 4x)}_{f(x)} = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4\Delta x.$$

Находим частное

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4\Delta x}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x - 4.$$

Вычисляем производную

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x - 3\Delta x - 4) = 6x - 4.$$

Практически при вычислении производных пользуются основными правилами дифференцирования, теоремой о производной сложной функции и формулами производных основных элементарных функций.

7.2. Основные правила дифференцирования

Введем обозначения: $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функция переменной x, c – постоянная:

1) $(c)' = 0$;

2) $(cu)' = cu'$ (постоянный множитель можно вынести за знак производной);

3) $(u + v)' = u' + v'$ (производная суммы);

4) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ (производная произведения);

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (производная частного двух функций).

7.3. Производная сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = f(x)$, т.е. такая, что ее можно представить в следующем виде:

$$y = F(u),\ u = \varphi(x) \text{ или } y = F(\varphi(x)).$$

В выражении $y = F(u)$ переменная u называется промежуточным аргументом.

Теорема 7.1. Если функция $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x})$ имеет в некоторой точке x производную $\mathbf{u}'_{\mathbf{x}} = \varphi'(\mathbf{x})$, а функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ имеет при соответствующем значении u производную $\mathbf{y}'_{\mathbf{u}} = \mathbf{f}'(\mathbf{u})$, тогда сложная функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\varphi(\mathbf{x}))$ в указанной точке x также имеет производную, которая равна $\mathbf{y}'_{\mathbf{x}} = \mathbf{f}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \cdot \varphi'_{\mathbf{x}}$, где вместо $\mathbf{u}$ оставлено выражение $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x})$.

Пример 7.2. Дана сложная функция $y=(\cos x)^3$. Ее можно записать как функцию от двух функций: $y=u^3$, $u=\cos x$. Известно, что $\left(u^3\right)'=3u^2$, $u'=-\sin x$. Поэтому $y'_x=3u^2(-\sin x)$ или $y'_x=3\cos^2 x(-\sin x)=-3\sin x\cos^2 x$.

Пример 7.3. $y=\mathrm{tg}\left(x^3\right)$. Данную функцию представим в виде $y=\mathrm{tg}u$, $u=x^3$. Известно: $(\mathrm{tg}u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}$, $\left(x^3\right)'=3x^2$. Поэтому

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{\cos u}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{\cos\left(x^3\right)}.$$

7.4. Таблица производных основных элементарных функций

1) $\left(u^\alpha\right)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$, α – постоянная, $u=u(x)$;

2) $\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$, частный случай $\left(e^u\right)'=e^u u'$;

3) $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}u'$; 4) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

5) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$; 6) $(\mathrm{tg}u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}u'$;

7) $(\mathrm{ctg}u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$; 8) $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;

9) $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$; 10) $(\mathrm{arctg}u)'=\dfrac{1}{1+u^2}u'$;

11) $(\mathrm{arcctg}u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}u'$; 12) $(\mathrm{sh}u)'=\mathrm{ch}u\cdot u'$;

13) $(\mathrm{ch}\,u)' = \mathrm{sh}\,u \cdot u'$; 14) $(\mathrm{th}\,u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} u'$;

15) $(\mathrm{cth}\,u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} u'$.

Пользуясь таблицей производных и основными правилами дифференцирования, находим производные следующих функций.

Пример 7.4. $y = 5x - 3x^2 + 1$; $y' = 5 - 6x$.

Пример 7.5. $y = \sqrt{x}$, $y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$. Корень заменили степенью с дробным показателем $\dfrac{1}{2}$.

Пример 7.6. $y = \dfrac{1}{x^5}$; $y' = \left(x^{-5}\right)' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$. Дробь заменили степенной функцией x^{-5}.

Пример 7.7. $y = \dfrac{x^3}{2}$; $y' = \dfrac{1}{2}\left(x^3\right)' = \dfrac{1}{2} 3x^2$.

Пример 7.8. $y = x^2 \ln x$. Пользуясь формулой производной произведения, получаем

$$y' = \left(x^2\right)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

Пример 7.9. $y = \dfrac{1}{x}$; $y' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Пример 7.10. $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$; $y' = 3\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = 3\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' =$

$$=3\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{6}}=-2x^{-\frac{5}{6}}.$$

Пример 7.11. $y=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}\right)$; $y'=\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}x^{-2}\right)'=$

$$=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{3}{2}x^{\frac{5}{2}}.$$

Пример 7.12. $y=\dfrac{x^2}{e^x}$; $y'=\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$.

Пример 7.13. $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. Пользуясь формулой производной частного, будем иметь:

$$y'=\frac{(\cos x)'(1-\sin x)-\cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}.$$

Пример 7.14. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $y'(1)=?$

Решение. $y'_x = \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'\left(1+\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)'}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}.$$

Найдем y'_x при $x = 1$. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1}\left(1+\sqrt{1}\right)^2} = \dfrac{1}{2(1+1)^2} = \dfrac{1}{8}$.

При нахождении $\left(\sqrt{x}\right)'$ мы воспользовались результатами примера 7.5.

Добавим к таблице производных еще две часто встречающиеся формулы:

16) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$; 17) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

Найти производные следующих сложных функций.

Пример 7.15. $y = (1+5x)^3$. Полагая $y = u^3$, где $u = (1+5x)$, применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = 5, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2 5 = 15(1+5x)^2.$$

Пример 7.16. $y = \sin 5x$. Полагая $5x = u$ и пользуясь формулами п. 4.4, находим

$$y' = (\sin 5x)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = 5\cos 5x.$$

Пример 7.17. $y = \cos^2 x$. Полагая $\cos x = u$, получаем

$$y' = \left(\cos^2 x\right)' = \left(u^2\right)' = 2u\cdot u' = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x.$$

Пример 7.18. $y = \sin x^{`2}$. При $x^2 = u$ имеем

$$y' = \left(\sin x^2\right)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = 2x \cos x^2 .$$

Пример 7.19. $y = \sqrt[3]{2 + x^4}$. Полагая $2 + x^4 = u$, будем иметь

$$y' = \left(\sqrt[3]{2 + x^4}\right)' = \left(\sqrt[3]{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} u' = \frac{1}{3}\left(2 + x^4\right)^{-\frac{2}{3}} 4x^3 =$$

$$= \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{\left(2 + x^4\right)^2}} .$$

Дифференцирование этой сложной функции можно записать иначе:

$$\left(\sqrt[3]{2 + x^4}\right)' = \left[\left(2 + x^4\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(2 + x^4\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2 + x^4\right)' =$$

$$= \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{\left(2 + x^4\right)^2}} .$$

Второй способ записи без особого обозначения промежуточного аргумента значительно проще. Этому способу записи и следует научиться при дифференцировании сложных функций.

Пример 7.20. $y = \operatorname{tg}^6 x$; $y' = \left(\operatorname{tg}^6 x\right)' = 6\operatorname{tg}^5 x \cdot \frac{1}{\cos x}$.

Пример 7.21. $y = \ln\left(x^2 + 5\right)$;

$$y' = \left[\ln\left(x^2 + 5\right)\right]' = \frac{1}{x^2 + 5}\left(x^2 + 5\right)' = \frac{2x}{x^2 + 5} .$$

Пример 7.22. $y = \sin^3 \frac{x}{5}$;

$$y' = \left(\sin^3\frac{x}{5}\right)' = 3\sin^2\frac{x}{5}\left(\sin\frac{x}{5}\right)' = 3\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}\left(\frac{x}{5}\right)' =$$

$$= \frac{3}{5}\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}.$$

Пример 7.23. $y = \operatorname{arctg}\frac{\ln x}{3}$;

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{3}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{\ln^2 x}{9}\right)}\left(\frac{\ln x}{3}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{\ln^2 x}{9}\right)}\frac{1}{3x}.$$

Пример 7.24. $y = \ln\cos\sqrt{x}$;

$$y' = \left(\ln\cos\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\cos\sqrt{x}}\left(\cos\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\cos\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= -\frac{\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти производные следующих функций.

7.25. $y = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$. Ответ: $y' = \sqrt[3]{x}$.

7.26. $y = 6\cos\frac{x}{3}$. Ответ: $y' = -2\sin\frac{x}{3}$.

7.27. $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$. Ответ: $y' = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)$.

7.28. $y = \sqrt{1-x^2}$. Ответ: $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7.29. $y=(1-5x)^4$. Ответ: $y'=-20(1-5x)^3$.

7.30. $y=\sin\sqrt{x}$. Ответ: $y'=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

7.31. $y=\sqrt[4]{(4+3x)^2}$. Ответ: $y'=\dfrac{3}{2\sqrt{4+3x}}$.

7.32. $y=x\sqrt{x^2-1}$. Ответ: $y'=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

7.33. $y=\ln\left(2x^3+3x^2\right)$. Ответ: $y'=\dfrac{6(x+1)}{x(2x+3)}$.

7.34. $y=\sqrt{4x+\sin 4x}$. Ответ: $y'=\dfrac{4\cos^2 2x}{\sqrt{4x+\sin 4x}}$.

7.35. $y=\sqrt{x}\cos x$. Ответ: $y'=\dfrac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{x}}$.

7.36. $y=x-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{3x^3}$. Ответ: $y'=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{x^4}$.

7.37. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y'(-8)=?$ Ответ: $y'(-8)=-\dfrac{1}{3}$.

7.38. $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$. Ответ: $y'=\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

7.39. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. Ответ: $y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

7.40. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x$. Ответ: $y'=\dfrac{\cos^4 x}{\sin x}$.

7.5. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Пусть требуется вычислить производную от функции $y = f(x)$ и пусть $f(x) > 0$ для всех $x \in X$. Под логарифмическим дифференцированием понимают следующее:

1) логарифмируем функцию $y = f(x)$:

$$\ln y = \ln f(x);$$

2) дифференцируем полученное равенство по x:

$$(\ln y)'_y \, y'_x = (\ln f(x))'_x;$$

3) заменяем y ее выражением через x и из последнего равенства находим y'_x.

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня), и, в частности, для нахождения производной от показательно- степенной функции $y = u^v$, где u и v – функции переменной x.

Найти производные следующих функций:

7.41. $y = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

Имеем $\ln y = \mathrm{tg}x \ln \sin x$, откуда

$$\frac{y'}{y} = \mathrm{tg}x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \sec^2 x \cdot \ln \sin x = 1 + \sec^2 x \cdot \ln \sin x,$$

$$y' = y\left(1 + \sec^2 x \ln \sin x\right) = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}\left(1 + \sec^2 x \ln \sin x\right).$$

7.42. $y = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Логарифмируя и применяя свойства логарифма, получаем:

$$\ln y = \ln 2 + \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1 - x^2\right).$$

Дифференцируем $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2x}{1-x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{1-x^2} =$

$$= \frac{1}{x\left(1-x^2\right)};\quad y' = \frac{y}{x\left(1-x^2\right)} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}\cdot x\left(1-x^2\right)} = \frac{2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

7.43. $y = x^x$. $\quad \ln y = x\ln x$.

$$\frac{y'}{y} = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

Примеры для самостоятельного решения

Применяя метод логарифмического дифференцирования, найти производные следующих функций:

7.44. $y = x^{x^2}$. Ответ: $y' = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x)$.

7.45. $y = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$. Ответ: $y' = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}$.

7.46. $y = (\sin x)^x$. Ответ: $y' = (\sin x)^x(x\,\mathrm{ctg}\,x + \ln\sin x)$.

7.47. $y = \dfrac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $y' = \dfrac{1 + 3x^2 - 2x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$.

7.6. Дифференциал функции

Определение 7.3. Функция $\mathbf{f(x)}$ называется дифференцируемой в точке x, если приращение $\Delta\mathbf{y}$ функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})\Delta \mathbf{x}, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{A}$ – число, зависящее от x и не зависящее от приращения $\Delta \mathbf{x}$ аргумента $\mathbf{x}$; $\alpha(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})$ – бесконечно малая функция при $\Delta \mathbf{x} \to \mathbf{0}$. Можно доказать, что $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})$. Первое слагаемое в (7.1) составляет главную часть приращения, линейную относительно $\Delta \mathbf{x}$.

Определение 7.4. Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента, называется дифференциалом функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и обозначается

$$\mathbf{dy} = \mathbf{df}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x}.$$

Так как дифференциал независимой переменной равен ее приращению, то

$$\mathbf{dy} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{dx}.$$

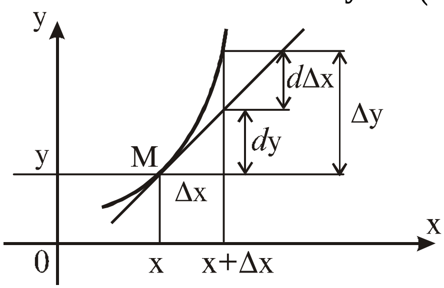


Рис. 7.2

Геометрически дифференциал функции представляет собой приращение ординаты, касательной к графику функции в точке x (см. рис. 7.2).

Если требуется вычислить $f(x_1)$, а проще вычислить $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, то при достаточно малой по абсолютному значению разности $x_1 - x_0 = dx$ можно заменить приращение функции ее дифференциалом $f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Пример 7.48. Найти дифференциал функции

$$y = x^3 - \operatorname{arctg} 5x.$$

Решение. Находим производную данной функции и умножаем ее на дифференциал независимой переменной; получим искомый дифференциал данной функции:

$$dy = \left[3x^2 - \frac{1}{1+25x^2}5\right]dx.$$

Пример 7.49. Вычислить приближенное значение $\sqrt[4]{17}$.

Решение. Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как частное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17 = x_1$. Пусть $x_0 = 16$, тогда

$$f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2, \quad f'(x_0) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Big|_{x=16} = \frac{1}{4\sqrt{16^3}} = \frac{1}{32},$$

$$dx = x_1 - x_0 = 1.$$

Подставляя в формулу (7.1), получаем

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)dx = 2 + \frac{1}{32}\cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031.$$

Пример 7.50. Вычислить приближенное значение $\sin 29°$.

Решение. Полагая, что $\sin 29°$ есть частное значение функции $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{180°}\cdot 29° = x_1$ и что $x_0 = \frac{\pi}{180°}\cdot 30 = \frac{\pi}{6}$, получаем

$$y(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \qquad y'(x_0) = \cos x\big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$dx = x_1 - x_0 = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180};$$

$$\sin 29° = y(x_0) + y'(x_0)dx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}4848.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти дифференциалы функций:

7.51. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. Ответ: $dy = \frac{(2-x)}{x^3}dx$.

7.52. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$. Ответ: $dy = \dfrac{dx}{2x\sqrt{4x-1}}$.

7.53. $y = \ln\cos x$. Ответ: $dy = -\operatorname{tg}x\,dx$.

7.54. $\operatorname{tg}46^\circ$. Ответ: $1{,}035$.

7.55. $\sqrt[4]{15{,}8}$. Ответ: $1{,}8938$.

7.56. $\arcsin 0{,}51$. Ответ: $0{,}513$.

7.7. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция на множестве X. Тогда, дифференцируя ее на этом множестве, получаем $y' = f'(x)$.

Значение производной, вообще говоря, зависит от x, т.е. производная $f'(x)$ представляет собой тоже функцию от x, которую можно дифференцировать.

Определение 7.5. Производной второго порядка (второй производной) функции $\mathbf{f(x)}$ называется производная от ее производной, если она существует.

Вторая производная обозначается так:

$$y'' \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ или } f''(x).$$

Аналогично производной n-го порядка от функции $f(x)$ называется производная от производной (n - 1)-го порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Обозначается n-я производная так:

$$y^{(n)} \text{ или } \frac{d^ny}{dx^n} \text{ или } f^{(n)}(x).$$

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Пример 7.57. Найти производную 2-го порядка от функции $y = \operatorname{arctg} x^2$.

Решение. $y' = \dfrac{2x}{1+x^4}$, $y'' = \dfrac{2\left(1+x^4\right) - 2x\cdot 4x^3}{\left(1+x^4\right)^2} =$

$= \dfrac{2-6x^4}{\left(1+x^4\right)^2}$.

Пример 7.58. Найти формулу для n-й производной функции $y = \sin x$.

Решение. $y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),\ y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right),$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Определение 7.6. Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Итак, по определению

$$d^2y = d(dy) = (dy)'\,dx = \left[f'(x)dx\right]'dx = f''(x)dx^2.$$

Аналогично вычисляются дифференциалы более высоких порядков:

$$d^3y = f'''(x)dx^3,\ \ ,\ d^ny = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Пример 7.59. Вычислить дифференциал 3-го порядка функции $y = e^{3x}$.

Решение. $dy = 3e^{3x}dx$, $d^2y = 9e^{3x}dx^2$, $d^3y = 27e^{3x}dx^3$.

Примеры для самостоятельного решения

Пример 7.60. Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

а) $y = e^{-3x^2}$. Ответ: $y'' = \left(36x^2 - 6\right)e^{-3x^2}$;

б) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Ответ: $y'' = \dfrac{2x}{\left(1 - x^2\right)^2} + \dfrac{\sqrt{1 - x^2}\arcsin x + 4x - 3x^3}{\left(1 - x^2\right)^{\frac{7}{2}}}$.

Пример 7.61. Найти формулу для n-й производной заданных функций:

а) $y = a^x$. Ответ: $y^{(n)} = a^x \ln^n a$;

б) $y = \cos x$. Ответ: $y^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7.8. Экстремумы функции одной переменной

Определение 7.7. Функция $\mathbf{f(x)}$ имеет в точке x_0 локальный максимум, если существует окрестность $\mathbf{u}_\delta(\mathbf{x_0})$, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{u}_\delta(\mathbf{x_0})$ имеет место неравенство $\mathbf{f(x)} \le \mathbf{f(x_0)}$ (рис. 7.3,а).

Определение 7.8. Функция $f(x)$ имеет в точке $\mathbf{x_1}$ локальный минимум, если существует окрестность $\mathbf{u}_\delta(\mathbf{x_1})$, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{u}_\delta(\mathbf{x_1})$ имеет место неравенство $\mathbf{f(x)} \ge \mathbf{f(x_1)}$ (см. рис. 7.3,б).

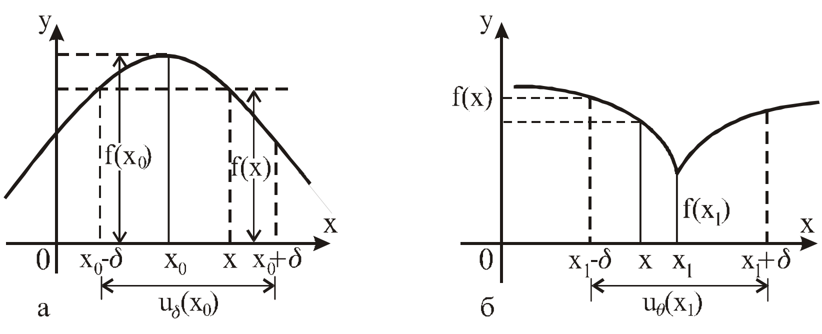


Рис. 7.3

Если в точке x_0 функция имеет максимум или минимум, то говорят, что в точке x_0 имеет место экстремум; значение функции в этой точке называется экстремальным, точка x_0 называется точкой экстремума.

Замечание. Функция $f(x)$, определенная на отрезке D, может достигать максимума или минимума только при значениях x, заключенных внутри рассматриваемого отрезка.

Необходимое условие экстремума

Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Точки, в которых $f'(x)=0$, называются стационарными точками, а точки, в которых $f'(x)$ не существует вместе со стационарными, называются критическими точками. Однако не всякая критическая точка является точкой экстремума, поэтому необходимо каждую из критических точек исследовать на основании достаточных условий существования экстремума.

Первое достаточное условие

локального экстремума функции

Теорема 7.2. Пусть $\mathbf{x_0}$ – критическая точка функции $\mathbf{f(x)}$, причем $\mathbf{f(x)}$ непрерывна для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{u}_\delta(\mathbf{x_0})$ и дифференцируема для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{u}_\delta(\mathbf{x_0})$, за исключением, может быть, $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$. Тогда

1) если $\mathbf{f'(x) > 0}$ для всех $\mathbf{x} \in (\mathbf{x_0} - \delta, \mathbf{x_0})$ и $\mathbf{f'(x) < 0}$ для всех $\mathbf{x} \in (\mathbf{x_0}, \mathbf{x_0} + \delta)$, т.е. если при переходе слева направо через критическую точку первая производная функции $\mathbf{f(x)}$ меняет знак с плюса на минус, то в точке $\mathbf{x_0}$ функция имеет максимум (max);

2) если $\mathbf{f'(x) < 0}$ для всех $\mathbf{x} \in (\mathbf{x_0} - \delta, \mathbf{x_0})$ и $\mathbf{f'(x) > 0}$ для всех $\mathbf{x} \in (\mathbf{x_0}, \mathbf{x_0} + \delta)$, т.е. если при переходе слева направо через критическую

точку первая производная меняет знак с минуса на плюс, то в точке $\mathbf{x_0}$ функция $\mathbf{f(x)}$ имеет минимум (min).

Второе достаточное условие экстремума функции

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема для всех $x \in u_\delta(x_0)$, x_0 – стационарная точка, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$; если же $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$.

Пример 7.62. Исследовать на экстремум функцию

$$y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{15}.$$

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая ось. Находим производную данной функции $y' = x^4 + x^3 - 2x^2$. Используя необходимое условие экстремума, получаем уравнение для нахождения критических точек:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2.$$

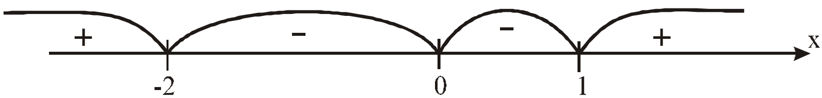


Рис.7.4

Рассмотрим интервалы: $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;1)$, $(1;\infty)$. Выбираем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определяем знак первой производной. Результаты удобно оформить в виде рисунка (см. рис. 7.4).

Итак, в точке $x = -2$ первая производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, в точке $x = -2$ функция имеет максимум: $y_{max} = y(-2) = 3$; в точке $x = 1$ первая производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, в точке $x = 1$ данная функция достигает минимального значения, $y_{min}(1) = -\frac{3}{20}$. В точке $x = 0$ экстремума нет, так как производная знака не меняет.

Пример 7.63. Исследовать на экстремум функцию

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Решение. Область определения данной функции: $x \neq 0$, т.е. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Находим первую производную: $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Тогда при $y' = 0$ стационарные точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, y' не существуют при $x = 0$, но эта точка не принадлежит области определения функции, следовательно, не может точка $x = 0$ быть точкой экстремума.

Для выяснения характера стационарных точек воспользуемся вторым достаточным условием экстремума. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2}{x^3}$. Определяем знак второй производной в стационарных точках: $y''(-1) = -2 < 0$, $y''(1) = 2 > 0$, т.е. в точке $x = -1$ данная функция имеет максимум:

$$y_{max} = y(-1) = -2,$$

в точке $x = 1$ – минимум:

$$y_{min} = y(1) = 2.$$

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать функции на экстремум.

Пример 7.64. $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$.

Пример 7.65. $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$.

Пример 7.66. $y = \sqrt{x(x-1)^2}$.

Ответы:

7.64. $y_{max} = y(-2) = 5$, $y_{max} = y(2) = 5$, $y_{min} = y(0) = 1$.

7.65. $y_{max} = y(-1) = 2$, $y_{min} = y(-3) = 6$.

7.66. $y_{max} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $y_{min} = y(1) = 0$.

8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Область определения функций нескольких переменных

Рассмотрим в двухмерном арифметическом пространстве R^2 точку $M(x, y)$, принадлежащую некоторому множеству D $(M \in D)$.

Если каждой точке M поставлено в соответствие определенное действительное число z, то это соответствие называется числовой функцией f от двух переменных x и y, определенной на D:

$$z = f(M) = f(x, y).$$

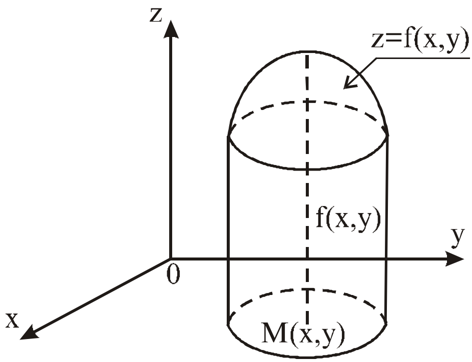


Рис. 8.1

При этом множество

$$E = \left\{ z \in R\big|_z = f(P), P \in D \right\}$$

называется областью значений функции, а множество D – областью определения функции.

График функции двух переменных есть поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$ (см. рис. 8.1).

Найти область определения следующих функций.

Пример 8.1. $u = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

Решение. Функция u принимает действительные значения при условии $a^2 - x^2 - y^2 > 0$, т.е. $x^2 + y^2 < a^2$. Областью определения данной функции является круг радиусом a с центром в начале координат.

Пример 8.2. $z = \dfrac{3}{x^2 + y^2}$.

Решение. Функция z определена при всех значениях x и y, кроме $x = 0$, $y = 0$, при которых знаменатель обращается в 0.

Поэтому областью определения функции z является все пространство R^2, кроме точки $(0,0)$.

Пример 8.3. $z = \arcsin(x + y)$.

Решение. Областью определения z является совокупность значений x и y, удовлетворяющих неравенствам

$$-1 \le x + y \le 1.$$

На плоскости $x0y$ эта область представляет полосу, ограниченную параллельными прямыми $x + y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти область определения следующих функций:

8.4. $z = a^2 - x^2 - 2y^2$. Ответ: пространство R^2.

8.5. $z = \sqrt{3x} - \dfrac{5}{\sqrt{y}}$. Ответ: $x \ge 0$, $y > 0$ – первый квадрант плоскости $x0y$.

8.6. $z = -\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}$. Ответ: точки, лежащие внутри эллипса $x^2 + 2y^2 = 2$ и на этом эллипсе.

8.7. $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$. Ответ: вся плоскость $x0y$, кроме прямых $y = \pm x$.

8.8. $z = \dfrac{\ln\left(x^2 y\right)}{\sqrt{y-x}}$. Ответ: $y > x$, $y > 0$, $x \neq 0$ – второй квадрант и точки, лежащие выше биссектрисы первого координатного угла плоскости $x0y$.

8.2. Предел и непрерывность функции двух переменных

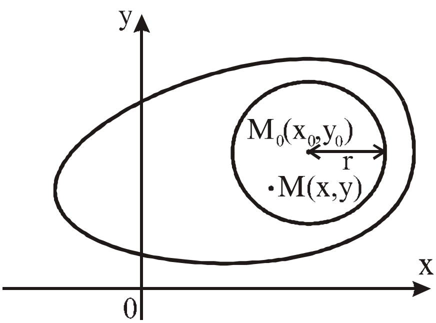


Рис. 8.2

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определяемая в некоторой области D плоскости $x0y$.

Рассмотрим некоторую определенную точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую в области D или на ее границе (рис. 8.2).

Определение 8.1. Число $\mathbf{A}$ называется пределом функции $\mathbf{f(x,y)}$ при стремлении точки $\mathbf{M(x,y)}$ к точке $\mathbf{M_0(x_0,y_0)}$, если для каждого числа $e > \mathbf{0}$ найдется такое $\mathbf{r} > \mathbf{0}$, что для всех точек $\mathbf{M(x,y)}$, для которых выполняется неравенство $\left|\overline{\mathbf{MM_0}}\right| < \mathbf{r}$, имеет место неравенство $\left|\mathbf{f(x,y)} - \mathbf{A}\right| < e$.

Если число A является пределом функции $f(x, y)$ при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, то пишут $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Определение 8.2. Пусть точка $\mathbf{M_0(x_0,y_0)}$ принадлежит области определения функции $\mathbf{f(x,y)}$. Функция $\mathbf{z = f(x,y)}$ называется непрерывной в точке $\mathbf{M_0(x_0,y_0)}$, если имеет место равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \tag{8.1}$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Если обозначим $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то равенство (8.1) можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{8.2}$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0 .$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в области.

Если в некоторой точке $N(x_0, y_0)$ не выполняется условие (8.1), то точка $N(x_0, y_0)$ называется точкой разрыва функции $z = f(x, y)$.

Условие (8.2) может не выполняться, например, в случаях:

1) $z = f(x, y)$ определена во всех точках окрестности точки $N(x_0, y_0)$, за исключением самой точки $N(x_0, y_0)$;

2) функция $z = f(x, y)$ определена во всех точках окрестности точки $N(x_0, y_0)$, но не существует предела $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$;

3) функция определена во всех точках окрестности $N(x_0, y_0)$ и существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, но $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$.

Пример 8.9. Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна при любых значениях x и y, т.е. в любой точке плоскости XOY. Действительно, каковы бы ни были числа x и y, Δx и Δy, имеем

$$\Delta z = \left[(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2\right] - \left(x^2 + y^2\right) =$$

$$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

следовательно, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Пример 8.10. Функция $z = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ определена всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$ (рис. 8.3, 8.4).

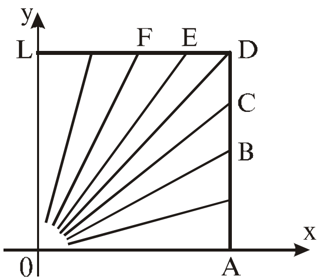


Рис. 8.3

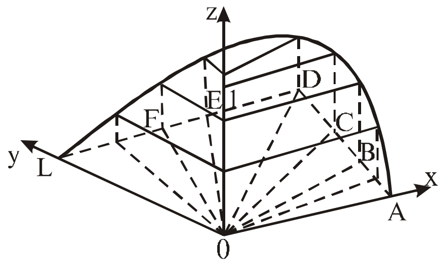


Рис. 8.4

Рассмотрим значения z вдоль прямой $y = kx(k = \text{const})$. Очевидно, вдоль этой прямой

$$z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} = \text{const},$$

т.е. функция z вдоль всякой прямой, проходящей через начало координат, сохраняет постоянное значение, зависящее от углового коэффициента k прямой. Поэтому, подходя к началу координат по различным путям, мы будем получать различные предельные значения, а это значит, что функция $f(x, y)$ не имеет предела, когда точка (x, y) на плоскости $0xy$ стремится к началу координат. Следовательно, функция разрывна в этой точке. Эту функцию нельзя доопределить в начале координат так, чтобы она стала непрерывной. Легко видеть, с другой стороны, что в остальных точках эта функция непрерывна.

8.3. Производные и дифференциалы функций

двух переменных

Пусть задана функция двух переменных $z=f(x,y)$, определенная в области D.

Рассмотрим кривую $l=f(x,y)\cap y=\mathrm{const}, x\in D$.

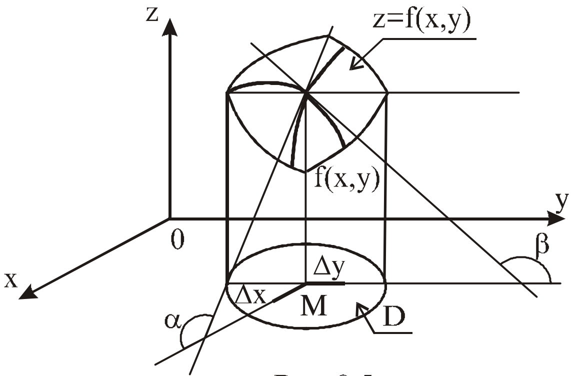


Рис. 8.5

На кривой l переменная z меняется только в зависимости от x.

Давая x приращение, равное Δx, получаем приращение и для z, равное

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

которое называется частным приращением по x. Аналогично $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ получено вдоль кривой $l_1 = f(x,y)\cap x=\mathrm{const}, y\in D$. Наконец, сообщив аргументу x приращение Δx, а аргументу y приращение Δy, получим новое приращение

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

которое называется полным приращением функции (см. рис. 8.5).

Определение 7.4. Частной производной от функции $\mathbf{z}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ по независимой переменной x называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),$$

вычисленный при постоянном y.

Частной производной от $z=f(x,y)$ по y называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta y} y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Если функция $z = f(x, y)$ имеет конечные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(x, y)$, то кривые l и l_1 в соответствующей точке имеют касательные с угловыми коэффициентами, соответственно $tg\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}$, $tg\beta = \frac{\partial z}{\partial y}$ (см. рис. 8.5).

Определение 8.5. Функция $\mathbf{f(x, y)}$ называется дифференцируемой в точке $\mathbf{P(x, y)}$, если полное приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые функции при Δx и $\Delta y \to 0$.

Первые два слагаемых представляют собой главную часть приращения функции $f(x, y)$.

Определение 8.6. Полным дифференциалом функции $\mathbf{z = f(x, y)}$ называется часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов $D\mathbf{x}$ и $D\mathbf{y}$ и обозначаемая

$$\mathbf{dz} = \mathbf{df(x, y)} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^{\text{¢}}\mathbf{(x, y)}D\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{\text{¢}}\mathbf{(x, y)}D\mathbf{y}.$$

Пример 8.11. $z = x^3 + y^2 - 2xy$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, dz.

Решение. Считая z функцией аргумента x, а y – постоянной, по обычным формулам дифференцирования получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y.$$

Аналогично, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2x$.

Так как $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то

$$dz = \left(3x^2 - 2y\right)dx + \left(2y - 2x\right)dy.$$

Пример 8.12. $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = ?$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = ?$

Решение. Считая u сначала функцией только переменной x, а затем только y, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 + 2x / 2\sqrt{x^2 + y^2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}.$$

Пример 8.13. $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x}$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = ?$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = ?$

Решение. Считаем u функцией от x, а y и z – постоянными, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}.$$

Считая u функцией от y, а z и x – постоянными, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z};$$

$$du=\left(\frac{1}{y}+\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z}\right)dy+\left(-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x}\right)dz.$$

Аналогично, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x}$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти частные производные от функций:

8.14. $z=\left(5x^3y^2+1\right)^3$. Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=45x^2y^2\left(5x^3y^2+1\right)^2$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=30x^3y\left(5x^3y^2+1\right)^2$$

8.15. $u=xy+\frac{x}{y}$. Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$.

8.16. $u=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$. Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

8.17. $u=e^{x^2+y^2}$. Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2}$.

8.18. $u=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}$. Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}-\frac{1}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}$.

8.19. $u=(x-y)(x-z)(y-z)$.

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x}=(y-z)(2x-y-z)$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(x-z)(x-2y+z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x - y)(-y + 2z - x).$$

8.20. $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$. Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}.$$

8.21. $u = x^2 \sin^4 y$. Ответ: $\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^2 \sin^3 y \cos y$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \sin^4 y.$$

8.4. Частные производные и дифференциалы второго порядка функции двух переменных

Пусть $f(x, y)$ имеет частные производные в области D, тогда, дифференцируя ее на этом множестве, получаем $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$. Значения частных производных, вообще говоря, зависят от x и y, т.е. частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ представляют собой тоже функции от x и y, которые можно дифференцировать.

Определение 8.7. Частной производной второго порядка функции $\mathbf{f(x, y)}$ называется частная производная от частной производной первого порядка, если она существует.

Частные производные от функции $f(x, y)$ обозначаются так:

$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, $f''_{xx}(x, y)$ – частная производная второго порядка по x,

$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$, $f''_{yy}(x, y)$ – частная производная второго порядка по y и

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$ – смешанные производные второго порядка функции $f(x, y)$.

Последнее равенство имеет место в случае непрерывности

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Пример 8.22. Найти все частные производные второго порядка функции $z = x^y + \ln(xy)$.

Решение. Вначале найдем частные производные по x и y данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + \frac{y}{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x + \frac{x}{xy}.$$

Далее найдем все частные производные второго порядка функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2} - \left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x - \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}.$$

Определение 8.8. Дифференциалом второго порядка от функции $\mathbf{f(x,y)}$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка. Итак, по определению

$$\mathbf{d^2 z = d^2 f(x,y) =}$$

$$\mathbf{= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2}.$$

Пример 8.23. Найти дифференциал второго порядка функции $z = x^y + \ln(xy)$.

Решение. $$d^2 z = \left(y(y-1)x^{y-2} - \frac{1}{x^2}\right)dx^2 +$$

$$+ \left(x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x\right)dxdy + \left(x^y \ln^2 x - \frac{1}{y^2}\right)dy^2.$$

Примеры для самостоятельного решения

Пример 8.24. Найти все частные производные и дифференциалы второго порядка функций:

а) $z = y^2\sqrt{x}$, б) $z = \sin\left(x^2 + y^2\right) - \sin\left(x^2 - y^2\right)$,

в) $z = \sqrt{xy} + \dfrac{x}{y}$.

Ответы: а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{y^2}{4\sqrt{x^3}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\sqrt{x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, $d^2 z = \left(-\dfrac{y^2}{4\sqrt{x}}\right)dx^2 + 2\dfrac{y}{\sqrt{x}}dxdy + 2\sqrt{x}dy^2$;

б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\left\{\cos\left(x^2 + y^2\right) - \cos\left(x^2 - y^2\right) + \right.$

$\left. + 2x^2\left[-\sin\left(x^2 + y^2\right) + \sin\left(x^2 - y^2\right)\right]\right\}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\left\{\cos\left(x^2 + y^2\right) + \cos\left(x^2 - y^2\right) + 2y^2\left[-\sin\left(x^2 + y^2\right) + \right.\right.$

$\left.\left. + \sin\left(x^2 - y^2\right)\right]\right\}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\left[\sin\left(x^2 + y^2\right) + \sin\left(x^2 - y^2\right)\right]$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\left[\sin\left(x^2 + y^2\right) + \sin\left(x^2 - y^2\right)\right]$,

$d^2 z = 2\left\{\cos\left(x^2 + y^2\right) - \cos\left(x^2 - y^2\right) + 2x^2\left[-\sin\left(x^2 + y^2\right) + \right.\right.$

$\left.\left. + \sin\left(x^2 - y^2\right)\right]\right\}dx^2 - 8xy\left[\sin\left(x^2 + y^2\right) + \sin\left(x^2 - y^2\right)\right]dxdy +$

$$+2\left\{\cos\left(x^2+y^2\right)+\cos\left(x^2-y^2\right)+2y^2\left[-\sin\left(x^2+y^2\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin\left(x^2-y^2\right)\right]\right\}dy^2;$$

в) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\sqrt{y}}{4\sqrt{x^3}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y^3}}+\dfrac{2x}{y^3}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{4\sqrt{xy}}-\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{1}{4\sqrt{xy}}-\dfrac{1}{y^2}$,

$$d^2z=-\frac{\sqrt{y}}{4\sqrt{x^3}}dx^2+2\left[\frac{1}{4\sqrt{xy}}-\frac{1}{y^2}\right]dxdy+\left[-\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y^3}}+\frac{2x}{y^3}\right]dy^2.$$