ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

РЯЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

К.А. ЦИПОРКОВА

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рязань 2006

УДК 517

Интегральное исчисление функции одной переменной: Учеб. пособие / К.А. Ципоркова; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2006. 112 с.

Даются указания для проведения практических занятий и самостоятельного изучения материала по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной».

Рекомендуется студентам всех специальностей дневной и заочной форм обучения.

Ил. 15. Библиогр.: 9 назв.

Неопределённый интеграл: методы замены переменной и интегрирование по частям. Определённый интеграл: формула Ньютона-Лейбница, геометрические приложения. Несобственные интегралы

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанской государственной радиотехнической академии.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанской государственной радиотехнической академии (зав. кафедрой канд. экон. наук, доц. А.И. Новиков)

Ципоркова Ксения Андреевна

Интегральное исчисление функции одной переменной

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 25.04.06. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,0.

Уч.- изд. л. 7,0. Тираж 300 экз. Заказ

Рязанская государственная радиотехническая академия.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТА.

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a,b). Тогда функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in(a,b)$.

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на (a,b), то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где С – некоторое постоянное число.

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, если $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла, $f(x)$ - подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

Основные правила интегрирования

Везде далее предполагается, что все рассматриваемые интегралы существуют.

I. $\int dF(x) = F(x)+C$.

II. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

III. $\int a\ f(x)dx = a\int f(x)dx$, где $a = const$.

IV. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

V. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $a \neq 0$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$. 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

В частности, $\int dx = x + C$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. 4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. 6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$. 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$. 10. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$. 12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$. 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

17. $\int chx dx = shx + C$. 18. $\int shx dx = chx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$. 20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Рассмотрим примеры применения таблицы и основных правил интегрирования.

Пример 1.1. Вычислить интеграл I= $\int (x^2 - x + 3)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

Решение. Перемножим многочлены, стоящие под интегралом:

I= $\int \left(x^2 - x + 3 - \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$. Заменив $\sqrt{x}$ на $x^{\frac{1}{2}}$,

преобразуем выражение под интегралом:

$$I=\int\left(x^2-x+3-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx.$$

Применим правила III и IV, после чего воспользуемся формулой 1 таблицы интегралов:

$$I=\int x^2dx-\int xdx+3\int dx-\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{x^{2+1}}{2+1}-\frac{x^{1+1}}{1+1}+3x-\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-6\sqrt{x}+C.$$

Пример 2.1. Найти интеграл $\int\left(2^{-x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)2^x\sqrt{x}dx$.

Решение. Раскроем скобки в подынтегральном выражении, воспользуемся свойством IV и таблицей интегралов (формулы 1 и 3):

$$\int\left(2^{-x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)2^x\sqrt{x}dx=\int\left(2^{-x}2^x\sqrt{x}+\frac{2^x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\int\left(\sqrt{x}+2^x\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int 2^xdx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{2^x}{\ln 2}+C=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+\frac{2^x}{\ln 2}+C.$$

Пример 3.1. $\int(3x+2)^{11}dx$.

Решение. Применим свойство V $(a=3,\quad b=2)$ и формулу 1 таблицы:

$$\int(3x+2)^{11}dx=\frac{1}{3}\frac{(3x+2)^{12}}{12}+C.$$

Пример 4.1. $\int\sin^2 xdx$.

Решение. Применим формулу понижения степени:

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$. По свойствам III, V и по формулам 1, 6 получим:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right) = \frac{1}{2} x -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Пример 5.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$.

Решение. Так как $\sqrt{25-9x^2} = \sqrt{5^2-(3x)^2}$, то при вычислении интеграла воспользуемся свойством V и формулой 14 таблицы интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5} + C.$$

Пример 6.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}}$.

Решение. Освободимся от иррациональности в знаменателе, для чего умножим и числитель, и знаменатель дроби на выражение $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}} = \int \frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)dx}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)} =$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}dx = \int \frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}{x+2-x+3}dx =$$

$$\frac{1}{5}\int\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)dx = \frac{1}{5}\int (x+2)^{\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{5}\int (x-3)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3} + C =$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{(x+2)^3} + \frac{2}{15}\sqrt{(x-3)^3} + C.$$

Пример 7.1. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$.

Решение. Под интегралом стоит неправильная дробь, так как степень числителя равна степени знаменателя. Выделим у дроби целую часть. Для этого можно поделить числитель на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен или в дроби
преобразовать числитель, прибавляя и вычитая 1:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1-1)dx}{x^2+1} = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - arctgx + C .$$

Пример 8.1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Решение. Квадратный трехчлен не имеет действительных корней, так как его дискриминант D=-4<0. Выделим в знаменателе полный квадрат:

$x^2+4x+13 = (x^2+4x+4)+9 = = (x+2)^2+9$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{3} arctg \frac{x+2}{3} + C .$$

Пример 9.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(9x^2-6x+1)+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left|3x-1+\sqrt{(3x-1)^2+1}\right| + C = \frac{1}{3} \ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right| + C .$$

Пример 10.1. $\int \sin 2x \cdot \cos x dx$.

Решение. Справедлива формула

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

Тогда $\int \sin 2x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin(2x+x) + \sin(2x-x))dx =$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 3x+\sin x)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(-\cos 3x)+\frac{1}{2}(-\cos x)+C=$$

$$=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x+C.$$

Замечание. При вычислении интегралов полезно использовать и другие формулы тригонометрии:

$$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x},\ 1+ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\cos a\cdot\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b)),$$

$$\sin a\cdot\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)).$$

Пример 11.1. $\int tg^2xdx$.

Решение. Воспользуемся формулой $1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$, откуда $tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$. В результате интеграл примет вид:

$$\int tg^2xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=tgx-x+C.$$

Примеры для самостоятельного решения

1.1. $\int\frac{x^4+7x^2-4x}{x^2}dx$.

1.2. $\int\left(\frac{2}{x^3}+\frac{14}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{3}{x^2+5}\right)dx$.

1.3. $\int\sqrt{x}(x^2+3)dx$.

1.4. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)dx$.

1.5. $\int\left(4\sin x+12x^3-\frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$. 1.6. $\int\frac{\cos 2x dx}{\cos x+\sin x}$.

1.7. $\int\frac{1+\cos 2x}{\cos x}dx$. 1.8. $\int(9x+2)^{15}dx$.

1.9. $\int\frac{dx}{7x^2-16}$. 1.10. $\int\sqrt[3]{9-2x}dx$.

1.11. $\int\sin^2\frac{3x}{2}dx$. 1.12. $\int ctg^2 5x dx$.

1.13. $\int e^{5-3x}dx$. 1.14. $\int 3^{7x+4}dx$.

1.15. $\int\frac{dx}{x^2-3x+11}$. 1.16. $\int\frac{dx}{\sqrt{15+4x-x^2}}$.

1.17. $\int\left(2^x+3^x\right)^2 dx$. 1.18. $\int\frac{dx}{\sin^2(4-3x)}$.

1.19. $\int\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$. 1.20. $\int(1-x)^7 dx$.

1.21. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$. 1.22. $\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{3^x}dx$.

1.23. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$. 1.24. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$.

1.25. $\int\frac{dx}{x(x+1)}$. 1.26. $\int 5^x\left(3-\frac{5^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$.

1.27. $\int(tgx+ctgx)^2 dx$. 1.28. $\int\frac{2x+3\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx$.

1.29. $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-8}}$. 1.30. $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$.

§ 2. МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Процесс вычисления интегралов состоит в том, что интеграл с помощью различных преобразований приводят к известному интегралу (как правило, к одному из табличных). К преобразованиям относятся, в первую очередь, алгебраические преобразования, замена переменной и интегрирование по частям.

Вычисления интегралов путем алгебраических преобразований были рассмотрены в предыдущем параграфе.

Данный параграф посвящен методу замены переменной.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и $x = j(t)$, где функция $j(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале (a, b); причем функция $j(t)$ отображает интервал (a, b) в интервал (a,b). Пусть также функция $x = j(t)$ имеет обратную $t = j^{-1}(x)$, определенную на (a,b). Тогда

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = j(t) \\ dx = j'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(j(t))j'(t)dt .$$

После вычисления интеграла в правой части следует вернуться к старой переменной x, то есть вместо новой переменной t подставить его значение $j^{-1}(x)$.

Пример 1.2. $\int x\sqrt{x+5}dx$.

Решение. Чтобы избавиться от корня, положим $\sqrt{x+5} = t$. Тогда $x = t^2 - 5$ и, следовательно, $dx = 2tdt$. После подстановки получим

$$\int x\sqrt{x+5}dx = \int (t^2 - 5)t \cdot 2tdt = \int (2t^4 - 10t^2)dt =$$

$$= 2\frac{t^5}{5} - 10\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x+5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} + C .$$

*Замечание 2.1. При вычислении интегралов вида $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ полезно применять замену переменной $x = \frac{1}{t}$.

*Пример 2.2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left| x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} =$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C.$$

Значком * обозначен материал для более глубокого изучения.

Тригонометрические подстановки

1. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то применяют замену $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$. В первом случае получим

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\left(1 - \sin^2 t\right)} = a\cos t \text{ и } dx = a\cos t dt.$$

2. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2 + x^2}$, то применяют замену $x = a\,tgt$ или $x = a\,ctgt$. В первом случае имеем

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2\left(1 + tg^2 t\right)} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t} \text{ и } dx = \frac{adt}{\cos^2 t}.$$

3. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 - a^2}$, то применяют замену $x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$. В первом случае получим

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)} = a\,tgt \text{ и } dx = \frac{a\sin t dt}{\cos^2 t}.$$

Замечание 2.2.

$$\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}=\left|a\cos t\right|=\begin{cases} a\cos t, & \text{если} \quad a\cos t>0, \\ -a\cos t, & \text{если} \quad a\cos t<0. \end{cases}$$

Для определенности остановимся на случае $a\cos t>0$. Аналогично для случаев 2 и 3.

Пример 3.2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\left|\begin{matrix} x=3\sin t \\ dx=3\cos tdt \end{matrix}\right|=\int \frac{9\sin^2 t\cdot 3\cos tdt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}=9\int \frac{\sin^2 t\cdot \cos tdt}{\cos t}=$$

$$=9\int \sin^2 tdt=9\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

Вернемся к переменной x. Так как $x=3\sin t$, то $t=\arcsin\frac{x}{3}$.

Тогда $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C=$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{2}\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-$$

$$-\frac{9}{2}\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-$$

$$-\frac{9}{2}\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C.$$

Если интеграл имеет вид $\int f\left(j\left(x\right)\right)j'\left(x\right)dx$, то его вычисление можно проводить следующим образом:

$$\int f\left(j\left(x\right)\right)j'\left(x\right)dx=\int f\left(j\left(x\right)\right)dj\left(x\right)=\left|\begin{matrix} j\left(x\right)=t \\ dt=j'\left(x\right)dx \end{matrix}\right|=\int f\left(t\right)dt.$$

Пример 4.2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}} = \left| \begin{matrix} t = 1 + tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+tgx} + C .$$

Пример 5.2. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.

Решение.

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg\, e^x + C .$$

Пример 6.2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$.

Решение.

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}} = \left| \begin{matrix} t = 1 + 2\sin x \\ dt = 2\cos x dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{2} 2\sqrt{t} + C = \sqrt{1+2\sin x} + C .$$

Замечание 2.3. При вычислении интегралов полезно применять следующую таблицу дифференциалов элементарных функций:

$$x^m dx = d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d(\ln x),$$

$$\cos x dx = d(\sin x), \qquad \sin x dx = -d(\cos x),$$

$$e^x dx = d\left(e^x\right), \qquad a^x dx = d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx), \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = -d\left(\arccos\frac{x}{a}\right),$$

$$\frac{dx}{a^2 + x^2} = d\left(\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a}\right) = -d\left(\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a}\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d\left(\sqrt{x}\right), \qquad \frac{dx}{x^2}=-d\left(\frac{1}{x}\right).$$

Пример 7.2. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x\ln x}=\int \frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|+C$.

*Пример 8.2. $\int tg^3 x dx$.

Решение. $\int tg^3 xdx=\int tg^2 xtgxdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)tgxdx=$

$$=\int \frac{tgxdx}{\cos^2 x}-\int tgxdx=\int tgx\,d(tgx)+\ln\left|\cos x\right|=\frac{tg^2 x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C.$$

*Пример 9.2. $\int \frac{3x-1}{x^2+4}dx$.

Решение. $\int \frac{3x-1}{x^2+4}dx=3\int \frac{xdx}{x^2+4}-\int \frac{dx}{x^2+4}=\frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}-$

$$-\frac{1}{2}arctg\,\frac{x}{2}+C=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{2}arctg\,\frac{x}{2}+C.$$

Пример 10.2. $\int \sin x\, e^{\cos x}dx$.

Решение. $\int \sin x\, e^{\cos x}dx=-\int e^{\cos x}d(\cos x)=-e^{\cos x}+C$.

Примеры для самостоятельного решения

2.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

2.2. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+16}$.

2.3. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$.

2.4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$.

2.5. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$.

2.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

2.7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. 2.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

2.9. $\int \frac{7^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$. 2.10. $\int \frac{\ln 5x dx}{x}$.

2.11. $\int \frac{dx}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}$. 2.12. $\int \frac{xdx}{x^4+4}$.

2.13. $\int e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$. 2.14. $\int \frac{x^5dx}{\left(x^2-4\right)^2}$.

2.15. $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$. 2.16. $\int 4x\sqrt[3]{x^2+8}dx$.

2.17. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. 2.18. $\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2+5}}dx$.

2.19. $\int \frac{5\sqrt{x}-\cos\frac{1}{x^2}}{x^3}dx$. 2.20. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$.

2.21. $\int \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\sqrt[3]{1+\sin 2x}dx$. 2.22. $\int \sin^3 x\cos xdx$.

2.23. $\int \frac{e^{tgx}-3\sin x+\sin 2x}{\cos^2 x}dx$. 2.24. $\int \frac{\ln^2 xdx}{x\sqrt{3-\ln x}}dx$.

2.25. $\int \frac{e^{\arccos x}-5x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 2.26. $\int \frac{dx}{x\sin^2 \ln x}$.

2.27. $\int (2x+1)\sin\left(4x^2+4x+1\right)dx$. 2.28. $\int x^2\sqrt{1-7x^3}dx$.

2.29. $\int \frac{arctg^7 3x+x}{1+9x^2}dx$. 2.30. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

§ 3. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Пусть u и v - непрерывно дифференцируемые функции. Тогда формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int udv = uv - \int vdu \ . \qquad (3.1)$$

С помощью данной формулы вычисление исходного интеграла сводится к вычислению другого интеграла, который может оказаться более простым, чем исходный, или даже табличным. При применении формулы интегрирования по частям подынтегральное выражение представляют в виде произведения двух множителей u и dv. При этом через u обычно обозначают функцию, производная которой проще, чем сама функция u. В частности, через u обозначают многочлен, если под интегралом стоит произведение многочлена на одну из функций a^{ax}, e^{ax}, $\sin bx$, $\cos bx$. В случае когда под интегралом стоят логарифмическая функция или одна из обратных тригонометрических функций: $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, то их и обозначают через u.

Иногда формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

Пример 1.3. $\int (x-3)\cos 2xdx$.

Решение. Введем обозначения $u = x-3$, $dv = \cos 2xdx$. Для применения формулы интегрирования по частям требуется найти du и v: $du = dx$, $v = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x$. (Берем только одно значение неопределенного интеграла.) Подставим в формулу (3.1) и найдем полученный интеграл:

$$\int (x-3)\cos 2xdx = (x-3)\frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2xdx = \frac{x-3}{2}\sin 2x + \\ + \frac{\cos 2x}{4} + C .$$

В дальнейшем решение будем записывать кратко:

$$\int (x-3)\cos 2xdx = \left| \begin{array}{ll} u = x-3 & du = dx \\ dv = \cos 2x & v = \int \cos 2xdx = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= (x-3)\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx = (x-3)\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C .$$

Пример 2.3. $I = \int (x^2 + x + 1)e^x dx$.

Решение.

$$I=\int\left(x^2+x+1\right)e^x dx=\begin{vmatrix} u=x^2+x+1 & du=(2x+1)dx \\ dv=e^x dx & v=\int e^x dx=e^x \end{vmatrix}=$$

$$=\left(x^2+x+1\right)e^x-\int(2x+1)e^x dx.$$

После применения формулы (3.1) степень многочлена под интегралом понизилась. Чтобы многочлен под знаком интеграла “исчез”, применим формулу интегрирования по частям еще раз:

$$I=\begin{vmatrix} u=2x+1 & du=2dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{vmatrix}=\left(x^2+x+1\right)e^x-\left((2x+1)e^x-2\int e^x dx\right)=$$

$$=\left(x^2+x+1\right)e^x-(2x+1)e^x+2e^x+C=\left(x^2-x+2\right)e^x+C.$$

Пример 3.3. $\int x\ln^2 x dx$.

Решение.

$$\int x\ln^2 x dx=\begin{vmatrix} u=\ln^2 x & du=2\ln x\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix}=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-$$

$$-\int x^2\ln x\frac{dx}{x}=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\int x\ln x dx=\begin{vmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\int\frac{x^2 dx}{2x}\right)=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{1}{2}\int x dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

Пример 4.3. $\int arctgx dx$.

Решение.

$$\int arctgx dx=\begin{vmatrix} u=arctgx & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx & v=x \end{vmatrix}=xarctgx-$$

$$-\int\frac{xdx}{1+x^2}=xarctgx-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C.$$

*Пример 5.3. $\int x^3e^{x^2}dx$.

Решение. Если положить $u=x^3$, $dv=e^{x^2}dx$, то $v=\int e^{x^2}dx$ не выражается через элементарные функции. Если взять $u=e^{x^2}$, то $du=2xe^{x^2}dx$, что приведет к более сложному интегралу. В данном интеграле целесообразно обозначить $u=x^2$, $dv=xe^{x^2}dx$. Тогда $du=2xdx$ и $v=\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}$. Получим:

$$\int x^3e^{x^2}dx=\frac{x^2}{2}e^{x^2}-\int xe^{x^2}dx=\frac{x^2}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C=\frac{x^2-1}{2}e^{x^2}+C.$$

*Замечание 3.1. Если применение формулы интегрирования по частям приводит к выражению, содержащему первоначальный интеграл, то полученное в результате применения формулы выражение рассматривается как уравнение, в котором неизвестным является исходный интеграл. Решая уравнение, получаем первоначальный интеграл.

*Пример 6.3. $I=\int e^{2x}\cos\frac{x}{2}dx$.

Решение.

$$I=\left|\begin{matrix}u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx\\ dv=\cos\frac{x}{2}dx & v=2\sin\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=2e^{2x}\sin\frac{x}{2}-4\int e^{2x}\sin\frac{x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx\\ dv=\sin\frac{x}{2}dx & v=-2\cos\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=2e^{2x}\sin\frac{x}{2}-4\left(-2e^{2x}\cos\frac{x}{2}+\right.$$

$$\left.+4\int e^{2x}\cos\frac{x}{2}dx\right)=2e^{2x}\left(\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}\right)-16\int e^{2x}\cos\frac{x}{2}dx.$$

Получили уравнение $I = 2e^{2x}\left(\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2}\right) - 16I$, откуда

$$I = \frac{2e^{2x}}{17}\left(\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2}\right) + C.$$

*Замечание 3.2. Аналогично вычисляются интегралы

$\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int\sqrt{a \pm bx^2}\,dx$, $\int\cos(\ln x)dx$ и некоторые другие.

*Пример 7.3. $I = \int\sqrt{2 + x^2}\,dx$.

Решение.

$$I = \int\sqrt{2+x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} u = \sqrt{2+x^2} & du = \dfrac{xdx}{\sqrt{2+x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{matrix}\right| = x\sqrt{2+x^2} -$$

$$-\int\frac{x^2}{\sqrt{2+x^2}}dx = x\sqrt{2+x^2} - \int\frac{x^2+2-2}{\sqrt{2+x^2}}dx = x\sqrt{2+x^2} -$$

$$-\int\sqrt{2+x^2}\,dx + 2\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = x\sqrt{2+x^2} - I + 2\ln\left|x + \sqrt{2+x^2}\right|.$$

Таким образом, $I = x\sqrt{2+x^2} - I + 2\ln\left|x + \sqrt{2+x^2}\right|$.

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{2+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{2+x^2}\right| + C.$$

*Рекуррентные формулы

С помощью формулы интегрирования по частям выводятся рекуррентные формулы:

$$\int\sin^n xdx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}xdx,$$

$$\int\cos^n xdx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx,$$

$$\int x^n\sin xdx = -x^n\cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)\int x^{n-2}\sin xdx,$$

$$\int x^n\cos xdx = x^n\sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)\int x^{n-2}\cos xdx,$$

где n - натуральное число.

Для примера докажем первую из рекуррентных формул:

$$I=\int\sin^n xdx=\begin{vmatrix} u=\sin^{n-1}x & du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos xdx \\ dv=\sin xdx & v=-\cos x \end{vmatrix}=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=-\sin^{n-1}x\cos x+$$

$$+(n-1)\int\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=-\sin^{n-1}x\cos x+$$

$$+(n-1)\int\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int\sin^n xdx=-\sin^{n-1}x\cos x+$$

$$+(n-1)\int\sin^{n-2}xdx-(n-1)I\,.$$

Получили уравнение:

$$I=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}xdx-(n-1)I\,,$$

откуда получаем формулу:

$$\int\sin^n xdx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}xdx\,.$$

*Пример 8.3. $\int\sin^5 xdx$.

Решение.

$$\int\sin^5 xdx=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}\int\sin^3 xdx=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+$$

$$+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x+\frac{2}{3}\int\sin xdx\right)=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x-$$

$$-\frac{4}{15}\sin^2 x\cos x-\frac{8}{15}\cos x+C\,.$$

Удобно также применять рекуррентные формулы для вычисления интегралов, в которых подынтегральная функция имеет вид $tg^n x$ или $ctg^n x$:

$$\int tg^n xdx=\frac{1}{n-1}tg^{n-1}x-\int tg^{n-2}xdx\,,$$

$$\int ctg^n xdx=\frac{1}{1-n}ctg^{n-1}x-\int ctg^{n-2}xdx\,.$$

Выведем формулу для $tg^n x$:

$$\int tg^n x dx = \int tg^{n-2} x tg^2 x dx = \int tg^{n-2} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int tg^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int tg^{n-2} x dx = \int tg^{n-2} x d(tgx) - \int tg^{n-2} x dx =$$

$$= \frac{1}{n-1} tg^{n-1} x - \int tg^{n-2} x dx.$$

*Иногда на практике удобно вычислять интегралы методом неопределенных коэффициентов. В частности, его применяют при вычислении интегралов вида: $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$. Результатом их интегрирования является выражение вида $Ae^{ax} \sin bx + Be^{ax} \cos bx + C$. Покажем применение данного метода на примере.

*Пример 9.3. $\int e^x \sin 2x dx$.

Решение. $\int e^x \sin 2x dx = Ae^x \sin 2x + Be^x \cos 2x + C$.

Для нахождения коэффициентов A и B продифференцируем последнее равенство:

$$e^x \sin 2x = Ae^x \sin 2x + 2Ae^x \cos 2x + Be^x \cos 2x - 2Be^x \sin 2x.$$

Поделим на e^x и приравняем коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в обеих частях: $\begin{array}{l|l} \sin 2x & A - 2B = 1, \\ \cos 2x & 2A + B = 0. \end{array}$

В результате имеем: $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{2}{5}$. Окончательно

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5} e^x \sin 2x - \frac{2}{5} e^x \cos 2x + C.$$

*Этот метод удобно применять и к интегралам вида $\int P_n(x) \cos bx dx$, $\int P_n(x) \sin bx dx$, $\int P_n(x) e^{ax} dx$,

$$\int P_n(x) e^{ax} \cos bx dx,\ \int P_n(x) e^{ax} \sin bx dx.$$

Примеры для самостоятельного решения

3.1. $\int (x+1) 2^x dx$.

3.2. $\int x e^{-5x} dx$.

3.3. $\int \ln^3 x dx$.

3.4. $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

3.5. $\int x sh 3x dx$.

3.6. $\int (x+2)\cos 4x dx$.

3.7. $\int \left(2x^2 - 3x + 1\right)\sin x dx$.

3.8. $\int x \sin^2 x dx$.

3.9. $\int x \,arctg\, x dx$.

3.10. $\int \arcsin x dx$.

3.11. $\int x\, tg^2 x dx$.

3.12. $\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2 - 1\right)^2}$.

3.13. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx$.

3.14. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

3.15. $\int \cos(\ln x) dx$.

* 3.16. $\int 3^x \sin x dx$.

*3.17. $\int e^{3x} \cos^2 x dx$.

*3.18. $\int e^{3x} \cos 5x dx$.

3.19. $\int x^2 5^x dx$.

3.20. $\int x^4 \ln^3 x dx$.

*3.21. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$.

3.22. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

*3.23. $\int \sin 2x \ln(\sin x) dx$.

3.24. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

*3.25. $\int x \sin \sqrt{x} dx$.

*3.26. $\int \arcsin^2 x dx$.

*3.27. $\int x^2 \arccos 3x dx$.

*3.28. $\int \sqrt{x^2 - 4} dx$.

*3.29. $\int \sqrt{13 - x^2} dx$.

*3.30. $\int \sqrt{5 + x^2} dx$.

*3.31. $\int tg^5 x dx$.

*3.32. $\int ctg^8 x dx$.

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 4.1. Дробно-рациональной функцией называется функция вида

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \mathbf{K} + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \mathbf{K} + b_1 x + b_0},$$

где m, n - натуральные числа.

Определение 4.2. Дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется правильной, если $m < n \quad (a_m \neq 0,\, b_n \neq 0)$, и неправильной, если $m \geq n$.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно путем деления числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$, где $r < n$, то есть

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}.$$

Например, $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{x^4 - 5x + 7}{x - 2}$ - неправильная рациональная дробь, так как степень числителя (равна 4) больше степени знаменателя (равна 1). Выделим целую часть, для чего разделим числитель на знаменатель "столбиком":

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad\qquad -5x+7 & x-2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^4-2x^3} & x^3+2x^2+4x+3 \\
\quad 2x^3 \qquad -5x+7 & \\
\quad \underline{2x^3-4x^2} & \\
\qquad 4x^2-5x+7 & \\
\qquad \underline{4x^2-8x} & \\
\qquad\quad 3x+7 & \\
\qquad\quad \underline{3x-6} & \\
\qquad\qquad 13 &
\end{array}
$$

Частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 13$.

Следовательно, $\dfrac{x^4 - 5x + 7}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \dfrac{13}{x - 2}$.

Теорема 4.1. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, то есть многочлен $Q_n(x)$ можно представить в виде

$$Q_n(x) = b_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r} \times$$

$$\times \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{s_1} \ldots \left(x^2 + p_l x + q_l\right)^{s_l}.$$

При этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + \ldots + s_l) = n$, $D_i = p_i^2 - 4q_i < 0, \quad i = \overline{1, l}$.

Определение 4.3. Дроби вида

$$\frac{A}{x - a}, \tag{I}$$

$$\frac{A}{(x - a)^k} \quad (k > 1), \tag{II}$$

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad \left(p^2 - 4q < 0\right), \tag{III}$$

$$\frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^k} \quad \left(k > 1, \quad p^2 - 4q < 0\right) \tag{IV}$$

называются простейшими соответственно типов I, II, III и IV.

Теорема 4.2. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{s_1} \ldots \left(x^2 + p_l x + q_l\right)^{s_l},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\underbrace{(x - x_1)^{k_1}} \ldots \underbrace{(x - x_r)^{k_r}} \underbrace{\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{s_1}} \ldots \underbrace{\left(x^2 + p_l x + q_l\right)^{s_l}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}}} + \ldots +$$

$$+\underbrace{\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}}+$$

$$+\underbrace{\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}}}+$$

$$+\ldots+\underbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^2}+\ldots+\frac{M_{s_l}x+N_{s_l}}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{s_l}}},$$

(4.1)

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ - некоторые действительные коэффициенты.

Проиллюстрируем теорему на примерах:

1) $$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+3)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3};$$

2) $$\frac{x^2+1}{(x-2)\left(x^2+4\right)\left(x^2+x+3\right)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+$$

$$+\frac{Dx+E}{x^2+x+3}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+x+3\right)^2}.$$

Для нахождения коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ в равенстве (4.1) применяют метод неопределенных коэффициентов или метод частных значений.

Пример 1.4. Разложить дробь $\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}$ на сумму простейших дробей.

Решение. На основании теоремы 4.2:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}.$$

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B , приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)},$$

то есть $$7x+4=A(x+2)+B(x-3). \qquad (4.2)$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами. Рассмотрим их.

1-й способ. (Метод неопределенных коэффициентов)

Раскроем скобки в правой части равенства и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x+4=(A+B)x+(2A-3B).$$

Так как многочлены в обеих частях равенства тождественно равны, то у них должны быть равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, приравнивая которые, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A+B=7, \\ 2A-3B=4. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $A=5,\ B=2.$

2-й способ. (Метод частных значений)

Удобнее всего подставлять значения переменной, обращающие в ноль одну из скобок (в нашем случае это $x=3$ и $x=-2$). Придадим неизвестной x в равенстве (4.2) частное значение $x=3$. Тогда равенство примет вид

$$7\cdot 3+4=A\cdot(3+2), \text{ то есть } A=5.$$

Теперь подставим в равенство (4.2) значение $x=-2$:

$$7\cdot(-2)+4=B\cdot(-2-3), \text{ откуда } B=2.$$

Таким образом, $\dfrac{7x+4}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{2}{x+2}$.

Интегрирование простейших дробей

I. $$\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

II. $$\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

III. При интегрировании дроби III типа $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

где $p^2-4q<0$, в первую очередь выделяют в числителе производную знаменателя $\left(\left(x^2+px+q\right)'=2x+p\right)$:

$$Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Первый из полученных интегралов равен:

$$\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}=\ln\left(x^2+px+q\right).$$

Для вычисления второго из интегралов сначала выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Введем следующие обозначения: $y=x+\dfrac{p}{2}$ $(\Rightarrow dy=dx)$ и

$a=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$. Тогда интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ запишется в виде:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dy}{y^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{y}{a}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

Окончательно интеграл от простейшей дроби III типа:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

*IV. Если требуется проинтегрировать простейшую дробь IV типа $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, то сначала, как и для дроби III типа, в числителе выделяют производную от квадратного трехчлена:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^k}=$$

$$=\frac{M}{2(1-k)}\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^k}.$$

Последний интеграл считается с помощью рекуррентной формулы, позволяющей свести его к более простому интегралу:

$$\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2(k-1)a^2}\frac{y}{\left(y^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2k-3}{2k-2}\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^{k-1}}.$$

Далее к интегралу $\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^{k-1}}$ снова применяется рекуррентная формула, понижающая степень знаменателя подынтегральной дроби, и так далее, пока не получится табличный интеграл $\int \frac{dy}{y^2+a^2}$.

Пример 2.4. $\int \frac{4x+3}{x^2-4x+5}$.

Решение. Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе $D=16-4\cdot 1\cdot 5=-4<0$, поэтому данная дробь – простейшая третьего типа. Вычислим производную знаменателя:

$\left(x^2-4x+5\right)'=2x-4$. Выделим в числителе подынтегральной дроби производную знаменателя: $4x+3=2(2x-4)+11$ и полный квадрат в знаменателе: $x^2-4x+5=x^2-4x+4+1==(x-2)^2+1$. В результате интеграл примет вид

$$\int\frac{4x+3}{x^2-4x+5}=2\int\frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+5}+11\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}=$$

$$=2\int\frac{d\left(x^2-4x+5\right)}{x^2-4x+5}+11\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1}=2\ln\left(x^2-4x+5\right)+$$

$$+11arctg(x-2)+C\,.$$

*Пример 3.4. $\int\frac{(6x-5)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$.

Решение. Дискриминант квадратного трехчлена отрицателен $(D=-12)$, поэтому данная дробь – простейшая четвертого типа.

Производная знаменателя равна $\left(x^2+2x+4\right)'=2x+2$. Выделим в числителе дроби производную знаменателя: $6x-5=3(2x+2)-11$ и полный квадрат в знаменателе:

$x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3$. В результате интеграл примет вид

$$\int\frac{(6x-5)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^2}=3\int\frac{(2x+2)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^2}-11\int\frac{dx}{\left((x+1)^2+3\right)^2}=$$

$$=\left|\begin{matrix}y=x+1\\dy=dx\end{matrix}\right|=3\int\frac{d\left(x^2+2x+4\right)}{\left(x^2+2x+4\right)^2}-11\int\frac{dy}{\left(y^2+3\right)^2}=$$

$$=-3\frac{1}{x^2+2x+4}-11\int\frac{dy}{\left(y^2+3\right)^2}\,.$$

Последний интеграл вычислим с помощью рекуррентной формулы (k=2, a^2=3):

$$\int\frac{dy}{\left(y^2+3\right)^2}=\frac{1}{2\cdot1\cdot3}\frac{y}{\left(y^2+3\right)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2+3}=\frac{y}{6\left(y^2+3\right)}+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{x+1}{6\left(x^2+2x+4\right)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}.$$

Окончательно интеграл равен

$$\int\frac{(6x-5)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^2}=-3\frac{1}{x^2+2x+4}-$$

$$-11\left(\frac{x+1}{6\left(x^2+2x+4\right)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

*Пример 4.4. $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4}$.

Решение. Данный интеграл вычисляется с помощью рекуррентной формулы (k=4, a^2=1):

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{1}{2\cdot3\cdot1}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\left|k=3,\ a^2=1\right|=$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2\cdot2\cdot1}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}\right)=\left|k=2,\right.$$

$$\left.a^2=1\right|=\frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5x}{24\left(x^2+1\right)^2}+\frac{15}{24}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$

$$=\frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5x}{24\left(x^2+1\right)^2}+\frac{15x}{48\left(x^2+1\right)}+\frac{15}{48}arctgx+C.$$

Интегрирование дробно-рациональных функций сводится к выполнению следующих операций:

1) если дробь неправильная, то выделяют целую часть (целая рациональная функция);
2) правильную дробь раскладывают на сумму простейших;
3) вычисляют интегралы от полученной целой рациональной функции (если дробь была неправильной) и от простейших дробей.

Пример 5.4. $\int\frac{x^4-4x^3+3x^2+3x}{x^2-5x+6}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь – неправильная, поэтому выделяем целую часть. Делим числитель на знаменатель “столбиком”:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-4x^3+3x^2+3x & x^2-5x+6 \\
\underline{x^4-5x^3+6x^2} & x^2+x+2 \\
\quad x^3-3x^2+3x & \\
\quad \underline{x^3-5x^2+6x} & \\
\qquad 2x^2-3x & \\
\qquad \underline{2x^2-10x+12} & \\
\qquad\quad 7x-12 &
\end{array}
$$

Интеграл примет вид

$$\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+3x}{x^2-5x+6}dx = \int\left(x^2+x+2+\frac{7x-12}{x^2-5x+6}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{7x-12}{x^2-5x+6}dx\,.$$

Разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители и разложим ее на сумму простейших дробей:

$$\frac{7x-12}{x^2-5x+6}=\frac{7x-12}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\,.$$

Найдем коэффициенты А и В. Для этого приведем правую часть равенства к общему знаменателю и приравняем полученные числители:

$$7x-12 = A(x-2)+B(x-3).$$

Применим метод частных значений. Возьмем $x=2$ и $x=3$:

$$
\begin{array}{l|l}
x=2 & 2=-B \;\Rightarrow\; B=-2, \\
x=3 & 9=A.
\end{array}
$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-5x+6}dx = 9\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x-3} = 9\ln|x-2|-2\ln|x-3|+C =$$

$$=\ln\left|\frac{(x-2)^9}{(x-3)^2}\right|+C\,.$$

Окончательно

$$\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+3x}{x^2-5x+6}dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+\ln\left|\frac{(x-2)^9}{(x-3)^2}\right|+C\,.$$

Пример 6.4. $\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь правильная, но ее знаменатель не до конца разложен на множители. Сначала преобразуем знаменатель

$$\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx = \int \frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}dx.$$

Потом разложим дробь на сумму простейших:

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

$$x^2+5x-2 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1).$$

Воспользуемся методом частных значений.

При $x=1$: $\quad 4=4A \quad \Rightarrow \quad A=1.$

При $x=-1$: $\quad -6=-2C \quad \Rightarrow \quad C=3.$

Осталось найти коэффициент B. Так как “удобных” частных значений не осталось, дадим переменной x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким вычислениям при подстановке.

При $x=0$: $\; -2 = A-B-C \Rightarrow -2 = 1-B-3 \Rightarrow B=0.$

Интеграл примет вид

$$\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

Пример 8.4. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь – неправильная, поэтому выделяем целую часть. Делим числитель на знаменатель “столбиком”:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 \quad +2x^3 \quad +4x+4 & x^4+2x^3+2x^2 \\ \cline{2-2}
-\;\cancel{x^5}+2x^4+2x^3 & x-2 \\
\quad -2x^4 \qquad\qquad +4x+4 & \\ \cline{1-1}
\quad -2x^4-4x^3-4x^2 & \\
- \qquad 4x^3+4x^2+4x+4 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

Получаем: $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx =$

$$= \int \left(x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю, приравняем числители дробей в обеих частях и найдем A, B, C, D методом неопределенных коэффициентов.

$$4x^3+4x^2+4x+4 =$$
$$= Ax\left(x^2+2x+2\right) + B\left(x^2+2x+2\right) + (Cx+D)x^2 =$$
$$= (A+C)x^3 + (2A+B+D)x^2 + (2A+2B)x + 2B.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{array}{c|c} x^3 & A+C=4, \\ x^2 & 2A+B+D=4, \\ x^1 & 2A+2B=4, \\ x^0 & 2B=4. \end{array}$$

Находим: $B=2, \quad A=0, \quad C=4, \quad D=2$.

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2} \right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{2(2x+2)-2}{x^2+2x+2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} -$$
$$-2\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2} -$$
$$-2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln\left(x^2+2x+2\right) -$$
$$-2\,arctg(x+1) + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

4.1. $\int \frac{11dx}{(x-6)^4}$.

4.2. $\int \frac{dx}{x^2+10x+29}$.

4.3. $\int \frac{(x+6)dx}{x^2-2x+9}$.

4.4. $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2+x+1}$.

*4.5. $\int \frac{dx}{\left(x^2+5\right)^2}$.

*4.6. $\int \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^3}$.

*4.7. $\int \frac{3x-2}{\left(x^2+6x+10\right)^2}dx$.

*4.8. $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+29\right)^2}$.

4.9. $\int \frac{2x-3}{(x-5)(x+2)}dx$.

4.10. $\int \frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5}$.

4.11. $\int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x-3)}$.

4.12. $\int \frac{xdx}{x^2-4x-5}$.

4.13. $\int \frac{2x^2-11}{x^2+x-6}dx$.

4.14. $\frac{(x-1)dx}{(x+1)\left(x^2-4\right)}$.

4.15. $\int \frac{x^4dx}{\left(x^2-1\right)(x+2)}$.

4.16. $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)}$.

4.17. $\int \frac{x^5-x^4-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}dx$.

4.18. $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}dx$.

4.19. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}$.

4.20. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}dx$.

4.21. $\int \frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}dx$.

4.22. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

4.23. $\int \frac{2x^2-3x-3}{\left(x^2-2x+5\right)(x-1)}dx$.

4.24. $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

4.25. $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}dx$. 4.26. $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2\left(x^2+9\right)}dx$.

*4.27. $\int \frac{3x+5}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$. *4.28. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+3e^x+2}$.

*4.29. $\int \frac{\cos x dx}{(\sin x-1)(\sin x+2)}$. *4.30. $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos x}$.

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

5.1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция относительно переменных $\sin x$ и $\cos x$, сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Тогда

$$x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Пример 1.5. $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3\left(1+t^2\right)+2t+1-t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+t+2} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}} + C \,.$$

*5.2. $\int R(\sin x)\cos x dx = \left| \begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{array} \right| = \int R(t)dt$.

$$\int R(\cos x)\sin x dx = \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{array} \right| = -\int R(t)dt \,.$$

Пример 2.5. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x-3}$.

Решение. Данный интеграл легко сводится к виду $\int R(\cos x)\sin x dx$:

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x-3} = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin dx}{\cos x-3} = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)\cdot \sin dx}{\cos x-3} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^2-1\right)}{t-3} dt = \int \left(t+3+\frac{8}{t-3}\right) dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|t-3| + C = \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln|\cos x-3| + C \,.$$

5.3. $\int R(tgx)dx$ или подынтегральная функция содержит $\cos x$ и $\sin x$ только в четных степенях, то применяется подстановка

$$t = tgx, \quad x = arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

После подстановки получим интеграл от рациональной функции.

Пример 3.5. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} t = tgx & \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ x = arctgt & dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{2t^2+1} = \int \frac{dt}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}t\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}tgx\right) + C.$$

*Замечание. В частности, данную подстановку целесообразно применять к интегралам вида $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x + d}$.

5.4. Рассмотрим интеграл вида $\int \sin^m x \cos^n xdx$ $(m, n \in Z)$.Возможны три различных случая.

1. $\int \sin^m x \cos^n xdx$, где m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное. Для определенности пусть n – нечетное, то есть его можно записать в виде $n = 2p+1$. Преобразуем интеграл:

$$\int \sin^m x \cos^n xdx = \int \sin^m x \cos^{2p+1} xdx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos xdx =$$

$$= \int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^p \cos xdx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos xdx \end{matrix} \right| = \int t^m \left(1-t^2\right)^p dt.$$

Последний интеграл есть интеграл от рациональной функции переменной t.

Пример 4.5. $\int \frac{\sin^5 xdx}{\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{\sin^5 xdx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^4 x \sin xdx}{\cos^2 x} = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin xdx}{\cos^2 x} =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin xdx \end{vmatrix} = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2 dt}{t^2} = -\int \left(\frac{1}{t^2} - 2 + t^2 \right) dt =$$

$$= \frac{1}{t} + 2t - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2. $\int \sin^m x \cos^n xdx$, где m и n – неотрицательные и четные.

Пусть $m = 2p, \quad n = 2q$. Для вычисления интеграла используем формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}. \qquad (5.1)$$

Подставим эти выражения в интеграл:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} xdx = \int \left(\frac{1-cos2x}{2} \right)^p \left(\frac{1+cos2x}{2} \right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получаем члены, содержащие $\cos 2x$ в четных и нечетных степенях. Члены с нечетными показателями интегрируются , как показано в п. 1, а слагаемые с четными степенями опять преобразуются по формулам понижения степени (5.1).

Пример 5.5. $\int \sin^6 xdx$.

Решение.

$$\int \sin^6 xdx = \int \left(\sin^2 x\right)^3 dx = \frac{1}{8} \int \left(1-\cos 2x\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx = \frac{x}{8} - \frac{3}{8} \cdot \frac{\sin 2x}{2} +$$

$$+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)dx-\frac{1}{8}\int\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2xdx=\frac{x}{8}-\frac{3\sin 2x}{16}+$$

$$+\frac{3x}{16}+\frac{3}{16}\cdot\frac{\sin 4x}{4}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\left(1-\sin^2 2x\right)d(\sin 2x)=\frac{5x}{16}-\frac{3\sin 2x}{16}+$$

$$+\frac{3\sin 4x}{64}-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3}+C=\frac{5x}{16}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3\sin 4x}{64}+$$

$$+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

3. $\int\sin^m x\cos^n xdx$. Оба показателя четные, но хотя бы один из них отрицательный. В этом случае делают замену $t=tgx$.

Пример 6.5. $\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^4 x}$.

Решение. $\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x\cdot 1dx}{\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx}{\cos^4 x}=$

$$=\int tg^2x\left(tg^2x+1\right)dx=\left|\begin{array}{c} t=tgx \\ x=arctgt \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int t^2\left(t^2+1\right)\frac{dt}{1+t^2}=\int t^2dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}+C=\frac{tg^3x}{3}+C.$$

*5. 5. Интегралы вида: $\int\cos mx\cos nxdx$, $\int\sin mx\sin nxdx$, $\int\cos mx\sin nxdx$, где $m\neq n$, вычисляются с помощью формул тригонометрии:

$$\cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right),$$

$$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right).$$

Пример 7.5. $\int\cos 5x\cdot\cos 2x dx$.

Решение.

$$\int\cos 5x\cdot\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 7x+\cos 3x)dx=\frac{1}{14}\sin 7x+$$

$$+\frac{1}{6}\sin 3x+C.$$

Примеры для самостоятельного решения

5.1. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

5.2. $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$.

5.3. $\int\frac{(1+\sin x)dx}{(1+\cos x)\sin x}$.

5.4. $\int\frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

5.5. $\int\frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}$.

5.6. $\int\frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}$.

5.7. $\int\frac{dx}{5\sin^2 x-3\cos^2 x+4}$.

5.8. $\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

5.9. $\int\frac{dx}{(3tgx+5)\sin 2x}$.

*5.10. $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$.

5.11. $\int\frac{(8+tgx)dx}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

5.12. $\int\frac{4-7tgx}{2+3tgx}dx$.

5.13. $\int\frac{6\sin^2 x dx}{4+3\cos 2x}$.

5.14. $\int\sin^5 x dx$.

5.15. $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$.

5.16. $\int\frac{\sin 2x dx}{\cos^7 x}$.

5.17. $\int\frac{\sin^4 x dx}{\cos x}$.

5.18. $\int\sin^6 x dx$.

5.19. $\int\sin^2 x\cos^4 x dx$.

5.20. $\int\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$.

*5.21. $\int \sin x \cos 3x dx$. *5.22. $\int \sin \frac{x}{3} \sin \frac{x}{12} dx$.

*5.23. $\int \cos 2x \cos 5x dx$. 5.24. $\int tg^5 x dx$.

5.25. $\int ctg^4 \frac{x}{2} dx$. 5.26. $\int cos^6 x dx$.

*5.27. $\int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x dx$. 5.28. $\int tg^4 \frac{x}{3} dx$.

5.29. $\int \frac{5tgx+2}{2\sin 2x+5} dx$. 5.30. $\int 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx$.

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Основным методом вычисления интегралов от иррациональных функций является сведение их к интегралам от рациональных функций.

6.1. Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.

В первую очередь выделяют в числителе производную знаменателя $\left(\left(ax^2+bx+c\right)' = 2ax+b \right)$: $Mx+N = \frac{M}{2a}(2ax+b) + N - \frac{Mb}{2a}$.

Таким образом, $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b) + N - \frac{Mb}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$

$$= \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Первый из полученных интегралов равен:

$$\int \frac{(2ax+p)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = 2\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Для вычисления второго из интегралов сначала выделяем полный квадрат в знаменателе. С помощью замены переменной $z = x + \frac{b}{2a}$ второй интеграл приводится к одному из двух табличных интегралов: $\int \frac{dz}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$,

$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$.

Пример 1.6. $\int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx$.

Решение. $\int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx = \left| \left(6-2x-x^2\right)' = -2-2x \right| =$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2-2x-6}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2-2x)dx}{\sqrt{6-2x-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{6-2x-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(6-2x-x^2\right)}{\sqrt{6-2x-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{7-\left(x^2+2x+1\right)}} = -\frac{1}{2}2\sqrt{6-2x-x^2} +$$

$$+3\int \frac{dx}{\sqrt{7-(x+1)^2}} = -\sqrt{6-2x-x^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

6.2. Интеграл вида $\int R\left(x,\, x^{\frac{k}{r}},\, x^{\frac{p}{q}}, \mathbf{K},\, x^{\frac{h}{s}}\right)dx$,

где $k, r, p, q, \mathbf{K}, s$ - целые числа. Для вычисления интеграла используется замена: $x = t^n$, где n - наименьшее общее кратное чисел $r, q, \mathbf{K}, s$ (иначе: n - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{k}{r}, \frac{p}{q}, \mathbf{K}, \frac{h}{s}$). Тогда $dx = nt^{n-1}dt$. В результате подстановки получим интеграл от дробно-рациональной функции.

Пример 2.6. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}dx$.

Решение. Интеграл зависит от x и от $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, поэтому применим подстановку: $x = t^2$.

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}dx = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t-1)2tdt}{2t-t^2} = -2\int \frac{t^2-t}{t^2-2t}dt =$$

$$= -2\int \left(1+\frac{t}{t^2-2t}\right)dt = -2\frac{t^2}{2} - 2\int \frac{dt}{t-2} = -t^2 - 2\ln|t-2| + C =$$

$$= -x - 2\ln\left|\sqrt{x}-2\right| + C.$$

6.3. Интеграл вида

$$\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{k}{r}}, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, \mathbf{K}, (ax+b)^{\frac{h}{s}}\right]dx,$$

где $k, r, p, q, \mathbf{K}, s$ - целые числа. Для вычисления интеграла используется замена: $ax+b = t^n$, где n - наименьшее общее кратное чисел $r, q, \mathbf{K}, s$.

Пример 3.6. $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Подынтегральное выражение зависит от $\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$. Наименьшим общим кратным чисел 2 и 3 является число 6, поэтому применим замену: $x+1 = t^6$.

$$\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx = \left| \begin{matrix} x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t^6-1+t^3}{t^2}6t^5dt =$$

$$= 6\int \left(t^9+t^6-t^3\right)dt = 6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = 6t^4\left(\frac{t^6}{10}+\frac{t^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+$$

$$+C = 6\sqrt[3]{(x+1)^2}\left(\frac{x+1}{10}+\frac{\sqrt{x+1}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

6.4. Интеграл вида

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{r}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}},\mathbf{K},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{h}{s}}\right]dx,$$

где $k, r, p, q, \mathbf{K}, s$ - целые числа. Для вычисления интеграла используется замена: $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где n - наименьшее общее кратное чисел $r, q, \mathbf{K}, s$.

Пример 4.6. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{(1-x)^2}$.

Решение. Для нахождения интеграла воспользуемся заменой $\frac{1+x}{1-x}=t^2$.

Выразим x: $1+x=t^2-t^2x \Rightarrow x\left(1+t^2\right)=t^2-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$. Найдем dx: $dx=\frac{2t\left(t^2+1\right)-2t\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$.

Тогда $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{(1-x)^2}=\int\frac{t\cdot 4tdt}{\left(1-\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2\left(t^2+1\right)^2}=$

$$=4\int\frac{t^2dt}{\frac{\left(t^2+1-t^2+1\right)^2}{\left(t^2+1\right)^2}\left(t^2+1\right)^2}=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}+C.$$

*6. 5. Если подынтегральное выражение представляет собой дифференциальный бином, то есть имеет вид $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где m, n, p - рациональные числа, то данный интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби в следующих трех случаях:

1) p - целое число; тогда интеграл можно рационализовать с помощью подстановки $x=t^k$, где k - наименьший общий знаменатель дробей m и n;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число; тогда интеграл рационализуется с помощью подстановки $a+bx^n=t^k$, где k - знаменатель числа p;

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ - целое число; в этом случае рационализация достигается подстановкой $a+bx^{-n}=t^k$, где k - знаменатель числа p.

*Пример 5.6. $\int\dfrac{x^2dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

Решение. $\int\dfrac{x^2dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=\int x^2\left(1+\sqrt{x}\right)^{-2}dx$.

Так как $p=-2$, имеем случай 1. Применим замену:

$x=t^2$ ($m=2,\ n=\dfrac{1}{2}$, наименьший знаменатель этих чисел $k=2$). Тогда $dx=2tdt$.

$$\int\frac{x^2dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=2\int\frac{t^5dt}{(t+1)^2}=2\int\left(t^3-2t^2+3t-4+\frac{5t+4}{(t+1)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{t^4}{2}-\frac{4t^3}{3}+3t^2-8t+2\int\left(\frac{5}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=\frac{t^4}{2}-\frac{4t^3}{3}+3t^2-$$

$$-8t+10\ln|t+1|+\frac{2}{t+1}+C=\frac{x^2}{2}-\frac{4\sqrt{x^3}}{3}+3x-8\sqrt{x}+$$

$$+10\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+\frac{2}{\sqrt{x}+1}+C.$$

*Замечание 6.1. При целом и положительном p интеграл от дифференциального бинома приводится к интегралам от степенных функций путем возведения в степень и раскрытия скобок.

*Пример 6.6. $\int\sqrt{x}\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^2dx$.

Решение. $p = 2$. Возведем сумму $2+\sqrt[3]{x}$ в квадрат и умножим на $\sqrt{x}$. Тогда

$$\int \sqrt{x}\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \int\left(4\sqrt{x}+4\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[6]{x^7}\right)dx = \frac{8}{3}\sqrt{x^3}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+$$

$$+\frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+C.$$

*Пример 7.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}} = \int x^{-1}\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{4}}dx$,

$m=-1,\ n=3,\ p=-\frac{1}{4},\ \frac{m+1}{n}=0$ - целое число. Имеем случай 2.

Делаем подстановку: $1+x^3 = t^4$. Тогда $x=\sqrt[3]{t^4-1}$ и

$dx = \frac{4t^3}{3\sqrt[3]{\left(t^4-1\right)^2}}dt$. В результате интеграл примет вид:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}} = \int \frac{4t^3}{3\sqrt[3]{\left(t^4-1\right)^2}\sqrt[3]{t^4-1}\,t}dt = \frac{4}{3}\int\frac{t^2dt}{t^4-1} =$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{2t^2dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} = \frac{2}{3}\int\frac{\left(t^2+1\right)+\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}dt = \frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2-1}+$$

$$+\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{2}{3}arctgt + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^3+1}-1}{\sqrt[4]{x^3+1}+1}\right|+$$

$$+\frac{2}{3}arctg\sqrt[4]{x^3+1}+C.$$

*Пример 8.6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$,

$m=-2,\ n=2,\ p=-\frac{3}{2},\quad \frac{m+1}{n}+p=-2$ - целое число. Имеем случай 3. Делаем подстановку: $1+x^{-2}=t^2$. Откуда $x^2=\frac{1}{t^2-1}$ и $2xdx=\frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$. Преобразуем интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx = \int x^{-2}\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}x^{-3}dx =$$

$$= \int x^{-6}\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}xdx = \int\left(t^2-1\right)^3 t^{-3}\frac{-tdt}{\left(t^2-1\right)^2} = -\int\frac{\left(t^2-1\right)dt}{t^2} =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2} - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} - \sqrt{1+x^{-2}} + C =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

*Пример 9.6. $\int x^2\sqrt{1+x^4}dx$.

Решение. $m=2,\ n=4,\ p=\frac{1}{2}$ - не целое число, первый случай не подходит, $\frac{m+1}{n}=\frac{3}{4}$ - не целое и $\frac{m+1}{n}+p=\frac{5}{4}$ - не целое, поэтому второй и третий случаи не подходят тоже. Интеграл не может быть выражен через элементарные функции.

*6. 6. Интеграл вида $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, (6.1)

где $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\mathbf{K}+a_1x+a_0$.

Применяется формула:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + l\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (6.2)$$

где $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \mathbf{K} + b_1 x + b_0$.

Чтобы найти коэффициенты $b_{n-1}, b_{n-2}, \mathbf{K}, b_1, b_0,\ l$, записывают для интеграла (6.1) равенство (6.2) с неопределенными коэффициентами и дифференцируют его. Полученное выражение умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Тем самым освобождаются от дробей и корней. Затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Решая полученную систему, находят коэффициенты $b_{n-1}, b_{n-2}, \mathbf{K}, b_1, b_0,\ l$.

*Пример 10.6. $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решение. По формуле (6.2) получим равенство:

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (ax+b)\sqrt{x^2+2x+2} + l\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}. \quad (6.3)$$

Дифференцируем его:

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = a\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{(ax+b)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{l}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Умножим обе части равенства (6.3) на $\sqrt{x^2+2x+2}$:

$$x^2+1 = a(x^2+2x+2) + (ax+b)(x+1) + l.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 1 = 2a, \\ x^1 & 0 = 3a+b, \\ x^0 & 1 = 2a+b+l. \end{array}$$

Решая систему, находим $a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad l = \frac{3}{2}$. Подставляем найденные коэффициенты в (6.3):

$$\int\frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{3}{2}\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

*Замечание 6.2. Интеграл вида $\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ приводится к интегралу (6.1) умножением и делением на $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

*6.7. Интеграл вида
$$\int\frac{P_n(x)dx}{(x-a)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (6.4)$$
где $P_n(x)$ - многочлен степени n. Возможны два случая:

1) $n<m$. Интеграл приводится к виду (6.1) с помощью подстановки $x-a=\frac{1}{t}$;

2) $n\ge m$. У дроби $\frac{P_n(x)}{(x-a)^m}$ выделяется целая часть, после чего получаем интегралы вида (6.1) и (6.4) в случае $n<m$.

*Пример 11.6. $\int\frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Решение. $n=2,\ m=1,\ n>m$. Выделяем целую часть у дроби

$\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$. Тогда интеграл примет вид:

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}=\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}+\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

Первый интеграл вычисляется как в п. 6.1:

$$\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\left|(x^2+2x+3)'=2x+2\right|=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+3)}{\sqrt{x^2+2x+3}}=$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2 + 2x + 3} + C = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + C.$$

Второй интеграл с помощью замены $x - 1 = \dfrac{1}{t}$

$\left(x = \dfrac{t+1}{t}, \quad dx = -\dfrac{dt}{t^2} \right)$ приводится к виду:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{6t^2 + 4t + 1}},$$

который выделением полного квадрата приводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{6t^2 + 4t + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{6}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{18}}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left| t + \frac{1}{3} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{18}} \right| + C =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left| \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{18}} \right| + C.$$

Окончательно

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \sqrt{x^2 + 2x + 3} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} \left(\ln\left| x + 2 + \sqrt{3x^2 + 6x + 9} \right| - \ln\left| 3(x-1) \right| \right) + C.$$

6. 8. Тригонометрические подстановки.

Интегралы типа

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx, \ \int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx, \ \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью тригонометрических подстановок: для первого интеграла - $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$); для второго -

$x = a\,tgt$ (или $x = a\,ctgt$) и для третьего - $x = \dfrac{a}{\sin t}$ (или $x = \dfrac{a}{\cos t}$).

(Подробнее смотри § 3.)

*6. 9. Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$.

Выделив под радикалом полный квадрат и сделав замену $t = x + \dfrac{b}{2a}$ $(\Rightarrow dx = dt)$, интегралы указанного типа приводим к интегралам вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$. Эти интегралы вычисляются с помощью соответствующих тригонометрических подстановок (см. 6.8 и § 3).

*Пример 12.6. $\int \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{(x-2)} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{(x-2)} dx = \int \frac{\sqrt{(x-2)^2 - 9}}{(x-2)} dx = \left| \begin{matrix} t = x - 2 \\ dt = dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{t^2 - 9}}{t} dt = \left| \begin{matrix} t = \dfrac{3}{\cos z} \\ dt = \dfrac{3\sin z}{\cos^2 z} dz \\ z = \arccos\dfrac{3}{t} \end{matrix} \right| = 3\int \frac{\sin^2 z dz}{\cos^2 z} = 3\int \frac{1 - \cos^2 z dz}{\cos^2 z} =$$

$$= 3\int \frac{dz}{\cos^2 z} - 3\int dz = 3tgz - 3z + C = 3tg\left(\arccos\frac{3}{t}\right) - 3\arccos\frac{3}{t} +$$

$$+ C = \sqrt{t^2 - 9} - 3\arccos\frac{3}{t} + C = \sqrt{x^2 - 4x - 5} - 3\arccos\frac{3}{x-2} + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

6.1. $\int \dfrac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}$.

6.2. $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{1 - \sqrt[3]{x}}$.

6.3. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

6.4. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

*6.5. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$.

6.6. $\int \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}dx$.

6.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

6.8. $\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}$.

*6.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$.

*6.10. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

*6.11. $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}dx$.

*6.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$.

*6.13. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$.

*6.14. $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$.

*6.15. $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2}}dx$.

*6.16. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt[15]{x^4}}dx$.

6.17. $\int \frac{(8x-11)}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

6.18. $\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$.

*6.19. $\int \frac{\left(3x^2-5x\right)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

*6.20. $\int \frac{\left(2x^2-3x\right)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

*6.21. $\int \frac{\left(x^3-x+1\right)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

*6.22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

*6.23. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

*6.24. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

*6.25. $\int \frac{dx}{\left(x^3+3x^2+3x+1\right)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

*6.26. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

6.27. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$.

6.28. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

*6.29. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$.

*6.30. $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.

§ 7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА - ЛЕЙБНИЦА

7.1. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n$ так, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то есть выбрано разбиение отрезка $[a,b]$ на n частей. В каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ произвольным образом выбрана точка x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Определение 7.1. Сумма вида $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Величина интегральной суммы зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и от выбора точек x_i. Пусть $l = \max\limits_{1\le i\le n}\{|\Delta x_i|\}$.

Определение 7.2. Если предел интегральной суммы при $l \to 0$ существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и от выбора точек x_i, то функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$. Величина этого предела называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается: $\int\limits_a^b f(x)dx$. Число a называется нижним пределом интегрирования, b - верхним пределом интегрирования,

x - переменная интегрирования, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Замечание. Величина определенного интеграла не зависит от того, как обозначена переменная интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz.$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций, в частности для всякой ограниченной на отрезке функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва.

7.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл есть алгебраическая сумма площадей фигур, ограниченных линиями: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Площади фигур, расположенных выше оси Ox, берутся со знаком плюс, а расположенных ниже оси Ox - со знаком минус.

7. 3. Основные свойства определенных интегралов

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливы следующие свойства определенных интегралов:

1^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2^0. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3^0. $\int_a^b dx = b - a$.

4^0. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

5^0. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, где $c = const$.

6^0. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $a < c < b$.

7^0. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, где $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

Если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0$.

8^0. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

9^0. Если M - наибольшее значение и m - наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

10^0. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

11^0. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. (Теорема о среднем.)

Определение 7.3. Величина $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

12^0. $\left(\int\limits_a^x f(x)dx\right)'_x = f(x)$.

13^0. Если $f(x)$ - четная функция, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

14^0. Если $f(x)$ - нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$.

15^0. Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом Т, то интеграл по любому отрезку, длина которого равна Т, имеет всегда одно и то же значение, то есть: $\int\limits_0^T f(x)dx = \int\limits_l^{l+T} f(x)dx$.

7. 4.Формула Ньютона - Лейбница

Если для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$, то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла является формула Ньютона - Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1.7. $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \cos x dx$.

Решение. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$. Тогда по формуле Ньютона - Лейбница имеем

$$\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \sin\frac{p}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Пример 2.7. $\int\limits_{-1}^{7} \sqrt{2+x}dx$.

Решение. Применяем метод подведения функции под знак дифференциала.

$$\int\limits_{-1}^{7} \sqrt{2+x}dx = \int\limits_{-1}^{7} \sqrt{2+x}d(x+2) = \frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3}\Bigg|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\sqrt{9^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} =$$

$$= \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}.$$

Пример 3.7. $\int\limits_{-4}^{4}\sin\left(x^3-x\right)dx$.

Решение. $f(x)=\sin\left(x^3-x\right)$,

$$f(-x)=\sin\left((-x)^3-(-x)\right)=\sin\left(-x^3+x\right)=$$
$$=\sin\left[-\left(x^3-x\right)\right]=-\sin\left(x^3-x\right)=-f(x).$$

Функция $f(x)=\sin\left(x^3-x\right)$ - нечетная. Тогда по свойству 14^0 :

$\int\limits_{-4}^{4}\sin\left(x^3-x\right)dx=0$.

Пример 4.7. $\int\limits_{-2}^{2}\left(x^4+x^2\right)dx$.

Решение. $f(x)=x^4+x^2$,

$$f(-x)=(-x)^4+(-x)^2=x^4+x^2=f(x).$$

Функция $f(x)=x^4+x^2$ - четная. Тогда по свойству 13^0:

$$\int\limits_{-2}^{2}\left(x^4+x^2\right)dx=2\int\limits_{0}^{2}\left(x^4+x^2\right)dx=2\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=2\left(\frac{32}{5}+\frac{8}{3}\right)=$$
$$=\frac{272}{15}.$$

Пример 5.7. $\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{8x+3}$.

Решение. $\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{8x+3}=\frac{1}{8}\int\limits_{1}^{4}\frac{d(8x+3)}{8x+3}=\frac{1}{8}\ln|8x+3|\Big|_1^4=$

$$=\frac{1}{8}(\ln 35-\ln 11)=\frac{1}{8}\ln\frac{35}{11}.$$

Пример 6.7. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-2x+2}$.

Решение. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int\limits_{1}^{2}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1}=arctg(x-1)\Big|_1^2=$

$$= arctg1 - arctg0 = \frac{p}{4} - 0 = \frac{p}{4}.$$

Пример 7.7. $\int\limits_4^6 \frac{2dx}{(x-3)(x-1)}$.

Решение. Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших:

$$\int\limits_4^6 \frac{2dx}{(x-3)(x-1)} = \int\limits_4^6 \left[\frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-1)}\right]dx = \int\limits_4^6 \frac{dx}{(x-3)} - \int\limits_4^6 \frac{dx}{(x-1)} =$$

$$= \left(\ln|x-3| - \ln|x-1|\right)\Big|_4^6 = \ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\Bigg|_4^6 = \ln\frac{3}{5} - \ln\frac{1}{3} = \ln\frac{9}{5}.$$

Примеры для самостоятельного решения

7.1. $\int\limits_0^2 \left(x^3 + x - 1\right)dx$.

7.2. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

7.3. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x+7}$.

7.4. $\int\limits_{\frac{3}{p}}^{\frac{6}{p}} \frac{\sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$.

7.5. $\int\limits_3^6 \frac{dx}{x\ln x}$.

7.6. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

7.7. $\int\limits_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

7.8. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

7.9. $\int\limits_0^{\frac{p}{4}} tg^2 xdx$.

7.10. $\int\limits_{\frac{p}{8}}^{\frac{p}{6}} ctg^2 2xdx$.

7.11. $\int\limits_0^{\frac{p}{3}} \frac{dx}{1+\sin x}$.

7.12. $\int\limits_{-\frac{p}{3}}^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.

7.13. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}$.

7.14. $\int\limits_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8 + 9}}$.

7.15. $\int\limits_0^{\frac{p}{4}} \sin 3x \cos x dx$.

7.16. $\int\limits_0^{p} \sin x \sin 2x dx$.

7.17. $\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \cos 3x \cos 5x dx$.

7.18. $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 9}$.

7.19. $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x) dx}{x}$.

7.20. $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$.

7.21. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$.

7.22. $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

§ 8. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОДСТАНОВКОЙ И ПО ЧАСТЯМ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

8.1. Интегрирование подстановкой

При вычислении определенных интегралов часто используется метод подстановки, или метод замены переменной интегрирования.

Теорема 8.1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и функция $x = j(t)$ непрерывна вместе со своей производной $j'(t)$ на отрезке $[a, b]$. Кроме того, при $t \in [a, b]$: $a \le j(t) \le b$; $j(a) = a$ и $j(b) = b$. Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_a^b f(j(t)) j'(t) dt. \qquad (8.1)$$

Формула (8.1) называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Замечание 8.1. После замены переменной изменяются пределы интегрирования. Новые пределы интегрирования находятся из соотношений $j(a) = a$ и $j(b) = b$.

Отметим, что:

1) функцию $x = j\left(t\right)$ следует подобрать так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл;
2) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется (в отличие от неопределенного интеграла);
3) вместо подстановки $x = j\left(t\right)$ применяют и подстановку $t = y\left(x\right)$.

Пример 1.8. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t & \sin a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ dx = \cos t dt & \sin b = 1 \Rightarrow b = \dfrac{p}{2} \end{matrix} \right|.$$

На промежутке $\left[0, \dfrac{p}{2}\right]$ функция $\sin t$ возрастает и выполняется условие: $0 \le \sin t \le 1$. Таким образом,

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \left(1+\cos 2t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(\sin p - \sin 0\right)\right] = \frac{p}{4}.$$

Пример 2.8. $\int\limits_1^9 \dfrac{dx}{5+2\sqrt{x}}$.

Решение. Применим подстановку $\sqrt{x} = t$. Эта функция является монотонной на сегменте $[1,9]$.

$$\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 & t(1) = \sqrt{1} = 1 \\ dx = 2tdt & t(9) = \sqrt{9} = 3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_1^3 \frac{2tdt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{5+2t}dt = \int_1^3 \left(1 - \frac{5}{5+2t}\right)dt = \left(t - 5 \cdot \frac{1}{2}\ln|2t+5|\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= 3 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 11 - \ln 7) = 2 - \frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$$

Пример 3.8. $\int_2^3 x(3-x)^5\,dx$.

Решение. Полагая $t = 3 - x$, которая монотонна на отрезке $[2,3]$, получаем $x = 3 - t$, $dx = -dt$, пределы интегрирования: $t(2) = 1$, $t(3) = 0$.

$$\int_2^3 x(3-x)^5\,dx = \int_1^0 (3-t)t^5(-dt) = \int_1^0 \left(t^6 - 3t^5\right)dt = \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{2}\right)\Bigg|_1^0 =$$

$$= 0 - \frac{1}{7} - 0 + \frac{1}{2} = \frac{5}{14}.$$

Пример 4.8. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{ll} x = \frac{1}{t} & \\ t = \frac{1}{x} & \begin{array}{l} t(1) = 1 \\ t\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} & \end{array} \right| =$

$$= -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t^2 \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -\frac{p}{4} + \frac{p}{2} = \frac{p}{4}.$$

Замечание 8.2. Если функция $x = j(t)$ не монотонная, то уравнениям $j(a) = a$ и $j(b) = b$ могут удовлетворять несколько различных пар значений a и b. В этом случае можно взять любую пару указанных значений, удовлетворяющих условиям теоремы 8.1.

Пример 5.8. $\int_{0}^{p/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

Решение. Применим подстановку $t = tg\frac{x}{2}$. Тогда $x = 2arctgt$,

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ и $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Пересчитаем пределы интегрирования:

$t(0) = tg0 = 0$ и $t\left(\frac{p}{2}\right) = tg\frac{p}{4} = 1$. Следовательно,

$$\int_{0}^{p/2} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int_{0}^{1} \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{t}{\sqrt{5}}\bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

8. 2. Интегрирование по частям

Теорема 8.2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} vdu.$$

Замечание 8.3. При вычислении по формуле интегрирования по частям всегда берут только одну первообразную v.

Пример 6.8. $\int_{0}^{p} (x+2)\cos xdx$.

Решение.

$$\int_0^p (x+2)\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x+2 & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+2)\sin x\Big|_0^p - \int_0^p \sin x dx = (p+2)\sin p - 2\sin 0 + \cos x\Big|_0^p =$$

$$= \cos p - \cos 0 = -1 - 1 = -2\,.$$

Пример 7.8. $\int_0^{p/2} x^2 \sin x dx$.

Решение.

$$\int_0^{p/2} x^2 \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2 \cos x\Big|_0^{p/2} +$$

$$+2\int_0^{p/2} x\cos x dx = -\frac{p^2}{4}\cos\frac{p}{2} + 0 + 2\int_0^{p/2} x\cos x dx = 2\int_0^{p/2} x\cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = 2\left(x\sin x\Big|_0^{p/2} - \int_0^{p/2} \sin x dx \right) =$$

$$= 2\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2} - 0 + 2\cos x\Big|_0^{p/2} = p + 2\cos\frac{p}{2} - 2\cos 0 = p - 2\,.$$

Пример 8.8. $\int_1^2 x^3 \ln x dx$.

Решение.

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx & v = \dfrac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{x^4 \ln x}{4}\Bigg|_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^4 \frac{dx}{x} =$$

$$= 4\ln 2 - 0 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 dx = 4\ln 2 - \frac{x^4}{16}\Bigg|_1^2 = 4\ln 2 - 1 + \frac{1}{16} = 4\ln 2 - \frac{15}{16}.$$

Пример 9.8. $\int_0^1 arctgx dx$.

Решение.

$$\int_0^1 arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = xarctgx\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{p}{4} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} = \frac{p}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{p}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{p}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 .$$

*Пример 10.8. $\int_0^{p/2} e^x \sin xdx$.

Решение.

$$I = \int_0^{p/2} e^x \sin xdx = \left| \begin{matrix} u = \sin x & du = \cos xdx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x\Big|_0^{p/2} -$$

$$-\int_0^{p/2} e^x \cos xdx = \left| \begin{matrix} u = \cos x & du = -\sin xdx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right| = e^{\frac{p}{2}} \sin\frac{p}{2} -$$

$$-e^0 \sin 0 - \left(e^x \cos x\Big|_0^{p/2} + \int_0^{p/2} e^x \sin xdx \right) = e^{\frac{p}{2}} - e^{\frac{p}{2}} \cos\frac{p}{2} +$$

$+e^0 \cos 0 - I = e^{\frac{p}{2}} + 1 - I$, где $I = \int_0^{p/2} e^x \sin xdx$ - искомый интеграл.

Из полученного алгебраического уравнения $I = e^{\frac{p}{2}} + 1 - I$ найдем

$$\int_0^{p/2} e^x \sin xdx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{p}{2}} + 1 \right).$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить методом замены переменной.

8.1. $$\int\limits_{1}^{16}\frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}.$$

8.2. $$\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}.$$

8.3. $$\int\limits_{1}^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

8.4. $$\int\limits_{2}^{16}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}.$$

*8.5. $$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{5x^2+6x+1}}.$$

*8.6. $$\int\limits_{0}^{1}\sqrt{2x+x^2}dx.$$

*8.7. $$\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+1}.$$

*8.8. $$\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}.$$

*8.9. $$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$$

*8.10. $$\int\limits_{0}^{3}x^2\sqrt{9-x^2}dx.$$

8.11. $$\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{(x+1)^3}.$$

*8.12. $$\int\limits_{3/4}^{1}\frac{2dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

*8.13. $$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

8.14. $$\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$$

8.15. $$\int\limits_{0}^{p/4}tg^3xdx.$$

8.16. $$\int\limits_{0}^{p/2}\frac{5dx}{1+\cos x}.$$

8.17. $$\int\limits_{0}^{p/2}\frac{dx}{1+\cos x+\sin x}.$$

8.18. $$\int\limits_{1}^{2}x(1-x)^{15}dx.$$

8.19. $$\int\limits_{1/8}^{1}\frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}dx.$$

8.20. $$\int\limits_{0}^{p/2}\frac{dx}{6+\sin^2 x}.$$

8.21. $$\int\limits_{0}^{p/4}\frac{dx}{1+2tgx}.$$

8.22. $$\int\limits_{p/4}^{p/3}\frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2}dx.$$

8.23. $\int\limits_{p/6}^{p/3} \cos^5 x dx$.

8.24. $\int\limits_{0}^{p/4} \sin^4 x dx$.

8.25. $\int\limits_{0}^{p/4} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

8.26. $\int\limits_{0}^{p/2} \frac{\sin x dx}{2+\sin x}$.

8.27. $\int\limits_{0}^{p/4} \frac{4-7tgx}{2+3tgx} dx$.

8.28. $\int\limits_{0}^{p/3} \frac{tg^2 x dx}{4+3\cos 2x}$.

*8.29. $\int\limits_{0}^{6} \frac{e^{\sqrt{\frac{6-x}{6+x}}} dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}$.

*8.30. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\left(4\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)dx}{\left(4\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)(x+1)^2}$.

Вычислить методом интегрирования по частям.

8.31. $\int\limits_{0}^{2} (x-2)e^x dx$.

8.32. $\int\limits_{0}^{p/2} x^2 \cos\frac{x}{2} dx$.

8.33. $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x dx$.

8.34. $\int\limits_{2}^{e+1} \ln(x-1) dx$.

8.35. $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x dx$.

8.36. $\int\limits_{0}^{1} x arctg x dx$.

8.37. $\int\limits_{p/4}^{p/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

8.38. $\int\limits_{0}^{p/4} \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

*8.39. $\int\limits_{0}^{p} e^x \sin 2x dx$.

*8.40. $\int\limits_{0}^{p/2} e^{2x} \cos\frac{x}{2} dx$.

8.41. $\int\limits_{0}^{p/3} x^2 \cos 3x dx$.

*8.42. $\int\limits_{0}^{1} x^3 e^{2x} dx$.

8.43. $\int\limits_{1}^{2} x^2 3^x dx$.

*8.44. $\int\limits_{p/4}^{p/3} 4x tg^2 x dx$.

*8.45. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{x\cos x dx}{\sin^2 x}$.

*8.46. $\int\limits_{0}^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x} dx$.

*8.47. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.48. $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{16-x^2} dx$.

*8.49. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

*8.50. $\int\limits_{0}^{1} (\arcsin x)^2 dx$.

§ 9. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Все подынтегральные функции, встречающиеся в этом параграфе, предполагаются непрерывными.

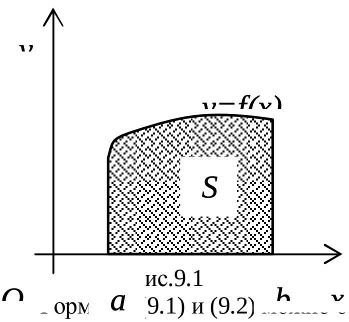
9.1. Вычисление площади плоской фигуры

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, слева и справа - соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком $[a,b]$ оси Ox (см. рис.9.1), вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

(9.1)

Если $f(x) \leq 0$ при $x \in [a,b]$ (см. рис. 9.2), то

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (9.2)$$



ис.9.1

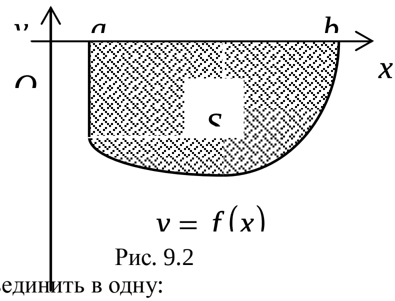


Рис. 9.2

…орм… (9.1) и (9.2) … ъединить в одну:

$$S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx. \qquad (9.3)$$

Если плоская фигура ограничена кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, причем $f_1(x)\le f_2(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$ (см. рис. 9.3), то ее площадь находится по формуле

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx. \qquad (9.4)$$

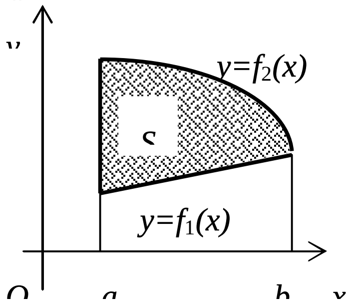


Рис. 9.3

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой $x=j(y)$, прямыми $y=c$ и $y=d$ и отрезком $[c,d]$ оси Oy (см. рис 9.4). Тогда площадь этой трапеции вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d j(y)dy. \qquad (9.5)$$

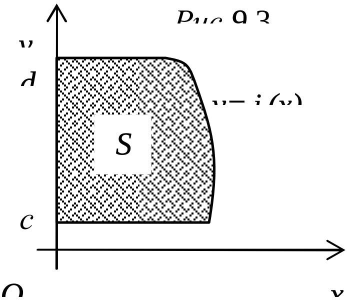


Рис. 9.4

Если криволинейная трапеция ограничена свер ной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad y(t)\ge 0,\quad t\in\left[t_1,t_2\right],$$

прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a,b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt, \qquad (9.6)$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений: $x(t_1)=a$ и $x(t_2)=b$. Предполагается, что на отрезке $\left[t_1,t_2\right]$ функции $y(t)$ и $x'(t)$ непрерывны.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением

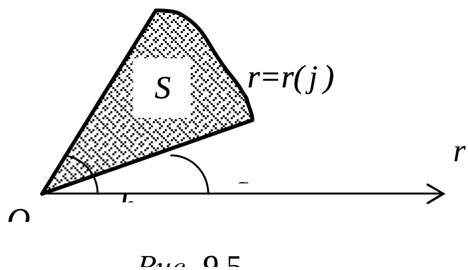


Рис. 9.5

$r = r(j)$ и двумя лучами

$j = a$ и $j = b$ $(a < b)$

(см. рис. 9.5), вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(j)\,dj$.

(9.7)

Пример 1.9. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямыми $x = 0$, $x = 2$ и $y = 0$.

Решение

Сделаем чертеж заданной фигуры (см. рис. 9.6). Так как $y = x^2 + 1 > 0$ на

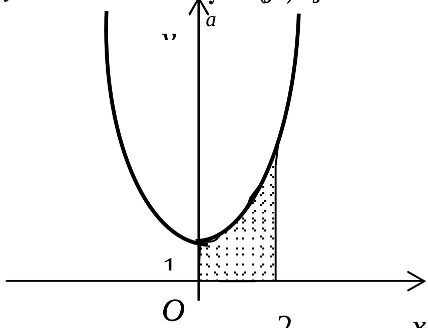


Рис 9. 6

сегменте $[0,2]$, то для вычисления площади приме 9.1):

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

Пример 2.9. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$ (см. рис. 9.7).

Решение

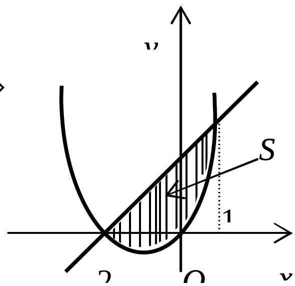
Найдем абсциссы точек пересечения данных линий:

$x^2 + 2x = x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -2,\ \ x_2 = 1.$

На отрезке $[-2,1]$

$x + 2 \geq x^2 + 2x$, следовательно, по формуле (9.4)



$$S = \int_{-2}^{1} (x + 2 - x^2 - 2x)dx =$$

Рис. 9.7

$$= \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{9}{2}.$$

Пример 3.9. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (см. рис. 9.8).

Решение. Оси координат совпадают с осями симметрии заданного эллипса и делят его на четыре равные части. Таким образом, для нахождения искомой площади достаточно найти площадь части фигуры,

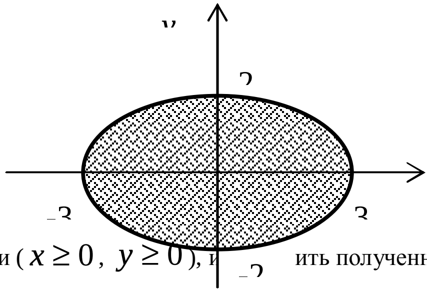


Рис. 9.8

расположенной в первой четверти ($x \ge 0$, $y \ge 0$), и[illegible]ить полученный результат на четыре.

Параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, 2p]$. Найдем пределы изменения переменной t :

$$0 \le x \le 3,\ \ x = 0 \Rightarrow 3\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{p}{2},$$

$$x = 3 \Rightarrow 3\cos t = 3 \Rightarrow cost = 1 \Rightarrow t = 0.$$

Применим формулу (9.6):

$$S = 4\int_{p/2}^{0} 2\sin t(3\cos t)' \, dt = -24\int_{p/2}^{0} \sin^2 t dt = 12\int_{0}^{p/2}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= 12\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{p/2} = 6p - 6\sin p = 6p .$$

*Пример 4.9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} \quad x = 2 \quad (x \ge 2)$$ (см. рис. 9.9).

Решение

Для вычисления площади воспользуемся симмет-рией фигуры относи-тельно оси Ox . Сначала найдем пределы интегри-рования:

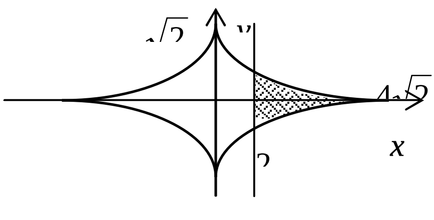


Рис. 9.9

$2 \le x \le 4\sqrt{2}$,

$x = 2 \Rightarrow 4\sqrt{2}\cos^3 t = 2 \Rightarrow \cos t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{p}{4}$,

$x = 4\sqrt{2} \Rightarrow 4\sqrt{2}\cos^3 t = 4\sqrt{2} \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0$.

Для нахождения половины площади заданной фигуры применим формулу (9.6):

$$S = 2\int\limits_{p/4}^{0} \sqrt{2}\sin^3 t\left(4\sqrt{2}\cos^3 t\right)' dt = -24\int\limits_{p/4}^{0} \sin^4 t\cos^2 t dt =$$

$$= 6\int\limits_0^{p/4} \sin^2 t\sin^2 2t dt = \frac{3}{2}\int\limits_0^{p/4}(1-\cos 2t)(1-\cos 4t)dt = \frac{3}{2}\int\limits_0^{p/4}(1-$$

$$-\cos 2t - \cos 4t + \cos 2t\cdot\cos 4t)dt = \frac{3}{2}t\Big|_0^{p/4} - \frac{3\sin 2t}{4}\Big|_0^{p/4} -$$

$$-\frac{3\sin 4t}{8}\Big|_0^{p/4} + \frac{3}{4}\int\limits_0^{p/4}(\cos 6t + \cos 2t)dt = \frac{3p}{8} - \frac{3}{4} + \frac{\sin 6t}{8}\Big|_0^{p/4} +$$

$$+\frac{3\sin 2t}{8}\Big|_0^{p/4} = \frac{3p}{8} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3p-4}{8}.$$

Пример 5.9. Найти площадь фигуры, ограниченной “трехлепестковой розой” $r = \sin 3j$ (см. рис. 9.10).

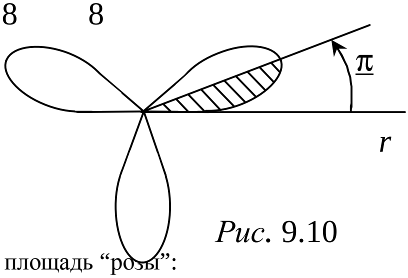


Рис. 9.10

Решение. По формуле (9.7) найдем шестую часть искомой площади. Она закрашена на рисунке. Окончательно площадь “розы”:

$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{p/6}\sin^2 3j\,dj =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^{p/6}(1-\cos 6j)dj = \frac{3j}{2}\Big|_0^{p/6} - \frac{\sin 6j}{4}\Big|_0^{p/6} = \frac{p}{4}.$$

9. 2. Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция для всех x: $a \le x \le b$. Тогда длина l дуги кривой, заключенной между точками с абсциссами, равными a и b, вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (9.8)$$

В случае задания кривой уравнением $x = j(y)$, где $c \le y \le d$, длина l дуги кривой, заключенной между точками с ординатами равными, c и d, вычисляется по формуле:

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + [j'(y)]^2}\, dy. \qquad (9.9)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad y(t) \ge 0, \quad t \in [t_1, t_2],$$

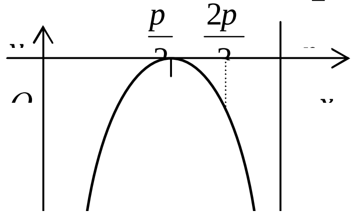
где $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывные вместе со своими производными функции и $x(t_1) = a,\ x(t_2) = b$, то длина дуги кривой находится по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \qquad (9.10)$$

Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(j)$, $a \le j \le b$. Предполагаем, что $r(j)$ и $r'(j)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$. В этом случае длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{r^2 + [r']^2}\, dj. \qquad (9.11)$$

Пример 6.9. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\sin x$ от $x_1 = \frac{p}{2}$ до $x_2 = \frac{2p}{3}$ (см. рис. 9.11).



Решение. Изобразим часть графика заданной функции при $x \in (0, p)$. Воспользуемся формулой (9.8).

Прежде чем записать интеграл, найдем выражение $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$:

$$f(x) = \ln \sin x, \; f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx,$$

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+ctg^2 x} = \frac{1}{\sin x}.$$

Для вычисления интеграла используем универсальную тригонометрическую подстановку $t = tg\frac{x}{2}$:

$$l = \int_{p/2}^{2p/3} \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{ll} t = tg\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = 2arctgt & t\left(\frac{p}{2}\right) = 1 \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & t\left(\frac{2p}{3}\right) = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\frac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} - \ln 1 = \ln\sqrt{3}.$$

Пример 7.9. Найти длину кривой $\begin{cases} x = \frac{1}{6}t^6, \\ y = 2 - \frac{1}{4}t^4, \end{cases}$ между точками пересечения ее с осями координат.

Решение. Найдем параметры точек пересечения с осями Ox и Oy:

с осью Oy - $x = 0 \;\; \Rightarrow \;\; t = 0,$

с осью Ox - $y = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 2 - \frac{1}{4}t^4 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; t = \sqrt[4]{8}$.

Тогда по формуле (9.10) длина дуги равна:

$$l=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left[\left(\frac{1}{6}t^6\right)'\right]^2+\left[\left(2-\frac{1}{4}t^4\right)'\right]^2}\,dt=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(t^5\right)^2+\left(-t^3\right)^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}\,dt=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^4+1}\,d\left(t^4+1\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\left(\sqrt{t^4+1}\right)^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=$$

$$=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{13}{3}.$$

Пример 8.9. Найти длину дуги кривой $r=6\sin j$, $0\le j\le\frac{p}{3}$.

Решение. Для вычислений воспользуемся формулой (9.11):

$$l=\int\limits_0^{p/3}\sqrt{[6\sin j\,]^2+\left[(6\sin j\,)'\right]^2}\,dj=6\int\limits_0^{p/3}\sqrt{\sin^2 j+\cos^2 j}\,dj=$$

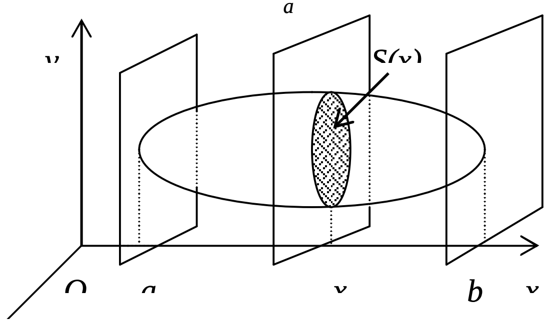
$$=6\int\limits_0^{p/3}dj=6j\,\Bigg|_0^{p/3}=2p\ .$$

*9. 3. Объем тела

*1. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений

Пусть в пространстве задано тело и построены его сечения плоскостями, параллельными оси Ox и проходящими через точки $x\in[a,b]$ на ней (см. рис. 9.12). Площадь фигуры в сечении зависит от точки x , определяющей площадь сечения. Если эта зависимость известна и задана непрерывной на $[a,b]$ функцией $S(x)$, то объем тела, заключенного между плоскостями $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле:

$$V=\int\limits_a^b S(x)dx\,. \qquad (9.12)$$



*2. Объем тела вращения

Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0\right)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, вокруг оси Ox (см. рис. 9.13), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = p\int_a^b [f(x)]^2\,dx. \qquad (9.13)$$

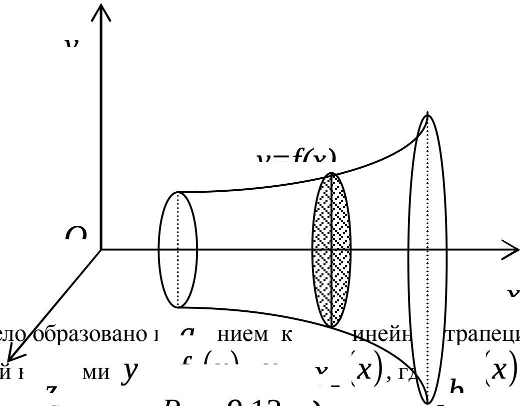


Рис. 9.13

Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, вокруг оси Ox, то его объем вычисляется по формуле:

$$V = p\int_a^b \left([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\right)dx. \qquad (9.14)$$

Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = j(y)$ $\left(j(y) \geq 0\right)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$ и $y = d$, вокруг оси Oy, то его объем вычисляется по формуле:

$$V = p\int_c^d [j(y)]^2\,dy. \qquad (9.15)$$

*Пример 9.9. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $x = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{4}$ и плоскостью $x = 2$ (см. рис. 14).

Решение

Любое сечение эллиптического параболоида плоскостью, перпендикулярной к оси Ox $\left(0 \le x \le 2\right)$, есть эллипс, уравнение

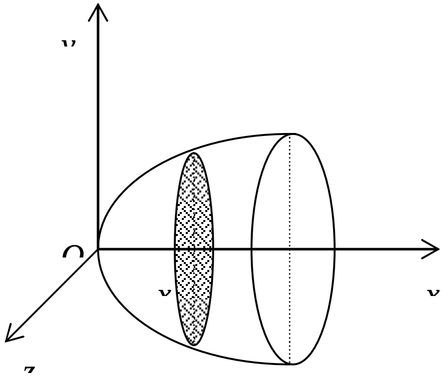


Рис. 9.14

которого имеет вид $\frac{y}{2x} + \ldots \frac{}{4x}$ ...внения видно, что полуоси эллипса равны $a=\sqrt{2x}$ и $b=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$. Так как площадь эллипса вычисляется по формуле $S=pab$, то $S(x)=p\sqrt{2x}\cdot 2\sqrt{x}=2\sqrt{2}px$, где $0 \le x \le 2$. Искомый объем вычисляем по формуле (9.12):

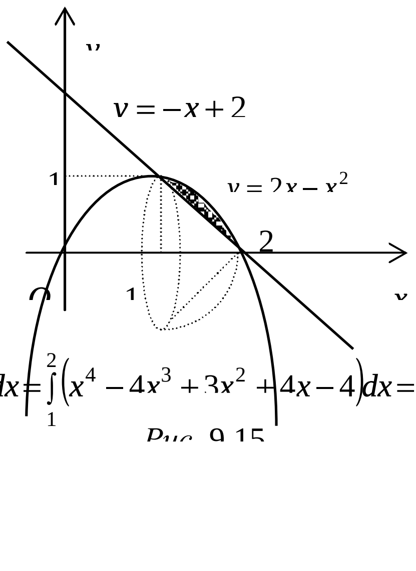
$$V=\int_a^b S(x)dx = 2\sqrt{2}p\int_0^2 xdx = 2\sqrt{2}p\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 4\sqrt{2}p .$$

*Пример 10.9. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y=2x-x^2$ и $y=-x+2$ (см. рис. 15).

Решение

Графики пересекаются в точках $(1{,}1)$ и $(2{,}0)$.

Используя формулу (9.14), находим объем тела вращения:



$$V=p\int_1^2\left[\left(2x-x^2\right)^2-\left(-x+2\right)^2\right]dx=\int_1^2\left(x^4-4x^3+3x^2+4x-4\right)dx=$$

Рис. 9.15

$$=\left(\frac{x^5}{5}-x^4+x^3+2x^2-4x\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{5}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

9.1. $x=4-y^2$, $x=y^2-2y$.

9.2. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x=-\dfrac{3}{4}$, $x=0$, $y=1$.

9.3. $x^2+y^2=16$, $y=2$, $y=2\sqrt{2}$.

9.4. $y=\cos x$, $y=x+1$, $y=0$.

9.5. $y=x^2\sqrt{16-x^2}$, $y=0$ $\quad(0\le x\le 4)$.

9.6. $y=\sin x$, $y=\dfrac{2x}{p}$.

9.7. $y=\arcsin x$, $\quad y=\arccos x$, $\quad y=0$.

9.8. Одной аркой циклоиды $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ и осью Ox.

9.9. Петлей $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=t^3-3t.\end{cases}$

*9.10. $\begin{cases}x=4(t-\sin t),\\ y=4(1-\cos t),\end{cases}$ прямой $y=4$ $\quad(y\ge 4)$, $(0<x<8p)$.

*9.11. $\begin{cases}x=6\cos t,\\ y=4\sin t,\end{cases}$ $y=2\sqrt{3}$ $\quad\left(y\ge 2\sqrt{3}\right)$.

*9.12. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \quad x = 9\sqrt{3} \quad \left(x \geq 9\sqrt{3}\right).$

9.13. $r = 1, \quad r = 3, \quad j = \dfrac{p}{4}, \quad j = \dfrac{p}{3}.$

*9.14. $r = 2\sin j, \quad r = 2\sqrt{3}\cos j.$

9.15. $r = \sin 6j.$

*9.16. $r = \cos j + \sin j.$

9.17. $r = 2\sin j, \quad r = 4\sin j.$

9.18. $r = \dfrac{1}{2} + \sin j.$

Найти длины дуг кривых.

9.19. $y = -x^2 + 2x$ от вершины до точки с абсциссой $x = 2$.

9.20. $y^2 = 9 - x, \quad y = -3, \quad y = 0.$

9.21. $y = \ln x,$ от $x = \sqrt{8}$ до $x = \sqrt{15}$.

9.22. $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2.$

9.23. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{3}{4}.$

9.24. $y = \ln\left(1 - x^2\right), \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{4}.$

9.25. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

9.26. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ (петля).

9.27. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$

9.28. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

9.29. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 3\pi$.

9.30. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

9.31. $r = \sqrt{2}\sin\varphi$.

9.32. $r = 2(1 - \cos\varphi), \quad -\pi \le \varphi \le -\dfrac{\pi}{2}$.

9.33. $r = \dfrac{1}{\varphi}, \quad \dfrac{3}{4} \le \varphi \le \dfrac{4}{3}$.

*9.34. $r = 5\varphi$, находящейся внутри окружности $r = 10\pi$.

9.35. $r = 6e^{\frac{12\varphi}{5}}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

9.36. $r = 3(1 + \sin\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le 0$.

*Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

*9.37. $z = 9 - x^2 - y^2, \quad z = 0$.

*9.38. $x^2 + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3$.

*9.39. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{144} = 1, \quad z = 0, \quad z = 6$.

*9.40. $x^2 + y^2 = 9, \quad y + z = 3, \quad z = 0$.

*9.41. $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{y^2}{25} = 1, \quad z = \dfrac{y}{\sqrt{3}} \quad (y \ge 0), \quad z = 0$.

*Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями.

*9.42. $y=\dfrac{1}{1+x^2}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=1$.

*9.43. $y^2=6x, \quad y=\sqrt{6}x^2$.

*9.44. $3x-y=0, \quad 3x-4y=0, \quad y=3$.

*9.45. $y=xe^x, \quad x=1, \quad y=0$.

*9.46. $x^2+(y-2)^2=1$.

*9.47. $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

*Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями.

*9.48. $y=\arccos x, \quad y=\arcsin x, \quad y=0$.

*9.49. $y=2x-x^2, \quad y=0$.

*9.50. $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$.

*9.51. $y=x\sqrt{-x}, \quad x=-1, \quad y=0$.

*9.52. $y=x^2-2x+1, \quad x=2, \quad y=0$.

§ 10. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При определении интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ предполагалось, что отрезок $[a,b]$ конечен и функция $f(x)$ на нем определена и ограничена.

Рассмотрим так называемые несобственные интегралы, то есть определенный интеграл от непрерывной функции с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но подынтегральная функция не ограничена на нем (имеет на нем бесконечный разрыв).

10.1. Интегралы с бесконечным промежутком интегрирования (несобственные интегралы I рода)

Определение 10.1. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом промежутке $[a,b]$, принадлежащем этому промежутку. Если существует конечный предел: $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a,+\infty)$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (10.1)$$

Определение 10.2. Несобственный интеграл I рода называется сходящимся, если предел конечен. Если же предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Пример 1.10. $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^3}$.

Решение.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 2.10. $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$.

Решение.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b|\right)=+\infty.$$

Интеграл расходится.

Замечание 10.1. Можно показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k}$ сходится при $k > 1$ и расходится при $k \leq 1$.

Определение 10.3. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, b]$ и интегрируема на любом промежутке $[a, b]$, принадлежащем этому промежутку. Если существует конечный предел: $\lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty, b]$ и обозначается $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$.

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (10.2)$$

Определение 10.4. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на любом промежутке $[a, b]$, принадлежащем этому промежутку, полагаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_c^b f(x)dx. \qquad (10.3)$$

Иногда будем записывать: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_a^b f(x)dx$.

Замечание 10.2. В равенстве (10.3) $|a| \to +\infty$ и $b \to +\infty$ неодинаково (по разным произвольным законам).

Замечание 10.3. Равенство (10.3) следует понимать в том смысле, что если каждый из несобственных интегралов, стоящих в правой части равенства, сходится, то сходится и интеграл в левой части.

Пример 3.10. $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2}$.

Решение

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-2} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{-2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится.

Пример 4.10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^0 +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty}(0-arctga) + \lim_{b\to+\infty}(arctgb-0) =$$

$$= \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p \ .$$

Пример 5.10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$.

Решение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b xdx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right).$$

Полученный предел не существует (получаем неопределенность $\infty-\infty$). Интеграл расходится.

Замечание 10.4 (к примеру 5) Так как a и b неограниченно возрастают по абсолютной величине по разным законам, то будем получать различные значения предела. Например, если $a=-k, \quad b=k^2, \quad k\to+\infty$, то

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(k^4-k^2\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[k^2\left(k^2-1\right)\right] = +\infty \ .$$

Если $a=-k^2, \quad b=k, \quad k\to+\infty$, то

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(k^2-k^4\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[k^2\left(1-k^2\right)\right] = -\infty \ .$$

Если $a = -k, \quad b = k, \quad k \to +\infty$, то

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{k\to+\infty} \left(k^2 - k^2\right) = 0.$$

Пример 6.10. $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cos x dx$.

Решение

$$\int\limits_{-\infty}^{0} x \cos x dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(x \sin x \Big|_{a}^{0} - \int\limits_{a}^{0} \sin x dx \right) = \lim_{a\to-\infty} \left(x \sin x \Big|_{a}^{0} + \cos \Big|_{a}^{0} \right) =$$

$$= 0 - \lim_{a\to-\infty} a \sin a + 1 - \lim_{a\to-\infty} \cos a.$$

Интеграл расходится, так как $\lim\limits_{a\to-\infty} a \sin a$ и $\lim\limits_{a\to-\infty} \cos a$ не существуют.

*Определение 10.5. Величина

$$\lim_{a\to\infty} \left(\int\limits_{-a}^{c} f(x) dx + \int\limits_{c}^{a} f(x) dx \right) = V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \qquad (10.4)$$

(в случае его существования) называется главным значением несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Справа в формуле (10.4) написано обозначение главного значения.

К примеру, $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim\limits_{a\to\infty} \left(\int\limits_{-a}^{0} x dx + \int\limits_{0}^{a} x dx \right) = \lim\limits_{a\to\infty} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = 0.$

*Замечание 10.5. Если несобственный интеграл сходится, то его значение совпадает с его главным значением.

*10.2. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами

*Теорема 10.1. Пусть на промежутке $[a,+\infty)$ каждая из функций $f(x)$ и $j(x)$ удовлетворяет условиям определения 10.1 и для всех $x\ (x \ge a)$ выполняется неравенство:

$$0 \le f(x) \le j(x).$$

Тогда: 1) из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} j(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, при этом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} j(x)dx$;

2) из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} j(x)dx$.

*Пример 7.10. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(3+e^x\right)}$.

Решение. При $x \ge 1$ $\quad \frac{1}{x^2\left(3+e^x\right)} \le \frac{1}{x^2}$.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Следовательно, по теореме 10.1 $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(3+e^x\right)}$ сходится и его значение меньше 1.

*Пример 8.10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_9^{+\infty} \frac{x^2+3}{\sqrt{x^5}}dx$.

Решение. При $x \ge 9$ $\quad \frac{x^2+3}{\sqrt{x^5}} \ge \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\int\limits_9^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_9^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim_{b\to+\infty} \sqrt{x}\Big|_9^b = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-3\right) = +\infty.$$

Тогда по теореме 10.1 $\int\limits_{9}^{+\infty} \frac{x^2+3}{\sqrt{x^5}} dx$ расходится.

*Теорема 10.2. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \left| f(x) \right| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x) dx$.

В этом случае интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x) dx$ называется абсолютно сходящимся.

*Пример 9.10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx.$

Решение. Подынтегральная функция – знакопеременная. Кроме того: $\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \le \frac{1}{x^3}$ для всех $x \in [1, +\infty)$. Но интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится (см. пример 1). Тогда по теореме 10.1 сходится $\int\limits_{1}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$, следовательно, сходится и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.

10.3. Интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы II рода)

Определение 10.6. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$, интегрируема на любом промежутке $[a, b-e]$, принадлежащем промежутку $[a,b)$ $(e>0)$, и неограничена в окрестности точки b. Если существует конечный предел $\lim\limits_{e \to +0} \int\limits_{a}^{b-e} f(x) dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$ и обозначается $\int\limits_{a}^{b} f(x) dx$.

Таким образом имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e \to +0} \int_a^{b-e} f(x)dx. \qquad (10.5)$$

Если существует конечный предел $\lim_{e \to +0} \int_a^{b-e} f(x)dx$, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, в противном случае - расходится.

Определение 10.7. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(a,b]$, интегрируема на любом промежутке $[a-e,b]$, принадлежащем промежутку $(a,b]$ $(e>0)$, и неограничена в окрестности точки a, то полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e \to +0} \int_{a+e}^{b} f(x)dx. \qquad (10.6)$$

Определение 10.8. Если функция $f(x)$ определена на промежутках $[a,c)$ и $(c,b]$, интегрируема на отрезках $[a,c-e_1]$ и $[c-e_2,b]$, принадлежащих промежуткам $[a,c)$ и $(c,b]$
соответственно $(e_1>0,\ e_2>0)$, и неограничена в окрестности точки c, то полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e_1 \to +0} \int_a^{c-e_1} f(x)dx + \lim_{e_2 \to +0} \int_{c+e_2}^{b} f(x)dx.$$

Пример 10.10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{e \to +0} \int_0^{1-e} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2 \lim_{e \to +0} \sqrt{1-x}\Big|_0^{1-e} =$$

$$= -2 \lim_{e \to +0} \left(\sqrt{e} - 1\right) = 2.$$

Пример 11.10. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{e_1\to+0}\int_{-1}^{-e_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{e_2\to+0}\int_{e_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{e_1\to+0}\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{-e_1}-\lim_{e_2\to+0}\frac{1}{x}\Bigg|_{e_2}^{1}.$$

Каждый из двух полученных пределов равен ∞ :

$$-\lim_{e_1\to+0}\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{-e_1}=\infty \text{ и } -\lim_{e_2\to+0}\frac{1}{x}\Bigg|_{e_2}^{1}=\infty.$$

Следовательно, первый интеграл расходится на промежутке $[-1,0]$, а второй – на отрезке $[0,1]$. Окончательно имеем: интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ расходится на всем отрезке $[-1,1]$.

Замечание 10.6. Если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, имеет внутри этого отрезка конечное число точек разрыва $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n$, то интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{a_1} f(x)dx+\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx+\mathbf{K}+\int_{a_n}^{b} f(x)dx,$$

если каждый из несобственных интегралов в правой части равенства сходится. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то и $\int_a^b f(x)dx$ называется расходящимся.

*Определение 10.9. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям определения 10.8, то величина

$$\lim_{e\to+0}\left(\int_a^{c-e} f(x)dx+\int_{c+e}^{b} f(x)dx\right)=V.P.\int_a^b f(x)dx$$

(если предел существует) называется главным значением несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ (см. определение 10.8; $e_1=e_2=e$).

*Пример 12.10. Найти главное значение интеграла $\int_1^3\frac{dx}{x-2}$.

Решение

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-2} = \lim_{e_1\to+0}\int_1^{2-e_1}\frac{dx}{x-2} + \lim_{e_1\to+0}\int_{2+e_2}^3\frac{dx}{x-2} = \lim_{e_1\to+0}\ln|x-2|\Big|_1^{2-e_1} +$$

$$+\lim_{e_2\to+0}\ln|x-2|\Big|_{2-e_2}^3 = \lim_{\substack{e_1\to+0\\ e_2\to+0}}\left(\ln e_1-\ln 1+\ln 1-\ln e_2\right) = \lim_{\substack{e_1\to+0\\ e_2\to+0}}\ln\frac{e_1}{e_2}.$$

Величина предела зависит от того, по какому закону стремятся к нулю e_1 и e_2, следовательно, интеграл расходится. Если же взять $e_1 = e_2 = e$, то $V.P.\int_1^3\frac{dx}{x-2} = \ln 1 = 0$.

*10.4. Признаки сходимости несобственных интегралов II рода.

*Теорема 10.3. Пусть на отрезке $[a,b)$ каждая из функций $f(x)$ и $j(x)$ удовлетворяет условиям определения 10.6 и условию: $0 \le f(x) \le j(x)$. Тогда

1) из сходимости $\int_a^b j(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$;
2) из расходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b j(x)dx$.

*Теорема 10.4. Пусть на отрезке $[a,b)$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям определения 10.6. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^b |f(x)|dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$. В этом случае интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся.

*Замечание 10.7. Аналогичные теоремы справедливы для функций, удовлетворяющих определению 10.7.

*Замечание 10.8. В качестве функций, с которыми удобно сравнивать функции, стоящие под знаком несобственного интеграла, часто берут $\dfrac{1}{(c-x)^a}$. Легко проверить, что $\int\limits_a^c \dfrac{dx}{(c-x)^a}$ сходится при $a<1$, расходится при $a \geq 1$. Это же относится и к интегралам $\int\limits_a^c \dfrac{dx}{(x-a)^a}$.

*Пример 13.10. $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет разрыв в точке $x=1$ на промежутке $[0,1)$. Справедливы следующие неравенства:

$$x<1, \quad x^3<x, \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится (по замечанию 10.8 при $a=\dfrac{1}{2}<1$). Тогда по теореме 10.3 сходится и интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить.

10.1. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4}$.

10.2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2xdx}{1+x^2}$.

10.3. $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

10.4. $\int\limits_0^{+\infty} 2x\sin xdx$.

10.5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$.

10.6. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

10.7. $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.

10.8. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

10.9. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{arctgx}{x^2} dx$.

10.10. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^3}$.

10.11. $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$.

10.12. $\int\limits_{p/2}^{+\infty} \cos x dx$.

10.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$.

10.14. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

*Исследовать на сходимость интегралы.

*10.15. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{arctgx}{x} dx$.

*10.16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+8}}$.

*10.17. $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln \frac{x^2+5}{x^2+2} dx$.

*10.18. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+\cos^2 x}$.

*10.19. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

*10.20. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2+3\cos x}{x^4} dx$.

*10.21. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$.

*10.22. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$.

*10.23. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} dx$.

*10.24. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}$.

Вычислить.

10.25. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

10.26. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

10.27. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

10.28. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-2x+1}$.

10.29. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

10.30. $\int\limits_{0}^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

10.31. $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

10.32. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$.

10.33. $\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$.

10.34. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$.

*Исследовать на сходимость.

*10.35. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+x^2}$.

*10.36. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^3}$.

*10.37. $\int_0^1 \frac{e^{\sin x}dx}{x^2}$.

*10.38. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

*10.39. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

*10.40. $\int_0^{p/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

Ответы

1.1. $\frac{x^3}{3}+7x-4\ln|x|+C$. 1.2. $-\frac{1}{x^2}+56\sqrt[4]{x}-\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

1.3. $\frac{2\sqrt{x^7}}{7}+2\sqrt{x^3}+C$. 1.4. $3\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x}+C$.

1.5. $-4\cos x+3x^4-7tgx+C$. 1.6. $\sin x+\cos x+C$.

1.7. $2\sin x+C$. 1.8. $\frac{1}{144}(9x+2)^{16}+C$.

1.9. $\frac{1}{8\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}x-4}{\sqrt{7}x+4}\right|+C$. 1.10. $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(9-2x)^4}+C$.

1.11. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 3x}{6}+C$. 1.12. $-\frac{ctg5x}{5}-x+C$. 1.13. $-\frac{e^{5-3x}}{3}+C$.

1.14. $\frac{3^{7x+4}}{7\ln 3}+C$. 1.15. $\frac{2}{\sqrt{35}}arctg\frac{2x-3}{\sqrt{35}}+C$.

1.16. $\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{19}}+C$. 1.17. $\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$.

1.18. $\frac{1}{3}ctg(4-3x)+C$. 1.19. $\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C$.

1.20. $-\frac{1}{8}(1-x)^8+C$. 1.21. $e^x+\frac{1}{x}+C$.

1.22. $\frac{3}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x-2x+C$. 1.23. $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

1.24. $2chx+C$. 1.25. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$. 1.26. $\frac{3\cdot 5^x}{\ln 5}-2\sqrt{x}+C$.

1.27. $-2ctg2x+C$. 1.28. $2tgx+3\ln|x|+C$.

1.29. $\frac{1}{3}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x-8}\right|+C$. 1.30. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2x-10}{2x-4}\right|+C$.

2.1. $2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$. 2.2. $2\sqrt{x}-8arctg\frac{\sqrt{x}}{4}+C$.

2.3. $\frac{2\sqrt{(x-1)^7}}{7}+\frac{6\sqrt{(x-1)^5}}{5}+2\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{(x-1)}+C$.

2.4. $\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}-x-1+C$. 2.5. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$.

2.6. $-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{x}+C$. 2.7. $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

2.8. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C$. 2.9. $\frac{2\cdot 7^{\sqrt{x}}}{\ln 7}+C$.

2.10. $\frac{\ln^2 5x}{2}+C$. 2.11. $-\ln\left|\arccos x\right|+C$. 2.12. $\frac{1}{4}arctg\,\frac{x^2}{2}+C$.

2.13. $-e^{\frac{1}{x}}+C$. 2.14. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|-\frac{2}{x^2-4}+C$. 2.15. $\frac{-1}{\sin x}+C$.

2.16. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+8\right)^4}+C$. 2.17. $arctg\ e^x+C$.

2.18. $7\sqrt{x^2+5}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$. 2.19. $\frac{-10}{3\sqrt{x^3}}+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x^2}+C$.

2.20. $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$. 2.21. $\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+\sin 2x\right)^3}+C$.

2.22. $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$. 2.23. $e^{tgx}+\frac{3}{\cos x}-2\ln\left|\cos x\right|+C$.

2.24. $-18\sqrt{3-\ln x}+4\sqrt{\left(3-\ln x\right)^3}-\frac{2}{5}\sqrt{\left(3-\ln x\right)^5}+C$.

2.25. $-e^{\arccos x}+5\sqrt{1-x^2}+C$. 2.26. $-ctg\ln x+C$.

2.27. $-\frac{1}{4}\cos\left(4x^2+4x+1\right)+C$. 2.28. $-\frac{2}{63}\sqrt{\left(1-7x^3\right)^3}+C$.

2.29. $\frac{1}{24}arctg^8 3x+\frac{1}{18}\ln\left(1+9x^2\right)+C$.

2.30. $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$.

3.1. $\frac{2^x}{\ln 2}\left(x+1-\frac{1}{\ln 2}\right)+C$. 3.2. $-\frac{e^{-5x}}{25}(5x+1)+C$.

3.3. $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+C$. 3.4. $\frac{2}{9}\sqrt{x^3}(3\ln x-2)+C$.

3.5. $\frac{x}{3}ch3x-\frac{1}{9}sh3x+C$. 3.6. $\frac{x+2}{4}\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+C$.

3.7. $-\left(2x^2-3x-3\right)\cos x+(4x-3)\sin x+C$.

3.8. $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$. 3.9. $\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+C$.

3.10. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. 3.11. $xtgx-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$.

3.12. $\frac{-x}{2(x-1)}+\frac{\ln|x-1|}{2}+C$. 3.13. $2\sqrt{1+x}\arccos x-4\sqrt{1-x}+C$.

3.14. $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C$. 3.15. $\frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$.

3.16. $\frac{3^x}{1+\ln^2 3}(-\cos x+\ln 3\sin x)+C$. 3.17. $\frac{e^{3x}}{13}(2\sin 2x+3\cos 2x)+C$.

3.18. $\frac{e^{3x}}{34}(5\sin 5x+3\cos 5x)+C$. 3.19. $\frac{5^x}{\ln 5}\left(x^2-\frac{2x}{\ln 5}+\frac{2}{\ln^2 5}\right)+C$.

3.20. $\frac{x^5}{625}\left(125\ln^3 x-75\ln^2 x+30\ln x-6\right)+C$.

3.21. $C-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{ctgx}{2}$. 3.22. $xtgx+\ln|\cos x|+C$.

3.23. $\frac{\sin^2 x}{2}(2\ln\sin x-1)+C$. 3.24. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.

3.25. $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+6(x-2)\sin\sqrt{x}+C$.

3.26. $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$.

3.27. $\frac{x^3}{3}\arccos 3x+\frac{1}{243}\sqrt{(1-9x^2)^3}-\frac{1}{81}\sqrt{1-9x^2}+C$.

3.28. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$.

3.29. $\frac{x}{2}\sqrt{13-x^2}+\frac{13}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{13}}+C$.

3.30. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$.

3.31. $\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$.

3.32. $-\frac{ctg^7 x}{7}+\frac{ctg^5 x}{5}-\frac{ctg^3 x}{3}+ctgx+x+C$.

4.1. $-\frac{11}{3(x-6)^3}$. 4.2. $\frac{1}{2}arctg\frac{x+5}{2}+C$.

4.3. $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+9)+\frac{7}{\sqrt{2}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{8}}+C$.

4.4. $2\ln(x^2+x+1)-\frac{10}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.5. $\dfrac{x}{10\left(x^2+5\right)}+\dfrac{1}{10\sqrt{5}}\,arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{5}}+C$.

4.6. $\dfrac{x}{12\left(x^2+3\right)^2}+\dfrac{x}{24\left(x^2+3\right)}+\dfrac{1}{24\sqrt{3}}\,arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{3}}+C$.

4.7. $C-\dfrac{11x+36}{2\left(x^2+6x+10\right)}-\dfrac{11}{2}\,arctg(x+3)$.

4.8. $\dfrac{1}{250}\left(\dfrac{5x-10}{x^2-4x+29}+arctg\dfrac{x-2}{5}\right)+C$. 4.9. $\ln\left|x^2-3x-10\right|+C$.

4.10. $-\dfrac{3}{4}\ln|x-1|+\dfrac{7}{4}\ln|x-5|+C$. 4.11. $\ln\dfrac{(x-2)^2}{|x-3|}+C$.

4.12. $\dfrac{1}{6}\ln\left|(x-5)^5(x+1)\right|+C$. 4.13. $2x-\dfrac{1}{5}\ln\left|(x-2)^2(x+3)^7\right|+C$.

4.14. $\dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{(x+1)^8(x-2)}{(x+2)^3}\right|+C$. 4.15. $\dfrac{x^2-4x}{2}+\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{(x-1)(x+2)^{32}}{(x+1)^3}\right|+C$.

4.16. $3x+\ln\left|\dfrac{x(x+1)^2}{x-2}\right|+C$. 4.17. $\dfrac{x^3}{3}+\ln\left|\dfrac{(x-3)^3}{x(x+2)^2}\right|+C$.

4.18. $\ln|x+2|-\dfrac{1}{2x^2}+C$. 4.19. $2\ln|x-2|-\dfrac{1}{2(x-1)^2}+C$.

4.20. $2\ln|x+2|-\dfrac{1}{2(x-1)^2}+C$. 4.21. $\ln|x-2|+\dfrac{11}{(x+2)^2}+C$.

4.22. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|-\dfrac{1}{2}\,arctgt+C$. 4.23. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{\left(x^2-2x+5\right)^3}}{x-1}\right|+\dfrac{1}{2}\,arctg\dfrac{x-1}{2}+C$.

4.24. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.25. $\frac{1}{2}\ln\left[\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)\right]+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.26. $\frac{-5}{x-1}+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)+\frac{1}{3}arctg\,\frac{x}{3}+C$.

4.27. $\frac{5}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{3}{2}arctgx+\frac{3x+5}{2\left(x^2+1\right)}+C$. 4.28. $\ln\frac{\left(e^x+2\right)^2}{e^x+1}+C$.

4.29. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+2}\right|+C$. 4.30. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|-\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

5.1. $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{3tg\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$. 5.2. $\frac{2}{3}arctg\,\frac{5tg\,\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

5.3. $\frac{1}{2}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}tg^2\,\frac{x}{2}+tg\,\frac{x}{2}+C$. 5.4. $-tg\,\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{1+tg\,\frac{x}{2}}{1-tg\,\frac{x}{2}}\right|+C$.

5.5. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+tg^2\,\frac{x}{2}\right)+C$. 5.6. $\frac{-2}{\left(1+tg\,\frac{x}{2}\right)^2}+\frac{4}{3}\,\frac{1}{\left(1+tg\,\frac{x}{2}\right)^3}+C$.

5.7. $\frac{1}{3}arctg(3tgx)+C$. 5.8. $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)+C$. 5.9. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx}{3tgx+5}\right|+C$.

5.10. $-\frac{ctg^3 x}{3}-ctgx+C$. Указание: $t=ctgx$.

5.11. $\frac{4}{3}arctg(3tgx)+\frac{1}{36}\ln(9tg^2x+1)+C$.

5.12. $\ln\left(\frac{(3tgx+2)^2}{tg^2x+1}\right)-x+C$. 5.13. $-x+\sqrt{7}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{7}}\right)+C$.

5.14. $C-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x$.

5.15. $\frac{1}{9}\sin^9 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$. 5.16. $\frac{2}{5\cos^5 x}+C$.

5.17. $C-\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$.

5.18. $\frac{5x}{16}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$.

5.19. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. 5.20. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 2x}{16}+C$.

5.21. $-\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{4}+C$. 5.22. $2\sin\frac{x}{4}-\frac{6}{5}\sin\frac{5x}{12}+C$.

5.23. $\frac{\sin 7x}{14}+\frac{\sin 3x}{6}+C$. 5.24. $\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$.

5.25. $-\frac{2}{3}ctg^3\frac{x}{2}+2ctg^2\frac{x}{2}+x+C$.

5.26. $\frac{13x}{8}+2\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$.

5.27. $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 7x}{7}+\sin x+\frac{\sin 9x}{9}\right)+C$.

5.28. $tg^{3}\dfrac{x}{3}-3tg\dfrac{x}{3}+x+C$. 5.29. $\dfrac{1}{2}\ln\left(5tg^{2}x+4tgx+5\right)+C$.

5.30. $x-\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{2}{3}\sin^{3}x+C$.

6.1. $3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C$. 6.2. $-\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{x^{7}}-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^{5}}-2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$

6.3. $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^{2}}-6\sqrt[3]{x}-9\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|-3\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$.

6.4. $\dfrac{3}{8}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^{8}-\dfrac{6}{5}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^{5}+\dfrac{6}{7}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^{7}+\dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^{2}+C$.

6.5. $\left(\sqrt{x}-2\right)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C$.

6.6. $x+4\sqrt{1+x}+4\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)+C$.

6.7. $C-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|$.

6.8. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}+C$. 6.9. $2\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}+C$. 6.10. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+C$.

6.11. $\ln|x|-3\left(\ln\left|1+\sqrt[3]{x}\right|-\dfrac{2\sqrt[3]{x}+3}{2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{2}}\right)+C$. 6.12. $\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}+C$.

6.13. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{1-x^{4}}+1}{x^{2}}-\dfrac{\sqrt{1-x^{4}}}{4x^{4}}+C$.

6.14. $\dfrac{3}{7}\left(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$. 6.15. $-\dfrac{5}{7}\left(1+x^{-\frac{4}{5}}\right)^{7}+C$.

6.16. $-\frac{15}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^4+C$. 6.17. $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}$.

6.18. $\frac{61}{16}\ln\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$.

6.19. $C-\frac{3x-9}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+14\arcsin\frac{x+1}{2}$.

6.20. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C$.

6.21. $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{5x}{6}+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$.

6.22. $\ln\left|\frac{Cx}{2+x+\sqrt{x^2+x+1}}\right|$. Указание: $x=\frac{1}{z}$.

6.23. $C-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3\left(x^2+x+1\right)}}{x-1}\right|$.

6.24. $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{6+x+2\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|$.

6.25. $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}+\frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x+1}+C$.

6.26. $C-\frac{3}{2\left(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)^4}{\left(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right)^3}\right|$.

6.27. $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\sqrt{1-x^2}+C$. 6.28. $\frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}{12x^3}+C$.

6.29. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C$.

6.30. $\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$.

7.1. 5. 7.2. $-2\sqrt{2}+4$. 7.3. $\ln\frac{10}{7}$. 7.4. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 7.5. $\ln\left|\frac{\ln 6}{\ln 3}\right|$.

7.6. $arctg 3-arctg 2$. 7.7. $\frac{p}{6}$. 7.8. $\ln\frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}$. 7.9. $1-\frac{p}{4}$.

7.10. $\frac{p}{12}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 7.11. $1-tg\frac{p}{12}$. 7.12. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$. 7.13. $\frac{p}{12}$.

7.14. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sqrt{10}}{3}$. 7.15. $\frac{1}{2}$. 7.16. 0. 7.17. $-\frac{3\sqrt{3}}{32}$.

7.18. $\frac{1}{3}\left(arctg\frac{e}{3}-arctg\frac{1}{3}\right)$. 7.19. $\sin 1$. 7.20. $\frac{2}{7}$. 7.21. 2.

7.22. $\frac{1}{4}$.

8.1. $\frac{4}{3}\ln\frac{9}{2}$. 8.2. $2\ln 2-\frac{1}{2}$. 8.3. $11+6\ln\frac{2}{3}$. 8.4. $\frac{4}{3}\left(8-\sqrt[4]{8}+\ln\frac{\sqrt[4]{8}+1}{9}\right)$.

8.5. $\ln\frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)}{7+\sqrt{33}}$. 8.6. $\sqrt{3}-\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$. 8.7. $\ln\frac{4}{3}$. 8.8. $\ln\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$.

8.9. $\ln\frac{3}{2}$. 8.10. $\frac{81p}{16}$. 8.11. $\ln 2-\frac{5}{8}$. 8.12. $2\ln\left(3\sqrt{2}-3\right)$. 8.13. $\frac{8p+7\sqrt{3}}{64}$. 8.14. $\frac{p-2}{2}$. Указание: $x=\cos t$. 8.15. $\frac{1-\ln 2}{2}$. 8.16. 5. 8.17. $\ln 2$.

8.18. $-\frac{33}{272}$. 8.19. 3. 8.20. $\frac{p}{12}\sqrt{\frac{6}{7}}$. 8.21. $\frac{1}{5}\ln\frac{9}{2}+\frac{p}{20}$. 8.22. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

8.23. $\frac{9\sqrt{3}-1}{160}+\frac{3\sqrt{3}-5}{12}$. 8.24. $\frac{3p-32}{32}$. 8.25. $-tg\frac{p}{8}-\ln\left|\frac{tg\frac{p}{8}-1}{tg\frac{p}{8}+1}\right|$.

8.26. $-\frac{\ln 2}{2}+\frac{p}{4}$. 8.27. $-\frac{2}{5}\ln 5+\frac{29}{39}\ln 2+\frac{29}{13}$. 8.28. $\sqrt{3}-\sqrt{7}\,arctg\sqrt{\frac{3}{7}}$.

8.29. $\frac{e-1}{6}$. 8.30. $\frac{\ln 5}{8}$. 8.31. $3-e^2$. 8.32. $\frac{p^2\sqrt{2}+8p\sqrt{2}-32\sqrt{2}}{4}$.

8.33. $e-2$. 8.34. 1. 8.35. $\frac{p-2}{2}$. 8.36. $\frac{p-2}{4}$. 8.37. $-\frac{1}{2}e^p$. 8.38. $\frac{1}{2}e^{\frac{p}{2}}$.

8.39. $\frac{2}{5}\left(1-e^p\right)$. 8.40. $\frac{5e^p\sqrt{2}}{17}$. 8.41. $-\frac{2p}{27}$. 8.42. $\frac{e^2}{8}$.

8.43. $\frac{3}{\ln 3}-\frac{6}{\ln^2 3}+\frac{4}{\ln^3 3}$. 8.44. $-\frac{7p^2}{72}+\frac{p}{3}\left(4\sqrt{3}-3\right)-2\ln 2$.

8.45. $\frac{9\ln 3+p\left(4\sqrt{3}-9\right)}{18}$. 8.46. 2. 8.47. $\frac{p}{4}-\ln\frac{\sqrt{2}}{4}$. 8.48. $4p$.

8.49. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{5}+1\right)$. 8.50. $\frac{p^2-8}{4}$.

9.1. 6. 9.2. $\frac{1}{4}$. 9.3. $\frac{4}{3}\left(6+p-3\sqrt{3}\right)$. 9.4. $\frac{3}{2}$. 9.5. $16p$. 9.6. $\frac{4-p}{4}$.

9.7. $\sqrt{2}-1$. 9.8. $3p$. 9.9. $\frac{24\sqrt{3}}{5}$. 9.10. $8p+32$. 9.11. $4p-4\sqrt{3}$.

9.12. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. 9.13. $\frac{p}{3}$. 9.14. $\frac{5p-6\sqrt{3}}{6}$. 9.15. $\frac{p}{4}$. 9.16. $\frac{p}{2}$. 9.17. $3p$.

9.18. $\frac{4p-3\sqrt{3}}{8}$. 9.19. $\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$. 9.20. $\frac{6\sqrt{37}-\ln\left(\sqrt{37}-6\right)}{4}$.

9.21. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$. 9.22. $\frac{sh4}{2}$. 9.23. $\sqrt{2}$. 9.24. $-\frac{1}{4}+\ln\frac{5}{4}$. 9.25. $4p$.

9.26. $12\sqrt{3}$. 9.27. $\sqrt{2}(e-1)$. 9.28. $\frac{p^2}{4}$. 9.29. $9p^3$. 9.30. $2\left(e^{\frac{p}{4}}-e^{\frac{p}{6}}\right)$.

9.31. $\sqrt{2}p$. 9.32. $4\sqrt{2}$. 9.33. $\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$.

9.34. $5p\sqrt{1+4p^2}+\frac{5}{2}\ln\left(2p+\sqrt{1+4p^2}\right)$. 9.35. $\frac{78}{5}\left(e^{\frac{p}{2}}-e^{-\frac{p}{2}}\right)$.

9.36. $3\sqrt{2}$. 9.37. $\frac{81p}{2}$. 9.38. 24. 9.39. 66. 9.40. $27p$. 9.41. 50.

9.42. $\frac{p^2+2p}{2}$. 9.43. $\frac{9p}{5}$. 9.44. $18p$. 9.45. $\frac{p}{4}\left(e^2-1\right)$. 9.46. $4p^2$.

9.47. $\frac{32p}{105}$. 9.48. $\frac{p}{2}\left(p\sqrt{2}-4\right)$. 9.49. $\frac{8p}{3}$. 9.50. $\frac{8p}{3}$. 9.51. $\frac{4p}{7}$. 9.52. $\frac{7p}{6}$.

10.1. $\frac{1}{3}$. 10.2. Расходится. 10.3. $\ln\left(\sqrt{17}+4\right)$. 10.4. Расходится.

10.5. p . 10.6. -1 . 10.7. $\frac{1}{2}$. 10.8. 2 . 10.9. $\frac{p+2\ln 2}{4}$. 10.10. $\frac{2p}{3\sqrt{3}}$.

10.11. $\ln\frac{1}{2}$. 10.12. Расходится. 10.13. $\frac{p}{\sqrt{2}}$. 10.14. $\frac{p}{2}$.

10.15. Расходится. 10.16. Расходится. 10.17. Сходится.

10.18. Расходится. 10.19. Сходится. 10.20. Сходится. 10.21. $\frac{1}{4}$.

10.22. $\frac{p}{\sqrt{2}}$. Указание: $t = x - \frac{1}{x}$. 10.23. Абсолютно сходится. 10.24. Расходится. 10.25. 3. 10.26. $\frac{p}{2}$. 10.27. Расходится.

10.28. Расходится. 10.29. 2. 10.30. 1. 10.31. $\frac{8}{3}$.

10.32. Расходится. 10.33. $\frac{p}{3}$. 10.34. Расходится. 10.35. Сходится. 10.36. Расходится. 10.37. Расходится. 10.38. Сходится.

10.39. Сходится. 10.40. Сходится.

Библиографический список

1. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов. М.: Наука, 1985. 150 с.
2. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2004. 654 с.
3. Пискунов В.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М.: Наука (любое издание). Т.1. 543 с.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. 2-е изд. М.: Айрис-пресс,2004. 608 с.

5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука (любое издание). 443 с.

6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по курсу математического анализа. М.: Наука,(любое издание). 624 с.

7. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. 3-е изд. М.: Айрис-пресс,2004. 576 с.

8. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука (любое издание). 352 с.

9. Интегральное исчисление функции одной переменной: Методические указания к практическим занятиям./ под ред. П.С. Култышева; Рязань: РРТИ, 1988. 92 с.

Оглавление