МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

Г.С. ЛУКЬЯНОВА, А.И.НОВИКОВ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Рязань 2004

Министерство образования Российской Федерации

Рязанская государственная радиотехническая академия

Г.С. ЛУКЬЯНОВА, А.И.НОВИКОВ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Учебное пособие

Рязань 2004

УДК 512

Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства: Учебное пособие / Г.С. Лукьянова, А.И.Новиков. Под. Ред. А.И.Новикова Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2004. с. ISBN 55-7722-0251-0.

Содержит справочный теоретический материал к каждому из шести Разделов, подробное решение типовых задач и задачи для самостоятельной работы.

Предназначено учащимся системы довузовской подготовки, также может использоваться абитуриентами для самостоятельного изучения; может представлять интерес для учителей математики средних школ, лицеев и гимназий.

Табл. . Ил. . Библиограф.: назв.

Печатается по решению методического совета Рязанской государственной радиотехнической академии.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанской государственной радиотехнической академии (зам. зав. кафедрой доц канд. физ-мат. наук Ильин М.Е.)

Оглавление

Предисловие

Пособие охватывает два больших раздела школьного курса математики: первый – рациональные функции, уравнения и неравенства и второй – иррациональные уравнения и неравенства. В качестве дополнения в пособие включен раздел «Квадратичные функции двух и более переменных».

Пособие рассчитано на группы с различным уровнем математической подготовки и ориентировано на системное изучение материала. Примеры подобраны с учетом как классических форм приема экзаменов, так и тестовых систем. Если некоторый раздел, пункт или отдельная задача адресованы группам с повышенной математической подготовкой, то их номер содержит символ * (звездочка). Например, 6^*. Квадратичные функции двух и более переменных.

Пособие состоит из шести разделов, которые разделены на подразделы и пункты, имеющие однотипную структуру. В начале каждого раздела или пункта даются теоретические сведения; затем подробно разбирается решение типовых задач. Теоретические сведения даются кратко, хотя некоторые теоремы и утверждения доказываются. Окончание доказательства теоремы или утверждения отмечается значком ■ (заштрихованный квадрат). Важные теоретические результаты отмечены значком • (заштрихованный круг) в начале абзаца.

Пособие предназначено для использования в системе организованной довузовской подготовки и потому адресовано одновременно слушателям и педагогам подготовительных курсов. Рекомендуется также для использования в школах и классах математического профиля и для подготовки к централизованному тестированию или единому государственному экзамену по математике.

Сочетание теоретического материала, выполненного в форме рекомендаций к решению задач, и подробного решения задач с комментариями позволяет рекомендовать его и абитуриентам, работающим индивидуально вне системы довузовской подготовки. Авторы надеются, что пособие окажется полезными для учителей школ, лицеев и гимназий.

1. Алгебраические уравнения

Теоретические сведения

Определение 1.1. Алгебраическим называется уравнение вида

$$P_n\ (x) = a_0 x^n\ + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0\,, \qquad (1.1)$$

где $a_0 \neq 0, a_1, \mathbf{K}, a_n$ – некоторые действительные числа.

При этом переменная величина x называется неизвестным, а числа $a_0, a_1, \mathbf{K}, a_n$ – коэффициентами уравнения (1.1), n – порядком (или степенью) уравнения.

Определение 1.2. Число a называется решением (или корнем) уравнения (1.1), если при подстановке числа a в уравнение $P_n(x) = 0$ вместо x получается верное равенство $P_n(a) = 0$.

В зависимости от коэффициентов уравнение (1.1) может иметь единственный действительный корень, несколько корней или не иметь действительных корней.

Решить уравнение - значит найти все его корни (в школьном курсе рассматриваются только действительные решения) или доказать, что уравнение не имеет решений.

1.1. Линейные уравнения

Определение 1.3. При $n = 1$ уравнение (1.1) называется линейным. Оно имеет вид $a_0 x + a_1 = 0, a_0 \neq 0$, или

$$ax = b \qquad (1.2)$$

Если $a \neq 0$, то уравнение (1.2) имеет единственное решение $x = \dfrac{b}{a}$.

Если $a=0$, то уравнение (1.2) может иметь бесчисленное множество решений или не иметь ни одного решения.

Так, при $a=0$ и $b=0$ уравнение (1.2) принимает вид $0\cdot x=0$ и, следовательно, имеет бесконечное множество решений ($x\in \mathbf{R}$).

При $a=0$ и $b\neq 0$ уравнение (1.2) решений не имеет.

Рассмотренные случаи следует учитывать при решении уравнений с модулями (см. пункт 2.2) или с параметрами.

Пример 1.1. Решить уравнение с параметром

$$k^2x-3kx+4=4x+k. \tag{1.3}$$

Решение. Данное уравнение является линейным относительно неизвестного x. Приведем его к виду (1.2).

$\left(k^2-3k-4\right)x=k-4$ или $(k-4)(k+1)x=k-4$.

Отсюда следует, что если $(k-4)(k+1)\neq 0$, то

$x=\dfrac{k-4}{(k-4)(k+1)}$. То есть при $k\neq -1,\quad k\neq 4$ уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{1}{k+1}$. Если $k=-1$, то уравнение (1.3) принимает вид $0x=-5$ и, следовательно, решений не имеет.

Если $k=4$, то получим уравнение $0x=0$, для которого любое $x\in \mathbf{R}$ является решением.

Обратите внимание на то, что «просто» сократив уравнение (1.3) на $(k-4)$, мы теряем бесконечное множество решений.

Ответ: $k=-1$, решений нет;

$k=4,\quad x\in R$;

$k\neq -1,\quad k\neq 4,\quad x=\dfrac{1}{k+1}$.

1.2. Квадратные уравнения

При $n = 2$ уравнение (1.1) называется квадратным. Обычно его записывают в виде

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.4}$$

где $a \neq 0, b, c$ - заданные действительные числа.

Формулы корней квадратного уравнения

Преобразуем левую часть уравнения (1.4):

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Таким образом, уравнение (1.4) принимает вид:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0.$$

Или в равносильной форме

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

В левой части последнего уравнения стоит неотрицательное выражение (полный квадрат), следовательно, и правая часть уравнения должна быть неотрицательной для того, чтобы уравнение имело решение.

Обозначим $D = b^2 - 4ac$ - дискриминант уравнения (1.4). Получим равносильную форму записи уравнения (1.4)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}, \tag{1.5}$$

откуда следует, что если

а) $D < 0$, то уравнение (1.4) решений не имеет;

б) $D = 0$, то $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ и $x = -\frac{b}{2a}$ - единственное решение уравнения (1.4).

Иногда уточняют, что $x = -\frac{b}{2a}$ - корень кратности 2 (пара совпавших корней) уравнения (1.4);

в) $D > 0$, то уравнение (1.5) равносильно

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$$

или

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

и

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} - \tag{1.6}$$

два различных корня уравнения (1.5) и соответственно уравнения (1.4).

Формула (1.6) – основная формула для решения квадратных уравнений при положительном дискриминанте уравнения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Если x_1 и x_2 - корни уравнения (1.4), то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Доказательство. В соответствии с формулой (1.6)

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Тогда

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{2a}\right)=$$

$$=\left|D=b^2-4ac\right|=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{2a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)=ax^2+bx+c.\blacksquare$$

Для некоторых частных случаев записи уравнения (1.4) справедливы отвечающие им формулы корней. Ими удобно пользоваться при решении соответствующих квадратных уравнений. Приведем их.

1. При $a=1$ уравнение (1.4) называется приведенным. Обычно приведенное квадратное уравнение записывается в виде

$$x^2+px+q=0. \qquad (1.7).$$

Для уравнения (1.7) дискриминант $D = p^2 - 4q$, а формула (1.6) принимает вид:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \qquad (1.8).$$

2. В случае четного второго коэффициента в уравнении (1.4) $\left(b = 2b_1, \quad b_1 \in Z\right)$ дискриминант

$$D = (2b_1)^2 - 4ac = 4\left(b_1^2 - ac\right)$$

и потому формула (1.6) принимает вид

$$x_{1,2} = \frac{-2b_1 \pm 2\sqrt{b_1^2 - ac}}{2a} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}$$

или

$$x_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{D_1}}{a}, \qquad (1.9)$$

где $D_1 = b_1^2 - ac$.

Пример 1.2. Решить уравнения:

а) $3x^2-5x-28=0$; г) $x^2+11x+10=0$;

б) $2x^2+3x-1=0$; д) $x^2+7x-2=0$;

в) $11x^2+7x+3=0$; е) $x^2-24x+95=0$;

ж) $(a-1)x^2-(4a-2)x+3(a+1)=0$.

Решение. а) $3x^2-5x-28=0$

Вычисляем дискриминант

$$D=25-4\cdot 3\cdot(-28)=25+336=361=19^2.$$

Поскольку $D>0$, то по формуле (1.6) находим корни уравнения

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 19}{2\cdot 3}=\frac{5\pm 19}{6}$$

или

$$x_1=\frac{5-19}{6}=-7/3,\ x_2=4.$$

Ответ: $x_1=-7/3$, $x_2=4$.

б) $2x^2+3x-1=0$, $D=9-4\cdot 2\cdot(-1)=9+8=17$,

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}.$$

Ответ: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$, $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

в) $11x^2+7x+3=0$, $D=49-4\cdot 11\cdot 3=49-132=-83<0$, следовательно, уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

г) $x^2+11x+10=0$. Данное уравнение является приведенным, поэтому используем формулу (1.8):

$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-40}}{2}=\frac{-11\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{-11\pm 9}{2}.$$

Ответ: $x_1=-10$, $x_2=1$.

д) $x^2+7x-2=0$. $D=49+8=57$ $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{57}}{2}$.

Ответ: $x_1=\dfrac{-7-\sqrt{57}}{2}$, $x_2=\dfrac{-7+\sqrt{57}}{2}$.

е) $x^2-24x+95=0$. Для решения данного примера удобнее использовать формулу (1.8), с помощью которой дискриминант D_1 считается без калькулятора. Для данного уравнения $b_1=\dfrac{b}{2}=-12$. Соответственно

$D_1=b_1^2-ac=144-95=49$ и $x_{1,2}=12\pm 7$.

Ответ: $x_1=5$, $x_2=19$.

ж) $(a-1)x^2-(4a-2)x+3(a+1)=0$. Так как данное уравнение содержит параметр a, то следует рассмотреть несколько случаев.

Случай 1. $a-1=0$. Тогда $a=1$ и уравнение принимает вид

$$-2x+6=0.$$

Т.е. при $a=1$ уравнение является линейным и имеет единственное решение $x=3$.

Случай 2. $a-1\neq 0$. Тогда данное уравнение является квадратным относительно x. Учитывая четность коэффициента при x, находим

$$D_1=(2a-1)^2-(a-1)3(a+1)=4a^2-4a+1-3a^2+3=$$

$$=a^2-4a+4=(a-2)^2\geq 0.$$

Тогда по формуле (1.9)

$$x_{1,2}=\frac{2a-1\pm(a-2)}{a-1}$$

или

$$x_1=\frac{2a-1-(a-2)}{a-1}=\frac{2a-1-a+2}{a-1}=\frac{a+1}{a-1},$$

$$x_2=\frac{2a-1+(a-2)}{a-1}=\frac{3a-3}{a-1}=3.$$

Заметим, что при $a=2$ $D_1=0$ и в уравнении корни x_1 и x_2 совпадают.

Ответ: $a=1,\quad x=3;\qquad a\neq 1,\quad x_1=\dfrac{a+1}{a-1},\quad x_2=3.$

Формулы Виета

Теоретические сведения

Теорема 1.2. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения (1.4) при $a\neq 0$ тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условиям:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}, \tag{1.10}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}. \qquad (1.11)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть x_1 и x_2 являются корнями уравнения (1.4). Тогда по формулам (1.6)

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Отсюда

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Достаточность. Пусть при $a \neq 0$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \text{ и } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0.$$

Покажем, что это уравнение можно привести к виду (1.4):

$$0 = (x - x_1)\cdot(x - x_2) = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 =$$

$$= \left|\text{по формулам (1.10) и (1.11)}\right| = x^2 - x\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

Значит, x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Учитывая, что $a\neq 0$, получаем, что x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$. ■

Замечание. Особенно простой вид имеют условия (1.10) и (1.11) в случае приведенного уравнения (1.7):

$$x_1+x_2=-p \text{ и } x_1x_2=q.$$

Теоремой Виета удобно пользоваться при решении «простых» уравнений, подбирая числа x_1 и x_2 так, чтобы выполнялись условия (1.10) и (1.11).

Пример 1.3. Решить уравнения:

а) $x^2-7x+12=0$; в) $x^2-11x+10=0$;

б) $x^2+4x-21=0$; г) $2x^2-\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$.

Решение. а) Подбором находим, что $4+3=7$, $4\cdot 3=12$. Следовательно, по теореме Виета $x_1=4$ и $x_2=3$ – корни уравнения $x^2-7x+12=0$.

б) $x_1=-7$ и $x_2=3$. в) $x_1=1$ и $x_2=10$. г) $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x_2=\sqrt{3}$.

Ответ: а) $x_1=4$, $x_2=3$; б) $x_1=-7$, $x_2=3$; в) $x_1=1$, $x_2=10$; г) $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\sqrt{3}$.

Пример 1.4. Найти все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $x^2-kx+2k+3=0$ имеет два корня, удовлетворяющие условию $x_2=3x_1$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни данного уравнения. По условию задачи $x_2 = 3x_1$, а по теореме Виета $x_1 + x_2 = k$ и $x_1 x_2 = 2k + 3$. Таким образом получили систему

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1, \\ x_1 + x_2 = k, \\ x_1 x_2 = 2k + 3, \end{cases}$$

из которой необходимо найти k.

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1, \\ x_1 + x_2 = k, \\ x_1 x_2 = 2k + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3x_1, \\ 4x_1 = k, \\ 3x_1^2 = 2k + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3x_1, \\ x_1 = k/4, \\ 3\dfrac{k^2}{16} = 2k + 3, \end{cases}$$

откуда

$$3k^2 - 32k - 48 = 0,$$

$$D_1 = 16^2 + 3 \cdot 48 = 16(16 + 9) = 16 \cdot 25 = 20^2,$$

$$k_{1,2} = \frac{16 \pm 20}{3} \text{ или } k_1 = \frac{-4}{3} \text{ и } k_2 = 12.$$

Ответ: $k_1 = \dfrac{-4}{3}$ и $k_2 = 12$.

Пример 1.5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых разность корней уравнения

$$x^2+(a-2)x+6-2a^2=0$$

равна 7.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни данного уравнения. По условию задачи $x_2-x_1=7$, а по теореме Виета $x_1+x_2=2-a$ и $x_1x_2=6-2a^2$. Из системы

$$\begin{cases} x_2-x_1=7, \\ x_1+x_2=2-a, \\ x_1x_2=6-2a^2 \end{cases}$$

найдем a.

Из первых двух уравнений получим

$$x_2=\frac{9-a}{2},\ x_1=\frac{-5-a}{2}$$

и подставим в третье уравнение:

$$\left(\frac{9-a}{2}\right)\left(\frac{-5-a}{2}\right)=6-2a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 9a^2-4a-69=0.$$

$$D_1=4+9\cdot 69=625=25^2,\ a=\frac{2\pm 25}{9},$$

$$a_1=-\frac{23}{9} \text{ и } a_2=3.$$

Ответ: $a_1=-\frac{23}{9}$ и $a_2=3$.

Пример 1.6. Найти все значения параметра k, при каждом из которых один из корней уравнения $2x^2+(k-5)x-16k^3=0$ является квадратом другого.

Решение. Пусть x_1 и x_1^2 – корни данного уравнения. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_1^2=\dfrac{5-k}{2}, \\ x_1^3=-8k^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_1^2=\dfrac{5-k}{2}, \\ x_1^3=-8k^3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2k, \\ 4k^2-2k=\dfrac{5-k}{2}, \end{cases} \Rightarrow 8k^2-3k-5=0,$$

$$D=9+160=169=13^2,$$

$$k=\frac{3\pm 13}{16}$$

или

$$k_1=-\frac{5}{8} \text{ и } k_2=1.$$

Ответ: $k_1=-\dfrac{5}{8}$ и $k_2=1$.

Пример 1.7. Не решая уравнение $3x^2+7x-2=0$, найти:

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; в) $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$; г) $x_1^3+x_2^3$; д) $\dfrac{x_1^3-x_2^3}{x_1^2-x_2^2}$,

где x_1 и x_2 – корни данного уравнения.

Решение. В соответствии с теоремой Виета

$$u = x_1 + x_2 = -\frac{7}{3} \text{ и } v = x_1 x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Запишем выражения а) – д) через u и v.

а) $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 2x_1x_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 =$

$$= u^2 - 2v = \left| u = -\frac{7}{3}, v = -\frac{2}{3} \right| = \frac{49}{9} + \frac{4}{3} = \frac{49+12}{9} = \frac{61}{9};$$

б) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \dfrac{u}{v} = \dfrac{7}{2};$

в) $\dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_2^2 + x_1^2}{x_1x_2} = \dfrac{61/9}{-2/3} = -\dfrac{61}{6};$

г) $x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) = u\left(u^2 - 3v\right) =$

$$= -\frac{7}{3}\left(\frac{49}{9} + 2\right) = \frac{-469}{27}$$

д) $\dfrac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^2 - x_2^2} = \dfrac{\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right)}{\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 + x_2\right)} = \dfrac{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}{x_1 + x_2} =$

$$= \frac{u^2 - v}{u} = \frac{49/9 + 2/3}{-7/3} = -\frac{55}{21}.$$

Ответ: а) $\dfrac{61}{9}$; б) $\dfrac{7}{2}$; в) $-\dfrac{61}{6}$; г) $\dfrac{-469}{27}$; д) $-\dfrac{55}{21}$.

Выделение полного квадрата

Теоретические сведения

При решении многих задач как школьного, так и вузовского курсов математики часто бывает удобным, а иногда просто необходимым, выделять полный квадрат из квадратного трехчлена ax^2+bx+c. Высокая частота обращения к этому простейшему, но очень эффективному приему предполагает наличие твердых навыков его выполнения.

Определение 1.4. Квадратный трехчлен

$$x^2 \pm 2dx + d^2 = (x \pm d)^2, \ d > 0,$$

называется полным квадратом.

Выделить полный квадрат из квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c, \ a \neq 0,$$

означает представить его в виде $a(x \pm d)^2 + p$, где коэффициенты d и p определяются через коэффициенты a, b и c квадратного трехчлена.

Теорема 1.3. Для любых a, b и c ($a \neq 0$) справедливо тождество

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Доказательство теоремы повторяет тождественные преобразования квадратного трехчлена ax^2+bx+c, выполненные в пункте 1.2.1 при выводе формулы корней квадратного уравнения.

Повторим их:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}.\blacksquare$$

Таким образом, $d=\frac{b}{2a}$, $p=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{D}{4a}$.

Преобразования, выполненные при доказательстве утверждения, составляют содержание процедуры выделения полного квадрата.

Пример 1.8. Выделить полный квадрат:

а) x^2+4x-2; б) x^2-5x+7; в) $3x^2+9x-4$; г) $2x^2-\sqrt{2}x+7$.

Решение.

а) $x^2+4x-2=\left(x^2+2\cdot 2x+2^2\right)-4-2=(x+2)^2-6$;

б) $x^2-5x+7=\left(x^2-2\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)-\frac{25}{4}+7=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$;

в) $3x^2+9x-4=3\left(x^2+3x\right)-4=$

$$=3\left[\left(x^2+2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}\right]-4=3\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]-4=$$

$$=3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{27}{4}-4=3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{43}{4};$$

г) $2x^2-\sqrt{2}x+7=2\left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+7=$

$$=2\left[\left(x^2-2\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{2}{16}\right)-\frac{2}{16}\right]+7=$$

$$=2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\frac{4}{16}+7=2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{27}{4}.$$

Замечание. Процедуру выделения полного квадрата из квадратного трехчлена можно использовать для решения квадратных уравнений. Например,

а) $x^2+4x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2-6=0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2=0 \quad \Leftrightarrow \left(x+2+\sqrt{6}\right)\left(x+2-\sqrt{6}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-2-\sqrt{6}, \\ x=-2+\sqrt{6} \end{array}\right. \quad - \text{корни уравнения.}$$

б) $2x^2-\sqrt{2}x+7=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{27}{4}=0.$

Но $2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{27}{4}\geq\frac{27}{4}>0$, и потому уравнение $2x^2-\sqrt{2}x+7=0$ не имеет действительных решений.

Пример 1.9. Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$y(x,a)=x^2-2a(3x-5a)+5a+8$$

а) достигает наименьшего значения y_{min}; найти это значение;

б) наименьшее значение функции $y(x,a)$ равно 2.

Решение. а) Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене

$$x^2-2a(3x-5a)+5a+8:$$

$$x^2-2a(3x-5a)+5a+8=x^2-6ax+10a^2+5a+8=$$

$$=\left(x^2-2\cdot(3a)x+9a^2\right)+a^2+5a+8=$$

$$=(x-3a)^2+\left(a^2+2\cdot\frac{5}{2}a+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}+8=(x-3a)^2+\left(a+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}.$$

По свойствам степеней с четным показателем для любых значений параметра a и для любых x

$$(x-3a)^2\geq 0 \text{ и } \left(a+\frac{5}{2}\right)^2\geq 0.$$

Поэтому

$$y(x,a)=(x-3a)^2+\left(a+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}.$$

Равенство имеем только в том случае, когда

$$\left(a+\frac{5}{2}\right)^2=0 \text{ и } (x-3a)^2=0.$$

Следовательно, только при $a = -\frac{5}{2}$ функция $y(x, a)$ принимает наименьшее значение равное $\frac{7}{4}$. Это значение достигается при $x = 3a = -\frac{15}{2}$.

Решение данного примера имеет наглядную геометрическую иллюстрацию (см рис. 1.1). Функция $y(x, a) = (x - 3a)^2 + (a^2 + 5a + 8)$ определяет семейство парабол, ветви каждой их которых направлены вверх, а вершина находится в точке $(3a; a^2 + 5a + 8)$

Откуда следует, что наименьшее значение $y_{min} = \min\limits_{x \in \mathbf{R},\, a \in \mathbf{R}} y(x, a)$ достигается в вершине одной из парабол, т.е. $y_{min} = \min\limits_{a \in \mathbf{R}} (a^2 + 5a + 8)$. Поскольку

$$a^2 + 5a + 8 = \left(a + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

то $y_{min} = \frac{7}{4}$ и достигается при $a = -\frac{5}{2}$.

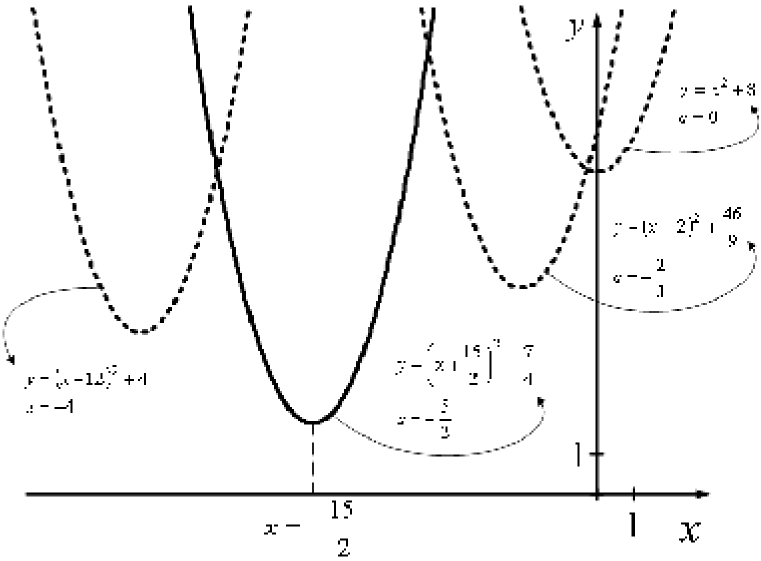


Рис.1.1

б) Найдем, при каком значении параметра a наименьшее значение функции $y(x,a)$ равно 2. Заметим, что $2>\frac{7}{4}$ и потому с учетом пункта «а» поставленная задача имеет решение.

Так как при каждом значении параметра a графиком функции $y(x,a)=(x-3a)^2+\left(a+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ является парабола, ветви которой направлены вверх, то наименьшее значение достигается в точке $x=3a$, соответствующей вершине параболы, и равно ординате вершины параболы, т.е. $\left(a+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=2$.

$$\left(a+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}, \\ a+\dfrac{5}{2}=-\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=-2, \\ a=-3. \end{array}\right.$$

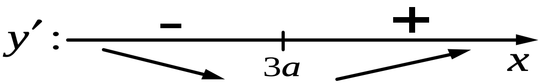
Ответ: а) $y_{min}=\dfrac{7}{4}$ при $a=-\dfrac{5}{2}$;

б) $a=-2$ и $a=-3$.

Замечание. Пример 1.9 можно решить другим способом, применив производную:

$$y=x^2-6ax+10a^2+5a+8 \quad \Rightarrow \quad y'=2x-6a \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (y'=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3a).$$



$x_{min}^{a}=3a$,

$y_{min}^{a}=y\left(x_{min}^{a}\right)=(3a)^2-6a\cdot 3a+10a^2+5a+8=a^2+5a+8$.

а) $y_{min}=\min\limits_{a\in\mathbf{R}} y_{min}^{a}=\min\limits_{a\in\mathbf{R}}\left(a^2+5a+8\right)$

$$\left(a^2+5a+8\right)'_a=2a+5; \quad 2a+5=0 \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{5}{2}.$$

$$y_{min}=\left(-\frac{5}{2}\right)^2+5\left(-\frac{5}{2}\right)+8=\frac{7}{4}$$

б) $y_{min}^{a}=2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2+5a+8=2 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2+5a+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=-3, \\ a=-2. \end{array}\right.$$

1.3. Расположение корней квадратного уравнения

Теоретические сведения

При решении многих задач школьного курса математики необходимо проанализировать расположение корней квадратного уравнения на числовой оси.

Рассмотрим возможные типы задач.

I тип. Найти условия, при которых квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a \neq 0, \tag{1.12}$$

имеет два корня такие, что один из них меньше заданного числа k, а другой – больше.

Решение. Вместо уравнения (1.12) будем рассматривать равносильное ему приведенное уравнение

$$f(x) = x^2 + px + q = 0,$$

где $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$.

Тогда уравнение (1.12) примет вид

$$f(x) = x^2 + px + q = 0. \tag{1.13}$$

Теорема 1.4. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения (1.13). $x_1 < k < x_2$ тогда и только тогда, когда $f(k) < 0$.

Доказательство. Необходимость.

Дано: $x_1 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ и $x_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ – корни уравнения (1.13) и $x_1 < k < x_2$. Требуется доказать, что $f(k) < 0$.

Имеем

$$\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}<k<\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$-p-\sqrt{p^2-4q}<2k<-p+\sqrt{p^2-4q} \quad \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{p^2-4q}<2k+p<\sqrt{p^2-4q} \quad \Leftrightarrow$$

$$|2k+p|<\sqrt{p^2-4q}\,.$$

Возведем обе части данного неравенства в квадрат. Получим

$$(2k+p)^2<p^2-4q \quad \Leftrightarrow 4k^2+4pk+p^2<p^2-4q \quad \Leftrightarrow$$

$$4k^2+4pk+4q<0, \quad \text{т. е. } f(k)<0\,.$$

Достаточность. Пусть $f(k)<0$. Докажем, что уравнение (1.13) имеет два корня x_1 и x_2, причем $x_1<k<x_2$.

Выделим в левой части неравенства $f(k)=k^2+pk+q<0$ полный квадрат:

$$\left(k+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}<0 \quad \Leftrightarrow \left(k+\frac{p}{2}\right)^2<\frac{p^2-4q}{4} \qquad (1.14)$$

Поскольку $p^2-4q=D$, то из данного неравенства следует, что дискриминант квадратного уравнения (1.13) больше нуля и, значит, уравнение (1.13) имеет два корня.

Извлечем квадратный корень из обеих частей неравенства (1.14) и получим

$$\left|k+\frac{p}{2}\right|<\frac{D}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{-\sqrt{D}}{2}<k+\frac{p}{2}<\frac{\sqrt{D}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-p-\sqrt{D}}{2}<k<\frac{-p+\sqrt{D}}{2}.$$

Легко заметить, что

$$x_1=\frac{-p-\sqrt{D}}{2} \text{ и } x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}$$

являются корнями уравнения (1.13), что и требовалось доказать. ■

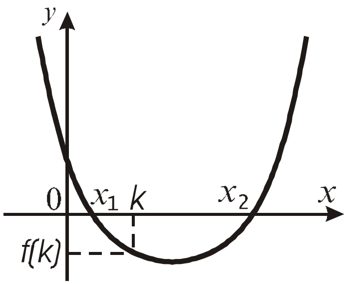


Рис. 1.2

Замечание. на рис 1.2 приведена иллюстрация к данному типу задач.

II тип. Найти условия, при которых уравнение (1.13) имеет два корня, большие (меньшие) заданного числа k.

Теорема 1.5. Корни x_1 и x_2 уравнения (1.13) удовлетворяют условиям $\begin{cases} x_1>k, \\ x_2>k \end{cases}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D=p^2-4q\geq 0, \\ f(k)>0, \\ x_в=\dfrac{-p}{2}>k, \end{cases} \tag{1.15}$$

где $x_в=\dfrac{-p}{2}$ – абсцисса вершины параболы (см. рис. 1.3).

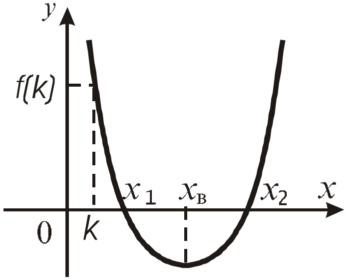


Рис. 1.3

Доказательство. Необходимость. Дано: $x_1>k$ и $x_2>k$ – корни уравнения (1.13). Требуется доказать выполнение неравенств (1.15).

Так как уравнение (1.13) имеет действительные решения, то его дискриминант неотрицателен, т.е. $D = p^2 - 4q \geq 0$.

Так как $\begin{cases} x_1 > k, \\ x_2 > k, \end{cases}$, то $x_1 + x_2 > 2k$ и в соответствии с формулами Виета $-p > 2k$.

Отсюда

$$x_в = \frac{-p}{2} > k.$$

Аналогично

$$\begin{cases} x_1 > k, \\ x_2 > k, \end{cases} \Leftrightarrow \quad (x_1 - k)(x_2 - k) > 0.$$

Следовательно,

$$x_1 x_2 - k(x_1 + x_2) + k^2 > 0.$$

Применив теорему Виета, получим $k^2 + pk + q > 0$, т.е. $f(k) > 0$.

Достаточность. Требуется доказать, что условия (1.15) достаточны для того, чтобы существовали x_1 и x_2 – корни уравнения (1.13), удовлетворяющие условию $\begin{cases} x_1 > k, \\ x_2 > k, \end{cases}$.

Так как $D = p^2 - 4q \geq 0$, то уравнение (1.13) имеет действительные решения x_1 и x_2.

Рассмотрим второе и третье неравенства в составе условий (1.15):

$$\begin{cases} f(k) > 0, \\ x_в = \dfrac{-p}{2} > k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + pk + q > 0, \\ 2k + p < 0. \end{cases}$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$, а $x_1 x_2 = q$.

Тогда

$$\begin{cases} k^2 + pk + q > 0, \\ 2k + p < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - (x_1 + x_2)k + x_1 x_2 > 0, \\ 2k - (x_1 + x_2) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

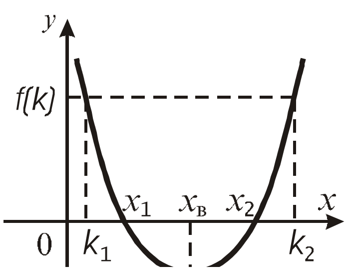
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - k)(x_2 - k) > 0, \\ (x_1 - k) + (x_2 - k) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 - k > 0, \\ x_2 - k > 0, \\ (x_1 - k) + (x_2 - k) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 - k < 0, \\ x_2 - k < 0, \\ (x_1 - k) + (x_2 - k) > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 - k > 0, \\ x_2 - k > 0, \end{cases} \\ \varnothing. \end{array}\right.$$

То есть, если коэффициенты p и q уравнения (1.13) удовлетворяют условиям (1.15), то это уравнение имеет корни x_1 и x_2 большие заданного числа k. ■

Аналогично условия, при которых корни уравнения (1.13) $x_1 < k$ и $x_2 < k$, имеют вид

$$\begin{cases} D = p^2 - 4q \ge 0, \\ f(k) > 0, \\ x_в = \dfrac{-p}{2} < k. \end{cases} \tag{1.16}$$



III тип. Найти условия, при которых корни уравнения (1.13) расположены на отрезке $\left[k_1, k_2\right]$ (см. рис 1.4).

Решение. Данная задача является обобщением задачи II. Поэтому условия, при которых $k_1 \le x_1 \le x_2 \le k_2$ x_1 и x_2 - корни уравнения (1.13), k_1 и k_2 концы заданного отрезка, имеют вид:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ f\left(k_1\right) \ge 0, \\ f\left(k_2\right) \ge 0, \\ k_1 \le x_в \le k_2. \end{cases} \qquad (1.17)$$

IV тип. Найти условия, при которых уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 такие, что x_1 меньше заданного числа k_1, а x_2 ,больше заданного числа k_2, где $k_1 < k_2$.

Решение. Эта задача является обобщением задачи I. Поэтому данные условия имеют вид

$$\begin{cases} f\left(k_1\right) < 0, \\ f\left(k_2\right) < 0. \end{cases} \qquad (1.18)$$

Замечание. Рассмотренные типы задач учитывают все возможные случаи расположения корней квадратного уравнения.

Пример 1.10. Найти все значения параметра m ($m \ne 0$), при каждом из которых один корень уравнения $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ больше 1, а другой меньше 1.

Решение. Данный пример относится к типу I задач. Приведем данное уравнение к виду

$$f\left(x\right) = x^2 - \frac{1}{m}x - \frac{3m+2}{2m} = 0, \ m \ne 0.$$

В соответствии с теоремой 1.4 необходимым и достаточным условием существования корней x_1 и x_2 уравнения, удовлетворяющих условиям $x_1 < 1 < x_2$, является выполнение неравенства

$$f(1) < 0 \ \ (k = 1)$$

или

$$1 - \frac{1}{m} - \frac{3m+2}{2m} < 0 .$$

После преобразования получим равносильное неравенство

$$\frac{(2m - 2 - 3m - 2)}{2m} < 0$$

или

$$\frac{m+4}{m} > 0 .$$

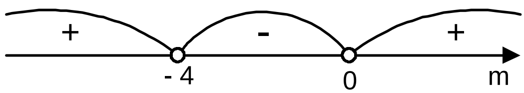


Рис. 1.5

Применив к этому неравенству метод интервалов (рис. 1.5), получим, что

$$m \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty).$$

Ответ: $m \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

Пример 1.11. Найти наибольшее целое значение параметра m, при котором корни x_1 и x_2 уравнения

$$(2m-3)x^2+(4m+2)x+m^2=0$$

удовлетворяют условию $x_1<-1<x_2$.

Решение. Данный пример также относится к типу 1 задач. Приведем уравнение к виду

$$x^2+\frac{(4m+2)}{(2m-3)}x+\frac{m^2}{(2m-3)}=0.$$

Отметим, что $2m-3\neq 0$ (почему?).

Условие $f(k)<0$ в данном случае имеет вид

$$f(-1)=\frac{(2m-3-4m-2+m^2)}{(2m-3)}<0$$

или

$$\frac{(m^2-2m-5)}{(2m-3)}<0.$$

Разложим квадратный трехчлен m^2-2m-5 на множители. Для этого решим уравнение $m^2-2m-5=0$. Его корни $m_1=1-\sqrt{6}$ и $m_2=1+\sqrt{6}$. Следовательно, неравенство примет вид

$$\frac{\left(m-\left(1-\sqrt{6}\right)\right)\left(m-\left(1+\sqrt{6}\right)\right)}{(2m-3)}<0.$$

Для решения этого неравенства воспользуемся методом интервалов (рис. 1.6), откуда $m\in\left(-\infty,1-\sqrt{6}\right)\cup\left(\frac{3}{2},1+\sqrt{6}\right)$.

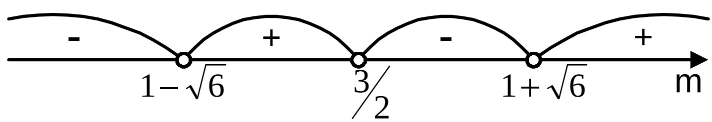


Рис. 1.6

Найдем наибольшее целое m, принадлежащее указанным промежуткам. Для этого оценим $1+\sqrt{6}$. Так как $2<\sqrt{6}<3$, то $3<1+\sqrt{6}<4$ и потому 3 – наибольшее целое m, при котором $x_1<-1<x_2$.

Ответ: Наибольшее целое значение $m=3$.

Пример 1.12. Найти все значения параметра m, при которых уравнение $(m-1)x^2+\left(m^2-2\right)x+(m-5)=0$ имеет корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям $x_1<0$ и $x_2>1$.

Решение. Из условия задачи следует, что $x_1<0<x_2$ и $x_1<1<x_2$, поэтому задача относится к типу IV.

Приведем данное уравнение к виду $(m-1\neq 0)$

$$x^2+\frac{\left(m^2-2\right)}{(m-1)}x+\frac{(m-5)}{(m-1)}=0$$

и запишем соответствующие условия (1.18):

$$\begin{cases} f(0)=\dfrac{(m-1)\cdot 0+\left(m^2-2\right)\cdot 0+m-5}{(m-1)}<0, \\ f(1)=\dfrac{(m-1)\cdot 1+\left(m^2-2\right)\cdot 1+m-5}{(m-1)}<0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{(m-5)}{(m-1)}<0, \\ \dfrac{\left(m^2+2m-8\right)}{(m-1)}<0. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Решим каждое неравенство (1.19) методом интервалов:

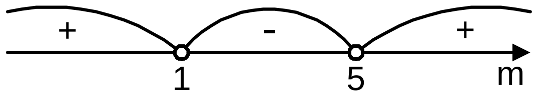


Рис. 1.7

1) $\dfrac{(m-5)}{(m-1)}<0$, то есть (см. рис. 1.7) $m\in(1,5)$;

2) $\dfrac{(m^2+2m-8)}{(m-1)}<0 \Leftrightarrow \dfrac{(m+4)(m-2)}{(m-1)}<0 \quad \Rightarrow$ (см. рис. 1.8)

$m\in(-\infty,-4)\cup(1,2)$.

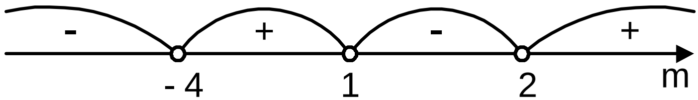


Рис. 1.8

Таким образом, значения параметра m, удовлетворяющие системе неравенств (1.19), образуют множество $(1;5)\cap((-\infty;-4)\cup(1;2))=(1;2)$ (см. рис. 1.9).

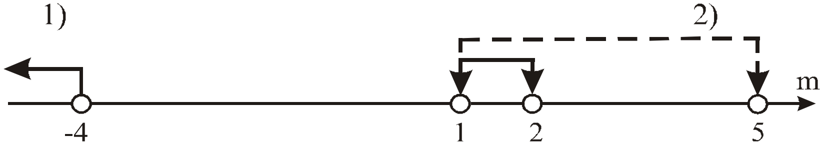


Рис. 1.9

Получаем, что $m\in(1,2)$.

Ответ: $m\in(1,2)$.

Пример 1.13. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $(2a+1)x^2+(a+3)x+(2-3a)=0$ меньше -1.

Решение. Относительно параметра a следует рассмотреть два случая: $2a+1=0$ и $2a+1\neq 0$.

При $2a+1=0$, то есть при $a=-\frac{1}{2}$, получим линейное уравнение

$$2.5x+3.5=0.$$

Следовательно, в данном случае $x=-1.4<-1$. Таким образом, значение параметра $a=-\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию поставленной задачи.

Рассмотрим теперь случай $2a+1\neq 0$, то есть $a\neq -\frac{1}{2}$. Приведем данное уравнение к виду

$$x^2+\frac{(a+3)}{(2a+1)}x+\frac{(2-3a)}{(2a+1)}=0.$$

Поставленная задача относится к задачам типа II, поэтому следует проверить условия (1.16)

$$\begin{cases} D=p^2-4q\geq 0, \\ f(-1)>0, \\ x_в=\dfrac{-p}{2}<-1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{(a+3)^2}{(2a+1)^2}-4\dfrac{(2-3a)}{(2a+1)}\geq 0, \\ \dfrac{(2a+1-a-3+2-3a)}{(2a+1)}>0, \\ \dfrac{-(a+3)}{2(2a+1)}<-1. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство отдельно, а затем найдем пересечение полученных промежутков.

1) $\dfrac{(a+3)^2}{(2a+1)^2}-4\dfrac{(2-3a)}{(2a+1)}\geq 0 \iff$

$$\begin{cases} a^2+6a+9-4(4a+2-6a^2-3a)\geq 0, \\ a\neq -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \iff \begin{cases} 25a^2+2a+1\geq 0, \\ a\neq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Так как $D_1 = 1 - 25 = -24 < 0$ и $25 > 0$, то неравенство $25a^2 + 2a + 1 \geq 0$ справедливо для любого действительного числа a. Таким образом, первое неравенство выполняется для любого $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

2) $\dfrac{(2a+1-a-3+2-3a)}{(2a+1)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(-2a)}{(2a+1)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{2a+1} < 0$, откуда (см. рис. 1.10) $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

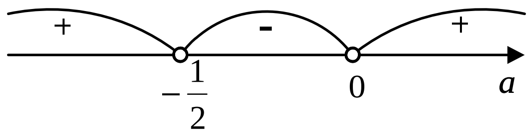


Рис. 1.10

3) $\dfrac{-(a+3)}{2(2a+1)} < -1 \Leftrightarrow \dfrac{-(a+3)}{2(2a+1)} + 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-a-3+4a+2}{2(2a+1)} < 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{3a-1}{(2a+1)} < 0$, откуда (см. рис. 1.11) $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

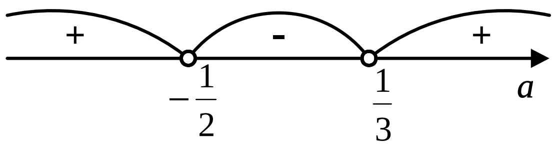


Рис. 1.11

4) Найдем пересечение полученных промежутков: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (см. рис. 1.12).

Таким образом, при $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ уравнение имеет два корня, каждый из которых меньше -1.

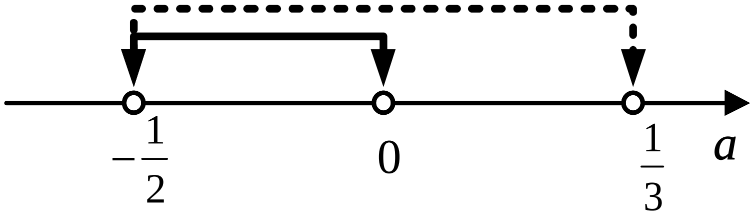


Рис. 1.12

Объединяя найденные решения $a = -\frac{1}{2}$ и $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, окончательно получаем $a \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Пример 1.14. Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $(p+1)x^2 + (p-5)x + 2p = 0$ имеет корни большие 1.

Решение. Пусть $p+1=0$, то есть $p=-1$. Тогда уравнение принимает вид

$$-6x - 2 = 0.$$

Следовательно, оно имеет решение $x = -\frac{1}{3} < 1$ и параметр $p=-1$ не удовлетворяет условиям задачи.

Пусть $p \neq -1$. Приведем данное уравнение к виду

$$x^2 + \frac{(p-5)}{(p+1)}x + \frac{2p}{(p+1)} = 0.$$

В соответствии с теоремой 1.5 параметр p должен удовлетворять системе неравенств (1.15), а именно

$$\begin{cases} D = p^2 - 4q \geq 0, \\ f(1) > 0, \\ x_в = -\dfrac{p}{2} > 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{(p-5)^2}{(p+1)^2} - 4\dfrac{2p}{(p+1)} \geq 0, \\ \dfrac{(p+1+p-5+2p)}{(p+1)} > 0, \\ \dfrac{-(p-5)}{2(p+1)} > 1. \end{cases}$$

Решим каждое из полученных неравенств в отдельности, а затем найдем пересечение числовых промежутков, являющихся решением этих неравенств.

1) $\dfrac{(p-5)^2}{(p+1)^2} - 4\dfrac{2p}{(p+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$p^2 - 10p + 25 - 8p^2 - 8p \geq 0 \Leftrightarrow 7p^2 + 18p - 25 \leq 0.$$

Так как $D_1 = 9^2 + 7 \cdot 25 = 256 = 16^2$, то

$$p_1 = \frac{-9+16}{7} = 1, \; p_2 = \frac{-9-16}{7} = -\frac{25}{7}$$

и неравенство

$$7p^2 + 18p - 25 \leq 0$$

принимает вид

$$7\left(p + \frac{25}{7}\right)(p-1) \leq 0, \text{ откуда } p \in \left[-\frac{25}{7}, 1\right].$$

2) $\dfrac{(p+1+p-5+2p)}{(p+1)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(4p-4)}{(p+1)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(p-1)}{(p+1)} > 0,$

откуда $p \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

3) $\dfrac{-(p-5)}{2(p+1)} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{-p+5}{2(p+1)} - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-p+5-2p-2}{2(p+1)} > 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{p-1}{p+1} < 0, \text{ откуда } p \in (-1,1).$$

Таким образом, искомые значения параметра p должны удовлетворять условиям: $p \in \left[-\frac{25}{7}, 1\right]$, $p \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и $p \in (-1,1)$. Так как второе и третье условия одновременно не выполняются, то не существует такого значения параметра p, при котором уравнение $(p+1)x^2 + (p-5)x + 2p = 0$ имеет корни, большие 1.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 1.15. Найти наименьшее целое значение параметра a, при котором корни уравнения $a^2x^2 + (2a+3)x + 1 = 0$ больше -2.

Решение. Рассмотрим два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

При $a = 0$ имеем линейное уравнение $3x + 1 = 0$. Его решение $x = -\frac{1}{3} > -2$ удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим теперь случай $a \neq 0$. Приведем уравнение к виду

$$x^2 + \frac{(2a+3)}{a^2}x + \frac{1}{a^2} = 0.$$

Поставленная задача относится ко второму типу, поэтому в соответствии с теоремой 1.5 параметр a должен удовлетворять системе неравенств (1.15), а именно:

$$\begin{cases} D = p^2 - 4q \geq 0, \\ f(-2) > 0, \\ x_в = \dfrac{-p}{2} > -2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{(2a+3)^2}{a^4}-\dfrac{4}{a^2}\geq 0, \\ \dfrac{\left(4a^2-4a-6+1\right)}{a^2}>0, \\ \dfrac{-(2a+3)}{2a^2}>-2. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Решим каждое полученное неравенство системы (1.20) отдельно, а затем найдем пересечение полученных промежутков.

1) $\dfrac{(2a+3)^2}{a^4}-\dfrac{4}{a^2}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2+12a+9-4a^2\geq 0, \\ a\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 12a+9\geq 0, \\ a\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -\dfrac{3}{4}, \\ a\neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, первое неравенство системы (1.20) имеет решение $a\in\left[-\dfrac{3}{4};0\right)\cup(0;+\infty)$.

2) $\dfrac{\left(4a^2-4a-6+1\right)}{a^2}>0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(4a^2-4a-5\right)}{a^2}>0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\left(a-\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}\right)\left(a-\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}\right)}{a^2}>0 \Leftrightarrow$$

$$a\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2},+\infty\right).$$

3) $\dfrac{-(2a+3)}{2a^2}>-2 \Leftrightarrow \dfrac{-2a-3}{2a^2}+2>0 \Leftrightarrow$

$$\frac{-2a-3+4a^2}{2a^2}>0 \iff \frac{4\left(a-\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right)\left(a-\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right)}{2a^2}>0$$

$$\iff a\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4},+\infty\right).$$

4) Найдем пересечение полученных промежутков:

$$\left[-\frac{3}{4};0\right)\cup(0;+\infty),\ \left(-\infty,\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$$

и

$$\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4},+\infty\right).$$

Из рис. 1.13

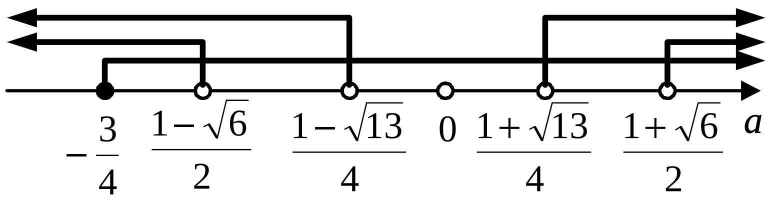


Рис. 1.13

следует, что при $a\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$ уравнение имеет два корня, каждый из которых больше -2.

Объединяя рассмотренные случаи $a=0$ и $a\neq 0$, получаем множество значений параметра

$$a\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2},+\infty\right),$$

при которых уравнение имеет два корня, каждый из которых больше -2.

По условию задачи необходимо найти наименьшее целое a. Таким значением параметра является $a = 0$.

Ответ: $a = 0$.

Пример 1.16. Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $(2-p)x^2 - x + (1-p) = 0$ имеет корни меньше 4.

Решение. Пусть $2 - p = 0$, то есть $p = 2$. Тогда уравнение принимает вид $-x - 1 = 0$. Следовательно, оно имеет решение $x = -1 < 4$ и параметр $p = 2$ удовлетворяет условиям задачи.

Пусть $p \neq 2$. Приведем уравнение к виду

$$x^2 - \frac{1}{(2-p)}x + \frac{(1-p)}{(2-p)} = 0. \tag{1.21}$$

Имеем задачу на расположение корней квадратного уравнения типа 2, поэтому параметр p должен удовлетворять системе неравенств (1.16), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} D = \dfrac{1}{(2-p)^2} - 4\dfrac{(1-p)}{(2-p)} \geq 0, \\ f(4) = \dfrac{(16(2-p) - 4 + 1 - p)}{(2-p)} > 0, \\ x_в = \dfrac{1}{2(2-p)} < 4. \end{cases} \tag{1.22}$$

Решим каждое неравенство системы (1.22) в отдельности, а затем найдем пересечение полученных числовых промежутков.

1) $\dfrac{1}{(2-p)^2} - 4\dfrac{(1-p)}{(2-p)} \geq 0 \iff \begin{cases} 1 - 4(2 - 3p + p^2) \geq 0, \\ p \neq 2 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} 4p^2 - 12p + 7 \leq 0, \\ p \neq 2. \end{cases}$$

Так как $D_1 = 6^2 - 7 \cdot 4 = 36 - 28 = 8$, то

$$p_1=\frac{6+2\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{2}}{2},\ p_2=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$$

и неравенство $4p^2-12p+7\le 0$ принимает вид

$$4\left(p-\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)\left(p-\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)\le 0,$$

откуда

$$p\in\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2};2\right)\cup\left(2;\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right].$$

2) $\dfrac{(16(2-p)-4+1-p)}{(2-p)}>0 \Leftrightarrow \dfrac{(-17p+29)}{(2-p)}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(p-\dfrac{29}{17}\right)}{(p-2)}>0$, откуда $p\in\left(-\infty,\dfrac{29}{17}\right)\cup(2,+\infty)$.

3) $\dfrac{1}{2(2-p)}<4 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{2(2-p)}-4<0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1-16+8p}{2(2-p)}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{8p-15}{(p-2)}>0$, откуда $p\in\left(-\infty,\dfrac{15}{8}\right)\cup(2,+\infty)$.

Таким образом, искомые значения параметра p должны удовлетворять условиям:

$p\in\left[\dfrac{3-\sqrt{2}}{2};2\right)\cup\left(2;\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$, $p\in\left(-\infty,\dfrac{29}{17}\right)\cup(2,+\infty)$,

$p\in\left(-\infty,\dfrac{15}{8}\right)\cup(2,+\infty)$. Найдем пересечение данных промежутков и получим, что

$$p\in\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2},\frac{29}{17}\right)\cup\left(2,\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right].$$

Ответ: $\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{29}{17}\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$.

1.4. Методы решения алгебраических уравнений высших степеней

Теоретические сведения

Будем рассматривать уравнение (1.1), т.е.

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \mathbf{K} + a_{n-1}x + a_n = 0$$

при $n \geq 3$.

Для $n = 3$ (кубическое уравнение) и $n = 4$ имеются формулы корней уравнения $P_n(x) = 0$ в радикалах, известные под именем формул Кордано.

При $n \geq 5$ уравнение (1.1) неразрешимо в радикалах, т.е. решение уравнения $P_n(x) = 0$ при $n \geq 5$ нельзя выразить через его коэффициенты $a_0, a_1, \mathbf{K}, a_n$ с помощью конечного числа арифметических операций (операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения арифметического корня). Доказательство этого утверждения впервые было получено норвежским математиком Абелем в 1826 году.

В отдельных случаях решение алгебраических уравнений высших степеней, в том числе третьей и четвертой, удается найти достаточно просто. Такая возможность полностью определяется коэффициентами $a_0, a_1, \mathbf{K}, a_n$ многочлена $P_n(x)$.

Для любых данных многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, $m \leq n$, существуют и при этом единственные многочлены $F_{n-m}(x)$ и $R_r(x)$, $r < m$, такие, что

$$P_n(x) = Q_m(x) F_{n-m}(x) + R_r(x) \qquad (1.23)$$

или

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = F_{n-m}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_m(x)}.$$

В частности, если $Q_m(x) = x - a$ $(m = 1)$, то

$$P_n(x) = (x-a)F_{n-1}(x) + R_0 . \qquad (1.24)$$

Многочлен $F_{n-m}(x)$ называется неполным частным, а $R_r(x)$ – остатком от деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$.

Теорема Безу. Остаток R_0 от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен $P_n(a)$.

Следствие. Если a является корнем уравнения $P_n(x)$ ($P_n(a)=0$), то многочлен $P_n(x)$ делится на двучлен $(x-a)$ без остатка, т.е. существует многочлен $F_{n-1}(x)$ такой, что $P_n(x) = (x-a)F_{n-1}(x)$.

Уравнение (1.1) в этом случае равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x = a, \\ F_{n-1}(x) = 0. \end{array}\right.$$

Деление одного многочлена $P_n(x)$ на другой $Q_m(x)$, $m \le n$, можно производить «уголком». Например

$$\begin{array}{r|l} 2x^5+4x^4+5x^3+5x^2+13x+7 & x^2+2x+2 \\ \cline{2-2} & 2x^3+x+3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\underline{2x^5+4x^4+4x^3} \qquad\qquad\qquad\quad \\ x^3+5x^2+13x+7 \\ -\underline{x^3+2x^2+2x} \quad\;\; \\ 3x^2+11x+7 \\ -\underline{3x^2+6x+6} \\ 5x+1 \end{array}$$

Отсюда

$$\frac{2x^5+4x^4+5x^3+5x^2+13x+7}{x^2+2x+2}=2x^3+x+3+\frac{5x+1}{x^2+2x+2}.$$

Здесь $F_3(x)=2x^3+x+3$ – неполное частное,

$R_1(x)=5x+1$ – остаток от деления многочлена

$$P_5(x)=2x^5+4x^4+5x^3+5x^2+13x+7$$

на многочлен $Q_2(x)=x^2+2x+2$.

Деление многочлена $P_n(x)$ на двучлен удобно производить по схеме Горнера (наряду с делением «уголком»).

Покажем, как используется схема Горнера. В соответствии с (1.24) существуют многочлены

$$F_{n-1}(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1} \text{ и } R_0=c$$

такие, что имеет место тождество

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$

$$=(x-a)\left(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}\right)+c$$

или

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$

$$=b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-1}+(b_2-ab_1)x^{n-2}+\ldots+$$

$$+(b_{n-1}-ab_{n-2})x+(c-ab_{n-1}).$$

Из условия тождественного равенства двух многочленов (два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях) получаем систему равенств

$$\begin{cases} b_0 = a_0\,, \\ b_1 - ab_0 = a_1\,, \\ b_2 - ab_1 = a_2\,, \\ \mathbf{KKKKK}\,, \\ c - ab_{n-1} = a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = a_0\,, \\ b_1 = ab_0 + a_1\,, \\ b_2 = ab_1 + a_2\,, \\ \mathbf{KKKKKKK}\,, \\ b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}\,, \\ R_0 = c = ab_{n-1} + a_n\,, \end{cases} \tag{1.25}$$

откуда следует, что коэффициенты $b_1,...,b_{n-1}$ многочлена $F_{n-1}(x)$ и R_0 однозначно определяются через коэффициенты $a_0,a_1,...,a_n$ многочлена $P_n(x)$ и число a . При этом коэффициенты $b_0,b_1,...,b_{n-1},c$ находятся по одинаковой схеме – найденный на предыдущем шаге коэффициент b_{k-1} умножается на число a и к полученному произведению ab_{k-1} прибавляется числовое значение коэффициента a_k , т.е. $b_k = ab_{k-1} + a_k$, $k = 2,3,...,n-1$. Формулы (1.25) составляют содержание схемы Горнера. Нахождение коэффициентов $b_0,b_1,...,b_{n-1}$, R_0 по схеме Горнера удобно производить с помощью таблицы:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$\ldots$	$b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$	R_0

В верхней строке таблицы записываются коэффициенты многочлена $P_n(x)$ (делимого). При этом первый столбец таблицы пропускается.

В первом столбце нижней строки таблицы записывается числовое значение коэффициента a многочлена $Q_1(x) = x - a$ (делителя). Во второй столбец нижней строки «списывается» числовое значение коэффициента a_0 из верхней строки. Для получения числового значения коэффициента b_1 в третьем столбце нижней строки перемножаем числа из первого и второго столбцов нижней строки (ab_0) и прибавляем к полученному результату числовое значение коэффициента a_1 из верхней строки

	$\dots$		a_k	$\dots$
a	$\dots$	b_{k-1}	$ab_{k-1}+a_k$	$\dots$

Разделим многочлен $P_5(x)=x^5+2x^4-6x^2-8x-24$ на двучлен $Q_1(x)=x-2 \quad (a=2)$ по схеме Горнера

	1	2	0	-6	-8	-24
2	1	2·1+2=4	2·4+0=8	2·8-6=10	2·10-8=12	2·12-24=0

или

	1	2	0	-6	-8	-24
2	1	4	8	10	12	0

отсюда следует, что многочлен $P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^2 - 8x - 24$ делится на двучлен $Q_1(x) = x - 2$ без остатка, а это, в свою очередь, означает, что $x = 2$ – корень уравнения

$$x^5 + 2x^4 - 6x^2 - 8x - 24 = 0.$$

При этом

$$x^5 + 2x^4 - 6x^2 - 8x - 24 = (x-2)\left(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 10x + 12\right).$$

- Уравнение $P_n(x) = 0$ степени n может иметь не более n действительных корней с учетом их кратности. При этом уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.
- Если действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями уравнения $P_n(x) = 0$, то имеет место тождество

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \quad (1.26)$$

- Из тождества (1.26) следуют формулы Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_1 x_2 x_n + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\dfrac{a_3}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} x_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases} \quad (1.27)$$

В частности, если действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями кубического уравнения

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,$$

то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{a_3}{a_0}. \end{cases}$$

- Если рациональное число $\dfrac{p}{q}$, где $\dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь, является корнем уравнения с целыми коэффициентами, то p должно быть делителем свободного члена a_n, а q – делителем коэффициента a_0 при старшей степени x^n. В частности, целые корни $x_0=p$ приведенного уравнения $x^n+a_1+...+a_{n-1}x+a_n=0$ с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена a_n. Это утверждение следует из последнего равенства в (1.27).
- Если сумма всех коэффициентов уравнения $P_n(x)=0$ равна нулю, то уравнение имеет корень $x=1$.

Например, сумма коэффициентов уравнения

$$3x^5+7x^4-x^3+2x^2-4x-7=0$$

равна нулю, поэтому оно имеет корень $x=1$.
- Если в уравнении сумма коэффициентов при нечетных степенях равна сумме свободного члена и коэффициентов при четных степенях, то уравнение имеет корень $x=-1$.

Например, в уравнении

$$5x^4+3x^3-x^2+7x+6=0$$

имеем $5-1+6=3+7$, поэтому $x=-1$ – корень уравнения.

Рассмотрим отдельные классы алгебраических уравнений высших степеней и изучим методы их решения.

1.4.1. Биквадратные уравнения

Определение 1.5. Биквадратным называется уравнение вида

$$ax^4+bx^2+c=0, \tag{1.28}$$

где $a\neq 0$.

Для решения этого уравнения используется замена переменных $y=x^2$, где $y\geq 0$. При этом получается квадратное уравнение

$$ay^2+by+c=0.$$

Если y_1 и y_2 - его решения, то исходное биквадратное уравнение будет равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2=y_1, \\ x^2=y_2. \end{array}\right.$$

Пример 1.16. Решить уравнение

а) $x^4-7x^2+6=0$; б) $x^4-3x^2-4=0$; в) $x^4+3x^2+2=0$.

Решение.

а) $x^4-7x^2+6=0,$

$y=x^2,$

$y^2-7y+6=0,$

$y_1=1,\quad y_2=6,$

б) $x^4-3x^2-4=0,$

$y=x^2,$

$y^2-3y-4=0,$

$y_1=4,\quad y_2=-1,$

$x^2 = 1, \quad x^2 = 6,$ $\qquad\qquad$ $x^2 = 4, \quad x^2 = -1,$

$x = \pm 1, \quad x = \pm\sqrt{6}.$ $\qquad\qquad$ $x = \pm 2, \quad \varnothing.$

в) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0,$

$y = x^2,$

$y^2 + 3y + 2 = 0,$

$y_1 = -2, \quad y_2 = -1,$

$x^2 = -2, \quad x^2 = -1,$ решений нет.

Ответ: а) ± 1; $\pm\sqrt{6}$; б) $x = \pm 2$; в) решений нет.

Так как уравнение (1.28) является уравнением четвертой степени, то оно имеет не более четырех действительных корней. Найдем условия, от которых зависят количество и расположение на числовой прямой корней биквадратного уравнения.

Приняв $y = x^2$, получим, что уравнение (1.28) равносильно системе

$$\begin{cases} ay^2 + by + c = 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \qquad (1.29)$$

Таким образом, существование и расположение на числовой прямой корней биквадратного уравнения (1.28) связаны с существованием и расположением на числовой прямой корней квадратного уравнения (1.29). Ответ на последний вопрос получен в п.1.3 «Расположение корней квадратного уравнения».

Случай 1. Если уравнение (1.29) имеет два различных положительных корня y_1 и y_2 $\left(y_1 > 0, y_2 > 0, y_1 \neq y_2\right)$, то уравнение (1.28) имеет 4 различных корня

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}\,; \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}\,.$$

Для существования четырех различных корней биквадратного уравнения необходимо и достаточно выполнение условий (см.п.1.3)

$$\begin{cases} D_y = b^2 - 4ac > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Случай 2. Если уравнение (1.29) имеет два равных положительных корня ($y_1 = y_2 > 0$), то уравнение (1.28) имеет два различных действительных корня, каждый из которых имеет кратность 2: $x_{1,2} = -\sqrt{y_1}$, $x_{3,4} = \sqrt{y_1}$.

Для существования двух симметрично расположенных относительно нуля на числовой прямой корней биквадратного уравнения (1.28) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} b^2 - 4ac = 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b^2 - 4ac = 0\,, \\ ab < 0\,. \end{cases} \tag{1.31}$$

Случай 3. Если $y_1 = 0$, $y_2 > 0$ - корни уравнения (1.29), то уравнение (1.28) имеет три различных корня:

$$x_1 = 0\,, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{y_2}\,.$$

При этом $x_1 = 0$ - корень кратности два.

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} c = 0, \\ \dfrac{b}{a} < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c = 0, \\ ab < 0. \end{cases} \tag{1.32}$$

Случай 4. Если $y_1 < 0$, $y_2 > 0$, то уравнение (1.28) имеет два различных корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_2}$. Для того чтобы имел место случай 4, необходимо и достаточно выполнение условия

$$ac < 0. \tag{1.33}$$

Случай 5. Если $y_1 < 0$, $y_2 = 0$, то уравнение (1.28) имеет один корень $x = 0$ кратности 2.

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} c = 0, \\ ab > 0. \end{cases} \tag{1.34}$$

Случай 6. Если $y_1 = y_2 = 0$ - корень уравнения (1.29), то уравнение (1.28) имеет один корень $x = 0$ кратности 4. Для этого необходимо и достаточно выполнение условия

$$b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, \\ c = 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

Случай 7. Если уравнение (1.29) не имеет корней ($y_1 < 0$, $y_2 < 0$), то и уравнение (1.28) не имеет действительных корней. Этот случай имеет место при условии, что

$$D = b^2 - 4ac < 0. \tag{1.36}$$

Пример 1.18. Найти значения параметра p, при которых уравнение

$$px^4 - (3 - p)x^2 + p^2 - 5p + 6 = 0 \tag{1.37}$$

имеет нечетное число различных корней.

Решение. Способ 1. Нечетное число корней для уравнения четвертой степени – это один или три корня. При этом $x=0$ обязано быть корнем уравнения. В противном случае ($x=0$ - не является корнем уравнения) в силу четности функции $P_4(x)$ в левой части уравнения оно (уравнение) либо имеет четное число корней, либо не имеет их вообще. Если $x=0$ – корень уравнения, то должно выполняться равенство

$$P_4(0)=p^2-5p+6=0,$$

откуда $p_1=2$, $p_2=3$. Если $p_1=2$, то (1.30) принимает вид уравнения

$$2x^4-x^2=0,$$

которое имеет три различных корня $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Если $p=3$, то получаем уравнение $3x^4=0$, которое имеет один корень $x=0$ кратности четыре.

Способ 2. Нечетное число разных корней – один или три – уравнение (1.30) может имеет только в случаях 3 (три корня), 5 и 6 (один корень). Три корня уравнение (1.30) будет иметь тогда и только тогда (см.случай 3), когда

$$\begin{cases} c\equiv p^2-5p+6=0, \\ ab=p(p-3)>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad p=2.$$

Один корень уравнения (1.30) будет иметь тогда и только тогда, когда (случай 5):

$$\begin{cases} c=p^2-5p+6=0 \\ ab=p(p-3)>0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad p\in\varnothing,$$

(случай 6):

$$b^2+c^2=(p-3)^2+((p-2)(p-3))^2=0\Leftrightarrow p=3.$$

Ответ: нечетное число различных корней уравнение (1.30) имеет при $p = 2$ или $p = 3$.

Пример 1.19. Найти значения параметра p, при которых уравнение

$$(p-2)x^4 + (2p-3)x^2 + (p-3) = 0$$

имеет два различных корня.

Решение. Два различных корня биквадратное уравнение может иметь в случаях 2 и 4.

Случай 2. В соответствии с (1.31)

$$\begin{cases} b^2 - 4ac = (2p-3)^2 - 4(p-2)(p-3) = 0, \\ ab = (p-2)(2p-3) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8p - 15 = 0, \\ \dfrac{3}{2} < p < 2, \end{cases}$$

откуда $p = \dfrac{15}{8}$.

Случай 4. В соответствии с (1.33) уравнение будет иметь два различных корня при выполнении условия

$$ac = (p-2)(p-3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < p < 3.$$

Ответ: $p \in \left\{\dfrac{15}{8}\right\} \cup (2;3)$.

Пример 1.20. Найти значения параметра p, при которых уравнение

$$(p^2 - 4)x^4 - 2x^2 + p^2 - 4p + 3 = 0 \qquad (1.38)$$

имеет один корень.

Решение. Если уравнение (1.38) имеет один корень, то им должно быть значение $x = 0$. Это следует из четности функции

$$P_4(x) = \left(p^4 - 4\right)x^4 - 2x^2 + p^2 - 4p + 3 .$$

При $x = 0$ из (1.38) получаем уравнение относительно параметра p

$$p^2 - 4p + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} p = 1, \\ p = 3. \end{array}\right.$$

Таким образом, при $p = 1$ или $p = 3$ уравнение (1.38) имеет решение $x = 0$. Однако при этих значениях параметра p оно может иметь и другие решения. Проверим это.

При $p = 1$ уравнение (1.38) принимает вид

$$-3x^4 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\left(3x^2 + 2\right) = 0 .$$

Полученное уравнение имеет единственное решение $x = 0$.

При $p = 3$ из (1.38) получаем уравнение

$$5x^4 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\left(5x^2 - 2\right) = 0 ,$$

которое имеет три корня $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Ответ: $p = 1$.

Комментарий к примерам 1.18 и 1.20.

Уравнение $f(x) = 0$, в составе которого $f(x)$ является четной функцией, имеет нечетное число корней тогда и только тогда, когда $x = 0$ является решением данного уравнения. Однако это условие является только необходимым для того, чтобы уравнение $f(x) = 0$ с четной функцией $f(x)$ имело единственное решение.

Пример 1.21. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$x^4+(1-2p)x^2+p^2-2p+2=0 \tag{1.39}$$

имеет два различных корня, удовлетворяющих условию $x_1 \cdot x_2 < -1$.

Решение. Два различных корня биквадратное уравнение (1.39) может иметь в двух случаях:

а) отвечающее ему квадратное уравнение

$$f(y) \equiv y^2+(1-2p)y+p^2-2p+2=0\,, \tag{1.40}$$

где $y=x^2$ имеет два равных положительных корня $y_1=y_2$.

Тогда $x_1=-\sqrt{y_1}$, $x_2=\sqrt{y_1}$ и в соответствии с условием задачи должно выполняться неравенство $x_1 \cdot x_2=-y_1<-1$ или $y_1>1$;

б) уравнение (1.40) имеет один отрицательный корень $y_1<0$ и один положительный $y_2>0$. В этом случае $x_1=-\sqrt{y_2}$, $x_2=\sqrt{y_2}$ и должно выполняться неравенство $x_1 \cdot x_2=-y_2<-1$ или $y_2>1$.

Рассмотрим оба случая отдельно:

$$\text{а) } \begin{cases} D=(1-2p)^2-4\left(p^2-2p+2\right)=0, \\ y_1=\dfrac{2p-1}{2}>1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4p-7=0, \\ 2p-3>0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p=\frac{7}{4};$$

б) уравнение (1.40) будет иметь два различных корня y_1 и y_2, удовлетворяющие условиям $y_1 < 0$ и $y_2 > 1$ тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств [см.п.1.3, тип IV, условия (1.18)]:

$$\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p^2 - 2p + 2 < 0, \\ p^2 - 4p + 4 < 0. \end{cases}$$

Однако эта система неравенств не имеет решения.

Ответ: $p = \dfrac{7}{4}$.

1.4.2. Метод подбора корня (корней)

Выше в теоретических сведениях к подразделу 1.3 было отмечено, что если приведенное алгебраическое уравнение (1.1) ($a_0 = 1$) с целыми коэффициентами имеет целые корни, то их нужно искать среди делителей свободного члена a_n уравнения (1.1). Рациональные корни $x_0 = \dfrac{p}{q}$ уравнения (1.1) с целыми коэффициентами следует искать среди чисел $\dfrac{p}{q}$ таких, что p является делителем свободного члена a_n, а q - делителем коэффициента a_0 при старшей степени x в уравнении (1.1). Эти свойства лежат в основе метода подбора корней алгебраического уравнения.

Пример 1.22. Решить уравнение

$$x^4 - x^3 - 13x - 15 = 0.$$

Решение. Данное уравнение является приведенным и имеет целые коэффициенты. Поэтому целые корни данного уравнения (если они есть) содержатся среди делителей свободного члена

$a_4 = -15 : \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$. Легко убедиться, что $x = -1$ является корнем уравнения. Чтобы найти остальные корни, разделим многочлен $x^4 - x^3 - 13x - 15$ на двучлен $(x+1)$ «уголком»:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 - 13x - 15 & x+1 \\ \cline{2-2}
& x^3 - 2x^2 + 2x - 15 \\
-\underline{x^4 + x^3} & \\
\quad -2x^3 - 13x - 15 & \\
\quad -\underline{-2x^3 - 2x^2} & \\
\qquad\quad 2x^2 - 13x - 15 & \\
\qquad\quad -\underline{2x^2 + 2x} & \\
\qquad\qquad -15x - 15 & \\
\qquad\qquad -\underline{-15x - 15} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

или по схеме Горнера:

	1	-1	0	-13	-15
-1	1	-2	2	-15	0

Для уравнения $x^3 - 2x^2 + 2x - 15 = 0$ вновь подбором найдем корень $x = 3$, а затем разделим многочлен $x^3 - 2x^2 + 2x - 15$ на двучлен $x - 3$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2+2x-15 & \underline{\;x-3\;} \\
 & x^2+x+5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-\,\underline{x^3-3x^2\qquad\qquad} \\
x^2+2x-15 \\
-\,\underline{-x^2-3x\qquad} \\
5x-15 \\
-\,\underline{5x-15} \\
0.
\end{array}
$$

Уравнение $x^2+x+5=0$ действительных корней не имеет. Таким образом, исходное уравнение 4-й степени имеет два действительных корня.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=3$.

Пример 1.23. Решить уравнение

$$30x^3+x^2-6x-1=0.$$

Решение. При решении данного уравнения можно искать его корни в виде несократимой дроби $\dfrac{p}{q}$. Однако если свободный член a_n алгебраического уравнения (1.1) равен ± 1, а $a_0 \neq 1$, то предпочтительнее ввести новую переменную $y=\dfrac{1}{x}$. (Проверьте, что $x=0$ не является корнем исходного уравнения.)

После замены переменных новое уравнение $y^3+6y^2-y-30=0$ является приведенным (коэффициент при старшей степени равен 1). Поэтому целые корни данного уравнения находятся среди делителей свободного члена

$a_3 = -30 : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$. Подстановкой убеждаемся, что $y_1 = 2$, $y_2 = -3$ и $y_3 = -5$ – искомые решения. Им будут соответствовать корни исходного уравнения $x_1 = \dfrac{1}{y_1} = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{y_2} = -\dfrac{1}{3}$ и $x_3 = \dfrac{1}{y_3} = -\dfrac{1}{5}$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$ и $x_3 = -\dfrac{1}{5}$.

Пример 1.24. Решить уравнение

$$\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + x - 2\right) = 4.$$

Решение. Если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то получится уравнение $x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0$, которое решать весьма сложно. Хотя оно и является уравнением с целыми коэффициентами, но целых корней, как увидим ниже, оно не имеет. Поэтому воспользуемся другим способом: введем новую переменную $y = x^2 + x$ и решим квадратное уравнение $(y+1)(y-2) = 4$. Его корни: $y_1 = 3$ и $y_2 = -2$. Соответственно исходное уравнение будет равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2 + x = 3, \\ x^2 + x = -2. \end{array}\right.$ Решим полученные квадратные уравнения.

$$\begin{array}{lcl} x^2 + x - 3 = 0, & & x^2 + x + 2 = 0, \\ D = 1 + 12 = 13 > 0, & \text{или} & D = 1 - 8 = -7 < 0, \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}. & & \text{решений нет.} \end{array}$$

Таким образом, исходное уравнение 4-й степени имеет два корня $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

- Если при замене переменных исходное уравнение упрощается (например, понижается его степень), то смело вводим новую переменную.

Пример 1.25. Решить уравнение

$$x^3 + x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Решение. Данное уравнение можно решать двумя способами.

Способ 1. Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\left(x^3 - 8\right) + \left(x^2 - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) + x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left(x^2 + 3x + 4\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x^2 + 3x + 4 = 0. \end{array}\right.$$

Уравнение

$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

не имеет решений, поскольку $D = 9 - 16 = -7 < 0$.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение $x = 2$.

Способ 2. Так как данное уравнение является приведенным и имеет целые коэффициенты, то найдем один его корень подбором среди делителей свободного члена -8: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Легко убедиться, что $x = 2$ является корнем уравнения. Чтобы найти остальные корни, разделим многочлен $x^3 + x^2 - 2x - 8$ на двучлен $(x-2)$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2-2x-8 & \dfrac{x-2}{x^2+3x+4} \\
-\underline{x^3-2x^2} & \\
3x^2-2x-8 & \\
-\underline{3x^2-6x} & \\
4x-8 & \\
-\underline{4x-8} & \\
0. &
\end{array}
$$

Получим совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x^2+3x+4=0, \end{array}\right.$$

которая решена в способе 1.

Ответ: $x=2$.

Пример 1.26. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$3x^3+4\sqrt{3}x^2+x-2\sqrt{3}=0.$$

Решение. Подобрать корни данного уравнения весьма сложно, поэтому воспользуемся следующим приемом: домножим (или разделим) данное уравнение на некоторое число так, чтобы старший член уравнения стал кубом некоторого выражения:

$$3x^3+4\sqrt{3}x^2+x-2\sqrt{3}=0 \quad |\times\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3}x^3+12x^2+\sqrt{3}x-6=0$$

Заметим, что $3\sqrt{3}x^3=\left(\sqrt{3}x\right)^3$, и введем новую переменную $y=\sqrt{3}x$. В результате получим уравнение

$$y^3+4y^2+y-6=0,$$

равносильное исходному.

Подбором найдем его корни $y_1=1$, $y_2=-2$ и $y_3=-3$, которым будут соответствовать корни исходного уравнения

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2=\frac{-2}{\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\ \text{ и }\ x_3=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}.$$

Наибольшим отрицательным корнем является $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: наибольший отрицательный корень – $x=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$.

- Можно ввести еще одну переменную и рассмотреть квадратное уравнение относительно одной из полученных («старой» или «новой») переменных. Следующий пример иллюстрирует это замечание.

Пример 1.25. Найти наименьший корень уравнения

$$\left(x^2+6x-5\right)^2+x^3-5x=0.$$

Решение. Рассмотрим еще один способ решения уравнений высших степеней. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$\left(x^2+6x-5\right)^2+x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x-5\right)^2+x\left(x^2-5\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+6x-5\right)^2+x\left(x^2+6x-5\right)-6x^2=0.$$

Введем новую переменную $y=x^2+6x-5$ и получим уравнение

$$y^2+xy-6x^2=0.$$

Решим полученное уравнение как квадратное относительно y:

$$y^2 + xy - 6x^2 = 0,$$

$$D = x^2 + 24x^2 = 25x^2 = (5x)^2,$$

$$y = \frac{-x \pm 5x}{2},$$

$y_1 = -3x$ или $y_2 = 2x$.

Вернемся к переменной x, получим два квадратных уравнения.

$$x^2 + 6x - 5 = -3x,$$
$$x^2 + 9x - 5 = 0,$$
$$D = 81 + 20 = 101,$$
$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{101}}{2},$$
$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{101}}{2}, x_2 = \frac{-9 - \sqrt{101}}{2},$$

$$x^2 + 6x - 5 = 2x,$$
$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$
$$\frac{D}{4} = 4 + 5 = 9,$$
$$x = -2 \pm 3,$$
$$x_3 = -5, x_4 = 1.$$

Получили 4 решения исходного уравнения. Выберем наименьшее из них. Так как $\sqrt{101} > 10$, то $x_2 = \frac{-9 - \sqrt{101}}{2} < \frac{-9 - 10}{2} = -9.5$, поэтому x_2 – наименьшее решение.

Ответ: наименьшее решение $x_2 = \frac{-9 - \sqrt{101}}{2}$.

1.4.3. Возвратные уравнения

Определение 1.6. Возвратными или симметричными называются уравнения вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \mathbf{K} + a_{n-1} x + a_n = 0 ,$$

у которых равны коэффициенты, стоящие на симметричных позициях, то есть $a_k = a_{n-k}$ при $k = 0, 1, \mathbf{K}, n$.

Например, уравнение

$$x^5 - 9x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 9x + 1 = 0$$

является возвратным, так как $a_0 = 5 = a_5$, $a_1 = -9 = a_4$, $a_2 = 16 = a_3$.

Для возвратных уравнений верны следующие утверждения.

- Возвратное уравнение нечетной степени всегда имеет корень $x = -1$ и после деления на двучлен $x + 1$ приводится к возвратному уравнению четной степени.
- Возвратное уравнение четной степени может быть сведено к уравнению вдвое меньшей степени с помощью введения переменной $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Проиллюстрируем данные утверждения на примерах.

Пример 1.28. Решить уравнение

$$x^5 - 9x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 9x + 1 = 0 .$$

Решение. Нетрудно заметить, что данное уравнение является возвратным нечетной степени и, следовательно, имеет корень $x = -1$. Разделив многочлен

$$x^5 - 9x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 9x + 1$$

на двучлен $x + 1$, получим уравнение

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0 .$$

Так как $x=0$ не является корнем данного уравнения, то можно разделить его на x^2. Получим

$$x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0.$$

Сделаем замену переменных $y=x+\dfrac{1}{x}$.

Тогда

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2,$$

т.е.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Получим уравнение

$$y^2-2-10y+26=0$$

(степень уравнения понизилась вдвое!).

Решим квадратное уравнение $y^2-10y+24=0$. По теореме Виета числа $y_1=4$ и $y_2=6$ – являются его корнями. Имеем далее

$$x+\frac{1}{x}=4 \quad \Big| \times x\neq 0,$$
$$x^2-4x+1=0,$$
$$D_1=4-1=3,$$
$$x=2\pm\sqrt{3},$$

$$x+\frac{1}{x}=6 \quad \Big| \times x\neq 0,$$
$$x^2-6x+1=0,$$
$$D_1=9-1=8,$$
$$x=3\pm 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, исходное уравнение 5-й степени имеет 5 корней: $x_1 = -1$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$, $x_4 = 3 - 2\sqrt{2}$ и $x_5 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$, $x_4 = 3 - 2\sqrt{2}$ и $x_5 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Пример 1.29. Найти число различных действительных корней уравнения

$$x^6 - 3x^5 - x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Решение. Данное уравнение является возвратным уравнением четной степени, поэтому разделим его на $x^3 \neq 0$. Получим

$$x^3 - 3x^2 - x + 6 - \frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$$

или

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Пусть $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Аналогично,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) = y\left(y^2 - 2 - 1\right) = y^3 - 3y.$$

Таким образом, исходное уравнение 6-й степени будет равносильно уравнению 3-й степени

$$\left(y^3 - 3y\right) - 3\left(y^2 - 2\right) - y + 6 = 0.$$

$$\left(y^3-3y\right)-3\left(y^2-2\right)-y+6=0 \Leftrightarrow y^3-3y^2-4y+12=0 \Leftrightarrow$$
$$y^2(y-3)-4(y-3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-3)\left(y^2-4\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(y-3)(y-2)(y+2)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3, \\ y=2, \\ y=-2. \end{array}\right.$$

Вернемся к «старой» переменной x и решим три полученных уравнения:

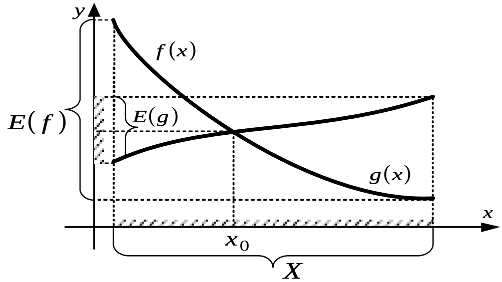
$$x+\frac{1}{x}=-2 \quad \Big| \times x \neq 0, \qquad x+\frac{1}{x}=2 \quad \Big| \times x \neq 0, \qquad x+\frac{1}{x}=3 \quad \Big| \times x \neq 0,$$
$$x^2+2x+1=0, \qquad x^2-2x+1=0, \qquad x^2-3x+1=0,$$
$$(x+1)^2=0, \qquad (x-1)^2=0, \qquad D=9-4=5,$$
$$x_{1,2}=-1, \qquad x_{3,4}=1, \qquad x_{5,6}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет 6 действительных корней, из которых 4 являются различными.

Ответ: уравнение имеет 4 различных действительных корня.

1.4.4. Использование монотонности функций и других специальных приемов

Решение уравнений вида $f(x)=g(x)$ иногда удобно строить на использовании свойства монотонности функций. В основе этого приема лежит следующая теорема.



Теорема 1.6. Пусть уравнение

$f(x)=g(x)$ определено на множестве $X \subseteq \mathbf{R}$; функция $f(x)$ является монотонно возрастающей (убывающей) на X, а $g(x)$ – монотонно убывающей (возрастающей). Если $E(f)$, $E(g)$ – области значений $f(x)$ и $g(x)$ на множестве X и $E(f) \cap E(g) \neq \varnothing$, то существует единственная точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0)=g(x_0)$, т.е. уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение.

На рис. 1.14 приведена иллюстрация к данной теореме.

- Теорема 1.6 справедлива для любых уравнений вида $f(x)=g(x)$, а не только для алгебраических.

Пример 1.30. Решить уравнение

$$32(x-2)^5+(x+1)^3=96.$$

Решение. Степенная функция $y=x^{2n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, определена на всей числовой прямой и является строго возрастающей функцией на $\mathbf{R}$. Поэтому левая часть данного уравнения $f(x)=32(x-2)^5+(x+1)^3$ является строго возрастающей функцией на $\mathbf{R}$ как сумма двух строго возрастающих функций. Правая часть $g(x)=96$ является тождественно постоянной. Поэтому в соответствии с теоремой 1.6 уравнение имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что им является $x=3$.

Ответ: $x=3$.

Для решения нестандартных алгебраических уравнений приходится привлекать различные приемы: преобразование уравнения к равносильной форме, введение новых переменных, исследование функции $f(x)$ в составе уравнения $f(x)=0$ и т.д.

Следующие три примера иллюстрируют это замечание.

Пример 1.31. Решить уравнение

$$\left(x^2+x+1\right)^2=x^2\left(3x^2+x+1\right).$$

Решение. Возведение в квадраты левой и правой частей уравнения с последующим его преобразованием приводит к стандартной форме записи (1.1), равносильной исходному уравнению

$$2x^4-x^3-2x^2-2x-1=0.$$

Попытка решить это уравнение рассмотренными выше способами не приводит к результату.

Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$\left(x^2+x+1\right)^2=x^2\left(\left(x^2+x+1\right)+2x^2\right).$$

Поскольку $x^2+x+1\neq 0$ для всех $x\in\mathbf{R}$, то, разделив обе части последнего уравнения на $\left(x^2+x+1\right)^2$, получим

$$1=\frac{x^2}{x^2+x+1}\left(1+2\frac{x^2}{x^2+x+1}\right).$$

Обозначив $y=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$, приходим к уравнению

$$y(1+2y)=1 \quad \text{или} \quad 2y^2+y-1=0,$$

которое имеет решения $y_1=-1$ и $y_2=\dfrac{1}{2}$.

Вернувшись к «старой» переменной x, получим два уравнения

$$\frac{x^2}{x^2+x+1}=-1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}.$$

Первое уравнение не имеет решений, поскольку $\dfrac{x^2}{x^2+x+1} \geq 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

Решим второе уравнение:

$$\frac{x^2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Пример 1.32. Решить уравнение

$$(1+x)^8 + \left(1+x^2\right)^4 = 2x^4. \tag{1.41}$$

Решение.

Способ 1 (метод симметризации).

$$(1+x)^8 + \left(1+x^2\right)^4 = 2x^4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1+2x+x^2\right)^4 + \left(1+x^2\right)^4 = 2x^4.$$

Введем новую переменную

$$y = \frac{1+2x+x^2+1+x^2}{2} = 1+x+x^2.$$

Тогда $1+2x+x^2 = y+x$, $1+x^2 = y-x$ и уравнение (1.41) принимает следующий вид:

$$\left(1+2x+x^2\right)^4 + \left(1+x^2\right)^4 = 2x^4 \Leftrightarrow (y+x)^4 + (y-x)^4 = 2x^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^4 + 4y^3x + 6y^2x^2 + 4yx^3 + x^4\right) +$$

$$+ \left(y^4 - 4y^3x + 6y^2x^2 - 4yx^3 + x^4\right) = 2x^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2\left(y^2+6x^2\right)=0.$$

Полученное уравнение имеет единственное решение $x=0$, $y=0$. Откуда следует, что исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x=0, \\ x^2+x+1=0, \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$$

Способ 2. Разделим обе части уравнения (1.41) на x^4. Получим равносильное уравнение [равносильное потому, что $x=0$ не является решением уравнения (1.41)]:

$$\left(\frac{1}{x}+2+x\right)^4+\left(\frac{1}{x}+x\right)^4=2. \qquad (1.42)$$

Далее решение можно продолжать двумя способами:

1) приняв $x+\dfrac{1}{x}=t$, получим уравнение

$$(t+2)^4+t^4=2$$

или

$$t^4+4t^3+12t^2+16t+7=0.$$

Оно имеет единственное решение $t=-1$ - корень кратности 2 (получите самостоятельно методом подбора). Имеем

$$x+\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0 \text{ (при } x\neq 0\text{)}.$$

Уравнение $x^2+x+1=0$ не имеет действительных корней:

2) при $x>0$ имеем $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ и как следствие

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}+2+x\right)^4+\left(\frac{1}{x}+x\right)^4 \ge 4^4+2^4=272,$$

откуда следует, что при $x>0$ уравнение (1.42) не имеет решения.

При $x<0$ $x+\dfrac{1}{x}\le -2$ и, как следствие $f(x)\ge 2^4=16$, т.е. и в этом случае уравнение (1.42) не имеет решения.

Способ 3.

$$(1+x)^8+\left(1+x^2\right)^4=2x^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^8+1+4x^2+6x^4+4x^6+x^8-2x^4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(x)\equiv (1+x)^8+x^8+4x^6+4x^4+4x^2+1=0.$$

Но $Y(x)\ge 2$ для любого $x\in R$ и потому уравнение $Y(x)=0$, а значит и исходное (1.41), не имеет решения.

Ответ: $\varnothing$

Пример 1.33. Решить уравнение

$$\left(2x^2-8x+9\right)^3+3\left(x^2-4x+5\right)^2=4.$$

Решение. Данный пример можно решать двумя способами.

Способ 1. Введем новые переменные $u=2x^2-8x+9$ и $v=x^2-4x+5$. При этом исходное уравнение будет равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} u^3+3v^2=4, \\ u-2v=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{u+1}{2}, \\ u^3+3\dfrac{u^2+2u+1}{4}=4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4u^3+3u^2+6u-13=0 .$$

Полученное уравнение равносильно двум уравнениям:

$$u=1 \quad \text{или} \quad 4u^2+7u+13=0 .$$

Если $u=1$, то $v=1$.

Если $4u^2+7u+13=0$, то решений нет.

Вернемся к переменной x и получим

$$x^2-4x+5=1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2-4x+4=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x=2.$$

Таким образом, уравнение имеет один корень $x=2$ кратности 2.

Способ 2. Введем новую переменную $y=x^2-4x+5$. Тогда

$$(2y-1)^3+3y^2=4,$$
$$8y^3-12y^2+6y-1+3y^2-4=0,$$
$$8y^3-9y^2+6y-5=0.$$

$y=1$ – корень данного уравнения (найден подбором). Разделим многочлен $8y^3-9y^2+6y-5$ на двучлен $y-1$ по схеме Горнера:

	8	-9	6	-5
1	8	-1	5	0

Уравнение $8y^2-y+5=0$ не имеет решений, так как его дискриминант $D<0$.

Если $y=1$, то $x^2-4x+5=1$ и, следовательно, $x=2$ – корень кратности 2.

Ответ: $x=2$.

2. Рациональные уравнения

Теоретические сведения

Определение 2.1. Рациональной называется функция

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n,\ n\in N\ ,$$

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m,\ m\in N\ , -$$

многочлены степени n и m соответственно.

Функция $y=P_n(x)$ является частным случаем рациональной функции $R(x)$ [при $Q_m(x)\equiv 1$] и называется также целой рациональной функцией.

Простейшим примером рациональной функции является дробно-линейная функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d - заданные действительные числа и $ad-bc\neq 0$.

Определение 2.2. Рациональным называется уравнение

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0 \qquad (2.1)$$

или

$$R(x)=0.$$

Уравнение (2.1) равносильно уравнению

$$P_n(x)=0$$

при $x \in R$, $x \neq x_1, x_2, \ldots, x_k$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – корни уравнения $Q_m(x) = 0$ (нули многочлена $Q_m(x)$), т.е. равносильно системе

$$\begin{cases} P_n(x) = 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

Определение 2.3. Дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется правильной, если $n < m$, и неправильной в противном случае ($n \geq m$).

Всякую неправильную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде суммы целой рациональной функции и правильной дроби, т.е. существуют многочлены $F_{n-m}(x)$ и $R_r(x)$, $r < m$, такие, что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = F_{n-m} + \frac{R_r(x)}{Q_m(x)}. \tag{2.2}$$

2.1. Простейшие рациональные уравнения

Пример 2.1. Решить уравнение

$$\frac{x^4 + x^3 + 5x^2 + 6x + 3}{x^2 + 4} = x^2 + x + 1.$$

Решение. Разделив многочлен $x^4 + x^3 + 5x^2 + 6x + 3$ на $\left(x^2 + 4\right)$ уголком, получим равносильное уравнение

$$x^2 + x + 1 + \frac{2x - 1}{x^4 + 4} = x^2 + x + 1,$$

откуда

$$\frac{2x-1}{x^4+4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

Пример 2.2. Решить уравнение

$$\frac{x^2+x-12}{x^3-2x^2-5x+6}=0 \; .$$

Решение.

$$\frac{x^2+x-12}{x^3-2x^2-5x+6}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-12=0, \\ x^3-2x^2-5x+6\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+4)=0, \\ (x-1)(x-3)(x+2)\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x=-4 \, .$$

Ответ: $x=-4$.

Замечание. Уравнение $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0$ можно решать также по следующей схем:

1) находим нули многочлена $P_n(x)$; $x_1, x_2, \ldots, x_k$;

2) проверяем каждый нуль многочлена $P_n(x)$ на удовлетворение неравенству $Q_m(x)\neq 0$.

Так, в пример 2.2

1) $x^2+x-12=0 \Leftrightarrow x_1=-4, \quad x_2=3$;

2) $Q_3(-4)=(-4)^3-2(-4)^2-5(-4)+6=-70\neq 0$;

$Q_3(3)=3^3-2\cdot 3^2-5\cdot 3+6=0$, откуда следует, что $x_1=-4$ является корнем, а $x_2=3$ - не является корнем уравнения из примера 2.2.

Решение одного, правда, достаточно узкого, класса рациональных уравнений удобно осуществлять с помощью теоремы о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

Теорема. Если

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)} -$$

правильная дробь $(n<m)$ и $x_1,x_2,\ldots,x_m$ – простые (не кратные) действительные корни многочлена $Q_m(x)$, то существуют и при этом единственные числа $A_1,A_2,\ldots,A_m$ такие, что

$$\frac{P_n(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n} \qquad (2.3)$$

Пример 2.3. Решить уравнение

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{4}{9},\ n\in N\ .$$

Решение. В соответствии с теоремой правильная дробь $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ может быть разложена на сумму дробей:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}\Leftrightarrow A(2n+1)+B(2n-1)=1. \qquad (2.4)$$

Неизвестные коэффициенты A и B могут быть найдены одним из двух способов.

Способ 1. Из условия равенства многочленов $2(A+B)n+(A-B)=1$ получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{array}{r|l} n & 2(A+B)=0, \\ n^0 & A-B=1, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=0, \\ A-B=1. \end{cases}$$

Решив систему, получим $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$.

Способ 2. Полагая в тождестве (2.5) последовательно $n=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, получаем

$$n=-\frac{1}{2}: \quad 0\cdot A-2\cdot B=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2};$$

$$n=\frac{1}{2}: \quad 2\cdot A+0\cdot B=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

Подставив в (2.4) найденные значения коэффициентов A и B, получим

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Это разложение справедливо для всех $n\in N$. Поэтому исходное уравнение можно переписать в следующей равносильной форме:

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{4}{9}.$$

После взаимного уничтожения в левой части уравнения слагаемых, отличающихся знаком, получаем уравнение

$$1-\frac{1}{2n+1}=\frac{8}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2(n-4)}{2n+1}=0,$$

откуда $n=4$.

Ответ: $n=4$.

Пример 2.4. Доказать, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отличны от нуля и образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_2 a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{n}{a_1 a_{n+1}}. \tag{2.6}$$

Решение. Пусть d - разность прогрессии и $d \neq 0$ (при $d=0$ равенство очевидно). Тогда, рассматривая a_n как переменную, а d - как фиксированную величину, получаем в соответствии с теоремой разложение

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} \equiv \frac{1}{a_n(a_n+d)}=\frac{A}{a_n}+\frac{B}{a_n+d},$$

откуда

$$A(a_n+d)+Ba_n=1$$

или в полной записи

$$(A+B)a_n+(Ad)(a_n)^0=0 \cdot a_n+1 \cdot (a_n)^0.$$

Следуя методу неопределенных коэффициентов, получаем

$$\begin{array}{c|l} a_n & A+B=0, \\ (a_n)^0 & Ad=1, \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{d}, \\ B=-\dfrac{1}{d}. \end{cases}$$

Окончательно имеем разложение

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} \equiv \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + d}\right), \qquad (2.7)$$

справедливое для любого $n \in N$. С учетом (2.7) левая часть доказываемого тождества (2.6) примет вид

$$\frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right] = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{a_{n+1} - a_1}{d a_1 a_{n+1}} = \frac{(a_1 + nd) - a_1}{d a_1 a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}},$$

что и требовалось доказать.

2.2. Уравнения с модулем

Теоретические сведения

Будем рассматривать уравнения вида

$$|f(x)| = g(x), \tag{2.8}$$

где $f(x)$, $g(x)$ - рациональные и, в частности алгебраические функции.

Напомним сначала определение модуля числа a (иначе – абсолютного значения числа a):

$$|a| \overset{def}{=} \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля $|a|$ – модуль числа a равен расстоянию от точки a на числовой прямой до начала координат. Соответственно $|x-a|$ равен расстоянию от точки x до точки a. Пишут $r(x;a) = |x-a|$. Например,

$$r(-5;4) = |4-(-5)| = 9\ .$$

Из определения модуля числа a следует, что:

а) $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$ б) $g(x) \geq 0$ в (2.8).

Эти замечания определяют способы решения уравнения (2.8).

1-й способ: $$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array} \right., \tag{2.9}$$

2-й способ: $|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ -f(x) = g(x) \end{array}\right. \end{cases}, \qquad (2.10)$

3-й способ: $|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ (f(x))^2 = (g(x))^2. \end{cases} \qquad (2.11)$

Часто эффективным способом решения рациональных уравнений с модулем оказывается еще один – четвертый способ – графический.

Пример 2.5. Решить уравнение

$$|x-3| = 2x+1.$$

Решение. Используем первый способ. В соответствии с (2.9):

$$|x-3| = 2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x-3 = 2x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 < 0, \\ 3-x = 2x+1, \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ x = -4, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x = \dfrac{2}{3}, \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $x = \dfrac{2}{3}$.

Пример 2.6. Решить уравнение

$$|x^2+x-7| = x-2.$$

Решение. Учитывая «плохие» корни многочлена x^2+x-7, используем второй способ. В соответствии с (2.10)

$$\left|x^2+x-7\right|=x-2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x-7=x-2, \\ x^2+x-7=2-x, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} \quad x^2=5, \\ x^2+2x-9=0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{5}, \\ x=-1\pm\sqrt{10}, \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5}, \\ x=-1+\sqrt{10}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\sqrt{5}$, $x=-1+\sqrt{10}$.

Пример 2.7. Решить уравнение

$$|x-4|=\frac{x}{2}+1.$$

Решение. Решим данный пример третьим способом. В соответствии с (2.11)

$$|x-4|=\frac{x}{2}+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}+1\ge 0, \\ (x-4)^2=\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ x^2-12x+20=0, \end{cases}$$

откуда $x_1=2$, $x_2=10$. На рис. 2.1 приведена геометрическая иллюстрация к данному примеру.

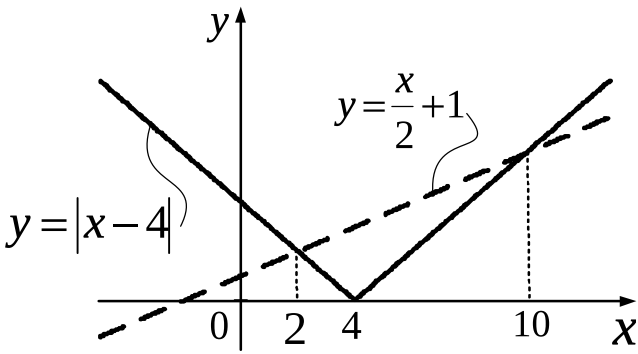


Рис. 2.1

Ответ: $x=2$, $x=10$.

Пример 2.8. Решить уравнение

$$|x+3|=|x-5|.$$

Решение. Способ 1. Поскольку $|x+3|\geq 0$ и $|x-5|\geq 0$ для любого $x\in R$, то, возведя обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение

$$x^2+6x+9=x^2-10x+25 \quad \Leftrightarrow \quad 16x=16 \quad \Leftrightarrow \quad x=1.$$

Способ 2. С учетом геометрического смысла модуля необходимо найти такую точку x на числовой прямой, расстояние от которой до точки (-3) равно расстоянию от нее до точки 5. Такой точкой будет средняя точка отрезка $[-3;5]$, т.е. $x=\dfrac{-3+5}{2}=1$.

Ответ: $x=1$.

Заметим, что в отличие от рациональных и, в частности, алгебраических уравнений без модуля решением уравнения с модулем может быть не только отдельное число, но и конечный промежуток или совокупность промежутков.

Пример 2.9. Решить уравнение

$$|x+4|+|x-3|=7\ .$$

Решение. Способ 1. Поскольку

$$|x+4|=\begin{cases} x+4, x\ge -4, \\ -x-4, x<-4, \end{cases} \qquad |x-3|=\begin{cases} 3-x, x<3, \\ x-3, x\ge 3, \end{cases}$$

то точки (-4) и 3 разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty;-4)$; $[-4;3)$; $[3;+\infty)$, на каждом из которых модули раскрываются определенным образом (см. рис.2.2).

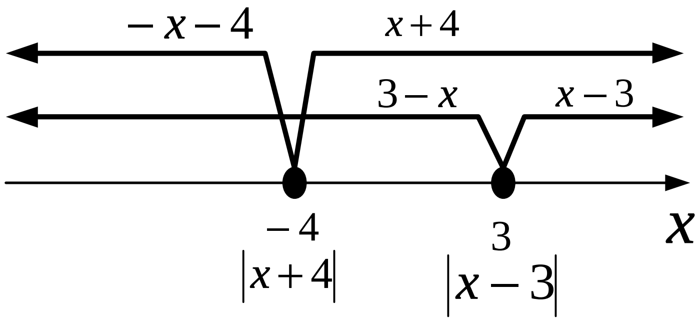


Рис. 2.2

На каждом из указанных промежутков с учетом рис.2.2 исходное уравнение будет равносильно уравнениям

$x<-4$ $\qquad$ $-4\le x<3$ $\qquad$ $x\ge 3$

$-x-4+3-x=7 \Leftrightarrow$	$x+4+3-x=7 \Leftrightarrow$	$x+4+x-3=7 \Leftrightarrow$
$-2x=8 \Leftrightarrow$	$7=7 \Rightarrow$	$2x=6 \Leftrightarrow$
$x=-4 \Rightarrow$		$x=3$
$x \in \varnothing$	полуинтервал $[-4;3)$ является решением	

Объединив полученные результаты, найдём, что отрезок $[-4;3]$ является решением уравнения.

Способ 2. В соответствии с условием задачи необходимо найти такие точки x на числовой прямой, сумма расстояний от каждой из которых (рис.2.3) до точек (-4) и 3 равна 7, т.е. $r(x;-4)+r(x;3)=7$. Этому условию удовлетворяет любая точка отрезка $[-4;3]$.

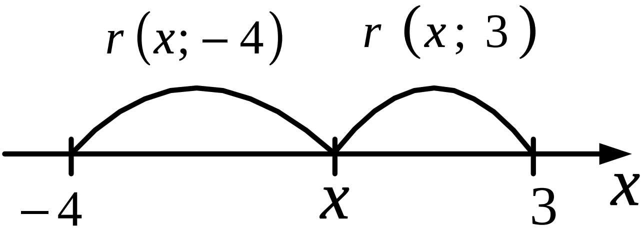


Рис. 2.3

Ответ: $[-4;3]$.

Замечание. Решение примера 2.9 первым способом можно выполнить в форме равносильных совокупностей

$$
|x+4|+|x-3|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<-4, \\ -x-4+3-x=7; \end{cases} \\ &\begin{cases} -4 \le x<3, \\ x+4+3-x=7; \end{cases} \\ &\begin{cases} x \ge 3, \\ x+4+x-3=7; \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<-4, \\ x=-4; \end{cases} \\ &\begin{cases} -4 \le x<3, \\ 7=7; \end{cases} \\ &\begin{cases} x \ge 3, \\ x=3. \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow -4 \le x \le 3.
$$

Пример 2.10. Решить уравнение

$$|x-2|+|2x+1|-|x|=2x+3.$$

Решение. Отметим на числовой прямой нули модулей рис.2.4 и получим совокупность, равносильную исходному уравнению:

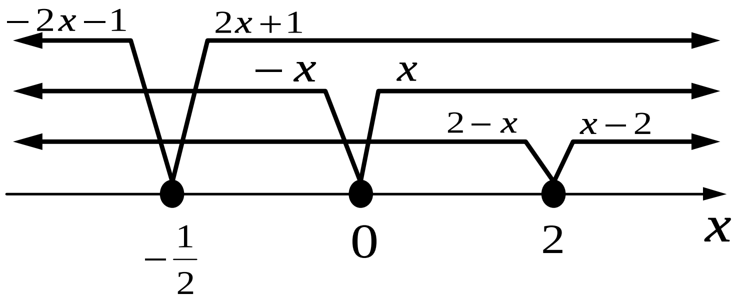


Рис. 2.4

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-\dfrac{1}{2}, \\ 2-x-2x-1+x=2x+3, \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le x<0, \\ 2-x+2x+1+x=2x+3, \end{cases} \\ \begin{cases} 0\le x<2, \\ 2-x+2x+1-x=2x+3, \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 2, \\ 2-x+2x+1-x=2x+3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x < -\dfrac{1}{2}, \\ 4x = -2, \end{cases} & - \quad \text{решений нет} \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x < 0, \\ 0 = 0, \end{cases} & - \quad \text{все } x \\ \begin{cases} 0 \le x < 2, \\ 2x = 0, \end{cases} & - \quad x = 0 \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ -1 = 3; \end{cases} & - \quad \text{решений нет} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \le x < 0, \\ x = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \le x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right].$$

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{2}; 0\right]$.

Пример 2.11. Для всех значений параметра a определить число решений уравнения $|x+4| + |x-3| = a$ и найти эти решения.

Решение. Для решения данного примера используем четвертый способ – графический.

Введем в рассмотрение функции $y_1(x) = |x+4| + |x-3|$ и $y_2(x) = a$.

Имеем

$$y_1(x) = \begin{cases} -x-4+3-x, & x < -4, \\ x+4+3-x, & -4 \le x < 3, \\ x+4+x-3, & x \ge 3, \end{cases}$$

то есть

$$y_1(x) = \begin{cases} -2x-1, & x < -4, \\ 7, & -4 \le x < 3, \\ 2x+1, & x \ge 3. \end{cases}$$

На рис.2.5 изображены график функции $y_1(x)$ и график функции $y_2(x)$ для трех значений параметра a.

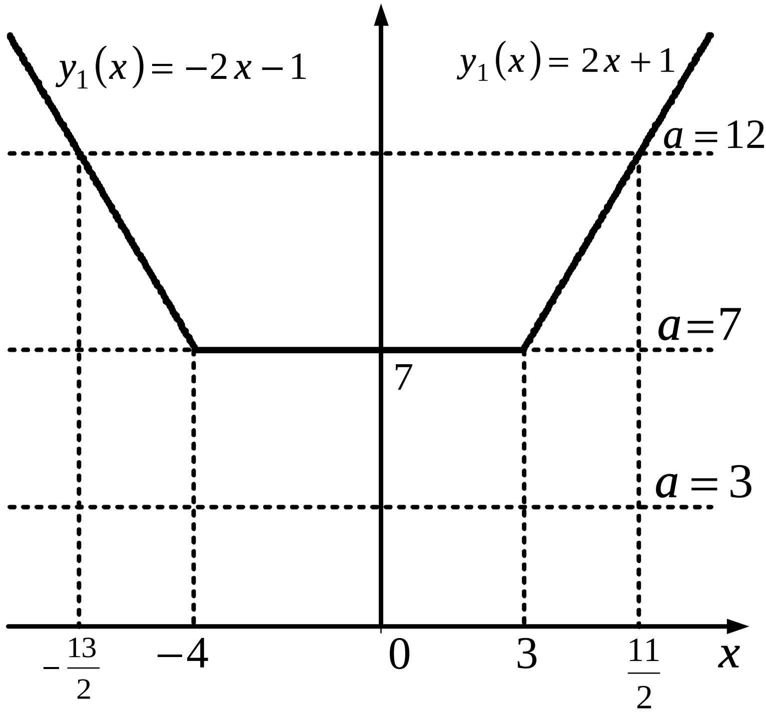


Рис. 2.5

Из анализа рис.2.5 следует, что исходное уравнение при $a < 7$ не имеет решений; при $a = 7$ решением являются все $x \in [-4;3]$; при $a > 7$ - два решения: $x_1 = -\dfrac{1+a}{2}$, $x_2 = \dfrac{a-1}{2}$.

Ответ: $a < 7:\quad x \in \varnothing$;

$a = 7:\quad x \in [-4;3]$;

$a > 7:\quad x_1 = \dfrac{1-a}{2};\ \ x_2 = \dfrac{a-1}{2}$.

Решая некоторые примеры с модулем, полезно помнить, что $|x| \geq 0$ для любого числа x. На этом основано решение следующего примера.

Пример 2.12. Решить уравнение

$$\left|x^2 - x - 6\right| + \left|x^3 - 8x^2 + 24x - 27\right| = 6x - x^2 - 9.$$

Решение. Использование при решении данного примера метода интервалов приведет к сложным вычислениям. Однако можно заметить, что

$$6x - x^2 - 9 = -\left(x^2 - 6x + 9\right) = -(x-3)^2 \leq 0$$

для любого x, а сумма модулей в левой части уравнения неотрицательна для любого x. Следовательно, знак равенства между левой и правой частью уравнения возможен только в том случае, когда они обе равны нулю, т.е. исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \left|x^2 - x - 6\right| + \left|x^3 - 8x^2 + 24x - 27\right| = 0, \\ -(x-3)^2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что и здесь не нужно раскрывать модули в первом уравнении. Решением второго уравнения системы является $x = 3$. Подстановкой этого значения x в первое уравнение убеждаемся, что оно удовлетворяет и ему.

Ответ: $x = 3$.

3. Рациональные неравенства

3.1. Метод интервалов

Теоретические сведения

Неравенства вида $P(x)\geq 0$ ($P(x)\leq 0$), где $P(x)$ – некоторый многочлен, решаются методом интервалов. Содержание метода интервалов и последовательность действий при его выполнении заключаются в следующем.

Находим нули $x_1, x_2, \ldots, x_k$ многочлена $P(x)$. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ и $P(x)=(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_k)^{m_k}$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ – натуральные числа – показатели кратности корней $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ разбивают область допустимых значений неравенства $P(x)\geq 0$ на $k+1$ интервал, на каждом из которых многочлен $P(x)$ сохраняет знак, причем $P(x)>0$ при $x>x_k$.

Далее, двигаясь справа налево по числовой прямой, расставляем знаки на интервалах, руководствуясь правилом:

если степень m_i множителя $(x-x_i)^{m_i}$ является четным числом, то на интервале слева от точки x_i сохраняется знак предыдущего интервала (при переходе через точку x_i знак не меняется); если же m_i – нечетное число, то знак на интервале слева от точки x_i меняется на противоположный.

Заметим, что при решении рациональных неравенств такое подробное решение не требуется. Необходимо изобразить числовую прямую с нанесенными на нее нулями многочлена

$P(x)$ и выделенными интервалами монотонности. Этот рисунок достаточен для записи итоговых результатов.

При решении рациональных неравенств вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$$

можно использовать равносильный переход

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P_n(x) \geq 0, \\ Q_m(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} P_n(x) \leq 0, \\ Q_m(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

или воспользоваться методом интервалов. При использовании метода интервалов на числовую прямую наносят точки, в которых $P_n(x)$ и (или) $Q_m(x)$ обращаются в нуль: точки, соответствующие $P_n(x)$, «закрашивают», так как в них левая часть неравенства обращается в нуль; а точки, соответствующие $Q_m(x)$, «выкалывают», так как в этих точках левая часть неравенства не существует. Далее, на полученных интервалах расставляются знаки «+» или «–».

При решении рациональных неравенств $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ иногда удобно пользоваться равносильными формами записи

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{cases} P_n(x) \cdot Q_m(x) \geq 0 \\ Q_m(x) \neq 0 \end{cases}\right.$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_n(x) \cdot Q_m(x) < 0 .$$

Пример 3.1. Решить неравенство

$$(x-1)^8(2x+3)^2(x-7)^4(3x-5)(x+6)^3>0.$$

Решение. Обозначим левую часть неравенства $P(x)$ и перепишем его в виде

$$P(x)\equiv(x+6)^3(2x+3)^2(x-1)^8(3x-5)(x-7)^4,$$

отвечающем последовательному расположению нулей многочлена

$$P(x):-6;-\frac{3}{2};1;\frac{5}{3};7.$$

В соответствии с теоретическими рекомендациями наносим нули на числовую прямую и отмечаем дугами получившиеся интервалы (рис.3.1).

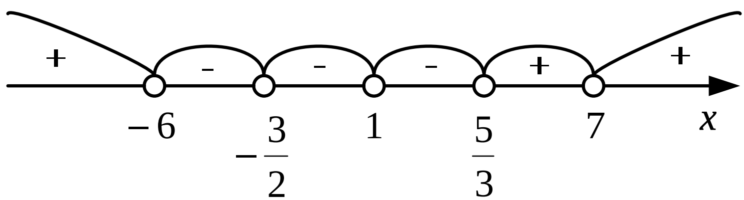


Рис. 3.1

Ставим знак «+» справа от крайней точки $x=7$, т.е. $P(x)>0$ при $x>7$. При переходе через точку $x=7$ справа налево знак не изменится, поскольку двучлен $(x-7)$ входит в $P(x)$ в четной степени. Двучлен $(3x-5)$ входит в $P(x)$ в нечетной (первой) степени, поэтому при переходе через точку $x=\frac{5}{3}$ знак $P(x)$ изменится на противоположный (на «-»), т.е. $P(x)<0$ при $x\in\left(1;\,{}^{5}\!/_{3}\right)$. Следующим двум точкам $x=1$ и $x=-\frac{3}{2}$ отвечают четные степени $(x-1)^8$ и $(2x+3)^2$. Поэтому при переходе через эти точки сохранится знак «-» многочлена $P(x)$.

При переходе через точку $x=-6$ знак $P(x)$ меняется на противоположный «+», т.е. $P(x)>0$ при $x\in(-\infty;-6)$.

Из рис.3.1 следует, что $P(x)>0$ при

$$x\in(-\infty;-6)\cup\left(\frac{5}{3};7\right)\cup(7;+\infty).$$

Отметим, что объединить интервалы $\left(\frac{5}{3};7\right)$ и $(7;+\infty)$ нельзя ввиду того, что исходное неравенство является строгим.

Ответ: $x\in(-\infty;-6)\cup\left(\frac{5}{3};7\right)\cup(7;+\infty)$.

Пример 3.2. Решить неравенство

$$\frac{(x-3)^6(x+2)^2}{(x+1)^3(x-5)^4}\geq 0.$$

Решение. Найдем точки, в которых числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль: $3;-2;-1;5$. Обозначим $R(x)$ левую часть неравенства. Имеем $R(x)>0$ при $x>5$, и $R(x)$ сохраняет знак «+» при переходе справа налево через точки $x=5$ и $x=3$. Знак $R(x)$ изменится при переходе через точку $x=-1$ и сохранится таковым ($R(x)<0$) при переходе и через точку $x=-2$, поскольку двучлен $(x+2)$ входит в $R(x)$ в четной степени. В результате получаем рис.3.2.

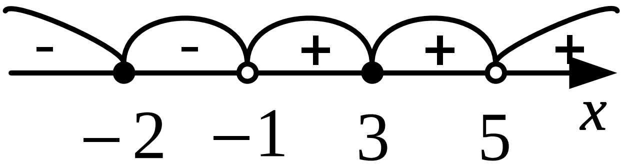


Рис. 3.2

Точки $x=-1$ и $x=5$ «выколоты», поскольку в них знаменатель дроби обращается в нуль. Напротив, точки $x=-2$ и $x=3$ являются решением неравенства $R(x)\geq 0$. Таким образом, $R(x)\geq 0$ при $x\in\{-2\}\cup(-1;3]\cup[3;5)\cup(5;+\infty)$.

Поскольку $(-1;3]\cup[3;5)=(-1;5)$, то окончательно получим

$$x\in\{-2\}\cup(-1;5)\cup(5;+\infty).$$

Ответ: $\{-2\}\cup(-1;5)\cup(5;+\infty)$.

Если неравенство $R(x)\equiv\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$, ($R(x)<0$), строгое, то «выкалываем» все нули (и числителя, и знаменателя).

Одна из наиболее распространенных ошибок при решении рациональных неравенств вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\geq T(x), \tag{3.1}$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$ - некоторые многочлены, заключается в замене этого неравенства якобы равносильным ему

$$P(x)\geq Q(x)T(x). \tag{3.2}$$

Неравенство (3.2) равносильно (3.1) тогда и только тогда, когда $Q(x)>0$ при всех $x\in R$.

Неравенство (3.1) равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}Q(x)>0,\\ P(x)\geq Q(x)\cdot T(x);\end{cases}\\ &\begin{cases}Q(x)<0,\\ P(x)\leq Q(x)\cdot T(x).\end{cases}\end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

Однако решение совокупности неравенств (3.3) достаточно трудоемко. Значительно удобнее применение метода интервалов для решения неравенства (3.1).

Для этого преобразуют неравенство (3.1) к виду

$$\frac{P(x)-Q(x)T(x)}{Q(x)}\geq 0\,. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4), равносильное (3.1), имеет вид $\dfrac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}\geq 0$, где $\tilde{P}(x)=P(x)-Q(x)T(x)$, и потому может решаться методом интервалов.

Пример 3.3. Решить неравенство

$$\frac{x^3-3x^2+1}{x^2-4x+3}\leq x+1\,.$$

Решение.

$$\frac{x^3-3x^2+1}{x^2-4x+3}\leq x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-3x^2+1-(x+1)(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}\leq 0\,.$$

Полученное неравенство решаем методом интервалов (рис. 3.3).

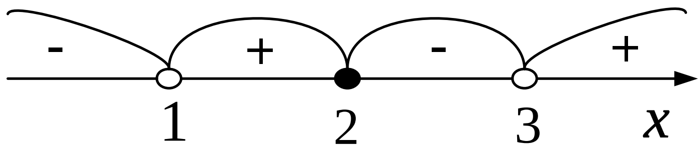


Рис. 3.3

Ответ: $(-\infty;1)\cup[2;3)$.

Пример 3.4. Решить неравенство

$$0<\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}\le 1.$$

Решение. Данное неравенство двойное, а потому равносильно системе

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}>0,\\[2mm] \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}\le 1,\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}>0, & (3.5)\\[2mm] \dfrac{3x-1}{(x-1)(x-2)}\le 0. & (3.6)\end{cases}$$

Решив каждое неравенство методом интервалов (рис.3.4), получим, что $x\in\left((-\infty;1)\cup(2;+\infty)\right)\cap\left(\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup(1;2)\right)$ или $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$.

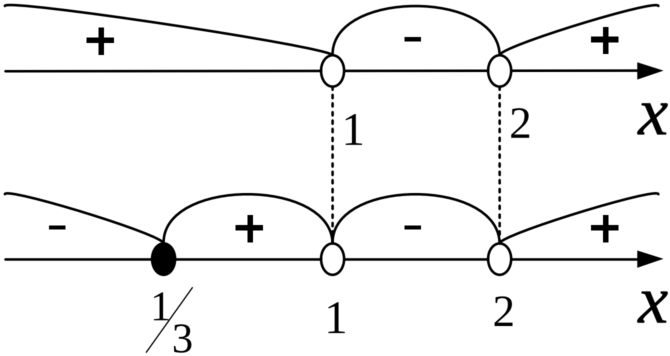


Рис. 3.4

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right]$.

3.2. Неравенства с модулем

Решение неравенств вида $|f(x)| \geq g(x)$, $|f(x)| \leq g(x)$, $|f(x)| \leq |g(x)|$, где $g(x)$, $f(x)$ - рациональные функции, можно выполнять, опираясь на определение модуля функции

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0, \\ -f(x), f(x) < 0. \end{cases}$$

Так

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) \leq g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Однако решения названных неравенств во многих случаях удобнее выполнять, пользуясь альтернативными равносильными формами, а именно:

$$|f(x)| \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x) \end{array}\right. \tag{3.7}$$

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x), \end{cases} \tag{3.8}$$

Для строгих неравенств $|f(x)| > g(x)$ и $|f(x)| < g(x)$ в (3.7) и (3.8) соответственно заменяются знаки нестрогих неравенств на строгие.

Пример 3.5. Решить неравенство

$$\left|x^2 - 3x + 1\right| > x + 2.$$

Решение. Следуя (3.7), получаем

$$\left|x^2 - 3x + 1\right| > x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 > x + 2 \\ x^2 - 3x + 1 < -x - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 3 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in \left(-\infty; 2 - \sqrt{5}\right) \cup \left(2 + \sqrt{5}; +\infty\right) \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;\, 2 - \sqrt{5}\right) \cup \left(2 + \sqrt{5};\, +\infty\right)$.

Пример 3.6. Решить неравенство

$$\left|(x+3)\left(x^2 + 3x + 3\right)\right| < x + 3.$$

Решение. По аналогии с (3.8) записываем равносильную систему неравенств

$$\left|(x+3)(x^2+3x+3)\right| < x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x^2+3x+3) < (x+3), \\ (x+3)(x^2+3x+3) > -(x+3), \\ x+3>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+3)(x^2+3x+2) < 0, \\ (x+3)(x^2+3x+4) > 0, \\ x+3>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+1) < 0, \\ x+3>0, \\ x^2+3x+4>0. \end{cases}$$

Неравенство $x^2+3x+4>0$ справедливо для любого $x \in R$. Решением системы неравенств $\begin{cases} (x+2)(x+1)<0, \\ x+3>0 \end{cases}$ является интервал $(-2;-1)$.

Ответ: $(-2;-1)$.

Для решения рациональных неравенств с модулями полезно использовать геометрический смысл модуля.

Неравенство $|x-a| \le r$ означает, что расстояние $r(x,a)$ от точки x на числовой оси до точки a не должно превышать числа r $(r \ge 0)$, т.е. $r(x,a) \le r$ (рис.3.5).

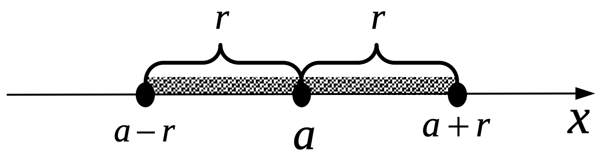


Рис. 3.5

Таким образом,

$$|x-a|\le r \quad \Leftrightarrow \quad a-r\le x\le a+r \tag{3.9}$$

или

$$|x-a|\le r \quad \Leftrightarrow \quad x\in[a-r;a+r].$$

Соответственно, $|x-a|\ge r$ означает, что расстояние $r(x,a)$ от точки x до точки a должно быть больше или равно r, т.е. $r(x,a)\ge r$ (рис.3.6).

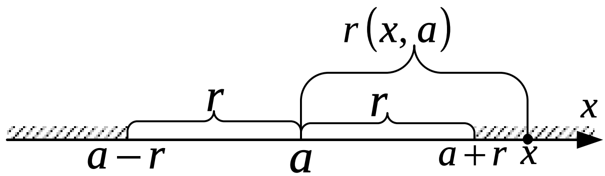


Рис. 3.6

При этом

$$|x-a|\ge r \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x\le a-r,\\ &x\ge a+r, \end{aligned}\right. \tag{3.10}$$

т.е.

$$x\in(-\infty;a-r]\cup[a+r;+\infty).$$

Решением строгого неравенства $|x-a|<r$, $r>0$ является интервал $(a-r;\,a+r)$, а неравенства $|x-a|>r$ - объединение бесконечных промежутков $(-\infty;a-r)\cup(a+r;+\infty)$.

Пример 3.7. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |x-3|<4, \\ |2x+1|\geq 3. \end{cases}$$

Решение. Будем решать каждое неравенство системы с использованием геометрического смысла модуля разности $|x-a|$, т.е. равносильных неравенств (3.9) и (3.10):

$$\begin{cases} |x-3|<4, \\ |2x+1|\geq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3|<4, \\ \left|x+\dfrac{1}{2}\right|\geq \dfrac{3}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4<x<3+4; \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}=2, \\ x\geq -\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=1, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда $x\in(-1;7)\cap((-\infty;-2]\cup[1;+\infty))$ или $x\in[1;7)$.

Ответ: $[1;7)$.

Пример 3.8. Решить неравенство

$$|x+3|+|x-1|\leq 8. \tag{3.11}$$

Решение. Способ 1. Неравенство (3.11) можно переписать в виде

$$r(x;-3)+r(x;1)\leq 8, \tag{3.12}$$

откуда следует, что сумма расстояний от точки x на числовой прямой до точек (-3) и 1 должна быть меньше или равна 8. Все точки отрезка $[-3;1]$ удовлетворяют этому неравенству, так как $r(x;-3)+r(x;1)=4$ для любого $x\in[-3;1]$ (см. пример 2.9, способ 2).

Для всех $x>1$: $r(x;-3)=4+(x+1)$, $r(x;1)=x-1$ (см. рис.3.7). Поэтому неравенство (3.12) при $x>1$ принимает вид

$$4+2(x-1)\leq 8 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq 3.$$

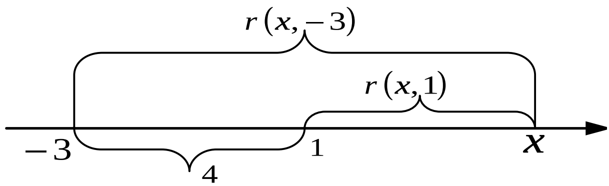


Рис. 3.7

Аналогично находим, что все точки $x \in [-5; -3)$ также удовлетворяют неравенству (3.12).

Окончательно получаем, что решением неравенства (3.11) является отрезок $[-5; 3]$ ($[-5; 3] = [-5; -3) \cup [-3; 1] \cup (1; 3]$).

Способ 2. Точки $x = -3$ и $x = 1$ разбивают числовую прямую на три интервала, на каждом из которых модули $|x+3|$ и $|x-1|$ раскрываются соответствующим образом (рис3.8). Неравенство (3.11) будет равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3, \\ -x-3+1-x \le 8; \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x < 1, \\ x+3+1-x \le 8; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x+3+x-1 \le 8; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3, \\ x \ge -5; \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x < 1, \\ 4 \le 8; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x \le 3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -5 \le x \le 3.$$

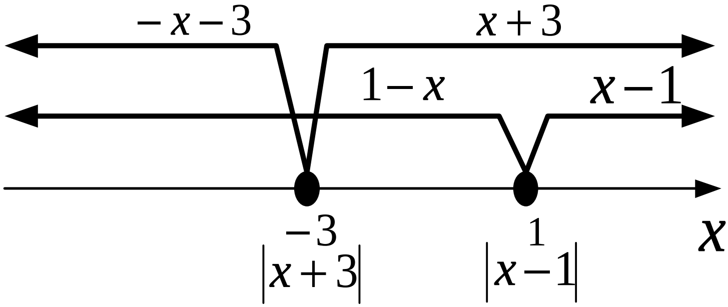


Рис. 3.8

Ответ: $[-5;3]$.

Пример 3.9. Решить неравенство

$$|3x-2|-|x+1|+|2x-1|>x\,.$$

Решение. Находим нули модулей, раскрываем модули (рис.3.9) и рассматриваем совокупность неравенств, равносильную исходному неравенству.

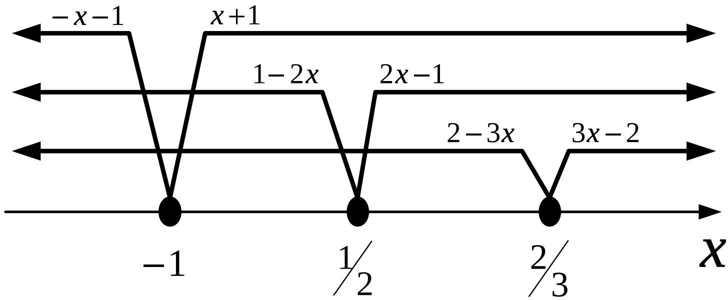


Рис. 3.9

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-1, \\ 2-3x+x+1-2x+1>x, \end{cases} \\ \begin{cases} -1\le x<\dfrac{1}{2}, \\ 2-3x-x-1-2x+1>x, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{2}{3}, \\ 2-3x-x-1+2x-1>x, \end{cases} \\ \begin{cases} x>\dfrac{2}{3}, \\ 3x-2-x-1+2x-1>x, \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-1, \\ 5x<4, \end{cases} \\ \begin{cases} -1\le x<\dfrac{1}{2}, \\ 7x<2, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{2}{3}, \\ 3x<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge\dfrac{2}{3}, \\ 3x>4, \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ -1\le x<\dfrac{2}{7}, \\ x\in\varnothing, \\ x>\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Отсюда

$$x\in(-\infty;-1)\cup\left[-1;\frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{2}{7}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Если в уравнении и неравенстве встречается модуль в модуле, то сначала раскрывают внутренний модуль, а затем внешний модуль.

Пример 3.10. Решить неравенство

$$2|x-2|-||x+1|-1|\geq 3.$$

Решение. Нуль модуля $|x+1|$ разбивает числовую прямую на два промежутка, поэтому исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

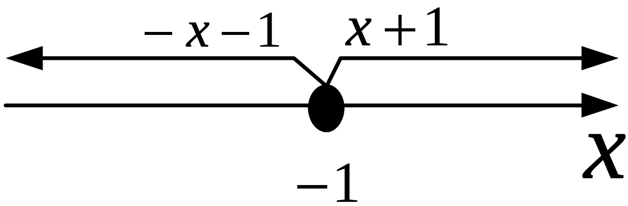


Рис. 3.10

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ 2|x-2|-|-x-2|\geq 3,\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq -1,\\ 2|x-2|-|x|\geq 3,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ 2|x-2|-|x+2|\geq 3,\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq -1,\\ 2|x-2|-|x|\geq 3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим каждую систему совокупности отдельно.

$$\text{I. }\begin{cases}x<-1,\\ 2|x-2|-|x+2|\geq 3.\end{cases}$$

Раскроем модули $|x+2|$ и $|x-2|$ (рис.3.11)

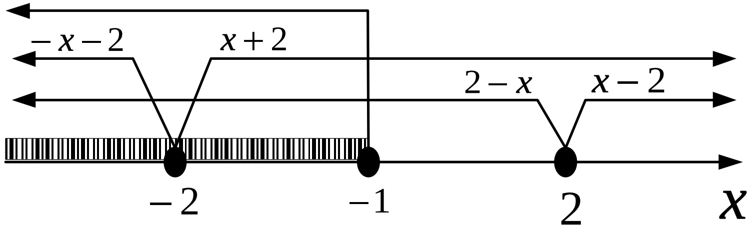


Рис. 3.11

С учетом неравенства $x<-1$ получим равносильные совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\ -2x+4+x+2\geq 3,\end{cases}\\ \begin{cases}-2\leq x<-1,\\ -2x+4-x-2\geq 3,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\ x\leq 3,\end{cases}\\ \begin{cases}-2\leq x<-1,\\ x\leq -\dfrac{1}{3},\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2,\\ -2\leq x<-1,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x<-1 \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;-1).$$

$$\text{II.} \begin{cases}x\geq -1,\\ 2|x-2|-|x|\geq 3.\end{cases}$$

С учетом рис.3.12 получаем равносильные совокупности

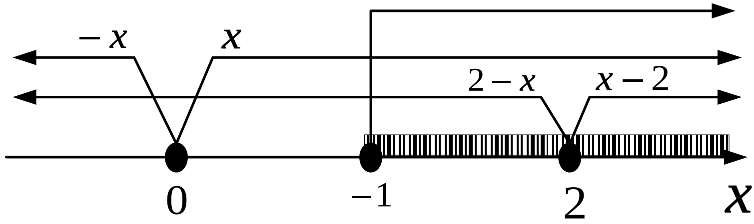


Рис. 3.12

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le x<0,\\ 4-2x+x\ge 3,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2,\\ 4-2x-x\ge 3,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ 2x-4-x\ge 3,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le x<0,\\ x\le 1,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2,\\ x\le \dfrac{1}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x\ge 7,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x<0,\\ 0\le x\le \dfrac{1}{3},\\ x\ge 7,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x\le \dfrac{1}{3},\\ x\ge 7,\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x\in\left[-1;\frac{1}{3}\right]\cup[7;+\infty).$$

Объединяя решения I и II, получаем окончательный результат

$$x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup[7;+\infty).$$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\cup[7;+\infty)$.

Комментарий к примеру 3.10.

Решение примера 3.10 упрощается, если использовать сочетание аналитического и графического способов решения.

Раскрыв внутренний модуль $|x+1|$ в исходном неравенстве, получим равносильное неравенство

$$2|x-2| \geq \begin{cases} 3+|x|, & x \geq -1, \\ 3+|x+2|, & x < -1. \end{cases}$$

На рис. 3.13 приведены графики функций

$$y_1(x) = 2|x-2| \quad \text{и} \quad y_2(x) = \begin{cases} 3+|x|, & x \geq -1, \\ 3+|x+2|, & x < -1. \end{cases}$$

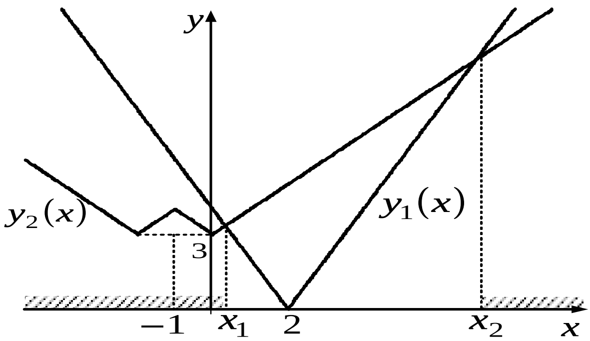


Рис. 3.13

Неравенство $y_1(x) \geq y_2(x)$, как это следует из рис. 3.13, выполняется при $x \leq x_1$ и $x \geq x_2$.

Значение x_1 находим из уравнения

$$2(2-x) = 3+x \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{3},$$

а x_2 - из уравнения

$$2(x-2)=3+x \quad \Leftrightarrow \quad x_2=7.$$

Таким образом, решением неравенства $y_1(x) \geq y_2(x)$ является множество $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right] \cup [7;+\infty)$.

4. Иррациональные уравнения

Теоретические сведения

Определение. Иррациональным называется уравнение, содержащее неизвестное или рациональную функцию от него под знаком радикала.

При решении иррациональных уравнений обычно используют возведение в нужную степень или замену переменных.

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \quad n \geq 2, \quad n \in N \tag{4.1}$$

При его решении важную роль играют четность или нечетность n.

Если n - нечетное, то уравнение (4.1) равносильно уравнению

$$f(x) = (g(x))^n.$$

Если n - четное, то функции $f(x)$ и $g(x)$ должны быть неотрицательны. Уравнение (4.1) будет равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Иногда встречаются уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, которые решаются следующим образом.

Если n нечетное, то

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x),$$

Если n четное, то

$$\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

4.1. Уравнения, решаемые возведением в степень

Пример 4.1. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3-2x+1}=1.$$

Решение. Так как в данном примере $n=3$ (нечетное), то

$$x^3-2x+1=1^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-2x=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x=0, \\ &x^2-2=0, \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0, \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=-\sqrt{2}, x_2=0, x_3=\sqrt{2}$.

Пример 4.2. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x^2+3x+1}=2.$$

Решение. Так как $n=4$ и $2>0$, то

$$\sqrt[4]{x^2+3x+1}=2 \Leftrightarrow x^2+3x+1=2^4 \Leftrightarrow x^2+3x-15=0;$$

$$D=9+60=69; \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{69}}{2}.$$

Ответ: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{69}}{2}, x_2=\dfrac{-3+\sqrt{69}}{2}$.

Пример 4.3. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1}=2-x.$$

Решение. Поскольку $n=2$ (четное), то в соответствии с (4.2) исходное уравнение равносильно каждой из систем

$$\begin{cases} x+1=(2-x)^2, \\ 2-x\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3=0, \\ x\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Пример 4.4. Решить уравнение

$$\sqrt{|2x-3|}=\sqrt{x^2-3x+2}.$$

Решение. Учитывая, что корень четной степени и модуль всегда неотрицательны, получаем равносильное уравнение

$$|2x-3|=x^2-3x+2.$$

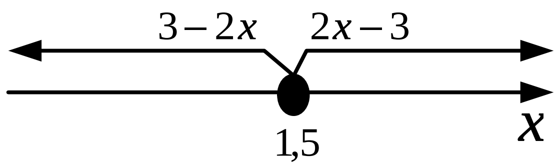


Рис. 4.1

Раскрыв модуль (рис.4.1), получим равносильную исходному уравнению совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{3}{2},\\ 3-2x=x^2-3x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2},\\ 2x-3=x^2-3x+2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{3}{2},\\ x^2-x-1=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2},\\ x^2-5x+5=0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{3}{2},\\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2},\\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\\ x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Иногда иррациональное уравнение содержит несколько радикалов. В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

Пример 4.5. Решить уравнение

$$\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-3}=1.$$

Решение. Уравнение определено при $x \geq \frac{9}{2}$. Перепишем его в виде

$$\sqrt{2x-9} = 1 + \sqrt{x-3}.$$

Так как обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведем их в квадрат

$$2x-9 = 1 + x - 3 + 2\sqrt{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad x-7 = \sqrt{x-3}.$$

Последнее уравнение равносильно, в свою очередь, системе [см.(4.2)]

$$\begin{cases} x-7 \geq 0, \\ (x-7)^2 = 4(x-3), \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 7, \\ x^2 - 14x + 49 = 4x - 12, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 7, \\ x^2 - 18x + 61 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 9 + \sqrt{20}$. Полученное числовое значение принадлежит ОДЗ уравнения.

Ответ: $x = 9 + \sqrt{20}$.

Пример 4.6. Решить уравнение

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+4} = 0.$$

Решение. Найдем ОДЗ: $x \geq 0$.

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}.$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то, возведя их в квадрат, получим равносильное уравнение

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+9}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x+2\sqrt{x^2+9x}+x+9=x+1+2\sqrt{x^2+5x+4}+x+4 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2+9x}+4=2\sqrt{x^2+5x+4} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9x}+2=\sqrt{x^2+5x+4}.$$

Возведем обе части последнего уравнения вновь в квадрат:

$$x^2+9x+4\sqrt{x^2+9x}+4=x^2+5x+4 \quad \Leftrightarrow$$

$$4x+4\sqrt{x^2+9x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+9x}=-x\,.$$

Из определения арифметического корня следует, что правая часть уравнения должна быть неотрицательна, т.е.

$$-x\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\le 0\,.$$

Учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} x\ge 0, \\ x\le 0, \end{cases}$$

т.е. единственно возможный корень $x=0$.

Ответ: $x=0$.

4.2. Уравнения, решаемые введением новых переменных

Пример 4.7. Решить уравнение

$$x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-5}=10\,.$$

Решение. Находим ОДЗ уравнения:

$$x^2+3x-5\ge 0 \Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\frac{-3+\sqrt{29}}{2};+\infty\right).$$

Возведение в квадрат обеих частей уравнения

$$4\sqrt{x^2+3x-5}=10-x^2-3x,$$

равносильного исходному, привело бы к уравнению четвертой степени, что нерационально.

Поэтому запишем уравнение в виде

$$x^2+3x-5+4\sqrt{x^2+3x-5}=5$$

и введем новую переменную y, приняв $y=\sqrt{x^2+3x-5}$, $y\ge 0$.

В результате получим квадратное уравнение

$$y^2+4y-5=0,$$

которое имеет корни $y_1=-5$ и $y_2=1$.

Вернувшись к старой переменной, получим два уравнения:

$$\sqrt{x^2+3x-5}=-5 \quad \text{и} \quad \sqrt{x^2+3x-5}=1.$$

Первое уравнение не имеет решения (следует из определения арифметического корня четной степени).

Решим второе уравнение:

$$\sqrt{x^2+3x-5}=1 \Leftrightarrow x^2+3x-6=0 \Leftrightarrow D=9+24=33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}.$$

Оба корня принадлежат ОДЗ уравнения.

Ответ: $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$.

Пример 4.8. Решить уравнение

$$\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+46-14\sqrt{x-3}}=4.$$

Решение. Способ 1. Решать данное уравнение возведением в степень неудобно, поэтому введем новую переменную

$$y=\sqrt{x-3}, \quad y\geq 0 .$$

Тогда $x=y^2+3$ и уравнение примет вид:

Учитывая, что $\sqrt{a^2}=|a|$, получаем $|y-3|+|y-7|=4$.

Решим уравнение с модулем методом интервалов.

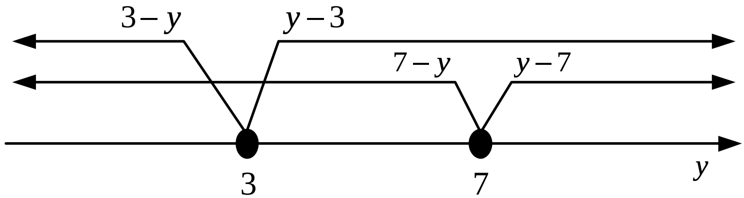


Рис. 4.2

В соответствии с рис.4.2 исходное уравнение будет равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y<3, \\ 3-y-y+7=4, \end{cases} \\ \begin{cases} 3\leq y<7, \\ y-3-y+7=4, \end{cases} \\ \begin{cases} y\geq 7, \\ y-3+y-7=4, \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y<3, \\ y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} 3\leq y<7, \\ 4=4, \end{cases} \\ \begin{cases} y\geq 7, \\ y=7, \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\leq y<7, \\ y=7, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\leq y\leq 7 .$$

Таким образом, решением уравнения

$$|y-3|+|y-7|=4$$

является множество точек $[3;7]$.

А так как $x = y^2 + 3$ и при $y > 0$ $y^2 + 3$ строго возрастает, то решением исходного уравнения является множество точек отрезка $[12;52]$.

Способ 2. Решим уравнение

$$|y-3| + |y-7| = 4$$

другим способом. В соответствии с определением расстояния между двумя точками на числовой прямой имеем:

$$|y-3| = r(y;3),\ |y-7| = r(y;7).$$

В результате уравнение

$$|y-3| + |y-7| = 4$$

принимает следующий вид:

$$r(y;3) + r(y;7) = 4.$$

Это означает, что на числовой прямой необходимо найти такую точку (точки) y, сумма расстояний от которой до точек $y = 3$ и $y = 7$ равна 4.

Нетрудно видеть, что любая точка y отрезка $[3;7]$ удовлетворяет этому условию, и поэтому решением уравнения

$$|y-3| + |y-7| = 4$$

являются все точки отрезка $[3;7]$, а исходного уравнения - соответственно все точки отрезка $[12;52]$.

Ответ: $12 \le x \le 52$.

Иногда при решении иррационального уравнения возникает необходимость ввести не одну, а несколько «новых» переменных. Такая ситуация возникает, например, при решении уравнений, содержащих радикалы разных степеней.

Пример 4.9. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{11-x}=1.$$

Решение. Пусть

$$u=\sqrt{x-2}\geq 0 \text{ и } v=\sqrt[3]{1-x}.$$

Тогда $u+v=1$. С другой стороны,

$$u^2+v^3=x-2+11-x=9.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^2+v^3=9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v, \\ (1-v)^2+v^3=9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v, \\ v^3+v^2-2v-8=0. \end{cases}$$

Решим последнее уравнение системы:

$$v^3+v^2-2v-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (v^3-8)+v(v-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(v-2)(v^2+2v+4+v)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v^2+3v+4=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad v=2.$$

Получим, что $v=2$. Тогда $u=1-v=-1<0$. По условию $u\geq 0$, следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 4.10. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x+7}+\sqrt[3]{6x+4}=7.$$

Решение. Пусть $u=\sqrt[3]{2x+7}$, $v=\sqrt[3]{6x+4}$.

Тогда

$$\begin{cases} u+v=7, \\ 3u^3-v^3=17, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=7-u, \\ 3u^3-(7-u)^3-17=0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$3u^3-(7-u)^3-17=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4u^3-21u^2+147u-360=0.$$

Подбором находим, что $u=3$ - корень уравнения. Тогда

$$4u^3-21u^2+147u-360=(u-3)(4u^2-9u+120).$$

Следовательно,

$$4u^3-21u^2+147u-360=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=3, \\ 4u^2-9u+120=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow u=3.$$

При этом $v=4$. Так как $u=\sqrt[3]{2x+7}$, то

$$\sqrt[3]{2x+7}=3 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+7=27 \quad\Leftrightarrow\quad x=10.$$

Ответ: $x=10$.

4.3. Специальные приемы решения иррациональных уравнений

Многие сложные по виду иррациональные уравнения на самом деле решаются достаточно просто. Однако для этого необходимо обнаружить некоторое специфическое свойство уравнения. В простейших случаях нахождение ОДЗ уравнения либо сразу приводит к его решению, либо существенно облегчает решение. Для решения отдельных уравнений приходится привлекать различные свойства функций (свойства монотонности, ограниченности и др.), в некоторых случаях эффективным средством решения уравнения оказывается метод оценок, и, наконец, есть уравнения, решение которых удобно осуществлять с помощью тригонометрических подстановок.

4.3.1. Использование ОДЗ уравнения

Пример 4.11. Решить уравнение

$$\sqrt{6-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{6x-x^2-5}+1.$$

Решение. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} 6-x\geq 0, \\ x-5\geq 0, \\ 6x-x^2-5\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 6, \\ x\geq 5, \\ 1\leq x\leq 5, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=5.$$

Данное уравнение определено на множестве, состоящем из единственной точки. Подстановка значения $x=5$ в уравнение обращает его в верное равенство. Таким образом, уравнение имеет единственное решение $x=5$.

Ответ: $x=5$.

Замечание. Решение данного уравнения другими способами (возведением обеих частей уравнения в квадрат, введением новых переменных) возможно. Однако и в этом случае на некотором шаге придется использовать ОДЗ уравнения, являющегося следствием данного уравнения.

Например, возведение в квадрат обеих частей исходного уравнения приводит к равносильному уравнению

$$x^2-6x+5=2\left(\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{11x-x^2-30}\right) \qquad (4.3)$$

или

$$(x-5)(x-1)=2\sqrt{|x-5|}\left(\sqrt{|1-x|}-\sqrt{|6-x|}\right),$$

откуда сразу следует, что $x=5$ является решением данного уравнения и уравнения (4.3), следствием которого оно является. Далее необходимо показать, что других решений уравнение не имеет, а для этого придется использовать ОДЗ уравнения (4.3).

Пример 4.12. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x^3+\frac{8x^2}{3}-\frac{35x}{3}}+\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{13x-2x^3-x^2-6}=0.$$

Решение. Данное уравнение имеет весьма громоздкий вид, и неясно, как подойти к его решению. Поэтому найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} x^3+\dfrac{8x^2}{3}-\dfrac{35x}{3}\ge 0, \\ x-6\ge 0, \\ 13x-2x^3-x^2-6\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+\dfrac{8x}{3}-\dfrac{35}{3}\right)\ge 0, \\ x\ge 6, \\ 2x^3+x^2-13x+6\le 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(x+5)\left(x-\dfrac{7}{3}\right)\ge 0, \\ x\ge 6, \\ (x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3)\le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-5;0]\cup\left[\dfrac{7}{3};+\infty\right), \\ x\in[6;+\infty), \\ x\in(-\infty;-3]\cup\left[\dfrac{1}{2};2\right], \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Таким образом, область допустимых значений данного уравнения является пустым множеством и, следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

4.3.2. Использование монотонности функций и метода оценок

Пример 4.13. Решить уравнение

$$49+\sqrt{x^2-3x-28}+\sqrt[4]{x^2-7.5x+3.5}=14x-x^2.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{x^2-3x-28}+\sqrt[4]{x^2-7.5x+3.5}=-\left(x^2-14x+49\right),$$

$$\sqrt{x^2-3x-28}+\sqrt[4]{x^2-7.5x+3.5}=-(x-7)^2.$$

Так как левая часть данного уравнения неотрицательная, а правая - неположительная при любых допустимых значениях x, то равенство возможно только в том случае, когда они обе равны нулю. Легко убедиться, что это возможно только при $x=7$.

Ответ: $x = 7$.

Пример 4.14. Решить уравнение

$$\sqrt{x-9}+|x-7|=1+\sqrt{10-x}.$$

Решение. Найдем ОДЗ уравнения

$$\begin{cases} x-9 \ge 0, \\ 10-x \ge 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 9 \le x \le 10.$$

Введем в рассмотрение функции

$$y_1(x)=\sqrt{x-9}+|x-7| \text{ и } y_2(x)=1+\sqrt{10-x}.$$

С учетом введенных функций решение уравнения заключается в нахождении таких значений x_0 переменной x, при которых имеет место равенство $y_1(x_0)=y_2(x_0)$, иначе необходимо найти все общие точки графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

На ОДЗ $|x-7|=x-7$ и потому

$$y_1(x)=\sqrt{x-9}+x-7.$$

Эта функция является монотонно возрастающей на отрезке $[9;10]$ (как сумма двух строго возрастающих функций $y=\sqrt{x-9}$ и $y=x-7$). При этом $2 \le y_1(x) \le 4$ для всех $x \in [9;10]$.

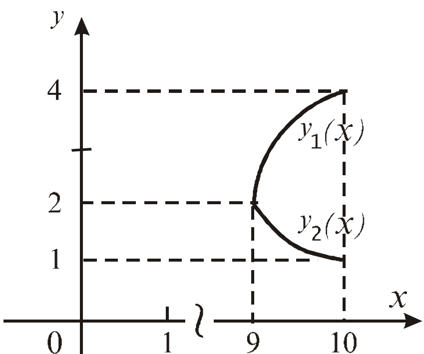


Рис. 4.3

Функция $y_2(x)$ является монотонно убывающей на ОДЗ уравнения, причем $1 \le y_2(x) \le 2$ для всех $x \in [9;10]$ (рис.4.3). Таким образом, $y_1(9)=y_2(9)=2$ и $y_2(x)<2<y_1(x)$ для всех $x\in[9;10]$. Поэтому исходное уравнение имеет единственное решение $x=9$.

Ответ: $x=9$.

Пример 4.15. Решить уравнение

$$\sqrt{2(x+6)}=6-\sqrt[3]{x+6}. \qquad (4.4)$$

Решение. Способ 1. Запишем уравнение (4.4) в виде

$$\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}=6. \qquad (4.5)$$

По свойству степенных функций функции $y_1(x)=\sqrt{2(x+6)}$ и $y_2(x)=\sqrt[3]{x+6}$ являются возрастающими на отрезке $[-6;\infty]$, где они обе определены. Поэтому функция $y(x)=\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}$ на этом отрезке также возрастает, и следовательно принимает любое значение (в том числе и 6) только один раз. Отсюда следует, что уравнение (4.5), а значит и (4.4), имеет единственное решение, легко видеть, что им является $x=2$.

Способ 2. Введем «новую» переменную $y=\sqrt[6]{x+6}>0$. Получим

$$\sqrt{2}\cdot y^3=6-y^2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}y^3+y^2-6=0\,\Big|\times 2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{2}\right)^3 y^3+\left(\sqrt{2}\right)^2 y^2-12=0.$$

Приняв $t=\sqrt{2}y$, получим новую равносильную форму записи уравнения (4.4)

$$t^3+t^2-12=0,$$

оно имеет единственный действительный корень $t=2$ (находится подбором).

Если $t = 2$, то $y = \dfrac{t}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ и $\sqrt[6]{x+6} = \sqrt{2}$. Тогда $x + 6 = 2^3 \Leftrightarrow x = 2$.

Способ 3. Пусть $u = \sqrt{2(x+6)} > 0$, $v = \sqrt[3]{x+6}$. Тогда получим систему:

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ u^2 - 2v^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 - v, \\ (6-v)^2 - 2v^3 = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$36 - 12v + v^2 - 2v^3 = 0 \Leftrightarrow 2v^3 - v^2 + 12v - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 \\ 2v^2 + 3v + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = 2.$$

Тогда $u = 4 > 0$. Так как $v = 2$, то

$$\sqrt[3]{x+6} = 2 \Leftrightarrow x + 6 = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

4.3.3. Тригонометрические подстановки

Тригонометрические подстановки целесообразно применять, если в структуре данного иррационального уравнения присутствуют выражения, напоминающие какую-то тригонометрическую формулу. При этом можно руководствоваться следующими рекомендациями.

Если уравнение имеет вид

$$R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) = 0,$$

где R - рациональная функция двух переменных x и $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, то полагаем

$$x = a \sin t \text{ или } x = a \cos t;$$

$$R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) = 0 \text{, то полагаем } x = a\,tg\,t;$$

$$R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) = 0 \text{, то полагаем } x = \frac{a}{cos\,t}.$$

Пример 4.16. Решить уравнение

$$\sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{2}x = 1.$$

Решение. Данное уравнение легко решается методом возведения обеих его частей в квадрат:

$$\sqrt{4 - x^2} = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow 5x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{6}{5};\, x_2 = 2.$$

Однако на примере данного уравнения удобно показать технику решения уравнения с помощью тригонометрических подстановок.

Данное уравнение относится к первому типу, поскольку имеет вид

$$R\left(x, \sqrt{4 - x^2}\right) = 0.$$

Поэтому полагаем $x = 2\,sin\,t$, где $t \in \left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$.

Заметим, что $cos\,t \geq 0$ на отрезке $\left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$, поэтому

$$\sqrt{1 - sin^2\,t} = \sqrt{cos^2\,t} = \left|cos\,t\right| = cos\,t.$$

Тогда

$$\sqrt{4 - 4\,sin^2\,t} + sin\,t = 1 \Leftrightarrow 2\,cos\,t + sin\,t = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{5}}cos\,t + \frac{1}{\sqrt{5}}sin\,t = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Поскольку $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1$, то можно принять

$\frac{2}{\sqrt{5}}=sin g$, $\frac{1}{\sqrt{5}}=cos g$, где $g = arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Тогда

$$sin g\ cos t+cos g\ sin t=\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow sin(t+g)=\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$t+g=(-1)^n\, arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+pn\,, n\in Z\ .$$

Поскольку $g = arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$, то окончательно получаем

$$t=-arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}+(-1)^n\, arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+pn\,.$$

Учитывая, что $t\in\left[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right]$, получаем два корня:

$$t_1=arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}-arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\,,$$

$$t_2=p-arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}-arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Если $t_1=arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}-arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$, то

$$x_1==2\,sin\,(t_1)=2\,sin\left(arcsin\ \frac{1}{\sqrt{5}}-arcsin\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)=$$

$$= 2\left(sin\left(arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \right)\cdot cos\left(arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} \right) - \right.$$

$$\left. - cos\left(arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \right)\cdot sin\left(arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} \right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5} \right) = -\frac{6}{5}.$$

Если $t_2 = p - arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$, то

$$x_2 = 2\,sin(t_2) = 2\,sin\left(arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 2.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{6}{5}, x_2 = 2$.

Замечание. Несмотря на большие затраты времени, необходимые для реализации тригонометрической подстановки, в некоторых случаях ее применение является наиболее простым способом решения иррационального уравнения. При использовании тригонометрических подстановок необходимо помнить, что решение уравнения должно быть записано в алгебраической форме, т.е. без тригонометрических функций. Разумеется, что использование тригонометрических подстановок предполагает хорошее знание тригонометрических формул.

Пример 4.17*. Решить уравнение

$$8x\sqrt{1-x^2}\left(1-2x^2\right)=\sqrt{3}\,. \qquad (4.6)$$

Решение. Сделаем замену

$$x = sin\,t\,,\ t\in\left(-\frac{p}{2};-\frac{p}{4}\right)\cup\left(0;\frac{p}{4}\right).$$

Выбор области изменения переменной t определяется самим уравнением. Действительно, из уравнения следует, что должны выполняться неравенства

$$\begin{cases}1-x^2>0,\\ x\left(1-2x^2\right)>0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}|x|<1,\\ \left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)x\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)<0,\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x\in\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

откуда $t\in\left(-\frac{p}{2};-\frac{p}{4}\right)\cup\left(0;\frac{p}{4}\right)$.

Поскольку

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-sin^2 t}=|cos\,t|=cos\,t$$

на области изменения переменной t, а

$$1-2x^2=1-2\,sin^2 t=cos\,2t\,,$$

то исходное уравнение принимает вид

$$8\,sin\,t\,cos\,t\,cos\,2t=\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow\quad sin\,4t=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$4t=(-1)^n\frac{p}{3}+pn,\ n\in Z\,.$$

Полученное множество решений содержит четыре значения:

$$t_1 = -\frac{5p}{12},\ t_2 = -\frac{p}{3},\ t_3 = \frac{p}{12},\ t_4 = \frac{p}{6},$$

принадлежащие множеству $T = \left(-\frac{p}{2}; -\frac{p}{4}\right) \cup \left(0; \frac{p}{4}\right)$ допустимых значений переменной t.

Соответственно

$$x_1 = sin\left(-\frac{5p}{12}\right) = -sin\frac{5p}{12} = -cos\frac{p}{12},$$

$$x_2 = sin\left(-\frac{p}{3}\right) = -sin\frac{p}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = sin\frac{p}{12}, \qquad x_4 = sin\frac{p}{6} = \frac{1}{2}.$$

Как известно,

$$sin\frac{p}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \qquad cos\frac{p}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$(sin 15^{\mathbf{o}} = sin\left(45^{\mathbf{o}} - 30^{\mathbf{o}}\right) =$$

$$= sin 45^{\mathbf{o}} cos 30^{\mathbf{o}} - cos 45^{\mathbf{o}}\ sin 3\, sin = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}).$$

Ответ: $x_1 = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$x_3 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ x_4 = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Уравнение (4.6) можно решить еще одним способо. Приведем его.

Возведем обе части уравнения (4.6) в квадрат. После очевидных преобразований получим алгебраическое уравнение

$$4x^8 - 8x^6 + 5x^4 - x^2 + \frac{3}{64} = 0. \qquad (4.7)$$

Будем искать решения уравнения (4.7), принадлежащие ОДЗ уравнения (4.6), т.е. множеству

$$X = \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Введем замену $y = x^2$. Уравнение (4.7) примет вид

$$4y^4 - 8y^3 + 5y^2 - y + \frac{3}{64} = 0. \qquad (4.8)$$

Полученное уравнение будем решать на множестве $Y = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Введем еще одну замену $u = y - \frac{1}{2}$, призванную сделать область допустимых значений переменной u симметричной относительно нуля, т.е.

$$Y = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \xrightarrow{u = y - \frac{1}{2}} U = \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Заменив в уравнении (4.8) y на $\left(u + \frac{1}{2}\right)$ в соответствии с произведенной подстановкой, получим новую форму алгебраического уравнения:

$$4\left(u + \frac{1}{2}\right)^4 - 8\left(u + \frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(u + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{64} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(u^4+4\frac{1}{2}u^3+6\frac{1}{4}u^2+4\frac{1}{8}u+\frac{1}{16}\right)-$$

$$-8\left(u^3+3\frac{1}{2}u^2+3\frac{1}{4}u+\frac{1}{8}\right)+5\left(u^2+u+\frac{1}{4}\right)-u-\frac{1}{2}+\frac{3}{64}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4-\frac{1}{4}u^2+\frac{3}{256}=0,$$

откуда

$$\left(u^2\right)_{1,2}=\frac{1}{8}\pm\sqrt{\frac{1}{64}-\frac{3}{256}}=\frac{1}{8}\pm\frac{1}{16}\Rightarrow\left(u^2\right)_1=\frac{1}{16}; \quad \left(u^2\right)_2=\frac{3}{16}$$

и соответственно

$$u_{1,2}=\pm\frac{1}{4}; \quad u_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Все найденные решения принадлежат множеству U. Имеем далее

$$u_1=-\frac{1}{4}\Rightarrow y_1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1}{2};$$

$$u_2=\frac{1}{4}\Rightarrow y_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$u_3=-\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow y_3=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_{5,6}=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$u_4=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow y_4=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_{7,8} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Проверив принадлежность каждого из восьми корней уравнения (4.7) множеству X , получим, что искомыми решениями являются $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$x_4 = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

5. Иррациональные неравенства

Определение. Неравенство, в котором неизвестное или рациональная функция от неизвестного содержатся под знаком радикала, называется иррациональным неравенством.

Основной способ решения иррационального неравенства – сведение его к рациональному. При этом исходное иррациональное неравенство, как правило, сводится к неравенству вида

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \text{ (или } \sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)\text{)} \qquad (5.1)$$

или

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \text{ (или } \sqrt[n]{f(x)} \le g(x)\text{).} \qquad (5.2)$$

Если n - нечетное, то переход к равносильному рациональному неравенству осуществляется естественным образом – возведением обеих частей неравенства (5.1) или (5.2) в степень n, т.е. если $n = 2m+1,\ m \in N$, то

$$\sqrt[2m+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > (g(x))^{2m+1}, \qquad (5.3)$$

$$\sqrt[2m+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < (g(x))^{2m+1}. \qquad (5.4)$$

В случае нестрогих неравенств в (5.3) и (5.4) заменяется знак строгого неравенства ($<,>$) на знак нестрогого ($\le,\ge$).

Причиной большого числа ошибок, совершаемых абитуриентами на вступительных экзаменах, являются неравенства (5.1) и (5.2) с четным показателем корня n.

Если n - четное $(n = 2m)$, то

$$\sqrt[2m]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > (g(x))^{2m}, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0, \end{cases} \end{array}\right. \qquad (5.5)$$

$$\sqrt[2m]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) < (g(x))^{2m}, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \qquad (5.6)$$

Аналогично

$$\sqrt[2m]{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge (g(x))^{2m}, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0, \end{cases} \end{array}\right. \qquad (5.7)$$

$$\sqrt[2m]{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le (g(x))^{2m}, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \qquad (5.8)$$

При решении элементарных иррациональных неравенств (5.1) или (5.2) с четным значением n можно отказаться от явной записи равносильных совокупностей (5.5), (5.7) или равносильных систем (5.6), (5.8). В этом случае решение иррационального неравенства необходимо начинать с нахождения его ОДЗ.

Находить ОДЗ необходимо и при решении неэлементарных иррациональных неравенств.

Пример 5.1. Решить неравенство

$$\sqrt{3x-5} > x-1.$$

Решение. Имеем неравенство типа (5.1) с четным значением n ($n=2$). Поэтому в соответствии с (5.5) получаем

$$\sqrt{3x-5} > x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \ge 0, \\ 3x-5 > (x-1)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0, \\ 3x-5 > 0, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1, \\ 3x-5 > x^2-2x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x > \dfrac{5}{3}, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ x^2-5x+6 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ 2 < x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;3).$$

Ответ: $(2;3)$.

Пример 5.2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-6x-7} < x+3.$$

Решение. Имеем неравенство вида (5.2), поэтому оно равносильно в соответствии с (5.6) системе

$$\begin{cases} x^2-6x-7\ge 0, \\ x+3>0, \\ x^2-6x-7<(x+3)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+1)\ge 0, \\ x>-3, \\ x^2-6x-7<x^2+6x+9, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-1]\cup[7;+\infty), \\ x\in[-3;+\infty), \\ x\in\left(-\dfrac{4}{3};+\infty\right), \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\frac{4}{3};-1\right]\cup[7;+\infty).$$

Ответ: $\left(-\dfrac{4}{3};-1\right]\cup[7;+\infty)$.

Если неравенство не является элементарным, т.е. его еще необходимо привести к виду (5.1) или (5.2), то для его решения можно использовать замену переменных и другие приемы, применяемые при решении иррациональных уравнений.

Пример 5.3. Найти наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{-4-x}{\sqrt{11-x}}\ge 2.$$

Решение. Данное неравенство можно решать двумя способами.

Способ 1.

$$\frac{-4-x}{\sqrt{11-x}}\ge 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-4-x-2\sqrt{11-x}}{\sqrt{11-x}}\ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4-x-2\sqrt{11-x}\ge 0, \\ 11-x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\sqrt{11-x}\le -4-x, \\ x<11, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4(11-x) \le (-4-x)^2, \\ x < 11, \\ -4-x \ge 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+12x-28 \ge 0, \\ x \le -4, \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-2)(x+14) \ge 0, \\ x \le -4, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in (-\infty; -14] \cup [2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -4], \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -14].$$

Наибольшее целое решение $x = -14$.

Способ 2. Введем «новую» переменную $y = \sqrt{11-x}$, $y \ge 0$.

Тогда $x = 11 - y^2$ и исходное неравенство примет вид:

$$\frac{-4-\left(11-y^2\right)}{y} \ge 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-4-11+y^2-2y}{y} \ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^2-2y-15}{y} \ge 0.$$

Решив данное неравенство методом интервалов, получим, что

$$y \in [-3; 0) \cup [5; +\infty).$$

Поскольку $y \ge 0$, окончательно $y \in [5; +\infty)$.

Так как $y = \sqrt{11-x}$ и $y \in [5; +\infty)$, то

$$\sqrt{11-x} \ge 5 \quad \Leftrightarrow \quad 11-x \ge 25 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -14,$$

т.е. $x \in (-\infty; -14]$. Таким образом, наибольшее целое решение $x = -14$.

Ответ: наибольшее целое решение $x=-14$.

Пример 5.4. Решить неравенство:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>1.$$

Решение. Найдем ОДЗ

$$\begin{cases} x-2\ge 0, \\ 3-x\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x\le 3, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in[2;3].$$

Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то после возведения их в квадрат получим неравенство, равносильное исходному:

$$x-2+2\sqrt{(x-2)(3-x)}+3-x>1 \Leftrightarrow 1+2\sqrt{(x-2)(3-x)}>1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(3-x)}>0 \Leftrightarrow (x-2)(3-x)>0 \Leftrightarrow x\in(2;3).$$

Учитывая ОДЗ, $x\in(2;3)$.

Ответ: $(2;3)$.

Пример 5.5. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}+x}{x}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-x}{x}}\ge\sqrt[4]{12}.$$

Решение. Найдем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{3}+x}{x}\ge 0, \\ \dfrac{2\sqrt{3}-x}{x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in\left(0;2\sqrt{3}\right].$$

Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$\frac{2\sqrt{3}+x}{x}+2\sqrt{\frac{\left(2\sqrt{3}+x\right)\left(2\sqrt{3}-x\right)}{x^2}}+\frac{2\sqrt{3}-x}{x}\geq\sqrt{12}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{4\sqrt{3}}{x}+2\sqrt{\frac{12-x^2}{x^2}}\geq\sqrt{12}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{3}}{x}+\sqrt{\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{x^2}-1}\geq\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{2\sqrt{3}}{x}=y>0\right|\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2-1}\geq\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{y^2-1}\geq\sqrt{3}-y\,.$$

Последнее неравенство относится к виду (5.1), поэтому оно равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{3}-y\geq 0,\\ y^2-1\geq\left(\sqrt{3}-y\right)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{3}-y<0,\\ y^2-1\geq 0,\end{cases}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\leq\sqrt{3},\\ y\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}},\end{cases}\\ \begin{cases}y>\sqrt{3},\\ |y|\geq 1,\end{cases}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\leq y\leq\sqrt{3},\\ y>\sqrt{3}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad y\in\left[\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right).$$

Учитывая, что $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{x}$, получаем

$$\frac{2\sqrt{3}}{x}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\sqrt{3}}{x}\geq\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{3-x}{x}\geq 0\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x\in(0;3]\quad\left((0;3]\subset\left(0;2\sqrt{3}\right]\right).$$

Ответ: $(0;3]$.

Пример 5.6. Найти наибольшее решение неравенства

$$\frac{x(x-5)}{x-5-\sqrt{x-5}} \le 7\sqrt{x-5}\,.$$

Решение. Введем «новую» переменную

$$y=\sqrt{x-5} \ge 0\,.$$

Тогда $x=y^2+5$. неравенство примет вид:

$$\frac{\left(y^2+5\right)y^2}{y^2-y} \le 7y\,.$$

Решим полученное рациональное неравенство методом интервалов

$$\frac{\left(y^2+5\right)y^2-7y\left(y^2-y\right)}{y(y-1)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{y^2(y-3)(y-4)}{y(y-1)} \le 0 \Leftrightarrow y\in(0;1)\cup[3;4].$$

Вернемся к «старой» переменной

$$\left[\begin{array}{l}0<y<1,\\ 3\le y\le 4,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<\sqrt{x-5}<1,\\ 3\le\sqrt{x-5}\le 4,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x-5<1,\\ 9\le x-5\le 16,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}5<x<6,\\ 14\le x\le 21,\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad x\in(5;6)\cup[14;21].$$

Таким образом, наибольшим решением исходного неравенства является 21.

Ответ: 21.

Пример 5.7. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-4x-5}+\sqrt{x-x^2+2} > \sqrt{x^2+8x+15}\,.$$

Решение. Возведение данного неравенства в квадрат приведет к громоздким вычислениям. Поэтому найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-4x-5\ge 0, \\ x-x^2+2\ge 0, \\ x^2+8x+15\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-5)\ge 0, \\ -(x+1)(x-2)\ge 0, \\ (x+3)(x+5)\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-1]\cup[5;+\infty), \\ x\in[-1;2], \\ x\in(-\infty;-5]\cup[-3;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Получили, что ОДЗ данного неравенства состоит из единственной точки $x=-1$. Подставив $x=-1$ в исходное неравенство, получим неверное неравенство $0>\sqrt{8}$, поэтому исходное неравенство решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Замечание. Рассмотренные примеры 5.1–5.7 содержат радикалы четной (второй) степени. Это связано с принципиально большей сложностью схем решения таких неравенств. Однако не следует думать, что при нечетном показателе n решение всех иррациональных неравенств, пусть даже и элементарных по виду, осуществляется легко. Рассмотрим такой пример.

Пример 5.8. Решить неравенство

$$x^3+1<2\sqrt[3]{2x-1}. \tag{5.9}$$

Решение. Переход к равносильному алгебраическому неравенству

$$\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3<2x-1$$

не дает искомого результата.

Попробуем найти корни уравнения

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1} \tag{5.10}$$

другими способами, не связанными с переходом к равносильному алгебраическому уравнению.

Способ 1 (сведение к равносильной системе уравнения). Введем новую переменную

$$y=\sqrt[3]{2x-1}.$$

Тогда $x=\dfrac{y^3+1}{2}$. Составим и решим систему двух уравнений

$$\begin{cases} x^3+1=2y, \\ y^3+1=2x. \end{cases} \tag{5.11}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем

$$x^3-y^3=2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0, \\ x^2+xy+y^2+2=0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности дает $y=x$, откуда с учетом (5.11) получаем

$$x^3+1=2x \Leftrightarrow \left(x^3-x\right)-(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности

$$x^2 + xy + y^2 + 2 = 0$$

действительных корней не имеет. Действительно,

$$D_x = y^2 - 4\left(y^2 + 2\right) < 0$$

для любого $y \notin R$.

Способ 2 (использование свойств обратной функции). Уравнение (5.10) можно записать в виде

$$y_1(x) = y_2(x),$$

где $y_1(x) = \dfrac{x^3 + 1}{2}$, $y_2(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются взаимно обратными на R. Поэтому уравнение (5.10) равносильно каждому из уравнений $y_1(x) = x$ или $y_2(x) = x$.

Пусть $y_1(x) = x$, т.е.

$$\frac{x^3 + 1}{2} = x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Это уравнение решено выше.

Способ 3 [использование свойств уравнений $f\left(f(x)\right) = x$ и $f(x) = x$]. Преобразуем уравнение (5.10) к виду

$$x = \sqrt[3]{2\left(\sqrt[3]{2x - 1}\right) - 1} \qquad (5.12)$$

и введем в рассмотрение функцию $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$.

С учетом f уравнение (5.12) можно записать в виде $x = f\left(f(x)\right)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если $f(x)$ - монотонно возрастающая функция, то уравнения

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x \text{ и } f\left(x\right)=x$$

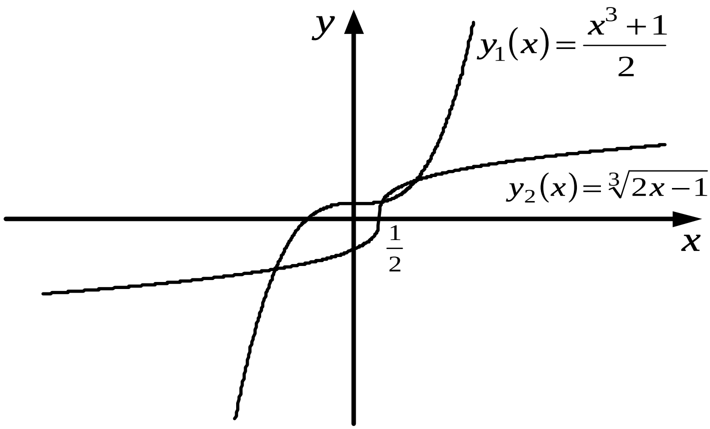
равносильны.

Поскольку функция $f\left(x\right)=\sqrt[3]{2x-1}$ монотонно возрастает на R, то в соответствии с теоремой уравнение (5.12) равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{2x-1}=x \quad \Leftrightarrow \quad x^3-2x+1=0.$$

На рисунке изображены графики функций $y_1\left(x\right)$, $y_2\left(x\right)$.

Для получения решения неравенства (5.9) теперь достаточно проверить его выполнение на одном из четырех интервалов: $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)$; $\left(1;+\infty\right)$, на которые разбивают числовую прямую корни уравнения (5.10).



Ответ: $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)$.

6*. Квадратичные функции двух и более переменных[1]

В школьном курсе математики подробно изучается квадратичная функция одной переменной $f(x)=ax^2+bx+c$.

Квадратичным функциям одной, двух и более переменных принадлежит важная роль в различных разделах математики: в математическом программировании (квадратичное программирование), в задачах линейной алгебры и геометрии (квадратичные формы), в дифференциальных уравнениях в частных производных (приведение линейного уравнения второго порядка к каноническому виду).

Потребности учебного процесса в высшей школе диктуют необходимость знания студентами основных свойств квадратичной функции и умения применять эти свойства при решении различных задач.

Задачи с квадратичными функциями двух и более переменных нередко встречаются на вступительных экзаменах в различных вузах.

6.1. Теоретические сведения

Определение. Квадратичными функциями двух и трех переменных называются соответственно функции

$$f(x,y)=a_1x^2+a_2y^2+a_3xy+b_1x+b_2y+c, \tag{6.1}$$

$$f(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+a_6yz+$$
$$+b_1x+b_2y+b_3z+c, \tag{6.2}$$

[1] Изучение материала данного раздела рекомендуется выполнять в группах с углублённым изучением математики.

где $a_1, a_2, ..., a_6$; b_1, b_2, b_3, c - заданные действительные числа, причем хотя бы один коэффициент a_i в (6.1) и (6.2) должен быть отличен от нуля.

Примеры квадратичных функций двух и трех переменных:

двух переменных:

$$3x^2 - 4xy + y^2 + 5x - 6y + 2; \quad xy + 3; \quad 3x^2 + 4y^2 + 7;$$

трех переменных:

$$2x^2 - y^2 + 4z^2 - 7xy + yz - 6; \quad x^2 - xz + y; \quad x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 9.$$

Решение многих задач с квадратичными функциями основано на разложении таких функций на алгебраическую сумму квадратов линейных функций.

Для квадратичной функции (6.1) двух переменных это разложение имеет вид

$$f(x,y) = a_1(x + py + q)^2 + r(y + s)^2 + h, \tag{6.3}$$

а для функции (6.2) трех переменных соответственно

$$f(x,y,z) = a_1(x + p_1 y + p_2 z + p_3)^2 + r(y + q_1 z + q_2)^2 +$$

$$+ t(z + s)^2 + h, \tag{6.4}$$

где $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, s, h, t, r$ - коэффициенты новых форм (6.3) и (6.4), выражающиеся через коэффициенты a_i, b_i, c старых форм (6.1) и (6.2) записи квадратичных функций.

Сформулируем условия, при которых имеет место разложение (6.3) для квадратичной функции (6.1) двух переменных.

Утверждение. Если коэффициенты a_1, a_2, a_3 квадратичной функции (6.1) удовлетворяют условиям $a_1 \neq 0$ и

$4a_1a_2 - a_3^2 \neq 0$, то разложение (6.3) определяется единственным образом.

Доказательство. Если искомый набор чисел p,q,r,s,h существует, то в соответствии с (6.1) и (6.3) должно выполняться тождество

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + b_1x + b_2y + c = a_1(x + py + q)^2 + r(y + s)^2 + h$$

или

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + b_1x + b_2y + c =$$

$$= a_1\left(x^2 + p^2y^2 + q^2 + 2pxy + 2qx + 2pqy\right) + r\left(y^2 + 2sy + s^2\right) + h.$$

Отсюда, используя определение равенства многочленов (два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты многочленов при одинаковых степенях), получаем систему уравнений и находим ее решение:

$$\begin{array}{r|c}
x^2 & a_1 = a_1, \\
xy & a_3 = 2pa_1, \\
y^2 & a_2 = a_1p^2 + r, \\
x & b_1 = 2qa_1, \\
y & b_2 = 2pqa_1 + 2rs, \\
(xy)^0 & c = a_1q^2 + rs^2 + h,
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
p = \dfrac{a_3}{2a_1}, \\
r = a_2 - a_1p^2, \\
q = \dfrac{b_1}{2a_1}, \\
s = \dfrac{b_2 - 2pqa_1}{2r}, \\
h = c - a_1q^2 - rs^2.
\end{cases}$$

Отсюда следует, что коэффициенты p,q,r,s,h разложения (6.3) определяются однозначно через коэффициенты $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c$ квадратичной функции (6.1), если $a_1 \neq 0$ и $r \neq 0$.

Но

$$r = a_2 - a_1 p^2 = a_2 - a_1\left(\frac{a_3}{2a_1}\right)^2 = \frac{4a_1a_2 - a_3^2}{4a_1}$$

и потому разложение в виде (6.3) осуществляется единственным образом, если $a_1 \neq 0$ и $4a_1a_2 - a_3^2 \neq 0$.■

Замечание 1. Если $a_2 \neq 0$ и $4a_1a_2 - a_3^2 \neq 0$, то квадратичную функцию (6.1) можно представить также в виде

$$f(x,y) = a_2(y + p_1x + q_1)^2 + r_1(x + s_1)^2 + h_1. \qquad (6.5)$$

Замечание 2. Если $4a_1a_2 - a_3^2 = 0$, а $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$, то квадратичную функцию (6.1) можно представить в виде

$$f(x,y) = a_1(x + py + q)^2 + ry + h \quad (a_1 \neq 0), \qquad (6.6)$$

$$f(x,y) = a_2(y + p_1x + q_1)^2 + r_1x + h_1 \quad (a_2 \neq 0). \qquad (6.7)$$

Пример 6.1. Решить уравнение

$$3x^2 + 14y^2 - 12xy + 6x - 20y + 11 = 0. \qquad (6.8)$$

Решение. Левая часть уравнения является квадратичной функцией двух переменных. Причем $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ и $4a_1a_2 - a_3^2 = 4\cdot 3\cdot 14 - (-12)^2 \neq 0$, и потому можно построить как разложение (6.3), так и (6.5).

Построим разложение (6.3). В соответствии с утверждением существуют действительные числа p, q, r, s, h такие, что справедливо тождество

$$3x^2 + 14y^2 - 12xy + 6x - 20y + 11 =$$

$$= 3(x + py + q)^2 + r(y + s)^2 + h \qquad (6.9)$$

или

$$3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11=$$
$$=3\left(x^2+p^2y^2+q^2+2pxy+2qx+2pqy\right)+r\left(y^2+2sy+s^2\right)+h.$$

Из последнего тождества получаем систему пяти нелинейных уравнений и находим ее решение

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 3=3, \\ xy & -12=6p, \\ y^2 & 14=3p^2+r, \\ x & 6=6q, \\ y & -20=6pq+2rs, \\ (xy)^0 & 11=3q^2+rs^2+h, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p=-2, \\ r=2, \\ q=1, \\ s=-2, \\ h=0. \end{cases}$$

В результате тождество (6.9) принимает вид

$$3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11=3(x-2y+1)^2+2(y-2)^2,$$

откуда следует, что исходное уравнение (6.8) равносильно уравнению

$$3(x-2y+1)^2+2(y-2)^2=0,$$

а оно, в свою очередь, равносильно системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} x-2y+1=0, \\ y-2=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x=3, y=2.$

Ответ: $x=3, \quad y=2$.

Отметим, что при разложении левой части уравнения (6.8) на сумму квадратов (6.5) получается уравнение (проверьте!)

$$2(7y-3x-5)^2+3(x-3)^2=0, \qquad (6.10)$$

также равносильное уравнению (6.8). Его решение $x=3, \quad y=2$, естественно, совпадает с полученным выше.

6.2. Выделение полных квадратов

Разложения (6.3)-(6.5) квадратичных функций двух и трех переменных по форме идентичны выделению полного квадрата из квадратичной функции одной переменной

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Прием, используемый для выделения полного квадрата из состава квадратичной функции одной переменной, применим к квадратичным функциям двух и более переменных. Для этого необходимо осуществить выделение уже не одного, а двух или более полных квадратов.

Рассмотрим реализацию этого способа на примерах разложения квадратичных функций двух и трех переменных.

Пример 6.2. Разложить на сумму квадратов (выделить полные квадраты) квадратичную функцию

$$f(x,y)=3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11.$$

Решение. Отметим, что заданная квадратичная функция $f(x,y)$ является левой частью уравнения (6.8) в примере 6.1. Это позволит сопоставить оба способа разложения квадратичной функции на сумму квадратов.

1. Перегруппируем слагаемые в записи квадратичной функции, выделив те, которые содержат переменную x:

$$f(x,y)=\left(3x^2-12xy+6x\right)+14y^2-20y+11.$$

2. Вынесем коэффициент 3 при x^2 за скобку:

$$f(x,y)=3\left(x^2-4xy+2x\right)+14y^2-20y+11.$$

3. Выделим полный квадрат из выражения в скобке, считая x - переменной величиной, а y - параметром:

$$f(x,y)=3\left[x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2\right]-$$

$$-3(2y-1)^2+14y^2-20y+11.$$

В квадратных скобках получен (выделен) первый полный квадрат

$$(x-2y+1)^2.$$

4. Выполним очевидные преобразования вне квадратных скобок

$$f(x,y)=3(x-2y+1)^2+2y^2-8y+8.$$

5. Выделим второй полный квадрат (по переменной y)

$$f(x,y)=3(x-2y+1)^2+2(y-2)^2.$$

Ответ: $3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11=$

$$=3(x-2y+1)^2+2(y-2)^2.$$

Получим таким же способом альтернативное разложение (6.5):

$$3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11\overset{(1)}{=}$$

$$=\left(14y^2-12xy-20y\right)+3x^2+6x+11\overset{(2)}{=}$$

$$=14\left(y^2-\frac{6}{7}xy-\frac{10}{7}y\right)+3x^2+6x+11=$$

$$\stackrel{(3)}{=} 14\left[y^2 - 2\frac{3x+5}{7}y + \left(\frac{3x+5}{7}\right)^2\right] -$$

$$-14\left(\frac{3x+5}{7}\right)^2 + 3x^2 + 6x + 11 =$$

$$\stackrel{(4)}{=} 14\left(y - \frac{3x+5}{7}\right)^2 - \frac{18}{7}x^2 - \frac{60}{7}x - \frac{50}{7} + 3x^2 + 6x + 11 =$$

$$= 14\left(y - \frac{3x+5}{7}\right)^2 + \frac{3}{7}x^2 - \frac{18}{7}x + \frac{27}{7} \stackrel{(5)}{=}$$

$$= 14\frac{(7y - 3x - 5)^2}{49} + \frac{3}{7}(x-3)^2 =$$

$$= \frac{1}{7}\left[2(7y - 3x - 5)^2 + 3(x-3)^2\right].$$

Полученное разложение с точностью до множителя $\frac{1}{7}$ является левой частью уравнения (6.10). В приведенных тождественных преобразованиях над знаками равенств стоят номера пунктов алгоритма, приведенного в примере 6.2.

Таким образом, квадратичные функции двух и более переменных можно разлагать на сумму квадратов двумя способами: методом неопределенных коэффициентов, в основе которого лежат утверждение и разложения (6.3)-(6.5) и аналогичные им, или с помощью тождественных преобразований, позволяющих выделять последовательно полные квадраты. При решении реальных задач более предпочтительным является второй способ, поскольку он не требует запоминания разложений (6.3)-(6.5) и аналогичных им.

6.3. Задачи с квадратичными функциями

Покажем, как работает метод последовательного выделения полных квадратов для квадратичной функции трех переменных.

Пример 6.3. Найти все действительные решения уравнения

$$8x^2+44y^2+15z^2-32xy+16xz-44yz-$$
$$-16x+56y-60z+84=0. \qquad (6.11)$$

Решение. Будем следовать алгоритму, предложенному в примере 6.2.

1. Выделяем слагаемые, содержащие переменную x:

$$f(x,y,z)=\left(8x^2-32xy+16xz-16x\right)+$$
$$+44y^2+15z^2-44yz+56y-60z+84.$$

2. Выносим коэффициент 8 перед x^2 за скобку:

$$f(x,y,z)=8\left(x^2-4xy+2xz-2x\right)+$$
$$+44y^2+15z^2-44yz+56y-60z+84.$$

3. Выделяем первый полный квадрат:

$$f(x,y,z)=8\left[x^2-2x(2y-z+1)+(2y-z+1)^2\right]-$$
$$-8(2y-z+1)^2+44y^2+15z^2-44yz+56y-60z+84=$$
$$=8(x-2y+z-1)^2-8\left(4y^2+z^2+1-4yz+4y-2z\right)+$$
$$+44y^2+15z^2-44yz+56y-60z+84=$$
$$=8(x-2y+z-1)^2+12y^2+7z^2-12yz+24y-44z+76.$$

4. Выделяем второй полный квадрат из группы слагаемых, содержащих переменную y. Для этого выполняем те же преобразования, что приведены выше в пунктах 1, 2, 3

$$f(x,y,z)=8(x-2y+z-1)^2+$$

$$+12\left(y^2-yz+2y\right)+7z^2-44z+76=$$

$$=8(x-2y+z-1)^2+12\left[y^2-2y\left(\frac{z}{2}-1\right)+\left(\frac{z}{2}-1\right)^2\right]-$$

$$-12\left(\frac{z}{2}-1\right)^2+7z^2-44z+76=$$

$$=8(x-2y+z-1)^2+12\left(y-\frac{z}{2}+1\right)^2-$$

$$-12\left(\frac{z^2}{4}-z+1\right)+7z^2-44z+76=$$

$$=8(x-2y+z-1)^2+12\left(y-\frac{z}{2}+1\right)^2+4z^2-32z+64.$$

5. Выделяем третий полный квадрат (по переменной z):

$$f(x,y,z)=8(x-2y+z-1)^2+12\left(y-\frac{z}{2}+1\right)^2+4(z-4)^2.$$

Теперь можно утверждать, что уравнение (6.11) равносильно уравнению:

$$8(x-2y+z-1)^2+12\left(y-\frac{z}{2}+1\right)^2+4(z-4)^2=0,$$

которое в свою очередь, равносильно системе трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ y-\dfrac{z}{2}+1=0, \\ z-4=0. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$x=-1, \quad y=1, \quad z=4$$

уравнения (6.11).

Ответ: $x=-1, \quad y=1, \quad z=4$.

Комментарий к примеру

1. Разложение квадратичной функции трех переменных состоит из трех этапов, на каждом из которых выделяется один полный квадрат. При этом на каждом этапе выполняются однотипные процедуры, заключенные в пунктах 1,2,3.

2. При разложении квадратичных функций двух и более переменных методом последовательного выделения полных квадратов приходится возводить в квадрат суммы вида $(a+b+c)$, $(a+b+c+d)$ и т.д. Для возведения в квадрат этих сумм можно использовать формулу: квадрат суммы произвольного числа слагаемых равен сумме квадратов всех слагаемых и удвоенных произведений всех пар этих слагаемых. Так, для $n=3$ и $n=4$ имеем

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$$

$$(a+b+c+d)^2 =$$

$$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Продолжим рассмотрение примеров с квадратичными функциями.

Пример 6.4. Найти наименьшее возможное значение выражения

$$x^2 + 6xy + 10y^2 - 12y - 4x$$

и координаты точек, в которых оно достигается.

Решение. Необходимо найти глобальный минимум квадратичной функции двух переменных

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 10y^2 - 12y - 4x.$$

Задачи такого рода также можно решать с помощью разложения квадратичной функции на сумму квадратов. Осуществим это разложение, следуя алгоритму последовательного выделения полных квадратов:

$$f(x, y) = \left[x^2 + 2x(3y-2) + (3y-2)^2\right] - (3y-2)^2 + 10y^2 - 12y =$$

$$= (x + 3y - 2)^2 - 9y^2 + 12y - 4 + 10y^2 - 12y =$$

$$= (x + 3y - 2)^2 + y^2 - 4.$$

В результате имеем задачу: найти

$$min\left((x + 3y - 2)^2 + y^2 - 4\right) \text{ при } x \in R, \quad y \in R.$$

Поскольку

$$(x + 3y - 2)^2 + y^2 - 4 \geq -4$$

при любых значениях x и y и при этом

$$(x + 3y - 2)^2 + y^2 - 4 = -4,$$

если

$$\begin{cases} x + 3y - 2 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

то

$$\min_{x \in R,\, y \in R}\left(x^2 + 6xy + 10y^2 - 12y - 4x\right) = -4$$

и достигается в точке $M(2;0)$.

Ответ: наименьшее значение -4 достигается в точке $M(2;0)$.

Комментарий к примеру

Задача нахождения наименьшего (наибольшего) значения квадратичной функции всегда имеет единственное решение и это решение может быть найдено методом разложения квадратичной функции на сумму квадратов, если в результате такого разложения получаются либо только суммы полных квадратов (наименьшее значение), либо только разности полных квадратов (наибольшее значение). Если же в разложении присутствуют квадраты с противоположными знаками, то задача не имеет решения.

Например, задача найти наименьшее (наибольшее) значение квадратичной функции $f(x,y)=2x^2-3y^2+5$ не имеет решения.

Следует отметить, что на вступительных экзаменах задачи нахождения наименьшего (наибольшего) значения квадратичной функции формулируются позитивно, т.е. так, что задача имеет решение.

Пример 6.5. Найти наименьшее значение выражения

$$x^2+y^2+z^2$$

и координаты точки $M(x,y,z)$, в которой оно достигается, при дополнительном условии $x+y+z=1$.

Решение. Поставленная задача близка к рассмотренной в примере 6.4 и отличается от нее тем, что переменные x,y,z здесь не могут принимать произвольные значения. Они связаны соотношением

$$x+y+z=1,$$

т.е. все допустимые точки $M(x,y,z)$ лежат на плоскости $P: \quad x+y+z=1$. Однако эта задача также легко сводится к рассмотренной в примере 6.4. Покажем это.

Выразим z из уравнения $x+y+z=1$ и подставим в выражение $x^2+y^2+z^2$:

$$f(x,y)=x^2+y^2+(1-x-y)^2=2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1.$$

В результате исходная задача свелась к следующей: найти минимум функции

$$f(x,y)=2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1.$$

Эта задача аналогична рассмотренной в примере 6.4. Разложив квадратичную функцию $f(x,y)$ на сумму квадратов, получим

$$f(x,y)=2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1=$$

$$=2\left(x+\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3},$$

откуда

$$\min_{x\in R,\, y\in R}\left(2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1\right)=$$

$$=\min_{x\in R,\, y\in R}\left(2\left(x+\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

и достигается наименьшее значение в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Действительно,

$$2\left(x+\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+\dfrac{y-1}{2}=0,\\ y-\dfrac{1}{3}=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Но $z=1-x-y$ и потому $z=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Ответ: наименьшее значение $\frac{1}{3}$ достигается в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Комментарий к примерам 6.4 и 6.5.

Задачи, рассмотренные в примерах 6.4 и 6.5, относятся к различным классам экстремальных задач. Задача в примере 6.4 относится к классу задач на безусловный экстремум [переменные x,y минимизируемой функции $f(x,y)$ не связаны никакими условиями и могут принимать любые значения]. Задача в примере 6.5 называется задачей на условный экстремум; в таких задачах переменные x,y,z связаны некоторым условием $j(x,y,z)=0$ (в примере 6.5 $j(x,y,z)\equiv x+y+z-1=0$).

Пример 6.6. Найти наибольшее отрицательное значение x, для которого существуют пары чисел (y,z) такие, что тройка чисел (x,y,z) удовлетворяет уравнению

$$-x^2+2y^2+19z^2-12yz+4y-14z+7=0. \tag{6.12}$$

Решение. Представим квадратичную функцию трех переменных в левой части уравнения (6.12) в виде суммы квадратов:

$$\left(2y^2-12yz+4y\right)-x^2+19z^2-14z+7=$$

$$=2\left(y^2-2y(3z-1)+(3z-1)^2\right)-2(3z-1)^2+19z^2-14z-x^2+7=$$

$$=2(y-3z+1)^2+\left(z^2-2z+1\right)+4-x^2=$$

$$=2(y-3z+1)^2+(z-1)^2+4-x^2.$$

В результате имеем уравнение

$$2(y-3z+1)^2+(z-1)^2+4-x^2=0, \qquad (6.13)$$

равносильное исходному (6.12).

Приведём уравнение (6.13) к виду:

$$2(y-3z+1)^2+(z-1)^2=x^2-4.$$

Отсюда следует, что $x^2-4\geq 0$ или $|x|\geq 2$.

Таким образом, наибольшее отрицательное значение x, для которого существуют пары (y,z), удовлетворяющие вместе с этим x уравнению (6.12), равно -2, при этом $y=2,\quad z=1$.

Ответ: $x=-2$.

Комментарий к примерам 6.1.-6.6.

Рассмотренные в примерах 6.1-6.6 задачи можно решить альтернативным способом, основанным на использовании необходимых и достаточных условий существования решений квадратных уравнений и неравенств. Наиболее полно применения этого способа разобраны в пособии: Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. С. 602-606.

Приведем решение этим способом двух примеров – 6.1 и 6.5.

Пример 6.1. Уравнение (6.8)

$$3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11=0$$

будем рассматривать как квадратное уравнение относительно переменной x, а y будем считать параметром.

Уравнение

$$3x^2-6x(2y-1)+14y^2-20y+11=0$$

имеет действительные решения тогда и только тогда, когда его дискриминант D_x неотрицателен, т.е.

$$D_x=36(2y-1)^2-12\left(14y^2-20y+11\right)\geq 0$$

или после преобразования

$$y^2-4y+4\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2\leq 0\,.$$

Последнее нестрогое неравенство может выполняться лишь как равенство при $y=2$. Заменив переменную y в уравнении (6.8) найденным значением 2, получим квадратное уравнение

$$x^2-6x+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2=0\,,$$

откуда $x=3$. Таким образом, уравнение (6.8) имеет единственное решение $x=3, \quad y=2$.

Пример 6.5. Задачу: найти

$$min\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

при условии $x+y+z=1$ сводим к задаче на безусловный экстремум.

Найти $min\left(x^2+y^2+(1-x-y)^2\right), \quad x\in R, \quad y\in R$.

Пусть эта задача, а значит и исходная задача на условный экстремум, имеет решение, т.е. существует пара чисел (x_0, y_0) таких, что

$$\min_{x \in R, y \in R}\left(x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2\right) = x_0^2 + y_0^2 + (1 - x_0 - y_0)^2 = h.$$

Для нахождения величин x_0, y_0, h имеем уравнение

$$x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 = h$$

или

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 - h = 0.$$

Будем рассматривать это уравнение как квадратное относительно переменной x (или y), считая y и h параметрами

$$x^2 + x(y-1) + y^2 - y + \frac{1-h}{2} = 0. \qquad (6.14)$$

Уравнение (6.14) имеет действительные решения тогда и только тогда, когда его дискриминант D_x неотрицателен, т.е.

$$D_x = (y-1)^2 - 4\left(y^2 - y + \frac{1-h}{2}\right) \geq 0$$

или

$$D_x = -3y^2 + 2y - 1 + 2h \geq 0.$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}h \leq 0. \qquad (6.15)$$

Это неравенство, в свою очередь, имеет решение тогда и только тогда, когда дискриминант D_y соответствующего квадратного уравнения неотрицателен, т.е.

$$D_y = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}h \geq 0$$

или $h \geq \frac{1}{3}$, откуда $h_{min} = \frac{1}{3}$ является наименьшим значением квадратичной функции

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2$$

и наименьшим значением выражения $x^2 + y^2 + z^2$ при условии $x + y + z = 1$.

Для нахождения координат точки $M(x,y,z)$, в которой достигается это наименьшее значение:

- заменяем в неравенстве (6.15) h на $\frac{1}{3}$; получаем неравенство $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 \leq 0$ и его решение $y_0 = \frac{1}{3}$;

- заменяем в уравнении (6.14) h и y на $\frac{1}{3}$; получаем уравнение $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0$.

Отсюда $x_0 = \frac{1}{3}$; $z_0 = 1 - x - y = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Ответ: наименьшее значение $\frac{1}{3}$ достигается в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

6.4. Задачи с параметрами

Пример 6.7. Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2(a-2b)x-4by+a^2+6b^2-4ab=0, \\ 3x^2+y^2-12x+2(a+b)y+a^2+b^2+2ab+12=0 \end{cases}$$

имеет решение, и найти эти решения.

Решение. По постановке (задача с параметрами) и по своему виду (система двух нелинейных уравнений) задача кажется очень сложной. На самом деле она не сложнее задач, рассмотренных выше.

Левые части обоих уравнений системы являются квадратичными функциями. Выделим полные квадраты в их составе:

$$x^2-2(a-2b)x+2y^2-4by+a^2+6b^2-4ab=$$

$$=(x-a+2b)^2-(a-2b)^2+2y^2-4by+a^2+6b^2-4ab=$$

$$=(x-a+2b)^2+2\left(y^2-2by+b^2\right)=(x-a+2b)^2+2(y-b)^2.$$

Аналогично для второго уравнения получаем

$$\left(y^2+2(a+b)y+a^2+2ab+b^2\right)+3x^2-12x+12=$$

$$=(y+a+b)^2+3(x-2)^2.$$

В итоге исходная система уравнений равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}(x-a+2b)^2+2(y-b)^2=0,\\(y+a+b)^2+3(x-2)^2=0,\end{cases}$$

а она, в свою очередь, равносильна системе четырех линейных уравнений:

$$\begin{cases}x-a+2b=0,\\y-b=0,\\y+a+b=0,\\x-2=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\y=b,\\a-2b=2,\\2b+a=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\b=\dfrac{a-2}{2},\\a=1,\\y=b,\end{cases}$$

откуда $x=2,\quad y=-\frac{1}{2};\quad a=1,\quad b=-\frac{1}{2}$.

Ответ: система уравнений имеет единственное решение $x=2$, $y=-\frac{1}{2}$ при значениях параметров $a=1, b=-\frac{1}{2}$.

Пример 6.8. Найти все значения параметра a, при которых площадь плоской фигуры D, задаваемой системой неравенств

$$D:\begin{cases}x^2+y^2-4ax-2ay+5a^2-4\le 0,\\x^2+y^2-2a(x+y)+2a^2-1\le 0,\end{cases}$$

будет максимальной.

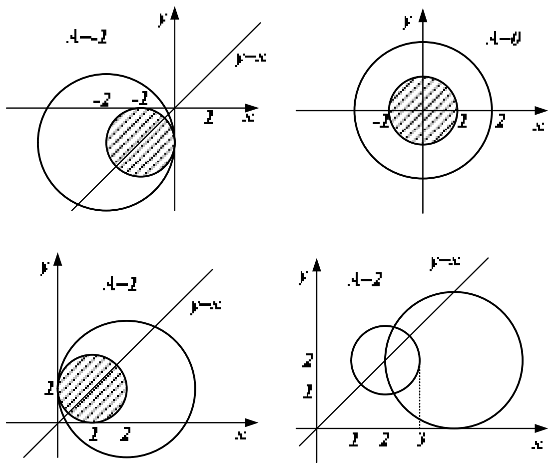
Решение. Выделив полные квадраты в левых частях неравенств, получим равносильную систему

$$D:\begin{cases}(x-2a)^2+(y-a)^2\le 4,\\(x-a)^2+(y-a)^2\le 1.\end{cases}$$

Первое неравенство системы определяет круг с центром в точке $O_1(2a,a)$ радиусом 2, а второе – круг с центром в точке

$O_2(a,a)$ радиусом 1. Круги пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами не превосходит 3. Это следует из того, что центры обоих кругов лежат на прямой $y=a$ и потому, если $r(O_1,O_2)=|2a-a|\le 3$, т.е. $|a|\le 3$, то множество D не пусто. Максимальной площадь области D будет при тех значениях параметра a, при которых круг радиусом 1 целиком лежит внутри круга радиусом 2. Легко видеть, что это соответствует значениям параметра $|a|\le 1$.

На рисунке приведена иллюстрация к данному примеру. Область D заштрихована.



Ответ: $|a|\le 1$.

6.5. Введение новых переменных. Метод оценок

В следующем примере введение новых переменных позволяет увидеть квадратичную функцию, а выделение полных квадратов из ее состава приводит к решению задачи.

Пример 6.9. Решить уравнение

$$2tg^2x + 3cos^2\,y + sin^2\,y - 4tgx(cos\,y - 1) -$$
$$- 2(cos\,y - sin\,y) + sin\,2y + 3 = 0\,. \qquad (6.16)$$

Решение. Введем обозначения

$$u = tgx, \quad v = \cos y, \quad t = \sin\,y$$

и учтем, что

$$sin\,2y = 2\,sin\,y\,cos\,y = 2tv\,.$$

Получим уравнение

$$2u^2 + 3v^2 + t^2 - 4u(v-1) - 2(v-t) + 2vt + 3 = 0, \qquad (6.17)$$

левая часть которого является квадратичной функцией трех переменных u, v, t.

Выделим полные квадраты из ее состава:

$$f(u,v,t) = 2\left(u^2 - 2u(v-1) + (v-1)^2\right) -$$

$$-2(v-1)^2 + 3v^2 + t^2 - 2(v-t) + 2vt + 3 =$$

$$= 2(u-v+1)^2 + v^2 + 2vt + 2v + t^2 + 2t + 1 =$$

$$= 2(u-v+1)^2 + \left(v^2 + 2v(t+1) + (t+1)^2\right) =$$

$$= 2(u-v+1)^2 + (v+t+1)^2\,.$$

В итоге получили, что уравнение (6.17) равносильно уравнению

$$2(u-v+1)^2 + (v+t+1)^2 = 0\,,$$

а оно, в свою очередь, равносильно системе двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} u - v + 1 = 0, \\ v + t + 1 = 0. \end{cases}$$

Возвратившись к старым обозначениям, получим систему

$$\begin{cases} tgx - cos\, y + 1 = 0, \\ cos\, y + sin\, y + 1 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение преобразуем к виду

$$cos\left(y - \frac{p}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$y = \frac{p}{4} \pm \frac{3}{4}p + 2pn, \quad n \in Z,$$

или

$$\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{p}{2} + 2pn, \quad n \in Z, \\ y = p(2m+1), \quad m \in Z. \end{array}\right. \qquad (6.18)$$

С учетом (6.18) первое уравнение оказывается равносильным совокупности простейших тригонометрических уравнений

$$\left[\begin{array}{l} tgx = -1 \quad \text{при} \quad y = -\dfrac{p}{2} + 2pn, \quad n \in Z, \\ tgx = -2 \quad \text{при} \quad y = p(2m+1), \quad m \in Z, \end{array}\right.$$

откуда

$$x = -\frac{p}{4} + pk, \quad k \in Z \quad \text{при} \quad y = -\frac{p}{2} + 2pn, n \in Z$$

и

$$x = -arctg\,2 + pe, \quad e \in Z \ \text{при} \ y = p(2m+1), m \in Z.$$

Ответ: $x = -\dfrac{p}{4} + pk, \quad k \in Z, \quad y = -\dfrac{p}{2} + 2pn, n \in Z;$

$$x = -arctg\,2 + pe, \quad e \in Z\ ,\ y = p\,(2m+1), m \in Z\ .$$

Пример 6.10. Решить уравнение

$$4^x + 4^{-x+1} =$$

$$= 4\,sin\,px + 6\,cos\,y - sin^2\,px - 2\,cos^2\,y - 2\,sin\,px\,cos\,y - 1\ . \quad (6.19)$$

Решение. Левая часть уравнения представлена алгебраической суммой показательных функций, правая – алгебраической суммой тригонометрических функций. В общем случае такие уравнения не решаются аналитически. Для нахождения их решений применяются специальные приемы, использующие свойства функций (монотонность, непрерывность, периодичность), вспомогательные преобразования, методы оценивания сверху (снизу) обеих частей уравнения и т.д.

В данном примере можно попытаться использовать квадратичный вид функции $f\,(sin\,px, cos\,y)$ в правой части уравнения.

Обозначив $u = sin\,px, \quad v = cos\,y$, получим

$$f\,(u,v) = 4u + 6v - u^2 - 2v^2 - 2uv - 1\,.$$

После выделения полных квадратов функция $f\,(u,v)$ примет вид

$$f\,(u,v) = 4 - (u + v - 2)^2 - (v - 1)^2\,, \qquad (6.20)$$

отсюда следует, что $f\,(u,v) \le 4$ для всех допустимых значений u, v $(u, v \in [-1,1])$. При этом $f\,(u,v) = 4$ при $u = 1$ и $v = 1$.

Исследуем функцию

$$j\,(x) = 4^x + 4^{-x+1}$$

в левой части уравнения.

Приняв $4^x = t,$ где $t > 0$, получим функцию $z = t + \frac{4}{t}$, определенную при $t > 0$. Поскольку $z' = 1 - \frac{4}{t^2} = \frac{t^2 - 4}{t^2}$, то при $t > 0$ функция $z(t)$ имеет единственную стационарную точку $t = 2$. Поскольку $z'(t) < 0$ при $0 < t < 2$ и $z'(t) > 0$ при $t > 2$, то функция $z(t)$ достигает в точке $t = 2$ своего локального и, как нетрудно показать, одновременно и глобального минимума (наименьшего значения на множестве $\{t;\, t > 0\}$).

Заметим, что неравенство $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ для любых $a > 0, b > 0$, позволяет сразу получить оценку

$$4^x + 4^{-x+1} \geq 2\sqrt{4^x \cdot 4^{-x+1}} = 4, \text{ т.е. } 4^x + 4^{-x+1} \geq 4.$$

Таким образом, левая часть уравнения (6.19) принимает значения $z \geq 4,$ а правая – значения $z \equiv f(u,v) \leq 4$ для всех $x \in R$ и $y \in R$. Поэтому, если уравнение (6.19) имеет решение, то одновременно должны выполняться равенства

$$\begin{cases} 4^x + 4^{-x+1} = 4, \\ 4\,sinpx + 6\,cos\,y - sin^2 px - 2\,cos^2\,y - 2\,sinpx\,cos\,y - 1 = 4. \end{cases} \qquad (6.21)$$

Первое уравнение системы (6.21) имеет единственное решение $x = \frac{1}{2}$ Действительно, приняв $4^x = t\ (t > 0)$, получим уравнение

$$t + \frac{4}{t} = 4 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 4^x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Второе уравнение системы (6.21) при $x = \frac{1}{2}$ принимает вид

$$cos^2 y - 2 cos y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad cos\, y = 1.$$

Его решение

$$y = 2pm,\ m \in Z.$$

Поэтому окончательно получаем, что решением системы (6.21), а значит и исходного уравнения (6.19) являются $x = \frac{1}{2}$, $y = 2pm,\ m \in Z$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$; $y = 2pm, \quad m \in Z$.

Комментарий к примеру 6.10.

Если уравнение $f(x) = 0$ преобразуется к равносильной форме $j(x) = q(x)$ и при этом для всех допустимых x справедливы оценки

$$j(x) \le a, \quad q(x) \ge a$$

или

$$j(x) \ge a, \quad q(x) \le a,$$

то уравнение $f(x) = 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} j(x) = a, \\ q(x) = a. \end{cases}$$

Этот прием называется методом оценок или методом мажорант.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $ax-2x+3a=1$.

2. Найти при каких значениях параметра a корень уравнения $a(x+3)-7a=4x+2$ больше 1.

3. Решить уравнение с параметром $\dfrac{1}{ax-3}=\dfrac{5}{4x+1}$.

4. Решить уравнение с параметром $\dfrac{a}{2a-5}=\dfrac{ax+7}{ax+1}$.

5. Решить неравенство с параметром $a^2x+3a\geq 4x+6$.

Решить уравнения (6 – 9)

6. а) $x^2-15x+26=0$, б) $x^2+4x-21=0$,

в) $x^2+3x-11=0$, г) $x^2-12x+35=0$,

д) $3x^2+x-7=0$, е) $4x^2-12x+10=0$.

7. $x^2+15x+56=0$.

8. $(x-14)^2-3x+44=0$.

9. $\dfrac{5}{x+7}+2x+3=0$.

10. Найти, при каком значении параметра k разность корней уравнения $3x^2-2(2k+3)x+2k^2-9=0$ равна 4.

11. При каком наименьшем значении параметра a модуль одного из корней уравнения $x^2-2(a-5)x+6-2a^2=0$ в 3 раза больше модуля другого?

12. При каких значениях параметра k корни x_1 и x_2 уравнения $kx^2-(2k+6)x-3k^2=0$ удовлетворяют условию $x_2+3x_1=3$?

13. При каких значениях параметра k один из корней уравнения $x^2+(4k^2-6)x+k^4=0$ является кубом другого?

14. Найти, при каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $3x^2-(a+1)x+\dfrac{2a+1}{3}=0$

а) принимает наименьшее значение;

б) принимает значение 1.

15. Найти, при каких значениях параметра k корни уравнения $x^2-(2k-1)x+3k-5=0$ удовлетворяют условиям:

а) $x_1<2<x_2$, б) $x_1>0$ и $x_2>0$, в) $x_1<5$ и $x_2<5$,

г) оба корня уравнения лежат на отрезке $[1;4]$,

д) $x_1<3,\ x_2>7$.

16. Найти при каких значениях параметра k корни x_1 и x_2 уравнения $kx^2+2(k-2)x+8(1-k)=0$ удовлетворяют условиям: а) $x_1<0<x_2$, б) $|x_1|<4$ и $|x_2|<4$, в) $x_1\le 2$ и $x_2\le 2$.

17. Найти, при каких значениях параметра a корни уравнения $(a-4)x^2+(15-2a)x+1-a=0$ удовлетворяют условиям:

а) $x_1<-1<x_2$, б) $x_1\ge -2$ и $x_2\ge -2$, в) $x_1<2$ и $x_2<2$, г) $|x|<3$.

Решить уравнения (18 – 39)

18. $x^4-13x^2+36=0$. 19. $x^4-6x^2-16=0$.

20. $x^6+7x^3-8=0$. 21. $x^3-21x-20=0$.

22. $2x^4+15x^3+32x^2+10x-15=0$.

23. $(x-3)(x+1)(x+8)(x+4)+180=0$.

24. $(x-3)(x+9)(x+2)(x+4)-624=0$.

25. $5x^3-7x+6\dfrac{\sqrt{5}}{5}=0$.

26. $2x^4+2x^3\sqrt{2}-13x^2-7\sqrt{2}x+12=0$.

27. $x^2-\dfrac{73}{6}+\dfrac{11}{12}x+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{11}{12x}=0$.

28. $x^3-4x^2-x+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x}+8=0$.

29. $2x^6-x^5-10x^4+13x^3-10x^2-x+2=0$.

30. $3x^2-19+4x+\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{8}{x}=0$.

31. $2x^6-20x^4+60x^3+3x^5-18x^3-54+27x=0$.

32. $\dfrac{x^2-2}{x}+\dfrac{6x}{x^2-2}-5=0$.

33. $\dfrac{x^2+2x-3}{3x}-\dfrac{24x}{x^2+2x-3}+2=0$.

34. $\dfrac{x^2-6x+1}{x-1}+\dfrac{12(x-1)}{x^2-6x+1}+7=0$.

35. $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{2}=0$.

36. $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x}=2$.

37. $(x^2+2x-3)^2+x(x^2+2x-3)-12x^2=0$.

38. $(x^2+3x-3)^2-4x(x^2+3x-3)-5x^2=0$.

39. $\left(x^2+7x+6\right)^2-10\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2+x+1\right)+21\left(x^2+x+1\right)^2=0.$

40. Решить уравнение $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{125}{429}$.

41. Решить уравнение $\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{80}+\ldots+\frac{1}{9n^2+3n-2}=\frac{3}{20}$.

Решить уравнения и неравенства с модулем (42 – 59)

42. $|x+1|+|x-3|=2$.

43. $|x+1|+|x-3|=4$.

44. $|x+1|+|x-3|=6$.

45. $|x+1|+|x-3|=2x-2$.

46. $|x+1|-|x-3|=-5$.

47. $|x+1|-|x-3|=-4$.

48. $|x+1|-|x-3|=1$.

49. $|x+1|-|x-3|=4$.

50. $|x+1|-|x-3|=2x+4$.

51. $|2x+5|-|x-3|+\left|x+\frac{1}{2}\right|=2$.

52. $|x+1|+|x-3|=3x-5$.

53. $|3x-2|-|4-x|+|2x+7|\leq 9-x$.

54. $|x+1|+x-5+|x-6|=7$.

55. $|x-6|-|x-3|+\left|x+\frac{1}{2}\right|=4$.

56. $|4-x|-|2x-4|+|x+6|=2x+6$.

57. $\left|x+|x-1|\right|-\left|x-|x+6|\right|\geq x-3.$

58. $\left|2|x-4|-6\right|-|x-2|=\left|3|x|-12\right|-x-2.$

59. Найти все значения параметра k, при которых уравнение $\left||x-4|-3\right|=kx+1$ имеет:

а) единственное решение;

б) бесконечно много решений;

в) четыре различных решения, и найти эти решения.

60. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\left|x^2-8x+7\right|=ax+1$ имеет три различных решения.

Решить иррациональные уравнения и неравенства (61 – 93)

61. $\sqrt{x+3}=2$

62. $\sqrt[3]{x-2}=-3$

63. $\sqrt{2x+1}=x-1$

64. $\sqrt{x+1}=\dfrac{2x-4}{\sqrt{6}}$

65. $\sqrt{3x^2+4x+5}=x^2+1$

66. $\sqrt[3]{4x+3}=0.5x$

67. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+1}=2$

68. $\sqrt{5+2x}+\sqrt{2-x}=3$

69. $\sqrt{10+x}-\sqrt{3x+4}=2$

70. $\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{5x-2}=4$

71. $\sqrt{19+x}-\sqrt{1-x}=2\sqrt{4+x}$

72. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}=2x-17$.

73. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}=5-x$.

74. $\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}=\left|x-\dfrac{19}{2}\right|+\dfrac{7}{2}$.

75. $\sqrt{x+12-8\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=2$.

76. $x^3+2=5\sqrt{5x-2}$.

77. $x^3+5=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3x-10}{2}}$.

78. $x^2-2x-\sqrt{x+2}-2=0$.

79. $x^2-4x-\sqrt{x-\dfrac{9}{4}}+\dfrac{17}{4}=0$.

80. $\sqrt{x+3}>1$

81. $\sqrt{x+2}<3$

82. $\sqrt{x^2-3x+2}>7-5\sqrt{2}$

83. $\sqrt{x^3+3x-1}>3\sqrt{7}-8$

84. $\sqrt{2-x}\le x-2$

85. $\sqrt{3x+1}>x-3$

86. $\sqrt{x-2}<x-4$

87. $\sqrt{x+1}\ge\dfrac{1}{3}x+1$

88. $\sqrt{5x+4}\le 5-\sqrt{x+3}$

89. $\sqrt{3-x}>x+3$

90. $\sqrt{8-2x}\ge 2.8-0.4x$

91. $\sqrt{2x^2-3x-13}<x+1$

92. $\sqrt[3]{x+6}\le x$

93. $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\ge\sqrt{x-1}$

Найти множество значений функций (94 – 102)

94. $y=2|x-1|-|x-2|+x$.

95. $y=4-|x+2|-2|x+5|$.

96. $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$.

97. $y=\dfrac{2}{3-|x-1|}$.

98. $y=\dfrac{2}{\left|3-|x-1|\right|}$.

99. $y=\sqrt{x-4\sqrt{x-4}},\quad x\ge 4$.

100. $y=\sqrt{x-4\sqrt{x-4}},\quad x\in[4;40]$.

101. $y=\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+32-12\sqrt{x-4}},\ x\ge 4$.

102. $y=\dfrac{2}{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}\quad x\in[4;16]$

Найти общие корни уравнений (103 – 105)

103. $x^3-7x+6=0$ и $x^3+2x^2-x=0$.

104. $x^4-x^3-x^2-8x-6=0$ и $2x^4-3x^3-10x^2+6x+8=0$.

105. $x^4-5x^3+6x^2+x-1=0$ и $3x^3-8x^2+1=0$.

Решить уравнения (106 – 111)

106. $7x^2+y^2-4xy-16x+2y+13=0$.

107. $x^2+6y^2+12z^2+4xy+2xz+12yz-6x-4y+16z+20=0$.

108. $3^{-2y+1}+4^{x+3}-3^{-y+1}\cdot 2^{x+3}-4\cdot 3^{-y+1}+5\cdot 2^{x+3}+13=0$.

109. $\cos^2 2x+20\sin^2 y-8\cos 2x\cdot\sin y+2\cos 2x-12\sin y+2=0.$

110. $2\cos^2 px+\sin px+4\cos px-2\sqrt{1+\sin px}+4=0$.

111. $2^x+3\cdot 9^y-4\cdot 3^{y+1}-6\sqrt{2^x-7}+14=0$.

В примерах 112 – 115 найти наименьшее или наибольшее значение заданной функции и координаты точки (точек), в которых это значение достигается

112. $f(x,y)=8x-7x^2-y^2-4xy-2y-8.$

113. $f(x,y)=3x^2+13y^2-12xy-12x+22y+11.$

114. $f(x,y)=56y+18xy-3x^2-28y^2-18x-30.$

115. $f(x,y)=11x^2+2y^2-8xy-38x+16y+29.$

116. Найти наименьшее значение выражения $u=3x^2-2y^2+8y$ и координаты точки $M(x,y)$, в которой оно достигается, при условии $x+3y=6$.

117. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $u=x+y+z$ и координаты точек $M(x,y,z)$, в которых они достигаются, при условии, что тройки чисел (x,y,z) удовлетворяют уравнению $x^2+2y^2+4z^2=28$.

118. Найти наименьшее положительное значение z, для которого существуют пары чисел (x, y) такие, что тройка чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$3x^2 + 14y^2 - z^2 - 12xy + 12x - 36y + 39 = 0 .$$

119. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax - y + a - 1 = 0, \\ x^2 - 2a(x + y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

120. Найти все значения параметров a и b, которые доставляют минимум выражению $3a^2 + b^2$ и удовлетворяют, вместе с парами чисел $(x; y)$, системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2(a - b)x + 2(a + b)y - 4ab = 0, \\ x^2 + y^2 - 2x(a + 2) - 2y(b + 1) + a^2 + b^2 + 4a + 2b + 5 = 0. \end{cases}$$

121. Решить уравнение

$$3tg^2 x - 2\sqrt{3} tgx + 6\sin x(\sin x + 2\cos y + 2) +$$

$$+ 6\cos y(\cos y + 2) + 7 = 0 .$$

122. Решить уравнение

$$\log_2^2(x - 1) - 2^{x-1}\log_3(y + 3) + \log_3^2(y + 3) = 2 - 4^{x-2} - 3^y - 3^{-y} .$$

Ответы

1. При $a = 2$ решений нет; при $a \neq 2$ $x = \dfrac{1-3a}{a-2}$.

2. $a \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$

3. При $a = \dfrac{4}{5}$, $a = -12$ решений нет;

при $a \neq \dfrac{4}{5}$, $a \neq -12$ $x = \dfrac{16}{5a-4}$.

4. При $a = 2.5$, $a = 0$, $a = 5$ решений нет;

при $a \neq 2.5$, $a \neq 0$, $a \neq 5$ $x = \dfrac{35-13a}{a(a-5)}$.

5. При $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ $x \in \left[\dfrac{-3}{a+2}; +\infty\right)$;

при $a \in (-2; 2)$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{-3}{a+2}\right]$;

при $a = 2$ $x \in (-\infty; +\infty)$;

при $a = -2$ решений нет.

6. а) $x_1 = 2, x_2 = 13$, б) $x_1 = -7, x_2 = 3$, в) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{53}}{2}$,

г) $x_1 = 5, x_2 = 7$, д) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{85}}{3}$, е) решений нет.

7. $x_1 = -7; x_2 = -8$. 8. $x_1 = 15; x_2 = 16$. 9. $x_1 = -\dfrac{13}{2}; x_2 = -2$

10. $k_1 = 0, k_2 = 6$. 11. $a = 3$. 12. $k = 2$.

13. $k=1,\ -2,-3.$ 14. а) $a=1,\ \min=-\frac{2}{9}$; б) $a=1\pm\sqrt{11}$.

15. а) $k>1$, б) $k>\frac{5}{3}$, в) $k<\frac{25}{7}$, г) $k=3$, д) $k>\frac{51}{11}$.

18. $x_1=-3;\ x_2=-2;\ x_3=2;\ x_4=3$.

19. $x_1=-2\sqrt{2};\ x_2=2\sqrt{2}$. 20. $x_1=-2;\ x_2=1$.

21. $x_1=-4;\ x_2=-1;\ x_3=5$.

22. $x_1=\frac{1}{2};\ x_2=-3;\ x_3=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5};\ x_3=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

23. $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=-7;\ x_4=-6$.

24. $x_1=-10;\ x_2=4$. 25. $x_1=\frac{2}{5}\sqrt{5};\ x_2=-\frac{3}{5}\sqrt{5};\ x_3=\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

26. $x_1=-2\sqrt{2};\ x_2=\frac{3}{2}\sqrt{2};\ x_3=-\sqrt{2};\ x_4=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

27. $x_1=3;\ x_2=\frac{1}{3};\ x_3=-4;\ x_4=-\frac{1}{4}$.

28. $x\in\left\{-1, 1, 2\pm\sqrt{3}\right\}$. 29. $x\in\left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

30. $x_1=2;\ x_2=\frac{2}{3};\ x_3=-;\ x_4=-1$.

31. $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=-\frac{3}{2};\ x_4=--3;\ x_5=\sqrt{3};\ x_6=-\sqrt{3}$.

32. $x_1=1+\sqrt{3};\ x_2=1-\sqrt{3};\ x_3=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17};\ x_4=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}$.

33. $x_1 = -7 + 2\sqrt{13}$; $x_2 = -7 - 2\sqrt{13}$; $x_3 = 2 + \sqrt{7}$; $x_4 = 2 - \sqrt{7}$.

34. $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$; $x_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

35. $x \in \left\{ 2, \frac{5 \pm \sqrt{107/3}}{2} \right\}$. 36. $x \in \left\{ \frac{7}{2}, 3 \pm \sqrt{14} \right\}$.

37. $x_1 = -3 + 2\sqrt{3}$, $x_2 = -3 - 2\sqrt{3}$, $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$,

$x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

38. $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_3 = -2 + \sqrt{7}$; $x_4 = -2 - \sqrt{7}$.

39. $x_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$; $x_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$; $x_3 = \frac{1}{6}\sqrt{6}$; $x_4 = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$.

40. $n = 5$. 41. $n = 6$. 42. 0. 43. $[-1; 3]$.

44. $x_1 = -2$ $x_2 = 4$. 45. $[3; +\infty)$. 46. 0. 47. $(-\infty; -1]$.

48. $x = -\frac{3}{2}$. 49. $[3; +\infty)$. 50. $[-1; 3]$.

51. $x_1 = -\frac{1}{8}$; $x_2 = -\frac{21}{4}$. 52. $x_1 = 3$. 53. $x \in \left[-6; \frac{8}{7} \right]$.

54 $x \in [-1; 6]$. 55. $x_1 = \frac{13}{2}$; $x_2 = \frac{11}{2}$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -\frac{3}{2}$.

56 $x \in [-6; 2]$. 57. $x \in [-10; -2] \cup [4; +\infty)$.

58 $x_1 = -\frac{14}{3}$; $x_2 = -\frac{10}{3}$; $x_3 = 6$; $x_4 = 2$.

59 а) $k=1, \quad x=0$, б) $k=-1, \quad x\in(-\infty;1]$,

в) $-\frac{1}{7}<k<\frac{1}{2}$ $x_1=0$, $x_2=-\frac{2}{k-1}$, $x_3=\frac{6}{k+1}$, $x_4=-\frac{8}{k-1}$,

$x_1=2$ $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{2}$.

60. $a_1=-\frac{1}{7}$; $a_2=8-4\sqrt{2}$.

61. $x=1$ 62. $x=-25$ 63. $x=4$ 64. $x=5$

65. $x_1=-1, x_2=2$ 66. $x_1=6, x_2=-3-\sqrt{5}, x_3=-3+\sqrt{5}$

67. $x=3$ 68. $x_1=-2, x_2=2$ 69. $x=1$ 70. $x=2$

71. $x_1=-3, x_2=1$ 72. $x=12$. 73. $x\in[-5;1]$.

74. $x\in[7;12]$. 75. $x\in[8;20]$. 76. $x_1=2;$ $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{2}$.

77. $x_1=-2$. 78. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. 79. $x=\frac{5}{2}$.

80. $(4;+\infty)$. 81. $[-2;7)$ 82. $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$ 83. $\varnothing$

84. $x=2$ 85. $\left(-\frac{1}{3};8\right)$ 86. $(6;+\infty)$ 87. $[0;3]$

88. $[-0.8;1]$ 89. $(-\infty;-1]$ 90. $[-0.5;2]$

91. $\left(\frac{3-\sqrt{113}}{4};\frac{3+\sqrt{113}}{4}\right)$ 92. $[2;+\infty)$ 93. $[1;2]$

94. $[0;+\infty)$. 95. $(-\infty;4]$. 96. $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

97. $(-\infty;0)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. 98. $(0;+\infty)$. 99. $[0;+\infty)$.

100. $[0;4]$. 101. $[4;+\infty)$. 102. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

103. $x=1$. Решение. Способ 1. Находим корни одного и другого уравнения и выбираем равные корни, в данном случае корни обоих уравнений легко находятся: первого – $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ и второго – $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=-1$. Общий корень $x=1$.

Способ 2. Общие корни двух и более алгебраических уравнений содержатся среди корней наибольшего общего делителя НОД многочленов. Найдем НОД многочленов с помощью алгоритма Евклида:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-x-2 & x^3-7x+6 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 \qquad -7x+6} & 1 \\
2x^2+6x-8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3-7x+6 & x^2+3x-4 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+3x^2-4x} & x-3 \\
-3x^2-3x+6 & \\
\underline{-3x^2-9x+12} & \\
6x-6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^2+3x-4 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2-x} & x+4 \\
4x-4 & \\
\underline{4x-4} & \\
0 &
\end{array}$$

НОД($P_3(x),Q_3(x)$) $=x-1$. Поэтому уравнения имеют единственный общий корень $x=1$.

104. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$. 105. $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. 106. $x=2$, $y=3$.

107. $x = 4, \quad y = 0, \quad z = -1.$ 108. $x = -2, \quad y = -1.$

109. $x = pn, \quad y = (-1)^m \frac{p}{6} + pm, \quad n, \quad m \in Z$.

110. $x = 1 + 2n, \quad n \in Z.$ 111. $x = 4, \quad y = \log_3 2.$

112. $f_{наиб.} = 5$ в точке $(2;-5)$. 113. $f_{наим.} = -2$ в точке $(4;1)$.

114. $f_{наиб.} = -2$ в точке $(0;1)$. 115. $f_{наим.} = -6$ в точке $(1;-2)$.

116. $u_{наим.} = 8$ в точке $(0;2)$.

117. $u_{наиб.} = 7$ в точке $(4;2;1)$; $u_{наим.} = -7$ в точке $(-4;-2;-1)$.

118. $z = 3$. 119. $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

120. $a = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4}; \quad a = -\frac{3}{4}, b = \frac{9}{4}.$

121. $x = \frac{7}{6}p + 2pn, \quad y = \pm \frac{2}{3}p + 2pm, \quad n, \quad m \in Z$.

122. $x = 2, \quad y = 0.$

Рекомендуемая литература

1. Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.
2. Дорофеев Г., Потапов М., Розов Н. Математика для поступающих в вузы. М.: Дрофа, 2002.
3. Кравцев С.В., Макаров Ю.Н. и др. Методы решения задач по алгебре. М.: Экзамен, Оникс 21 век, 2001.
4. Математика. Сборник задач с решениями для поступающих в вузы. Под ред. В.М. Говорова, Н.В. Мирошина. М.: АСТ-Астрель, 2002.
5. Потапов М., Олехник С., Нестеренко Ю. Готовимся к экзаменам по математике. М.: НТЦ «Университетский», «АСТ-Пресс», 1997.

Л у к ь я н о в а Галина Сергеевна

Н о в и к о в Анатолий Иванович

Рациональные и иррациональные
уравнения и неравенства

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор Е.И. Ипатова

Лицензия № 020446.

Подписано в печать 22.01.04. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 9,5.

Уч.-изд. л. 9,5. Тираж экз. Заказ

Рязанская государственная радиотехническая академия.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТА.

ISBN 5-7722-0251-0	©	Рязанская государственная радиотехническая академия, 2004