4190

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНТЕГРАЛ.
ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.
ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задачи для практических занятий
и самостоятельной работы
(2-й семестр)

Рязань 2009

УДК 516+517(076)

Интеграл. Основы линейной алгебры. Функции многих переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи для практических занятий и самостоятельной работы / Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: А.В. Дубовиков, Ю.С. Митрохин, М.К. Яковлев, С.В. Богатова, Г.С. Лукьянова, С.Р. Султанов, А.И. Сюсюкалов, К.А. Ципоркова, Т.И. Дорофеева, Т.Н. Чернецова. – Рязань, 2009. – 60 с.

Содержат разноуровневые задачи для практических занятий и самостоятельной работы по математике. Задания повышенной сложности отмечены звёздочкой (*).

Рекомендуется преподавателям кафедры высшей математики и студентам всех специальностей дневной формы обучения.

Ил. 8.

Неопределённый интеграл, методы интегрирования, формула Ньютона-Лейбница, геометрические приложения определённого интеграла, несобственные интегралы 1-го и 2-го рода, линейный оператор, собственные векторы и собственные значения линейного оператора, квадратичная форма, дифференциальное исчисление ФМП, дифференциальные уравнения, задача Коши

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

ГЛАВА 1. ИНТЕГРАЛ

1.1. Вычисление неопределённого интеграла путём преобразования подынтегральной функции. Вычисление неопределённого интеграла внесением функции под знак дифференциала

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. 2. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$. 3. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$.

4. $\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right) dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$.

6. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$. 7. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2}\, dx$.

8. $\int \left(4\sin x - \frac{11}{\cos^2 x}\right) dx$. 9. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\, dx$.

10. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. 11. $\int \sqrt{8-2x}\, dx$. 12. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$.

13. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$. 14. $\int \sin^3 x \cos x\, dx$. 15. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$.

16. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$. 17. $\int \sin(2x-3)\, dx$.

18. $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$. 19. $\int \frac{e^x\, dx}{e^x+1}$. 20. $\int \operatorname{ctg} x\, dx$.

21. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$. 22. $\int \frac{x\, dx}{x^4+1}$. 23. $\int e^{-3x+1} dx$.

24. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 dx}{1+x^2}$.   25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.   26. $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$.

27. $\int \frac{2^x \, dx}{\sqrt{1-4^x}}$.   28.* $\int \frac{(1+x)^2 \, dx}{x(1+x^2)}$.   29.* $\int \frac{x(1-x^2)dx}{1+x^4}$.

30.* $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.   31.* $\int \frac{x^4 \, dx}{1-x}$.

32.* $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.   33.* $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

34.* $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.   35.* $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1.2. Вычисление неопределённого интеграла

заменой переменной.

Вычисление неопределённого интеграла

интегрированием по частям

Найти интегралы.

36. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$.   37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.   38. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x(x+1)}$.

39. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.   40. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.   41. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$.

42. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx$.   43 $\int \frac{x^5 dx}{(x^2-4)^2}$.   44. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

45. $\int x \sin 2x dx$.   46. $\int \arccos x \, dx$.   47. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} \, dx$.

48. $\int \frac{\arcsin x \, dx}{\sqrt{x+1}}$.   49. $\int \ln(x^2+1) dx$.   50. $\int x^2 e^{-x} \, dx$.

51. $\int \ln^2 x\, dx$.

52. $\int e^x \sin x\, dx$.

53. $\int \cos \ln x\, dx$.

54. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x} dx$.

55. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

56.* $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.

57.* $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

58.* $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.

59.* $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}$.

1.3. Интегрирование дробно-рациональных функций

Вычислить интегралы (дроби I типа).

60. $\int \frac{x+8}{(x+2)(1-x)} dx$.

61. $\int \frac{2x^3+6x^2+x-3}{x(x+3)} dx$.

62. $\int \frac{9x+24}{x^2+7x+10} dx$.

63. $\int \frac{2x^2+10x+14}{x^2+6x+8} dx$.

64. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

65. $\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)} dx$.

Вычислить интегралы (дроби I и II типов).

66. $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x+1)^2(x+2)} dx$.

67. $\int \frac{3x^2-7x^3+2x-2}{x^3-x^4} dx$.

68. $\int \frac{5x^2+4x-7}{x^3+x^2-8x-12} dx$.

69. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

70. $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} dx$.

Вычислить интегралы (дроби I и III типов).

71. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

72. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

73. $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$. 74. $\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}dx$.

75. $\int \frac{3x^2+7x+5}{x^3+3x^2+4x+2}dx$. 76. $\int \frac{4x^2-11x+14}{x^3-6x^2+16x-16}dx$.

77. $\int \frac{3x^2-8x+23}{(x-1)(x^2-2x+10)}dx$.

Вычислить интегралы (дроби III и IV типов).

78.* $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$. 79.* $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

80.* $\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{(x^2+1)^2 x}$. 81.* $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

1.4. Интегрирование иррациональных выражений

вида $\mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \sqrt[\mathbf{k}]{\left(\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}\right)^{\mathbf{m}}}\right)$

Найти интегралы.

82. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 83. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$. 84. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$.

85. $\int \frac{\sqrt{2+x}}{x}dx$. 86. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$. 87.* $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

88.* $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$. 89.* $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$.

90.* $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$. 91. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$.

1.5. Интегрирование иррациональных выражений

вида $\mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{a}^2 \pm \mathbf{x}^2}\right)$

Найти интегралы.

92. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

93. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

94. $\int \sqrt{2+x^2}\,dx$.

95. $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$.

96. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

97.* $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

98.* $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$.

99.* $\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$.

100.* $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$.

101.* $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

1.6. Подстановки Эйлера

Найти интегралы.

102. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$.

103. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

104.* $\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

105.* $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$.

106.* $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

107.* $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x+x^2}}$.

108.* $\int \frac{(x+1)\,dx}{\left(2x+x^2\right)\sqrt{2x+x^2}}$.

109.* $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

110.* $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx$. 111.* $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

1.7. Интегрирование выражений вида $\frac{\mathbf{P_n(x)}}{\mathbf{Q_m(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

Найти интегралы.

112.* $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$. 113.* $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$.

114.* $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$. 115.* $\int \frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}dx$.

116.* $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

1.8. Интегрирование дифференциального бинома

Найти интегралы.

117.* $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^3 dx$. 118.* $x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.

119.* $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$. 120.* $\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

121.* $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$. 122.* $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

123.* $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$. 124.* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$.

125.* $\int \frac{x^3 dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. 126.* $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

127.* $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)^2}$. 128.* $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. 129.* $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

1.9. Интегрирование тригонометрических функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки

Найти интегралы.

130. $\int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x-5}$. 131. $\int \frac{dx}{\sin x}$. 132. $\int \frac{dx}{5\cos x+3}$.

133. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$. 134. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$. 135. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

1.10. Интегрирование тригонометрических функций с помощью замен $\mathbf{t=\sin x}$, $\mathbf{t=\cos x}$, $\mathbf{t=tg\,x}$ и формул понижения степени

Найти интегралы.

136. $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$. 137. $\int \cos^4 x\,dx$.

138. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$. 139. $\int \sin^5 x\,dx$.

140. $\int \sin^6 x\,dx$. 141. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

142. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$. 143. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos x}$.

144. $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$. 145. $\int \frac{dx}{\sin x\sin 2x}$.

146. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}$. 147. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^7 x}$.

148. $\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$.

1.11. Интегрирование тригонометрических функций вида

$\mathbf{\sin mx \cdot \cos nx}$, $\mathbf{\cos mx \cdot \cos nx}$, $\mathbf{\sin mx \cdot \sin nx}$, $\mathbf{tg^k x}$, $\mathbf{ctg^k x}$

Найти интегралы.

149. $\int \sin 2x \cos 5x\,dx$. 150. $\int \sin 3x \cos 6x\,dx$

151. $\int \sin 3x \sin x\,dx$. 152. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$

153. $\int \sin 5x \sin 4x\,dx$. 154.* $\int \cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx$.

155.* $\int \mathrm{ctg}^3 3x\,dx$. 156.* $\int \mathrm{tg}^4 \frac{x}{2}\,dx$.

157.* $\int \mathrm{tg}^7 x\,dx$. 158.* $\int \mathrm{ctg}^6 x\,dx$.

1.12. Формула Ньютона-Лейбница

Вычислить интегралы.

159. $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$. 160. $\int_4^9 \sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)dx$. 161. $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25 + 3x}}$.

162. $\int_1^3 \frac{dx}{2 - 5x}$. 163. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 4}$. 164. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

165. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

1.13. Замена переменной в определенном интеграле

Вычислить интегралы.

166. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 167. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\, dx$. 168. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

169. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$. 170. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{tg}x\, dx$. 171.* $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+\sqrt{x}}$.

172.* $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$. 173.* $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$. 174.* $\int\limits_0^{9/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.

175.* $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

1.14. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

Вычислить интегралы.

176. $\int\limits_1^2 x \ln x\, dx$. 177. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin x\, dx$. 178. $\int\limits_0^{\ln 2} x e^{-x}\, dx$.

179. $\int\limits_0^3 \ln(x+3) dx$. 180. $\int\limits_0^{\pi/4} x \sin 2x\, dx$. 181.* $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x\, dx$.

182.* $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. 183.* $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$. 184.* $\int\limits_0^1 x\, \mathrm{arctg}\, x\, dx$.

185.* $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx$.

1.15. Вычисление площадей

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

186. $y^2 = 2x+1,\ x - y - 1 = 0$. 187. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$.

188. $y^2+8x-16=0$, $y^2-24x-48=0$.

189. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$. 190. $y=x(x-1)^2$, $y=0$.

191. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

192. $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

193. $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-3t^3, \end{cases}$ $-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3}$. 194. $\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=t^3-t, \end{cases}$ $-1\le t\le 1$.

195. $\rho=a\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$ $(a>0)$. 196. $\rho=\sin 2\varphi$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

197. $\rho=\operatorname{tg}\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$. 198. $\rho=1+\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

199.* $x^2+y^2=16$, $y^2=6x$ $(6x\ge y^2)$.

200.* $y=\dfrac{\ln x}{4x}$, $y=x\ln x$.

201.* $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t, \\ y=2\sin t-\sin 2t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi$.

202.* $\begin{cases} x=3\cos t-\cos 3t, \\ y=3\sin t-\sin 3t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

203.* $\rho=3+\cos 4\varphi$, $\rho=2-\cos 4\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

1.16. Вычисление объемов

Вычислить объем тел, ограниченных заданными поверхностями.

204. $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$. 205. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $0 \le z \le 2$.

206. $z = \dfrac{x^2}{4} + y^2$, $0 \le z \le 1$. 207. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 2$.

208. $z = x^2 + 2y^2$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ $\left(z \ge x^2 + 2y^2\right)$.

Вычислить объем тел вращения данной кривой вокруг оси Ox.

209. $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$. 210. $y = e^x$, $0 \le x \le 1$.

211. $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 2$. 212. $y = \dfrac{1}{1+x}$, $0 \le x \le 1$.

213. $y = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le 1$. 214.* $y^2(x-4) = x(x-3)$, $y \ge 0$.

Вычислить объем тел вращения данной кривой вокруг оси Oy.

215. $y = \operatorname{arctg} x$, $0 \le x \le 1$. 216. $y = \sqrt[3]{x}$, $0 \le x \le 1$.

217. $y = \ln x$, $1 \le x \le e$. 218. $y = \arccos x$, $0 \le x \le 1$.

219. $y = x^2 + 1$, $0 \le x \le \sqrt{3}$.

1.17. Вычисление длины дуги плоской кривой

Найти длину дуги кривой.

220. $y = \operatorname{ch} x$, $0 \le x \le a$. 221. $y^2 = 2x$, $0 \le y \le 2$.

222. $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

223. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$.

224. $y = \ln\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $a \le x \le b$. 225. $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$.

226. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3, \end{cases}$ $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

227. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

228. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

229. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{1}{2}\pi$.

230. $\rho = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

231. $\rho = \dfrac{8}{\pi}\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

232. $\rho = \dfrac{1}{\varphi}$, $\dfrac{3}{4} \le \varphi \le \dfrac{4}{3}$.

233.* $y = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos x}\, dx$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

234.* $\begin{cases} x = \int\limits_{1}^{t} \dfrac{\cos u}{u} du, \\ y = \int\limits_{1}^{t} \dfrac{\sin u}{u} du, \end{cases}$ $1 \le t \le \alpha$.

1.18. Несобственные интегралы 1 и 2 рода

Вычислить интегралы.

235. $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 8}$.

236. $\int\limits_{2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 4x}$.

237. $\int\limits_{-\infty}^{2} \dfrac{dx}{x^2 - 6x + 10}$.

238. $\int\limits_{-\infty}^{-2} \dfrac{dx}{x^2 - 2x}$.

239. $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}}$.

240. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 6x + 12}$.

241. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. 242. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$. 243. $\int\limits_1^2 \frac{2dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

244.* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$. 245.* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$. 246.* $\int\limits_0^{\frac{1}{\ln 2}} \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$.

247.* $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

Исследовать интеграл на сходимость с помощью теорем сравнения.

248. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. 249. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+x^6}}$.

250. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{x^2+9}}{\sqrt[3]{x^2+2x}+x^3} dx$. 251. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3-2x^2}$.

252. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$. 253.* $\int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

254.* $\int\limits_1^{+\infty} \ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right) dx$. 255.* $\int\limits_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.

256.* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x} dx$.

ГЛАВА 2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

2.1. Определение линейного пространства

Выяснить, являются ли следующие множества линейными пространствами.

257. Множество V_1 всех геометрических векторов, коллинеарных данной прямой.

258. Множество всех геометрических векторов, исходящих из начала координат, концы которых лежат на фиксированной прямой.

259. Множество всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|x| > a$, где a – фиксированное положительное число.

260. Множество всех сходящихся последовательностей.

261. Множество R^n всех арифметических n-компонентных векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с покомпонентным сложением и умножением на действительные числа.

262.* Множество всех расходящихся последовательностей.

2.2. Линейная зависимость (независимость) векторов линейного пространства. Базис

263. Показать, что если в системе векторов существует линейно зависимая подсистема, то вся система также является линейно зависимой.

264. Доказать, что система арифметических векторов $\bar{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$,…, $\bar{e}_n = (0,0,\ldots,1)$ образует базис в пространстве R^n.

265. Доказать, что система арифметических векторов $\bar{x}_1 = (1,2,0,4)$, $\bar{x}_2 = (-1,0,5,1)$ является линейно независимой.

266. Является ли линейно зависимой система геометрических векторов $\bar{x}_1 = -\bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{x}_2 = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{x}_3 = -4\bar{i} + 5\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{x}_4 = 3\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$?

267.* Найти ранг и какой-нибудь базис данной системы векторов из задания 266.

2.3. Изменение координат вектора при переходе к другому базису

268. Вектор $\overline{x}$ имеет в базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ координаты (3, 4). Найти координаты данного вектора в базисе $\overline{e}_1' = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$.

269. Вектор $\overline{x}$ задан в базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ координатами (2, –2, 5). Найти координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{e}_1' = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 3\overline{e}_3$, $\overline{e}_2' = 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 5\overline{e}_3$, $\overline{e}_3' = \overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 + 4\overline{e}_3$.

270. Вектор $\overline{x}$ имеет координаты (1, 2, 1) в базисе $\overline{e}_1'$, $\overline{e}_2'$, $\overline{e}_3'$ и $\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{e}_2' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{e}_3' = \overline{e}_1$, где векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$.

2.4. Евклидовы пространства

271. Показать, что в пространстве R^n арифметических векторов $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ можно определить скалярное произведение с помощью соотношения:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \text{, где } \overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

272. Показать, что в пространстве R^2 арифметических векторов можно определить скалярное произведение следующим образом: для любых $\overline{x} = (x_1, x_2)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2)$ из R^2, полагая

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = 2x_1 y_1 + 5x_2 y_2 .$$

273. Показать, что в пространстве R^2 арифметических векторов можно определить скалярное произведение следующим образом: для любых $\overline{x} = (x_1, x_2)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2)$ из R^2, полагая

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 .$$

274.* Будет ли множество всех геометрических векторов образовывать евклидово пространство, если скалярное произведение двух векторов определить как произведение их длин?

2.5. Нормированные пространства

275. Показать, что n-мерное векторное пространство R^n является нормированным пространством с нормой $\|\overline{x}\| = \max|x_i|$, где x_i – компоненты вектора $\overline{x}$, то есть $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

276. Проверить, что n-мерное пространство R^n является нормированным пространством с нормой $\|\overline{x}\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$, где x_i – компоненты вектора $\overline{x}$, то есть $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

277. Показать, что множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с обычным умножением функции на число и сложением функций является нормированным пространством с нормой $\|\overline{x}\| = \max_{t\in[a,b]}|f(t)|$ для $\overline{x} = f(t)$.

278.* Показать, что $\rho(\overline{x}) = \max_{t\in[a,b]} f(t)$ не является нормой в пространстве положительных функций $\overline{x} = f(t)$, непрерывных на $[a,b]$ с суммой $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = f_1(t)\cdot f_2(t)$ и умножением на число $\alpha\overline{x} = f^{\alpha}(t)$.

2.6. Метрические пространства

279. Показать, что множество действительных чисел R с расстоянием $\rho(x,y) = |x-y|$ образует метрическое пространство.

280. Показать, что множество действительных чисел с метрикой

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

является метрическим пространством.

281. Показать, что пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$, является метрическим пространством, если метрика определяется следующим образом: $\rho(x,y) = \max_{t\in[a,b]}|x(t) - y(t)|$.

2.7. Линейный оператор и его матрица. Операции над линейными операторами

282. Показать, что оператор $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$, где λ – некоторое число, является линейным. Написать матрицу этого оператора в базисе $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$.

283. Будет ли оператор $A\overline{x} = \lambda\overline{x} + \overline{a}$, где λ – число, $\overline{a}$ – некоторый вектор, линейным?

284. Показать, что оператор $A\overline{x} = \left(\overline{x}, \overline{e}\right)\overline{e}$, где $\overline{e}$ – заданный единичный вектор, является линейным. Выяснить геометрический смысл этого отображения.

285. Показать, что оператор

$$A\overline{x} = \left(x_2 + x_3;\, 2x_1 + x_3;\, 3x_1 - x_2 + x_3\right),$$

где x_1, x_2, x_3 – координаты вектора $\overline{x}$ в некотором базисе, является линейным. Найти матрицу этого оператора.

286. Матрица линейного оператора A в базисе $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе B, состоящем из векторов $\left(\overline{i} + \overline{j};\, \overline{j} + \overline{k};\, \overline{k} + \overline{i}\right)$.

287. Оператор A ставит каждому вектору $\overline{x} \in R^3$ в соответствие его проекцию на плоскость xOy. Составить матрицу этого оператора в базисе $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$.

288. Оператор имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, оператор B имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $A \cdot B\left(\overline{x}\right)$.

289. A и B – линейные операторы: $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$, $B\overline{x} = \mu\overline{x}$. Найти матрицу линейного оператора $\left(A + B\right)\overline{x}$.

2.8. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

290. Найти собственные векторы и определить их собственные значения для оператора проектирования вектора $\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}$ на плоскость xOy.

291. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$.

292. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ в базисе } \left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right).$$

293. Составить характеристическое уравнение матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и найти собственные числа этого оператора A.

294. Показать, что линейный оператор поворота вектора $\overline{x} \in R^2$ на угол $\varphi \neq 0$ не имеет собственных значений и собственных векторов. Написать матрицу этого оператора в базисе $\left(\overline{i}, \overline{j}\right)$.

2.9. Знакоопределенные, знакопостоянные и знакопеременные квадратичные формы

295. Записать квадратичную форму с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Будет ли эта квадратичная форма знакоопределенной?

296. Записать квадратичную форму с матрицей

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ -1 & -3 & 3\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Будет ли эта квадратичная форма знакоопределённой?

297. Определить, какие из данных матриц являются знакоопределёнными, знакопостоянными или знакопеременными.

а) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

2.10. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

298.* Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$V(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$$

к каноническому виду, и найти этот канонический вид.

299.* Написать каноническое уравнение кривой второго порядка $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$. Определить вид кривой и найти каноническую систему координат, в которой данная кривая имеет каноническое уравнение.

300.* Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка

$$4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz-16x-16y-8z+72=0.$$

Определить тип поверхности.

ГЛАВА 3

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФМП)

3.1. ФМП: область определения; линии уровня и график; предел и непрерывность ФМП в точке

Найти области определения функций.

301. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

302. $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$.

303. $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$.

304. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

305.* $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$.

306.* $z=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

Вычислить пределы.

307. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

308. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$.

309. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$.

310.* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

311.* Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{при } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{при } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$ в точке $(0,0)$.

Начертить линии уровня заданных функций.

312. $z=xy$.

313.* $z=x^2y+x$.

314. $z=y\left(x^2+1\right)$.

315.* $z=\dfrac{xy-1}{x^2}$.

3.2. Вычисление частных производных

Найти частные производные первого порядка заданных функций.

316. $z = e^{x^2+y^2}$. 317. $u = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}$. 318. $z = e^{xy\left(x^2+y^2\right)}$.

319. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$. 320. $z = \frac{y}{x}$. 321. $z = \frac{xy}{x-y}$.

322. $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$. 323. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. 324. $u = xe^{-yx}$.

325. $u = \arcsin\left(t\sqrt{x}\right)$.

3.3. Полное приращение и полный дифференциал ФМП

326. Вычислить dz и Δz для $z = xy$ при $x = 5$, $y = 4$,

$$\Delta x = 0{,}1 \text{ и } \Delta y = -0{,}2.$$

Найти полный дифференциал указанных функций.

327. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$. 328. $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$.

329. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}$. 330. $z = x^y$. 331. $u = e^{xyz}$.

3.4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Вычислить приближенно указанные выражения.

332. $(1{,}02)^{4{,}05}$. 333. $\ln\left(0{,}09^3 + 0{,}99^3\right)$. 334. $\sqrt[3]{(1{,}02)^2 + (0{,}05)^2}$.

335. $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$. 336.* $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$.

337.* $\sqrt{(1{,}04)^{1{,}99} + \ln(1{,}02)}$.

3.5. Частные производные и дифференциалы ФМП высших порядков. Формула Тейлора для ФМП

Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для заданных функций.

338. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

339. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$.

340. $z = y^{\ln x}$.

341. $z = \arcsin(xy)$.

Найти частные производные указанных порядков.

342. $w = e^{xyz}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} - ?$

343. $z = \sin(xy)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - ?$

344.* $v = x^m y^n z^p$, $\dfrac{\partial^6 v}{\partial x \partial y^3 \partial z^2} - ?$

Найти дифференциалы второго порядка для заданных функций.

345. $z = xy^2 - x^2 y$.

346. $z = \dfrac{1}{2\left(x^2 + y^2\right)}$.

347. $z = x \sin^2 y$.

348. $u = xyz$.

349. $u = \sin(x + y + z)$.

350.* Найти $d^3 z(0; \pi)$ функции $z = \sin(2x + y)$.

351.* Представить в виде многочлена Тейлора по степеням $x - 1$, $y + 2$ функцию

$$f(x, y) = 2x^3 + x^2 y - 4xy^2 - 4x^2 + 4y^2 - 18xy - 14x + 17y + 16.$$

352.* Разложить $z = x^y$ по степеням $x - 1$, $y - 1$, найдя члены до третьего порядка включительно.

3.6. Дифференцирование сложной и неявно заданной ФМП

Найти частные производные сложной функции.

353. $z = x^2 \ln y,\ x = \frac{u}{v},\ y = 3u - 2v.$

354. $z = \operatorname{arctg}(xy),\ x = uv,\ y = \frac{u}{v}.$

355. $z = \ln\left(x^2 + 2y^2\right),\ x = \sqrt{uv},\ y = \frac{v}{u}.$

356. $z = x^y,\ x = u\sin v,\ y = u\cos v.$

357. $z = \sqrt{\frac{y}{x}},\ x = uv,\ y = ue^v.$

Найти полную производную.

358. $z = e^{x-2y},\ x = \sin t,\ y = t^3.$

359. $u = z^2 + y^2 + zy,\ z = \sin t,\ y = e^t.$

360. $z = \arcsin(x - y),\ x = 3t,\ y = 4t^3.$

361. $z = x^2 y - y^2 x,\ x = e^t,\ y = t^2.$

362.* $z = t\cos xy,\ x = t^2,\ y = \sqrt{t}.$

Найти частные производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно.

363. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$ 364. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0.$

365. $z^3 + 3xyz = a^3.$ 366. $e^z - xyz = 0.$

367.* $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1.$

3.7. Уравнение касательной плоскости π и нормали h

к поверхности. Градиент, производная по направлению

Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0.

368. $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $M_0(1;1)$.

369. $z = 2x^2 - 4y^2$, $M_0(2;1)$. 370. $z = xy$, $M_0(1;1)$.

371. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M_0(3;4)$. 372. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0(1;1)$.

Найти градиент функции $u = f(x, y, z)$ и производную по направлению вектора $\overline{h}$ в точке M_0.

373.6. $u = x^2y^2z$, $M_0(1;1;1)$, $\overline{h}(1;-2;2)$.

374. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1;2;2)$, $\overline{h}(-3;4;0)$.

375. $u = ze^{x^2+y^2}$, $M_0(0;0;1)$, $\overline{h}(1;0;\sqrt{3})$.

376. $u = (xy)^z$, $M_0(1;e;1)$, $\overline{h}(-5;0;12)$.

377. $u = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$, $M_0(1;\sqrt{3};-1)$, $\overline{h}(2;-2;-1)$.

3.8. Экстремум ФМП

Найти критические точки и проверить достаточное условие.

378. $z = 2x^2 - xy + 4y^2 + 2x - 3y + 4$.

379. $z = 2x^3 + xy^2 + y^2 + 5x^2$. 380.* $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$.

381. $u = x^2 + 2y^2 + 6z^2 - xy + 2xz - 3yz + 2x + y - 4z + 5$.

382. $u = 2x^2 + y^2 - xy - xz + 2z$.

Найти критические точки в задаче на условный экстремум и исследовать их характер.

383. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 2$. 384. $z = xy$, $x^2 + y^2 = 2$.

385. $z = x + y$, $x^2 + y^2 = 2$. 386.* $u = xyz$, $x + y + z = 6$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в области D.

387. $z = x^2 - y^2$, $D:\ x^2 + y^2 \le 4$.

388. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$.

ГЛАВА 4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Поле направлений и изоклины

389. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

390. С помощью изоклин начертить общую картину хода интегральных кривых уравнения $y' = x^2 + y^2 - 1$.

391. Построить поле направлений уравнения $y' = \dfrac{y}{x}$. Начертить вид интегральных кривых.

392. Методом изоклин построить поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = x + 1$.

393. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения $y' = (y - 1)^2$.

4.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним

Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения.

394. $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0$.

395. $\sin x \sin y\, dx + \cos x \cos y\, dy = 0$.

396. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\, y' = 0$.

Найти частное решение следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющих соответствующим начальным условиям.

397. $(1+e^x)yy' = e^x$, $y|_{x=0} = 1$.   398. $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, $y|_{x=e} = 1$.

Решить уравнения.

399.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x-y} + 1$. 400.* $(x+y)^2 y' = a^2$.

401.* $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

402.* Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $(x+2y)y' = 1$, $y(0) = -1$.

403.* Определить кривую, проходящую через точку $(3;4)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

404.* Найти кривую, для которой угловой коэффициент касательной в какой-либо точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

4.3. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним

Проинтегрировать дифференциальные уравнения.

405. $xy' = y\ln\dfrac{x}{y}$.   406. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

407. $x\,dy = \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx$.

408. Найти частное решение дифференциального уравнения $y^2 + x^2 y' = xyy'$ по данным начальным условиям $y|_{x=3} = 4$.

409. Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения $(xy'-y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=x$ выделить кривую, проходящую через точку $(1;0)$.

Решить уравнения.

410.* $y'=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

411.* $(12x+5y-9)dy+(5x+2y-3)dx=0$.

412.* Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'=\dfrac{(x+y-2)}{(y-x-4)}$, проходящую через точку $M(1;1)$.

413.* Найти частное решение дифференциального уравнения

$$2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0;\ y(0)=2.$$

414.* Определить кривую, проходящую через точку $M(4;3)$, если подкасательная AT любой точки её есть среднее арифметическое координат точки касания (см. рис. 1).

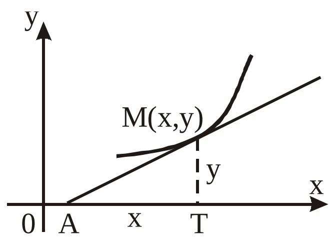


Рис.1

4.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Решить уравнения.

415. $xy'-y=x^2\cos x$.

416. $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

417. $y'\cos x+y=1-\sin x$.

418. $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$; $y(0)=0$.

419. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x$; $y(e)=\dfrac{e^2}{2}$.

420.* $y' + 3y\,\mathrm{tg}\,3x = \sin 6x$; $y(0) = \dfrac{1}{3}$.

Решить уравнения, приняв за неизвестную функцию x.

421.* $\left(y^4 + 2x\right)y' = y$. 422.* $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$.

423.* Найти кривые, обладающие тем свойством, что отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси $0y$, равен квадрату абсциссы точки касания (см. рис. 2) (см. указание).

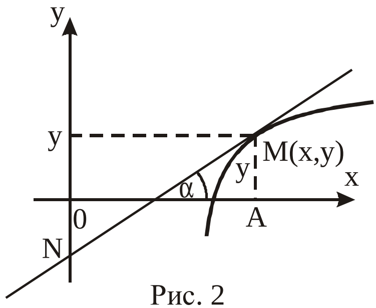


Рис. 2

424.* Сила тока в цепи с сопротивлением R, индуктивностью L и электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению $L\dfrac{dJ}{dt} + RJ = E$. Найти зависимость силы тока от времени t, считая R и L постоянными; если электродвижущая сила возрастает пропорционально времени, т.е. $E = kt$, сила тока в начальный момент времени равна нулю.

4.5. Уравнения Бернулли

Проинтегрировать уравнения Бернулли:

425. $xy' + y = -xy^2$. 426. $yy' - 4x - y^2\sqrt{x} = 0$.

Найти интегральные кривые, проходящие через точку $(0;1)$, для дифференциальных уравнений.

427. $y' = xy + x^3y^2$. 428. $y' + \dfrac{3x^2y}{x^3+1} = y^2\left(x^3+1\right)\sin x$.

429. $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$; $y(0) = \dfrac{9}{4}$. Найти частное решение данного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

4.6. Дифференциальные уравнения высших порядков,

допускающие понижение порядка

Решить дифференциальные уравнения.

430. $y'' = xe^{-x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

431. $y''' = x^2 + \sin 2x$.

432. $xy'' = y' \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$.

433. $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

434. $xy'' = y'$.

435. $1 + (y')^2 = 2yy''$.

436. $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.

437. $3(y')^2 = 4yy'' + y^2$.

4.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Найти общее решение дифференциального уравнения.

438. $y'' - 7y' + 12y = 0$.

439. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

440. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

441. $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0$.

442. $y^{VI} + y^{IV} = 0$.

443. $y^{IV} - 6y'' + 5y = 0$.

444. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 0$.

4.8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида

Найти общее решение дифференциального уравнения методом неопределённых коэффициентов.

445. $y'' - 2y' + y = e^x(x^2 + 1)$.

446. $y'' + 3y' + 2y = 2\cos 3x + 4\sin 3x$.

447. $y'' + y = x\sin x$.

448. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

449. $2y'' + y' - y = 2e^x$.

450.* $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

451.* $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$.

452.* $y'' + 6y' + 10y = 80e^{x}\cos x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 10$.

Решить дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных.

453. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

454. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

455. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

456. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

457.* $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$.

458.* $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$.

459.* $y'' + y = \operatorname{tg} x$; $y(0) = y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

4.9. Нормальная система дифференциальных уравнений. Метод исключений

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

460. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

461. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$

462. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

463. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$

464. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

465.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases}$

4.10. Матричный метод решения систем линейных однородных дифференциальных уравнений

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

466. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 8y. \end{cases}$ 467. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - y. \end{cases}$ 468. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

469. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$ 470. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$ 471. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

472.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a+1)x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + (a-1)y. \end{cases}$ 473.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$

474.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y + z. \end{cases}$ 475.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = y + 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -2y + z. \end{cases}$

4.11. Решение систем линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

476.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + y + 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y + 1. \end{cases}$

477.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y - 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - e^{-t}. \end{cases}$

478.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + e^{-t}. \end{cases}$

479.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 4y + t. \end{cases}$

480.* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y - 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y + e^{t}. \end{cases}$

4.12. Решение задач

481. Материальная точка массой $m = 1$ г движется прямолинейно под действием силы F, прямо пропорциональной времени t, отсчитываемому от $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения v. Известно, что при $t = 10$ с скорость $v = 0{,}5\, ^{м}\!/_{с}$, $F = 4 \cdot 10^{-5}$ Н. Найти скорость v через минуту после начала движения.

482. В процессе химической реакции жидкие химические вещества A и B объёмом 10 и 20 л соответственно образуют новое жидкое химическое вещество C. Считая, что температура в процессе реакции не меняется, а также что из каждых двух объёмов вещества A и одного объёма вещества B образуется три объёма вещества C, определить количество x вещества C в произвольный момент времени t, если за 20 мин его образуется 6 л.

483. Тело массой m, подвешенное на пружине, находится в состоянии равновесия (положение $x = 0$). Толчком оно выводится из состояния равновесия, при этом ему сообщается скорость v_0. Найти закон движения тела, если жесткость пружины равна C.

484. Эластические свойства мышц приблизительно характеризуются уравнением биомеханики

$$\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} + k\frac{d\mathbf{l}}{dt} + L\mathbf{l} + M = 0,$$

где M – общая масса мышц, параметры k и L определяют меру зависимости напряжения мышц от длины $\mathbf{l}$ и скорости её изменения $v = \dfrac{d\mathbf{l}}{dt}$. Найти $\mathbf{l}(t)$, исследовать её механический смысл.

485.* Тело массой m падает по вертикали с некоторой высоты без начальной скорости. При падении тело испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости тела. Найти закон движения тела.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

1.1.

1. $\sqrt{x}+c$. 2. $x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$. 3. $c-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$.

4. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+c$. 5. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+c$. 6. $3x-\frac{2\cdot 1{,}5^x}{\ln 1{,}5}+c$.

7. $x-\sin x+c$. 8. $-4\cos x-11\operatorname{tg}x+c$. 9. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+x)+c$.

10. $c-\frac{1}{8(2x-3)^4}$. 11. $c-\frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$. 12. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c$.

13. $\frac{2}{3}\sqrt{4+x^5}+c$. 14. $\frac{1}{4}\sin^4 x+c$. 15. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+c$.

16. $c-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}$. 17. $c-\frac{1}{2}\cos(2x-3)$.

18. $\ln(x^2-3x+8)+c$. 19. $\ln(e^x+1)+c$. 20. $\ln|\sin x|+c$.

21. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3x+c$. 22. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2$. 23. $c-\frac{e^{1-3x}}{3}$.

24. $\frac{(\operatorname{arctg}x)^3}{3}+c$. 25. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+c$. 26. $e^{\sin x}+c$.

27. $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+c$. 28.* $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+c$.

29.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+c$.

30.* $c-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$.

31.* $c-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|1-x|$.

32.* $\arcsin(x-2)+c$. 33.* $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+c$.

34.* $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+c$. 35.* $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+c$.

1.2.

36. $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}\left(5x^3+6x^2+8x+16\right)+c$. 37. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+c$.

38. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$. 39. $\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}-3(x+1)^{1/3}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+c$.

40. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+c$.

41. $2\sqrt{1+\ln x}-\ln|\ln x|+2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right|+c$. 42. $\frac{1}{2}\ln^2\operatorname{tg}x+c$.

43. $\frac{x^2-4}{2}+\frac{8}{x^2-4}+4\ln\left|x^2-4\right|+c$. 44. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+c$.

45. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$. 46. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$.

47. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$.

48. $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+c$.

49. $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\operatorname{arctg}x+c$. 50. $c-e^{-x}\left(2+2x+x^2\right)$.

51. $x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+c$. 52. $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+c$.

53. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+c$. 54. $\ln|\ln\sin x|+c$.

55. $x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\sqrt{1-x^2}-2x+c$.

56.* $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$.

57.* $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2+c$.

58.* $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+c$. 59.* $\arccos\frac{1}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$.

1.3.

60. $2\ln|x+2|-3\ln|x-1|+c$. 61. $x^2-\ln|x|+2\ln|x+3|+c$.

62. $7\ln|x+5|+2\ln|x+2|+c$. 63. $2x+\ln|x+2|-3\ln|x+4|+c$.

64. $\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+2|-\ln|x+1|+c$.

65. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+c$.

66. $\frac{-2}{x+1}+\ln|x+1|+\ln|x+2|+c$. 67. $3\ln|x|+\frac{1}{x^2}+4\ln|x-1|+c$.

68. $3\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}+2\ln|x-3|+c$.

69. $\frac{x}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+c$.

70. $\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\ln|x-1|+c$.

71. $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c$.

72. $\frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

73. $\frac{1}{4} \ln|1+x| - \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c$.

74. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right| + c$.

75. $\ln|x+1| + \ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + c$.

76. $2\ln|x-2| + \ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + c$.

77. $2\ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+10) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + c$.

78.* $\frac{-1}{x} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(1+x^2)} + c$.

79.* $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + c$.

80.* $\frac{1}{2(x^2+1)} + \operatorname{arctg} x + \ln|x| + c$.

81.* $\frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5x}{24(1+x^2)^2} + \frac{15x}{48(1+x^2)} + \frac{15}{48} \operatorname{arctg} x + c$.

1.4.

82. $2(1+\sqrt{x}) - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c$. 83. $x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + c$.

84. $\frac{2}{15}\left(3x^2-x-2\right)\sqrt{1-x}+c$.

85. $2\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}\right|+c$.

86. $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right]+c$.

87.* $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+c$. 88.* $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$.

89.* $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+c$. 90.* $\frac{1}{2}\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)$.

91.* $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}+c$.

1.5.

92. $-\left(1-x^2\right)^{1/2}+c$. 93. $-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+c$.

94. $\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)+c$.

95. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+c$.

96. $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+c$.

97.* $-\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}+c$. 98.* $\operatorname{tg}\arcsin x+c$. 99.* $-\frac{1}{\cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)}+c$.

100.* $\sin(\operatorname{arctg} x)+c$. 101.* $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)$.

1.6.

102. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+c$. 103. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+c$.

104.* $-\frac{2\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x}+\ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right|+c$.

105.* $\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+c$.

106.* $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$.

107.* $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+c$. 108.* $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+c$.

109.* $\ln\left|\frac{2+-2+\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+c$.

110.* $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+c$.

111.* $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+c$.

1.7.

112.* $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c$. 113.* $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+c$.

114.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+c$.

115.* $(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+c$.

116.* $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+3}+c$.

1.8.

117.* $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}x^2+\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^3+c$.

118.* $\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}\left(3x^2-2\right)}{15}+c$.

119.* $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\cdot\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\cdot\sqrt[6]{x^5}+c$.

120.* $\frac{1}{14}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^7}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^4}+c$.

121.* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right|+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^3}+c$.

122.* $-\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{4x^2}+c$. 123.* $-\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}+c$.

124.* $\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8}+\frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}+c$.

125.* $\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+c$. 126.* $\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+c$.

127.* $\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+\ln\frac{x}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^3}+c$.

128.* $4\sqrt{1+\sqrt{x}}\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{5}-\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{3}+1\right)+c$.

129.* $\frac{1}{3}\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^3}-1\right)^2}{\left|x^3\right|}+c$.

1.9.

130. $\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}+c$. 131. $\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+c$. 132. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+c$.

133. $\frac{2}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+c$. 134. $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+c$.

135. $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+c$.

1.10.

136. $\frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+c$.

137. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$. 138. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+c$.

139. $c-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x$.

140. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+c$.

141. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)+c$. 142. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}x\right)+c$.

143. $c-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x-\operatorname{ctg}^2 x+\ln\left|\operatorname{tg}x\right|$.

144. $\frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x}-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c$.

145. $-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin x}+\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\right)+c$. 146. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+c$.

147. $\frac{2}{5\cos^5 x}+c$.

148. $\frac{1}{9}\sin^9 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+c$.

1.11.

149. $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+c$. 150. $-\frac{1}{18}\cos 9x+\frac{1}{6}\cos 3x+c$.

151. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+c$. 152. $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+c$.

153. $\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{18}\sin 9x+c$.

154.* $\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+c$.

155.* $-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln\left|\sin 3x\right|+c$.

156.* $\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x+c$.

157.* $\frac{\operatorname{tg}^6 x}{6}-\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+c$.

158.* $-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg}x-x+c$.

1.12.

159. $4\frac{5}{6}$. 160. $45\frac{1}{6}$. 161. $\frac{2}{3}$. 162. $-\frac{1}{5}\ln\frac{13}{3}$. 163. $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$.

164. $\ln\sqrt{3}$. 165. $\frac{\pi}{4}$.

1.13.

166. $4-2\ln 3$. 167. $\frac{1}{8}$. 168. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. 169. $\ln 2$. 170. 0.

171. $2\ln 2-1$. 172.* $\operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}$. 173.* $2-\frac{\pi}{2}$. 174.* $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$.

175.* $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

1.14.

176. $2\ln 2-\frac{3}{4}$. 177. 2π. 178. $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$. 179. $3(\ln 12-1)$. 180. $\frac{1}{4}$.

181.* $\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}+1\right)$. 182.* $\frac{\pi}{4}a^2$. 183.* -2π. 184.* $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

185.* $\frac{\pi}{2}-1$.

1.15.

186. $\dfrac{16}{3}$. 187. $\dfrac{1}{3}$. 188. $\dfrac{32}{3}\sqrt{16}$. 189. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{3}$. 190. $\dfrac{1}{12}$. 191. 3π.

192. $\dfrac{3\pi}{8}$. 193. $\dfrac{72}{5}\sqrt{3}$. 194. $\dfrac{8}{15}$. 195. $\dfrac{4}{3}\pi^3 a^2$. 196. $\dfrac{\pi}{8}$.

197. $\dfrac{4-\pi}{8}$. 198. $\dfrac{3\pi}{4}$. 199.* $\dfrac{4}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)$.

200.* $\dfrac{1}{16}\left(3-2\ln 2-2\ln^2 2\right)$. 201.* 3π. 202.* 12π.

203.* $\dfrac{37}{6}\pi-5\sqrt{3}$.

1.16.

204. $\dfrac{\pi}{2}$. 205. $\dfrac{16\pi}{3}$. 206. π. 207. $\dfrac{8\pi}{3}$. 208. $\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}-\dfrac{11}{3}\right)$.

209. $\dfrac{\pi^2}{2}$. 210. $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$. 211. 2π. 212. $\dfrac{\pi}{2}$. 213. $\dfrac{2\pi}{3}$.

214.* $\dfrac{\pi}{2}\left(15-16\ln 2\right)$. 215. $\pi-\dfrac{\pi^2}{4}$. 216. $\dfrac{\pi}{7}$. 217. $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$.

218. $\dfrac{\pi^2}{4}$. 219. $2\pi\sqrt{3}$.

1.17.

220. $\operatorname{sh} a$. 221. $\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. 222. $1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. 223. 2.

224. $\ln\dfrac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. 225. $\ln 3-0{,}5$. 226. $4\sqrt{3}$. 227. $\dfrac{1}{2}\pi^2$. 228. 8.

229. $\dfrac{3}{2}$. 230. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\dfrac{1}{2}a\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. 231. 4.

232. $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$. 233.* 4. 234.* $\ln\alpha$.

1.18.

235. $\frac{\pi}{8}$. 236. $\frac{\ln 3}{4}$. 237. $\frac{\pi}{4}$. 238. $\frac{\ln 2}{2}$. 239. $\frac{\pi}{2}$. 240. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

241. $\frac{\pi}{2}$. 242. 4. 243. 2π.

244.* Интеграл расходится. 245.* $\frac{1}{4}$. 246.* Интеграл расходится.

247.* Интеграл расходится. 248. Интеграл сходится.

249. Интеграл сходится. 250. Интеграл расходится.

251. Интеграл расходится. 252. Интеграл сходится.

253.* Интеграл сходится. 254.* Интеграл сходится.

255.* Интеграл расходится. 256.* Интеграл сходится.

ГЛАВА 2

2.1.

257. Да. 258. Да, если прямая проходит через начало координат.

259. Нет. 260. Да. 261. Да. 262.* Нет.

2.2.

266. Да. 267.* Ранг равен 3. Базисом могут служить векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ из задания 266.

2.3.

268. (2, –1). 269. 2. (2, –1, 1). 270. $(4,3,1)$.

2.4.

274.* Нет.

2.7.

282. $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$. 283. При $\bar{a}\neq\bar{0}$ оператор A нелинейный.

284. $A(\bar{x})=\prod p_{\bar{e}}\bar{x}\cdot\bar{e}=\overline{\prod p_{\bar{e}}x}$. 285. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

286. $A_B=T^{-1}AT$, где $T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ матрица перехода от старого к новому базису. 287. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

288. $AB=\begin{pmatrix}11 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. 289. $A+B=\begin{pmatrix}\lambda+\mu & 0 & 0\\ 0 & \lambda+\mu & 0\\ 0 & 0 & \lambda+\mu\end{pmatrix}$.

2.8.

290. $\bar{h}_0=\alpha\vec{k}$, $\bar{h}_1=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$.

291. $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-\frac{3}{2}$, $\bar{h}_{1/2}=\alpha\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$, $\bar{h}_{-\frac{3}{2}}=\alpha\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}$, где $\alpha\neq 0$.

292. $\lambda=1$, $\bar{h}_1=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$. 293. $\lambda=-1$.

294. $\begin{vmatrix} \cos\varphi-\lambda & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{vmatrix}=0$. Дискриминант характеристического уравнения меньше нуля.

2.9.

295. Нет. 296. Да, эта форма определённо отрицательная.

297. а) знакоопределённая положительная;

б) знакоопределённая положительная;

в) знакопеременная.

2.10.

298.* $V=3x_1'^2+6x_2'^2+9x_3'^2$, где $x_1=\frac{1}{3}\left(2x_1'-x_2'+2x_3'\right)$,

$$x_2=\frac{1}{3}\left(2x_1'+2x_2'-x_3'\right),\ \ x_3=\frac{1}{3}\left(-x_1'+2x_2'+2x_3'\right).$$

299.* $x''^2-\frac{1}{4}y''^2=1$ – гипербола

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'+y'\right), \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'-y'\right), \end{cases} \quad \begin{cases} x''=x'-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y''=y'-\frac{3}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''+y''\right)+2, \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-y''\right)-1. \end{cases}$$

300.* $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-9$, $\lambda_3=0$ – собственные числа матрицы квадратичной части уравнения поверхности. $\frac{x''^2}{8}-\frac{y''^2}{8}=z''$ – гиперболический параболоид, где

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\left(3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z''\right) + \dfrac{2}{3}\ , \\ y = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\left(-3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z''\right) + \dfrac{2}{3}\ , \\ z = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\left(-4y'' + \sqrt{2}z''\right) + \dfrac{1}{3}\ . \end{cases}$$

ГЛАВА 3

3.1.

301. $x^2 + y^2 \le 1$. 302. $y^2 > 4x - 8$.

303. Вся плоскость, за исключением точек окружности

$$x^2 + y^2 = 1.$$

304. Замкнутая область, лежащая между положительной полуосью абсцисс и параболой $y = x^2$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x^2 \ge y$.

305.* Внутренняя часть правого и левого вертикальных углов, образованных прямыми $y = 1 + x$ и $y = 1 - x$, включая эти прямые, но без точки их пересечения:

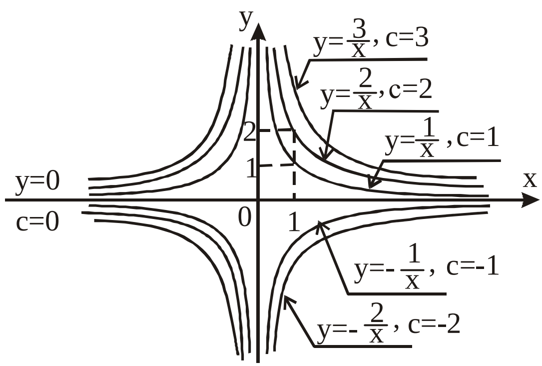
$$1 - x \le y \le 1 + x\ \ (x > 0),\quad 1 + x \le y \le 1 - x\ \ (x < 0).$$

306.* Часть плоскости, лежащая вне окружностей единичных радиусов с центрами в точках $(-1;0)$ и $(1;0)$. Точки первой окружности принадлежат области, точки второй не принадлежат.

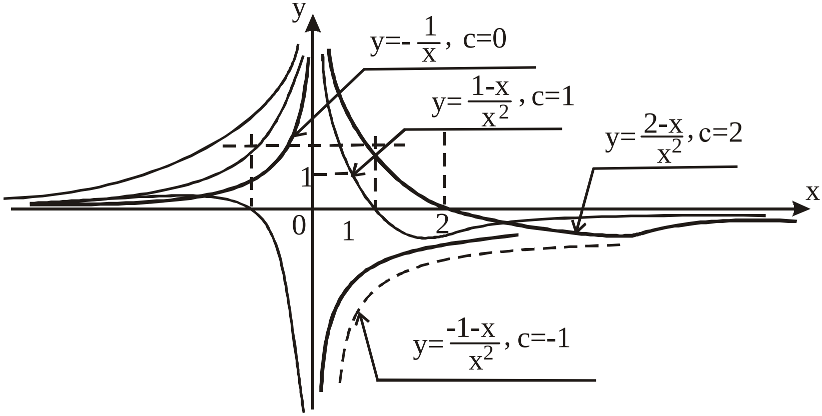
307. 2. 308. 0. 309. Предел не существует. 310.* 1.

311.* Разрывна.

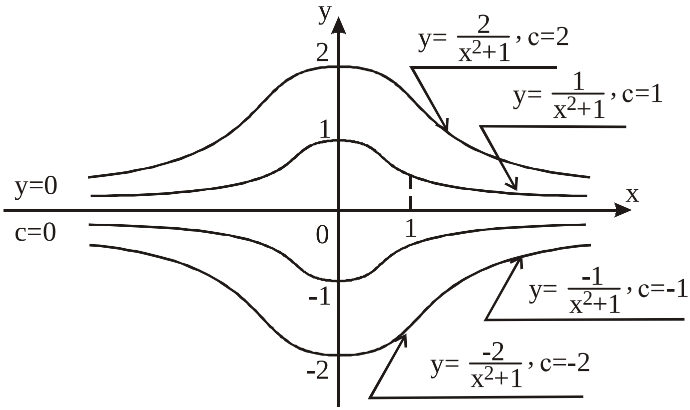
312.



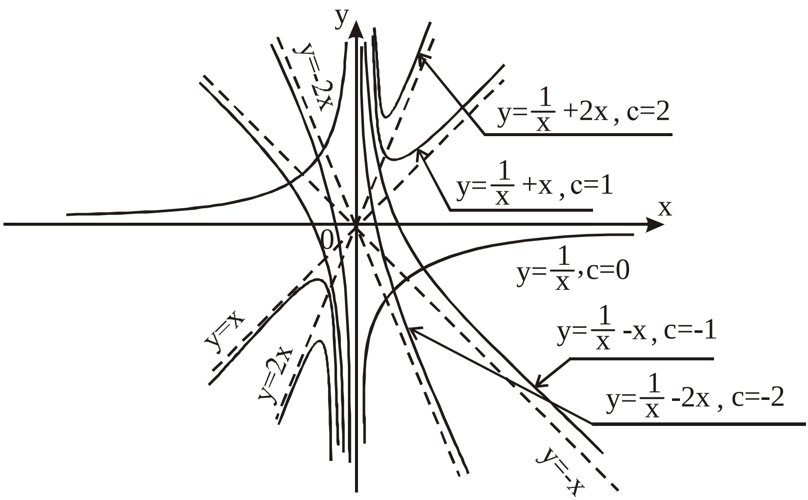
313.*



314.



315.*



3.2.

316. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2}$.

317. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{y^2}-\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2x^2}{y^3}+\dfrac{x}{y^2}$.

318. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xy\left(x^2+y^2\right)}\left(3x^2y+y^3\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{xy\left(x^2+y^2\right)}\left(x^3+3xy^2\right)$.

319. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{e^{x/y}}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{xe^{x/y}}{y^2}+\dfrac{ze^{-z/y}}{y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{e^{z/y}}{y}$.

320. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$. 321. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2}{(x-y)^2}$.

322. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z}{y^2}+\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{x}{z^2}+\dfrac{1}{y}$.

323. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

324. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{-xy}(1-xy)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$.

325. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\sqrt{\dfrac{x}{1-xt^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{t}{2\sqrt{x-x^2t^2}}$.

3.3.

326. $\Delta z-0{,}62$, $dz=-0{,}6$. 327. $dz=\dfrac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$.

328. $dz=2(xdx+ydy)\cos\left(x^2+y^2\right)$. 329. $dz=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

330. $dz=x^y\left(\dfrac{y}{x}dx+\ln x dy\right)$.

331. $u=e^{xyz}(yzdx+xzdy+xydz)$.

3.4.

332. 1,08. 333. -0,03. 334. 1,013. 335. 0,82. 336.* 108,972.

337.* $1{,}05$.

3.5.

338. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3 + \left(x^2 - y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}.$$

339. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{4y}{(x+y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{4x}{(x+y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

340. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\ln y(\ln y - 1)}{x^2} y^{\ln x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\ln x(\ln x - 1)}{y^2} y^{\ln x}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} y^{\ln x}.$$

341. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{xy^3}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{yx^3}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}.$$

342. $\left(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1\right)e^{xyz}$.

343. $-x(2\sin xy + xy\cos xy)$.

344.* $m\,n(n-1)(n-2)p(p-1)x^{m-1}y^{n-3}z^{p-2}$.

345. $-2y\,dx^2 + 4(y-x)dx\,dy + 2x\,dy^2$.

346. $\dfrac{\left(3x^2-y^2\right)dx^2+8xydxdy+\left(3y^2-x^2\right)dy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$.

347. $2\sin 2ydxdy+2x\cos 2ydy^2$.

348. $2(zdxdy+ydxdz+xdydz)$.

349. $-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

350.* $(2dx+dy)^3$.

351.* $2(x-1)^3+(x-1)^2(y+2)-4(x-1)(y+2)^2$.

352.* $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\ldots$.

3.6.

353. $z'_u=\dfrac{2x}{v}\ln y+\dfrac{3x^2}{y}$, $z'_v=-\dfrac{u}{v^2}2x\ln y-\dfrac{2x^2}{y}$.

354. $z'_u=\dfrac{yv+\frac{x}{v}}{1+x^2y^2}$, $z'_v=\dfrac{yu-\frac{xu}{v^2}}{1+x^2y^2}$.

355. $z'_u=\dfrac{1}{x^2+y^2}\left(x\sqrt{\dfrac{u}{v}}-\dfrac{4yv}{u^2}\right)$, $z'_v=\dfrac{1}{x^2+y^2}\left(x\sqrt{\dfrac{v}{u}+}-\dfrac{4y}{u}\right)$.

356. $z'_u=yx^{y-1}\sin v+x^y\ln x\cos v$,

$z'_v=yx^{y-1}u\cos v-x^y\ln x\,u\sin v$.

357. $z'_u=-\dfrac{v}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}+\dfrac{e^v}{2\sqrt{xy}}$, $z'_v=-\dfrac{u}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}+\dfrac{ue^v}{2\sqrt{xy}}$.

358. $\dfrac{dz}{dt}=e^{\sin t-2t^3}\left(\cos t-6t^2\right)$.

359. $\dfrac{du}{dt} = \sin 2t + 2e^{2t} + e^{t}(\sin t + \cos t)$.

360. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-\left(3t-4t^3\right)^2}}$. 361. $\dfrac{dz}{dt} = 2t(t+1)e^{2t} - t^3(t-4)e^{t}$.

362.* $\dfrac{dz}{dt} = \cos t^{\frac{5}{2}} - \dfrac{5}{2} t^{\frac{5}{2}} \sin t^{\frac{5}{2}}$. 363. $z'_x = -\dfrac{c^2 x}{a^2 z}$, $z'_y = -\dfrac{c^2 y}{b^2 z}$.

364. $z'_x = \dfrac{2-x}{z+1}$, $z'_y = \dfrac{2y}{z+1}$. 365. $z'_x = \dfrac{-yz}{xy+z^2}$, $z'_y = \dfrac{-xz}{xy+z^2}$.

366. $z'_x = \dfrac{z}{x(z-1)}$, $z'_y = \dfrac{z}{y(z-1)}$.

367.* $z'_x = -\dfrac{\sin 2x}{\sin 2z}$, $z'_y = -\dfrac{\sin 2y}{\sin 2z}$.

3.7.

368. $\pi: x - 2y + z = 0$, $h: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

369. $\pi: 8x - 8y - z - 4 = 0$, $h: \dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{-8} = \dfrac{z-4}{-1}$.

370. $\pi: x + y - z - 1 = 0$, $h: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

371. $\pi: 17x + 11y + 5z - 60 = 0$, $h: \dfrac{x-3}{17} = \dfrac{y-4}{11} = \dfrac{z+7}{5}$.

372. $\pi: x - y + 2z - \dfrac{\pi}{2} = 0$, $h: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-0{,}5\pi}{2}$.

373. $\operatorname{grad} u = (2;2;1)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{h}} = 0$.

374. $\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{3}$.

375. $\operatorname{grad} u = (0;0;1)$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{h}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

376. $\operatorname{grad} u = (e;1;e)$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{h}} = \frac{7e}{13}$.

377. $\operatorname{grad} u = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -2\right)$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{h}} = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$.

3.8.

378. $\left(-\frac{13}{31}; \frac{10}{31}\right) - \min$.

379. $M_1(0;0) - \min$, $M_2\left(-\frac{5}{3}; 0\right) - \max$, $M_3(-1;2)$ и

$M_4(-1;-2)$ – нет extr.

380. $M_0\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ – нет extr. 381. $M_0\left(-\frac{112}{31}; -\frac{16}{31}; \frac{17}{31}\right) - \min$.

382. $M_0(2;1;7)$ – нет extr. 383. $M_0(1;1) - \min$.

384. $M_1(1;1)$ и $M_2(-1;-1) - \max$, $M_3(-1;1)$ и $M_4(1;-1) - \min$.

385. $M_1(1;1) - \max$, $M_2(-1;-1) - \min$.

386.* $M_0(2;2;2) - \max$.

387. $z_{max} = z(2;0) = z(-2;0) = 4$, $z_{min} = z(0;2) = z(0;-2) = -4$.

388. $z_{max} = z(1;2) = 17$, $z_{min} = z(1;0) = -3$.

ГЛАВА 4

4.1.

389. Семейство парабол. Изоклинами являются прямые $x = \frac{c}{2}$.

390. Изоклинами являются окружности $x^2 + y^2 = c + 1$. $c > 0$ – интегральные кривые идут вверх, $c < 0$ – вниз, $c = 0$ – интегральные кривые имеют максимумы, минимумы

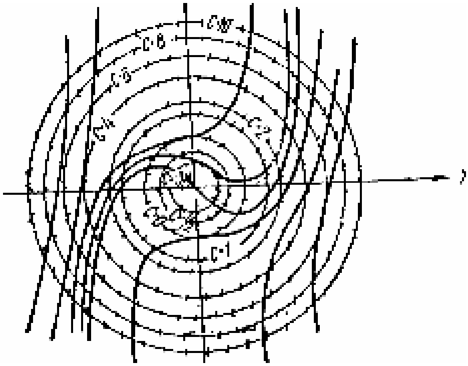


Рис. 3

и точки перегиба с горизонтальной касательной (рис. 3).

391. Поле направлений имеет вид (рис. 4). Интегральные кривые – полупрямые, выходящие из начала координат (начало координат не принадлежит полупрямым (рис. 5).

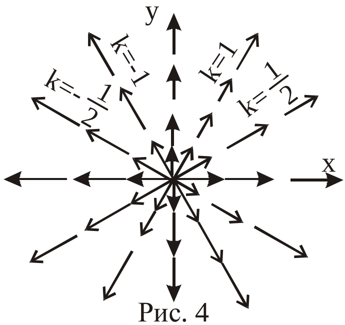


Рис. 4

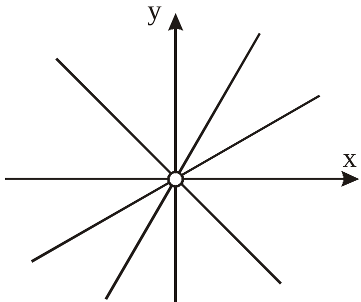


Рис. 5

392. Поле направлений имеет вид (рис. 6). Интегральные кривые изображены на рис.7.

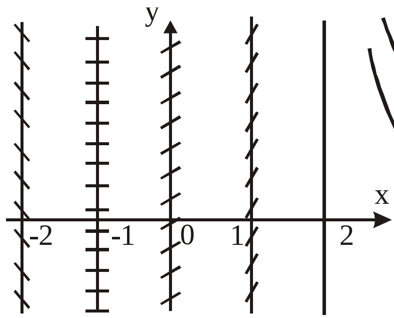


Рис. 6

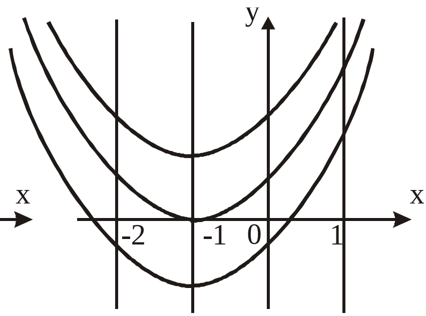


Рис. 7

393. Уравнение изоклин $(y-1)^2 = k$ или $y = \pm\sqrt{k} + 1$. Интегральные кривые изображены на рис. 8.

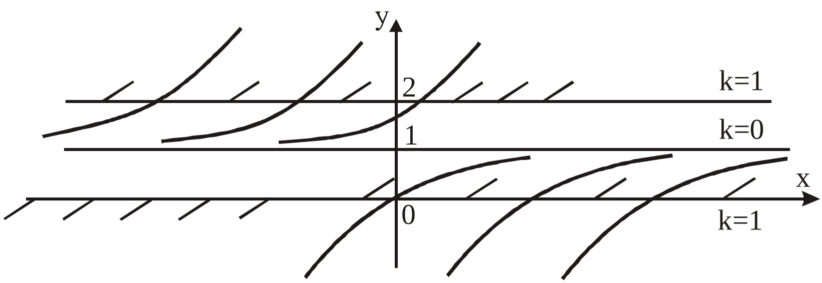


Рис. 8

4.2.

394. $\ln\frac{x}{y}-\frac{x+y}{xy}=c$, $x=0$, $y=0$. 395. $\frac{\sin y}{\cos x}=c$.

396. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=c$. 397. $2e^{\frac{x^2}{2}}=\sqrt{e}(1+e^x)$.

398. $\sqrt{y}=x\ln x-x+1$. 399.* $(x-y)^2=-2x+c$.

400.* $x+y=a\,\mathrm{tg}\left(c+\frac{y}{a}\right)$.

401.* $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right)=x+c$.

402.* $x+2y+2=0$. 403.* $x+\frac{1}{y}=\frac{13}{4}$. 404.* $y=cx^n$.

4.3.

405. $y=xe^{cx+1}$. 406. $\ln cx=-e^{-\frac{y}{x}}$. 407. $cx^2=y+\sqrt{x^2+y^2}$.

408. $y=4e^{\frac{3y-4x}{3x}}$. 409. $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$.

410.* $3x+y+2\ln|1-x-y|=c$.

411.* $6x^2+5xy+y^2-9x-3y=c$.

412.* $x^2-y^2+2xy-4x+8y-6=0$.

413.* $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0$.

414.* $cy=(x-y)^2$, $y=3(x-y)^2$.

4.4.

415. $y=x(\sin x+c)$. 416. $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$.

417. $y=\dfrac{\cos x(x+c)}{1+\sin x}$. 418. $y=e^{-\arcsin x}+\arcsin x-1$.

419. $y=\dfrac{1}{2}x^2\ln x$. 420.* $y=\cos 3x\left[1-\dfrac{2}{3}\cos 3x\right]$.

421.* $x=cy^2+\dfrac{y^4}{2}$. 422. $x=cy^2-\dfrac{1}{y}$.

423.* Указание. $|ON|=x^2$. Уравнение касательной $Y-y=Y'(x)(X-x)$, где (X,Y) – координаты любой точки, лежащей на касательной. $N(0,-xY'(x)+y)$, если $X=0$ в уравнении касательной. $|ON|=|y-xy'|=x^2\Rightarrow y-xy'=\pm x^2$ (по условию задачи). Следовательно, $y'-\dfrac{y}{x}=\pm x$ – линейные дифференциальные уравнения искомых кривых. $y=c_1x\pm x^2$ – искомые кривые.

424.* $J(t)=\dfrac{k}{R}t+\dfrac{kL}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t}-1\right)$.

4.5.

425. $y=\dfrac{1}{x\ln cx}$. 426. $x=\dfrac{y^4}{4}\ln^2(cx)$. 427. $\dfrac{1}{y}=2-x^2-e^{-\frac{x^2}{2}}$.

428. $y=\dfrac{\sec x}{x^3+1}$. 429. $y=e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}e^x+1\right)^2$.

4.6.

430. $y=(x+2)e^{-x}+x-1$.

431. $y=\dfrac{x^5}{60}+\dfrac{1}{8}\cos 2x+\dfrac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3$.

432. $y=\frac{1}{c_1}xe^{1+c_1x}-\frac{1}{c_1^2}e^{1+c_1x}+c_2$.

433. $y=-x-\frac{\sin 2x}{2}+c_1\sin x+c_2$.

434. $y=c_1x^2+c_2$. 435. $(x+c_2)^2=4c_1(y-c_1)$.

436. $c_1x+c_2=\ln\left|\frac{y}{y+c_1}\right|$. 437. $y=c_2\cos^4\left(c_1-\frac{x}{4}\right)$.

4.7.

438. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}$. 439. $y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$.

440. $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$.

441. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}+c_4x^2e^{-x}$.

442. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5\cos x+c_6\sin x$.

443. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{\sqrt{5}x}+c_4e^{-\sqrt{5}x}$.

444. $y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}+c_3x^2e^{-3x}+c_4e^x\cos 2x+c_5e^x\sin 2x$.

4.8.

445. $y=e^x\left(c_1+c_2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}\right)$.

446. $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}-\frac{5}{13}\cos 3x-\frac{1}{13}\sin 3x$.

447. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x$.

448. $y=(c_1+c_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$.

449. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$.

450.* $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$.

451.* $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-2x} - \frac{1}{4}x(x+1) - \frac{1}{3}xe^x$.

452.* $y = 4e^{-3x}\sin x + 2e^x(2\cos x + \sin x)$.

453. $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^x + \frac{5\sin x + 7\cos x}{74}$.

454. $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x + 1$.

455. $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x) + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}$.

456. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|$.

457.* $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \cdot \ln|\operatorname{tg} 2x|$.

458.* $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x}\operatorname{arctg} e^x$.

459.* $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3 \cdot \sin x - \cos x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

4.9.

460. $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$, $y(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-3t}$.

461. $x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$,

$y(t) = (c_1 - 2c_2)\cos 2t + (2c_1 + c_2)\sin 2t$.

462. $x(t) = \left(c_1 + \frac{c_2}{2}\right)e^t + c_2 te^t$, $y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t$.

463. $x(t)=c_1e^t+c_2e^{9t}$, $y(t)=-c_1e^t+c_2e^{9t}$.

464. $x(t)=e^t(c_1\cos 3t+c_2\sin 3t)$, $y(t)=e^t(c_1\sin 3t-c_2\cos 3t)$.

465. $x(t)=\frac{1}{4}(3e^t+5e^{-t})+\frac{1}{2}te^t-1$, $y(t)=\frac{5}{4}(e^t-e^{-t})+\frac{1}{2}te^t-t$.

4.10.

466. $x(t)=c_1e^{-7t}-5c_2e^{2t}$, $y(t)=-2c_1e^{-7t}+c_2e^{2t}$.

467. $x(t)=c_1e^{-4t}+c_2e^{5t}$, $y(t)=-2c_1e^{-4t}+c_2e^{5t}$.

468. $x(t)=e^t(c_1\cos 3t+c_2\sin 3t)$, $y(t)=e^t(c_1\sin 3t-c_2\cos 3t)$.

469. $x(t)=2c_1\cos t+2c_2\sin t$,

$y(t)=(c_1-c_2)\cos t+(c_1+c_2)\sin t$.

470. $x(t)=\left(c_1+\frac{c_2}{2}\right)e^t+c_2te^t$, $y(t)=c_1e^t+c_2te^t$.

471. $x(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$, $y(t)=c_1e^{2t}-c_2(t+1)e^{2t}$.

472. $x(t)=e^{at}(c_1t+c_2)$, $y(t)=e^{at}(c_1t+c_2-c_1)$.

473.* $x(t)=2c_1e^t+7c_2e^{2t}+3c_3e^{3t}$, $y(t)=c_1e^t+3c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$,

$z(t)=-2c_1e^t-8c_2e^{2t}-3c_3e^{3t}$.

474.* $x(t)=2c_1+c_2e^t+c_3te^t$, $y(t)=-c_1+c_3te^t$,

$z(t)=c_1+c_2e^t+c_3te^t$.

475.* $x(t)=c_1+5c_2e^t\cos 2t+5c_3e^t\sin 2t$,

$y(t)=c_2e^t(-\cos 2t-\sin 2t)+c_2e^t(3\cos 2t-\sin 2t)$,

$z(t)=c_2e^t(-3\cos 2t+\sin 2t)+c_3e^t(-\cos 2t-3\sin 2t)$.

4.11.

476.* $x(t) = -\frac{5}{7} + c_1 e^{t} + c_2 e^{7t}$, $y(t) = \frac{9}{7} - 5c_1 e^{t} + c_2 e^{7t}$.

477.* $x(t) = -\frac{2}{5} + \left(\frac{4}{3}t + \frac{4}{18} - 2c_1\right) e^{-t} + 4c_2 e^{5t}$,

$$y(t) = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{18} - c_1\right) e^{-t} + c_2 e^{5t}.$$

478.* $x(t) = \frac{2}{3} e^{t} - e^{-t} + c_1 e^{-2t} + c_2$, $y(t) = \frac{1}{3} e^{t} - c_1 e^{-2t} + c_2$.

479.* $x(t) = \frac{7}{18} + \frac{1}{3} t + c_1 e^{-3t} - 2c_2 e^{-2t}$,

$$y(t) = -\frac{5}{36} + \frac{1}{6} t - c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}.$$

480.* $x(t) = \frac{91}{42} - 2t - \frac{1}{5} e^{t} + c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{6t}$,

$$y(t) = -\frac{175}{84} + \frac{5}{2} t - c_1 e^{-t} + 5c_2 e^{6t}.$$

4.12.

481. $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$, по условию задачи $F = k\frac{t}{v}$, $v = \sqrt{7{,}25}\ ^{м}/_{с}$.

482. $x = \dfrac{15\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right)}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}$. Указание. Решение сводится к решению задачи

Коши $\frac{dx}{dt}=k\left(10-\frac{2x}{3}\right)\cdot\left(20-\frac{x}{3}\right)$, $x(0)=0$,

коэффициент k определяется из условия $x\left(\frac{1}{3}\right)=6$.

483. $x=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$, $\omega^2=\frac{C}{m}$. Указание. По закону Ньютона $mx''=-Cx$, то есть имеем задачу Коши: $x''+\omega^2 x=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=v_0$.

484. $\mathbf{l}=c_1e^{k_1t}+c_2e^{k_2t}-\frac{M}{L}$; k_1,k_2 – корни характеристического уравнения. В зависимости от значений параметров k и L сокращение мышц может протекать как затухающее, сверхзатухающее или незатухающее вынужденное колебание.

485.* $S=\frac{m}{k}\cdot\ln\operatorname{ch}\sqrt{\frac{kq}{m}}t$, $v=a\operatorname{th}\sqrt{\frac{kq}{m}}t$, $a=\sqrt{\frac{mq}{k}}$, S – пройденный телом путь, $v=\frac{dS}{dt}$ – скорость. Указание. На тело действуют силы: его вес $P=mg$ (по направлению движения) и сопротивление воздуха $F=kv^2=k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$ (против направления движения). На основании второго закона Ньютона движение тела описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$m\frac{d^2S}{dt^2}=mg-k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Интеграл. Основы линейной алгебры.

Функции многих переменных.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Составители: Д у б о в и к о в Андрей Викторович

М и т р о х и н Юрий Сергеевич

Я к о в л е в Михаил Константинович

Б о г а т о в а Светлана Викторовна

Л у к ь я н о в а Галина Сергеевна

С у л т а н о в Сергей Режепович

С ю с ю к а л о в Андрей Иванович
Ц и п о р к о в а Ксения Андреевна
Д о р о ф е е в а Тамара Ивановна
Ч е р н е ц о в а Татьяна Николаевна

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 20.04.09. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3,75.
Уч.-изд. л. 3,75. Тираж 600 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.