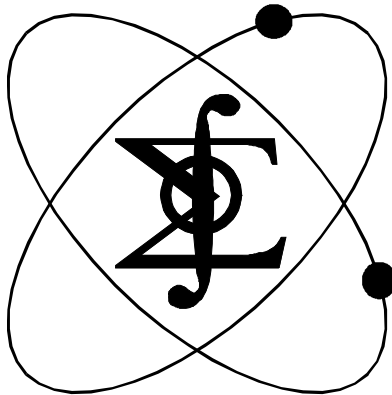


4172

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.
РЯДЫ.
ДВОЙНЫЕ, ТРОЙНЫЕ
И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ.
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

Задачи для практических занятий
и самостоятельной работы
(3-й семестр)



Рязань 2009

УДК517(076)

Элементы операционного исчисления. Ряды. Двойные, тройные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Уравнения в частных производных: задачи для практических занятий и самостоятельной работы / Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: А.В. Дубовиков, А.И. Новиков, О.Н. Чемезов, А.В. Лоскутов, К.В. Бухенский, С.В. Богатова, Г.В. Гончарова, К.А. Ципоркова, Н.В. Ёлкина, С.С. Крыгина, А.В. Кузнецов, И.В. Бодрова, Т.Н. Чернецова. – Рязань, 2009. – 40 с.

Содержат разноуровневые задачи для практических занятий и самостоятельной работы по математике. Задания повышенной сложности отмечены звёздочкой (*).

Рекомендуется преподавателям кафедры высшей математики и студентам всех специальностей дневной формы обучения.

Оригинал, изображение, числовые и функциональные ряды, ряды Фурье, двойной интеграл, тройной интеграл, криволинейный интеграл, поверхностный интеграл, векторное поле, градиент, дивергенция, ротор, поток, циркуляция, уравнения гиперболического, параболического, эллиптического типов

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....	1
ГЛАВА 2. РЯДЫ ЧИСЛОВЫЕ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ.....	3
ГЛАВА 3. ИНТЕГРАЛЫ КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ.....	11
ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ.....	19
ГЛАВА 5. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.....	24
ОТВЕТЫ.....	27

ГЛАВА 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

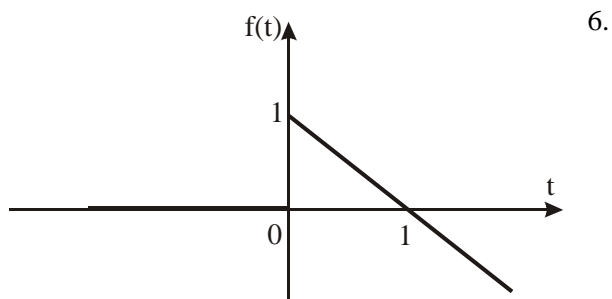
1.1. Функция-оригинал. Изображение функции

Изобразить графически функции-оригиналы.

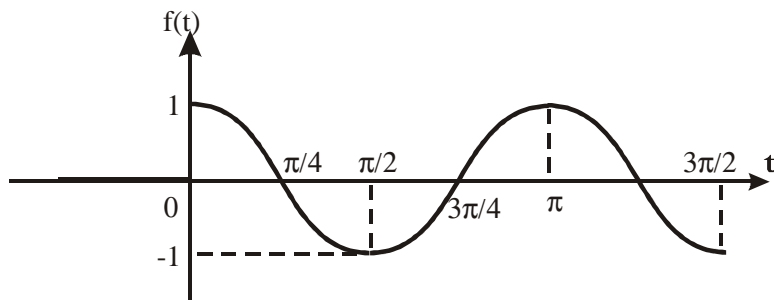
1. $f(t) = 1 + t$. 2. $f(t) = 2t - 1$. 3. $f(t) = 1 - \sin t$.

4. $f(t) = 2 \cos t + 1$. 5. $f(t) = 1 + \cos 2t$.

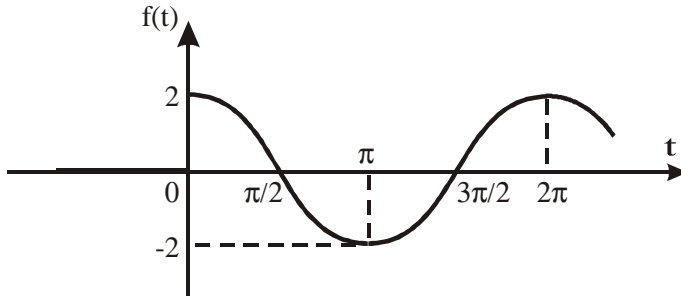
Записать аналитически функции-оригиналы, представленные на рисунках.



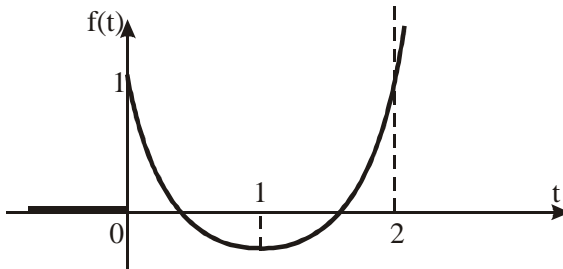
7.



8.



9.



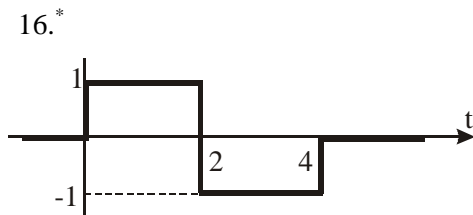
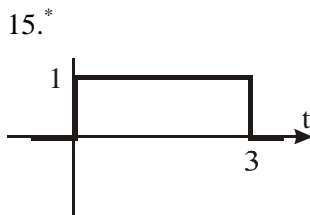
1.2. Нахождение изображения по оригиналу

Написать изображения функций-оригиналов.

10. $f(t) = 2t + 1$. 11. $f(t) = 1 - \sin 2t$. 12. $f(t) = t + \cos t$.

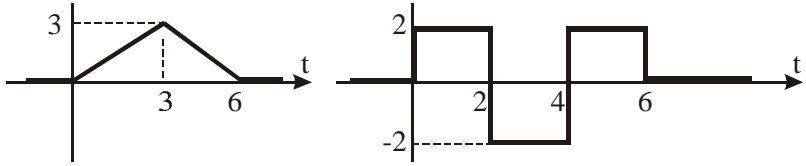
13. $f(t) = t^2 - 2t$. 14. $f(t) = t - e^t$.

Написать изображения функций-оригиналов, изображенных на рисунках.



17.*

18.*



1.3. Нахождение оригинала по изображению

Найти функции-оригиналы, если заданы их изображения.

$$19. \frac{2p+3}{p^2+1}. \quad 20. \frac{3p-4}{(p^2+4)}. \quad 21. \frac{p+2}{(p^2+1)^2}. \quad 22.$$

$$\frac{p-1}{(p+1)(p^2+1)}.$$

$$23. \frac{p^2-4p+2}{(p-2)^3}. \quad 24^*. \frac{p^2+2p}{(p+1)^2(p^2+1)}. \quad 25^*.$$

$$\frac{3p-2}{(p-1)(p^2+2p+2)}.$$

$$26^*. \frac{4p^2+9}{(p^2+1)(p^2+4p+5)}.$$

1.4. Решение дифференциальных уравнений

операционным методом

Решить задачу Коши операционным методом.

$$27. x' - 4x = 1, \quad x(0) = 1.$$

$$28. x'' - 4x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$29. x'' + x = 2t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$30. x' + 2x = e^{-2t}, \quad x(0) = 0.$$

$$31. * x'' + 2x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$32. * x - 4 \int_0^t (t - \tau)x(\tau) d\tau = 1.$$

$$33. * x' - 2 \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = 2, \quad x(0) = 0.$$

$$34. * x''' + x' = t, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1.$$

ГЛАВА 2. РЯДЫ ЧИСЛОВЫЕ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ

2.1. Сумма числового ряда

Найти сумму ряда.

$$35. \sum_1^{\infty} \frac{4}{(2n+1)(2n-3)}. \quad 36. \sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2-1}. \quad 37. \sum_1^{\infty} \frac{4}{(2n+3)(2n-1)}.$$

$$38. \sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}. \quad 39. \sum_1^{\infty} \frac{4}{(2n+5)(2n+1)}. \quad 40. \sum_1^{\infty} \frac{6}{(3n+1)(3n-5)}.$$

$$41. \sum_1^{\infty} \frac{6}{(3n+2)(3n-4)}. \quad 42. \sum_1^{\infty} \frac{6}{(3n+4)(3n-2)}.$$

$$43. \sum_1^{\infty} \frac{6}{(3n+5)(3n-1)}. \quad 44. \sum_1^{\infty} \frac{2}{n(3n+6)}.$$

$$45. \sum_1^{\infty} \frac{8}{(4n+1)(4n-7)}. \quad 46. \sum_1^{\infty} \frac{8}{(4n+3)(4n-5)}.$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(4n+5)(4n-3)}. \quad 48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+7)(n+5)}.$$

$$49. \sum_1^{\infty} \frac{10}{(5n+1)(5n-9)}.$$

$$50. \sum_1^{\infty} \frac{10}{(5n+2)(5n-8)}.$$

$$51. \sum_1^{\infty} \frac{2}{(n+3)(n+1)}.$$

$$52. \sum_1^{\infty} \frac{2}{(n+4)(n+2)}.$$

$$53. \sum_1^{\infty} \frac{2}{(n+5)(n+3)}.$$

$$54. \sum_1^{\infty} \frac{2}{(n+6)(n+4)}.$$

2.2. Исследование на сходимость числовых рядов
с положительными членами

Исследовать на сходимость с помощью признаков сравнения.

$$55. \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \arcsin^2\left(\frac{1}{n}\right). \quad 56. \sum_1^{\infty} \ln^3\left(\frac{n+2}{n+1}\right). \quad 57. \sum_1^{\infty} \ln\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right).$$

$$58. \sum_1^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{n}. \quad 59. \sum_1^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+2}. \quad 60. \sum_1^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}.$$

$$61. \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n^2+1}. \quad 62. \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+1}}. \quad 63. \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+2}.$$

$$64. \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}. \quad 65. \sum_1^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+3}. \quad 66. \sum_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^3+1}.$$

$$67. \sum_1^{\infty} \frac{\cos^3 n}{(n+2)^2}. \quad 68. \sum_1^{\infty} \frac{\cos^2 \sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}. \quad 69. \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \sqrt{n}}{\sqrt{3n+1}}.$$

$$70. \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right). \quad 71. \sum_1^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^2+2}. \quad 72. \sum_1^{\infty} \frac{1}{n+2} \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$73. \sum_1^{\infty} \sqrt{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}. \quad 74. \sum_1^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}.$$

Исследовать на сходимость с помощью подходящего признака сходимости.

75. $\sum_1^{\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{3^{n-1}}$. 76. $\sum_1^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{(n+1)!}$. 77. $\sum_1^{\infty} \frac{4^n (n+2)!}{n^6}$.
78. $\sum_1^{\infty} \frac{n}{(3n+1)!}$. 79. $\sum_1^{\infty} \frac{n^3 + 1}{(n+1)!}$. 80. $\sum_1^{\infty} \frac{3^{n+1}}{3n^2 + 2}$.
81. $\sum_1^{\infty} \frac{5^n}{n(2n-1)}$. 82. $\sum_1^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{n^2}$. 83. $\sum_1^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2n+1} \right)^n$.
84. $\sum_1^{\infty} \left(\frac{5n^2 + 1}{n^2 - 3n + 2} \right)^n$. 85. $\sum_1^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+1} \right)^{3n}$. 86. $\sum_1^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n} \right)^{2n}$.
87. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\left(\operatorname{arctg} \frac{2n}{2n-3} \right)^n}$. 88. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\ln^{2n}(n+1)}$.
89. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+3)}$. 90. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^3(n+1)}$.
91. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}$. 92. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2 n}$.
93. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(n+2) \sqrt{\ln(n+2)}}$. 94. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \sqrt[3]{\ln(2n+1)}}$.

2.3. Знакопередающиеся ряды

Исследовать на сходимость знакопередающиеся ряды.

95. $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+5}{n^2 + 5n + 6}$. 96. $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+5}}$.

$$97. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n!}.$$

$$98. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n+1}.$$

$$99. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + 3^n}{n!}.$$

$$100. \sum_1^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{\pi}{3^n}.$$

$$101. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n(n^2+1)}.$$

$$102. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{\sqrt{n+3}}.$$

$$103. \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(4n^2-1)^2}.$$

$$104. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{n(n+1)}.$$

$$105. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{2n+5}.$$

$$106. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3n^2\sqrt{n+1}}.$$

$$107. \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2+\ln n)^3}.$$

$$108. \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(2n+1)3^n}.$$

$$109. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n+2)}{3^n}.$$

$$110. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n\sqrt{n+3n}}.$$

$$111. \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2n^2}.$$

$$112. \sum_1^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+3}{2n+1}.$$

$$113. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

$$114. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3\sqrt{\ln n+2}}.$$

Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0,01$.

$$115. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}. \quad 116. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n(n+1)}. \quad 117. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}.$$

$$118. \sum_1^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{2}{5}\right)^n. \quad 119. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}. \quad 120. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{6^n}.$$

$$121. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3n!}. \quad 122. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n^2}. \quad 123. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4}.$$

$$124. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{7^n}. \quad 125. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{5^n}. \quad 126. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n!}.$$

$$127. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3(n+1)!}. \quad 128. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{(n+1)!}.$$

$$129. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{6^n}. \quad 130. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3^n(n+1)}.$$

$$131. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{2n!}. \quad 132. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{8}\right)^n.$$

$$133. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^n}{n}. \quad 134. \sum_1^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{2}{7}\right)^n.$$

2.4. Область сходимости функционального ряда

Найти область сходимости функционального ряда.

$$135. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^{2n+1}}{4^n(n+1)^2}. \quad 136. \sum_{n=1}^{\infty} (x+3)^n \sin \frac{1}{4^n}.$$

$$137. \sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}. \quad 138. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}. \quad 139. \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n+1}.$$

$$\begin{aligned}
140. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n}. & \quad 141. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{x^4}. & \quad 142. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^n}{n}. \\
143. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} x^n \sin \frac{x}{3^n}. & \quad 144. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n x}. & \quad 145. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^n}. \\
146. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^n}. & \quad 147. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 5^{nx}. & \quad 148. \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{x}{n}} - 1)(x-2)^n. \\
149. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{(x-3)^n}. & \quad 150. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \operatorname{tg} \frac{3x}{n}. & \quad 151. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg}^n x. \\
152. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n 2x. & \quad 153. \sum_{n=1}^{\infty} e^{n \sin x}. & \quad 154. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{n}{\ln x}}.
\end{aligned}$$

2.5. Разложение функций в ряд Маклорена

Разложить функцию в ряд Маклорена.

$$\begin{aligned}
155. y = \frac{4}{x^2 - 2x - 3}. & \quad 156. y = \frac{3}{x^2 - x - 2}. & \quad 157. y = \frac{7}{12 - x - x^2}. \\
158. y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}. & \quad 159. y = x \sin 2x. & \quad 160. y = (x+2) \cos x. \\
161. y = \frac{\sin 3x}{x}. & \quad 162. y = \frac{\cos 2x - 1}{x^2}. & \quad 163. y = (1 - e^x)^2. \\
164. y = 2^{3x}. & \quad 165. y = \frac{e^x - 1}{x}. & \quad 166. y = 3^x - 1. \\
167. y = (x+1) \operatorname{ch} x. & \quad 168. y = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{x}. & \\
169. y = \ln(1 - x - 20x^2). & & \quad 170. y = 2 \sin^2 x.
\end{aligned}$$

2.6. Сумма функционального ряда

Найти сумму $S(x)$ функционального ряда.

$$171. \sum_{n=1}^{\infty} nx^n. \quad 172. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad 173. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}. \quad 174. \sum_{n=1}^{\infty} (2n+2)x^{2n}.$$

$$175. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n (n+1). \quad 176. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \quad 177. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$178. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{x^n}. \quad 179. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx^n}. \quad 180. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}. \quad 181. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n n}{x^n}.$$

$$182. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^{n+2}. \quad 183. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n}. \quad 184. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n}.$$

$$185. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{x^n}.$$

2.7. Тригонометрические ряды Фурье

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, построить графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

$$186. f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi < x < 0, \\ -5, & 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad 187. f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0, \\ 6, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$188. f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 5, & 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad 189. f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi < x < 0, \\ 5, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$190. f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ -7, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$191. f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 2, \\ 3, & -5 \leq x < -2, \quad 2 \leq x < 5. \end{cases}$$

$$192. f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 1, \\ -6, & -3 \leq x < -1, 1 \leq x < 3. \end{cases}$$

$$193. f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 2, \\ -5, & -4 \leq x < -2, 2 \leq x < 4. \end{cases}$$

$$194. f(x) = \begin{cases} 5, & -1 < x < 1, \\ 3, & -6 < x \leq -1, 1 \leq x < 6. \end{cases}$$

$$195. f(x) = \begin{cases} -2, & -2 < x < 2, \\ 8, & -7 < x \leq -2, 2 \leq x < 7. \end{cases}$$

Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0, b]$. Построить график функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

$$196. f(x) = -2x, \quad 0 \leq x < 3. \quad 197. f(x) = 4x, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}.$$

$$198. f(x) = -\frac{3}{4}x, \quad 0 \leq x < \frac{5}{2}. \quad 199. f(x) = \frac{5}{3}x, \quad 0 \leq x < 6.$$

$$200. f(x) = -\frac{7}{4}x, \quad 0 \leq x < 2. \quad 201. f(x) = \frac{3}{8}x, \quad 0 \leq x < \frac{4}{5}.$$

$$202. f(x) = -\frac{2}{3}x, \quad 0 \leq x < \frac{3}{4}. \quad 203. f(x) = \frac{13}{8}x, \quad 0 \leq x < \frac{16}{5}.$$

Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0, 1]$; построить график функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

204. $f(x) = -2x$, $0 \leq x < 3$. 205. $f(x) = 4x$, $0 \leq x < \frac{1}{2}$.

206. $f(x) = -\frac{3}{2}x$, $0 \leq x < 6$. 207. $f(x) = \frac{5}{3}x$, $0 \leq x < \frac{3}{8}$.

208. $f(x) = -\frac{3}{4}x$, $0 \leq x < \frac{5}{2}$. 209. $f(x) = 3x$, $0 \leq x < \frac{7}{3}$.

210. $f(x) = \frac{4}{5}x$, $0 \leq x < 15$. 211. $f(x) = -\frac{2}{3}x$, $0 \leq x < \frac{6}{5}$.

ГЛАВА 3. ИНТЕГРАЛЫ КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ

3.1. Двойной интеграл в ПДСК.

Вычисление двойных интегралов повторным интегрированием

Вычислить двойные интегралы.

212. $\iint_D xy \, dx dy$, где D : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

213. $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}$, где D : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

214. $\iint_D (x^3 + y^3) dx dy$, где D ограничена линиями $x - 2y = 0$,
 $x - y = 0$, $x = 4$.

215. $\iint_D y^2 \sin x \, dx dy$, где D ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$,
 $x = \pi$, $y = 1 + \cos x$.

216. $\iint_D y \, dx dy$, где D ограничена линиями $y = 0$, $y = \sqrt{x}$,
 $x + y = 2$.

Изменить порядок интегрирования.

$$217. \int_0^2 dx \int_x^{2x} f dy. \quad 218. \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f dy. \quad 219. \int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f dy.$$

$$220. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{3-y^2}}^{\frac{1}{2}y^2} f dx. \quad 221. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{x^2}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f dy.$$

$$222. \int_0^4 dx \int_{-x}^{\sqrt{4x-x^2}} f dy. \quad 223. \int_{-2}^0 dy \int_{-1}^{y+1} f dx + \int_0^{\pi} dy \int_{-1}^{\cos y} f dx.$$

Вычислить двойные интегралы.

$$224. \iint_D \frac{y^3}{x} dx dy, \text{ где } D \text{ ограничена линиями } y = \frac{1}{3}x, y = \sqrt{x}, x = 1.$$

$$225. \iint_D (x^2 + y) dx dy, \text{ где } D \text{ ограничена линиями } x - 2y = 0, 2x - y = 0, xy = 2.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми.

$$226. y^2 = 4x + 4, x + y = 2. \quad 227. y = 4x - x^2, y = 2x^2 - 5x.$$

$$228. \text{* Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми } x + y = 1, x + 2y = 2, y = 0 \text{ относительно осей } Ox, Oy \text{ и точки } O.$$

3.2. Тройной интеграл в ПДСК.

Вычисление тройных интегралов
повторным интегрированием

Вычислить тройные интегралы.

$$229. \iiint_V x^2 y^2 z dx dy dz, \text{ где } V \text{ – параллелепипед, ограниченный плоскостями } x = 1, x = 3, y = 0, y = 2, z = 2, z = 5.$$

230. $\iiint_V xz(1-y) dx dy dz$, где V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

231. $\iiint_V x dx dy dz$, где V ограничена плоскостями $x=1$, $y=0$, $y=10x$, $z=0$ и параболоидом $z=xy$.

232. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4}$, где V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=8\left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right)$.

Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями.

233.* $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

234.* $z=4-y^2$, $y=\frac{x^2}{2}$, $z=0$.

Вычислить тройные интегралы.

235.* $\iiint_V y^2(e^{xy} - e^{-xy}) dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $x=0$, $y=-2$, $y=4x$, $z=0$, $z=2$.

236.* $\iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz$, где V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, $z=x+y$.

237.* Найти массу тела плотности $\mu = x+y+z$, если оно ограничено плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $z=2$.

Найти координаты центра масс однородных тел, ограниченных поверхностями.

$$238. * x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y - 12 = 0 \text{ и } z = \frac{y^2}{2}.$$

$$239. * y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0 \text{ и } x + z = 6.$$

3.3. Замена переменных в кратных интегралах

Вычислить двойные интегралы (в полярной системе

координат).

$$240. \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}, \quad D: \begin{cases} 0 \leq y \leq x, \\ r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2. \end{cases}$$

$$241. \iint_D x e^{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy, \quad D: \begin{cases} -x \leq y \leq x, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

$$242. \iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy, \quad D: \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}, \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

$$243. * \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq Rx.$$

$$244. * \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy.$$

Вычислить тройные интегралы (в цилиндрической системе координат).

$$245. \iiint_V x dx dy dz, \quad V: \begin{cases} x \leq y \leq x\sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

$$246. \iiint_V y \, dx \, dy \, dz, \quad V: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

$$247. \iiint_V z(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz, \quad V: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Вычислить тройной интеграл (в сферической системе координат).

$$248. \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz, \quad V: \begin{cases} r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

$$249. * \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz.$$

$$250. \iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy \, dz, \quad V: \begin{cases} 0 \leq y \leq x, \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4. \end{cases}$$

251. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$.

252. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x$.

253. Найти массу пластинки D : $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) с поверхностной плотностью $\mu = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

3.4. Криволинейный интеграл. Его приложения

Вычислить криволинейный интеграл первого рода.

$$254. \int_L z \, d\mathbf{l}, \quad L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z = at, \end{cases}$$

$$255. \int_L (x^2 + y^2)^3 \, d\mathbf{l}, \quad L: \begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$256. \int_L \frac{d\mathbf{l}}{x-y}, \quad L: y = \frac{1}{2}x - 2, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$257. \int_L \arctg \frac{y}{x} \, d\mathbf{l}, \quad L: \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Вычислить криволинейные интегралы второго рода.

$$258. \int_L x \, dy, \quad L: x + y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$259. \int_L y \, dx - x \, dy, \quad L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$260. \int_L y \, dx + z \, dy + x \, dz, \quad L: \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z = 3t, \end{cases}$$

Вычислить с помощью формулы Грина.

$$261. \oint_L (1-x^2)y \, dx + x(1+y^2) \, dy, \quad L: x^2 + y^2 = 1.$$

$$262. \oint_L y \, dx + x \, dy, \quad L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$263. \oint_L y^3 \, dx + x^3 \, dy, \quad L: x^2 + y^2 = R^2.$$

Доказав независимость интеграла от пути интегрирования, вычислить его.

$$264. \int_{(0;0)}^{(2;1)} 2xy \, dx + x^2 \, dy.$$

$$265. \int_{(-1;2)}^{(2;3)} y \, dx + x \, dy.$$

Восстановить функцию $u(x; y)$ по ее полному дифференциалу.

$$266. du = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}.$$

$$267. du = -\frac{2y}{x^3} dx + \frac{1}{x^2} dy.$$

Найти массу кривой L при заданной плотности μ .

$$268. L: y = \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq 2, \mu(x, y) = \frac{e^x}{\sqrt{1+2y}}.$$

$$269. L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}, \mu(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Вычислить работу силы $\vec{F}(P, Q)$ по пути L_{AB} .

$$270. \vec{F} = (x^2y; xy^2), L: y = 2x, A(1;2), B(2;4).$$

$$271. \vec{F} = (xe^{xy}; ye^{x^2}), L: y = x, A(1;1), B(3;3).$$

3.5. Вычисление площади поверхности

272. Найти площадь той части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, которая вырезается цилиндром $x^2 + z^2 = 4$.

273. Вычислить площадь той части поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, которая высекается цилиндром $x^2 + y^2 = 4x$.

274. Вычислить площадь той части плоскости $x + y + z = 6$, которая лежит в первом октанте и ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 9$.

275. Вычислить площадь той части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 6x$, которая содержится между плоскостью $z = 0$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

276. Вычислить площадь той части поверхности параболоида $z^2 + y^2 = 4x$, которая содержится между параболическим цилиндром $y^2 = 2x$ и плоскостью $x = 2$.

3.6. Вычисление поверхностных интегралов 1-го рода

Вычислить интегралы.

277. $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, где S – часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

278. $\iint_S xyz dS$, где S – часть поверхности $z = x^2 + y^2$, расположенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

279. $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, где S – полусфера $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

280. $\iint_S x dS$, где S – часть плоскости $z = x$, ограниченной плоскостями $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$.

281. $\iint_S \frac{dS}{(1 + x + z)^2}$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, заключенная в первом октанте.

3.7. Вычисление поверхностных интегралов 2-го рода

Вычислить интегралы.

282. Вычислить $\iint_S x dy dz$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте.

283. Вычислить $\iint_S y z dx dz$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте.

284. $\iint_S x dx dy + x dx dz + y dy dz$, где S – треугольник, образованный пересечением плоскости $x - y + z = 1$ с координатными плоскостями (нормаль направлена от начала координат к плоскости треугольника).

285. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, где S – внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, лежащей в первом октанте.

286. $\iint_S xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz$, где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x + y + z = 2$ с координатными плоскостями.

3.8. Теорема Остроградского

С помощью теоремы Остроградского вычислить интегралы.

287. $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, где S – поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

288. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + x^2 dx dy$, где S – поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

289. $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, где S – поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, $-3 \leq z \leq 3$.

3.9. Формула Стокса

С помощью формулы Стокса вычислить:

290. Циркуляцию вектора $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

291. Циркуляцию вектора $\vec{F} = (x+z)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + x\vec{k}$ по эллипсу $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

292. Циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$ по контуру треугольника ОВС, где $O(0;0;0)$, $B(0;1;0)$ и $C(0;0;1)$.

ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

4.1. Поток векторного поля

293. Найти поток векторного поля

$\vec{a} = (x-2z)\vec{i} + (x+3y+z)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$ через верхнюю сторону $\triangle ABC$, если $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

294. Найти поток векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 2$. Нормаль берется внешняя по отношению к области, ограниченной параболоидом.

295. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = 0$ ($z > 0$).

296. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = z^2\vec{i} + xz\vec{j} + y\vec{k}$ через замкнутую поверхность $x^2 + y^2 = 4 - z$, $z \geq 0$.

297.* Вычислить поток векторного поля

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\vec{k}$ через внешнюю сторону
однополостного гиперболоида $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,
ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = \sqrt{3}$.

298.* Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = xz\vec{i}$ через
внешнюю сторону параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$,
ограниченного плоскостью $z = 0$ ($z > 0$).

299.* Используя теорему Гаусса-Остроградского, вычислить
поток векторного поля

$$\vec{a} = \left(\frac{x^2 y}{1 + y^2} + 6yz^2 \right) \vec{i} + 2x \operatorname{arctg} y \vec{j} - \frac{2xz(1 + y) + 1 + y^2}{1 + y^2} \vec{k}$$

через внешнюю сторону части поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$,
расположенной над плоскостью xOy .

300.* Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = (1 - 2x)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
через замкнутую поверхность $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq 4$).

4.2. Циркуляция векторного поля

301. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j}$

вдоль эллипса $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

302. Вычислить циркуляцию векторного поля

$\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz + x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}$ вдоль линии

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

303. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = (x + 3y + 2z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x - y)\vec{k} \text{ по контуру } \Delta ABC, \text{ где } A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;1).$$

304. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x^2\vec{j} - z\vec{k}$

$$\text{по контуру } L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 3, \end{cases} \text{ 1) непосредственно, 2) по теореме Стокса.}$$

305. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ по окружности $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ в положительном направлении.

306.* Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}, \text{ если } L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

307.* Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ по

$$\text{контур } L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, \end{cases} \text{ непосредственно и по теореме Стокса.}$$

308.* Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ по

$$\text{контур } L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0, \end{cases} \text{ непосредственно и по теореме Стокса.}$$

309.* Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = 2xz\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ по контуру, образованному пересечением плоскости $x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями (непосредственно и по теореме Стокса).

4.3. Линейный интеграл

310. Вычислить линейный интеграл от плоского векторного поля $\bar{a} = \frac{y^2\bar{i} - x^2\bar{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вдоль полуокружности $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases}$ где $0 \leq t \leq \pi$.
311. Вычислить работу силового поля $\bar{F} = y\bar{i} + x\bar{j} + (x + y + z)\bar{k}$ вдоль отрезка прямой, проходящей через точки $M_1(2, 3, 4)$ и $M_2(3, 4, 5)$.
312. Вычислить линейный интеграл от плоского векторного поля $\bar{a} = (x^2 - 2xy)\bar{i} + (y^2 - 2xy)\bar{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от $M(-1, 1)$ до $N(1, 1)$.
313. Вычислить работу силового поля $\bar{F} = (x^2 + 2xy)\bar{i} + (x^2 + y^2)\bar{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от $O(0, 0)$ до $A(1, 1)$.
- 314.* Вычислить линейный интеграл от векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ вдоль витка винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t < 2\pi$) в направлении возрастания параметра t .
- 315.* Вычислить линейный интеграл от векторного поля $\bar{a} = (y^2 - z^2)\bar{i} + 2yz\bar{j} - x^2\bar{k}$ вдоль линии $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$) в направлении возрастания параметра t .
- 316.* Показать, что для векторного поля $\bar{a} = xy^2z\bar{i} + x^2yz\bar{j} + \frac{1}{2}x^2y^2z\bar{k}$ линейный интеграл $\int_L(\bar{a}, d\bar{r})$ не зависит от формы пути интегрирования.
- 317.* Вычислить линейный интеграл от плоского векторного поля $\bar{a} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (x^2 - y^2)\bar{j}$ вдоль линии $y = |x|$ от $M(-1, 1)$ до $N(2, 2)$.

4.4. Дивергенция. Ротор. Классификация векторных полей

Вычислить дивергенцию векторных полей.

318. $\bar{a} = (y^2 + z^2)\bar{i} + (z^2 + x^2)\bar{j} + (x^2 + y^2)\bar{k}$.

319. $\bar{a} = \text{grad}(y^2 + x^2 + z^2)$.

320.* Найти дивергенцию поля напряженности $\bar{E} = \frac{q\bar{r}}{r^2}$ точечного заряда q (\bar{r} – радиус-вектор, проведенный из точки, где помещен заряд, в произвольную точку M , $r = |\bar{r}|$).

321.* Найти дивергенцию $\bar{a} = r^2\bar{c}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\bar{c} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j} + c_3\bar{k}$ – постоянный вектор.

322. Найти ротор векторного поля

$$\bar{a} = (x + z)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (x^2 + z)\bar{k}.$$

323. Вычислить ротор вектора $\bar{a} = (x^2 + y)\bar{i} + yz^2\bar{j} - xyz\bar{k}$ в точке $P(-5, 2, 1)$.

324. Жидкость течет со скоростью

$$\bar{V} = (z^2 - z - y^2)\bar{i} + (z^2 - 2z + x^2)\bar{j} + x(y + z)\bar{k}. \text{ Найти точку, в которой } \text{rot } \bar{V} = \bar{0}.$$

325.* Жидкость течет со скоростью

$$\bar{V} = \left(x + \frac{y}{z}\right)\bar{i} + 3xz\bar{j} + \frac{x}{z}\bar{k}. \text{ Найти вектор угловой скорости}$$

твёрдого тела, закреплённого в точке $P(-2, 1, 1)$ и вращаемого телом, если размерами тела можно пренебречь.

326.* Вычислить наибольшую плотность циркуляции вектора $\bar{a} = (x^2 + yz^2)\bar{i} + (y^2 + zx^2)\bar{j} + (z^2 + xy^2)\bar{k}$ в точке $M(2, 0, 1)$.

327. * Найти $\text{rot}(\bar{r} \cdot \bar{a})\bar{r}$, где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

Показать, что поле потенциально, и найти потенциал этого поля.

$$328. \bar{a} = (4x - 3yz)\bar{i} + (4y - 3xz)\bar{j} + (4z - 3xy)\bar{k}.$$

$$329. \bar{a} = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)\bar{i} + (3x^4y^2 - 6xy - 4)\bar{j}.$$

$$330. \bar{a} = \frac{1}{z}(\bar{i} - 3\bar{j}) + \frac{1}{z^2}(3y - x + z^3)\bar{k}.$$

331. * Показать, что векторное поле $\bar{a} = \frac{\bar{r}}{r^3}$ является

гармоническим ($\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$).

Какие из следующих полей являются соленоидальными?

$$332. \bar{a} = x(z^2 - y^2)\bar{i} + y(x^2 - z^2)\bar{j} + z(y^2 - x^2)\bar{k}.$$

$$333. \bar{a} = 3z(y^2 + x^2)\bar{i} - 2y(x^2 + z^2)\bar{j} + 4x(z^2 + y^2)\bar{k}.$$

334. * Показать, что векторное поле \bar{a} потенциально, и найти работу этого поля по перемещению единичной массы вдоль пути АВ от точки А к точке В:

$$\bar{a} = (x + y + z)^2\bar{i} + (x + y + z)^2\bar{j} + (x + y + z)^2\bar{k}, \quad A(1, 2, -2), \\ B(2, 3, -3).$$

ГЛАВА 5. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

5.1. Понятие об уравнениях в частных производных.

Приведение к каноническому виду

Найти нетривиальное решение $y(x) \neq 0$ уравнения $y'' + \lambda y = 0$, удовлетворяющее краевым условиям (решить задачу Штурма-Лиувилля).

$$335. y(0) = y(1) = 0. \quad 336. y'(0) = y'(1) = 0.$$

$$337. y(0) = y'(1) = 0. \quad 338. y'(0) = y(1) = 0.$$

Решить дифференциальные уравнения в частных производных.

$$339. 2u_{xx} + u_x = 0, \text{ где } u = u(x, y).$$

$$340. u_{xy} = 0, \text{ где } u = u(x, y).$$

$$341. u_{xy} - u_y = 0, \text{ где } u = u(x, y).$$

Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду.

$$342. * u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$$

$$343. * u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x + 6u_y = 0.$$

5.2. Уравнения гиперболического типа

Решить задачу для волнового уравнения на отрезке.

$$344. u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2}, \\ u_t(x, 0) = 0.$$

$$345. u_{tt} = u_{xx}, \quad u_x(0, t) = u(2, t) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{4}, \\ u_t(x, 0) = 0.$$

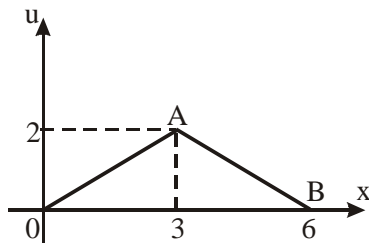
$$346. u_{tt} = 64u_{xx}, \quad u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 8x - 1.$$

$$347. u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx}, \quad u(0, t) = u\left(\frac{3}{2}, t\right) = 0, \quad u(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = x \left(x - \frac{3}{2} \right).$$

348.* Найти отклонение от положения равновесия закрепленной на концах $x = 0$ и $x = 3$ однородной горизонтальной струны, если в начальный момент точки струны находились в положении равновесия, и ей была придана начальная скорость $\frac{1}{3} \sin \frac{5\pi x}{3}$.

349.* Дана струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = 6$. Пусть в начальный момент времени она имеет вид ломанной OAB. Найти форму струны в любой момент времени, если начальная скорость отсутствовала.



5.3. Параболические уравнения

Решить уравнение теплопроводности на отрезке.

$$350. u_t = 4u_{xx}, \quad u(x, 0) = \sin^3 2\pi x - \sin 4\pi x, \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$$

$$351. u_t = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \text{при } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

- 352.* Дан тонкий однородный стержень единичной длины, с распределением температуры вида $f(x) = x(1-x)$, температура на концах которого поддерживается равной нулю. Найти распределение температуры в момент времени $t > 0$.

5.4. Эллиптические уравнения

Выяснить, будет ли $f(x, y)$ гармонической ($\Delta f = 0$), если $u = u(x, y)$ – гармоническая функция.

353. $f(x, y) = u_x \cdot u_y$. 354. $f(x, y) = xu_x - yu_y$.

Может ли данная функция $u(x, y)$ (или $v(x, y)$) быть действительной (или мнимой) частью некоторой аналитической функции $f(x, y)$?

355. $u(x, y) = e^x \cos y$. 356. $v(x, y) = x^2 \sin y$.

Решить уравнение $\Delta u = 0$ внутри квадрата $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

357. $u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=1} = 0, u|_{y=0} = \sin \pi x$.

358.* $u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, u|_{x=0} = 1$.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

1.1.

$$6. f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1-t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$7. f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \cos 2t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$8. f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2 \cos t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$9. f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2t^2 - 4t + 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

1.2.

$$10. \frac{2+p}{p^2}. \quad 11. \frac{p^2-2p+4}{p(p^2+4)}. \quad 12. \frac{p^3+p^2+1}{p^2(p^2+1)}. \quad 13. \frac{2(1-p^2)}{p^3}.$$

$$14. \frac{-p^2+p-1}{p^2(p-1)}. \quad 15. * \frac{1-e^{-3p}}{p}. \quad 16. * \frac{(1-e^{-2p})^2}{p}. \quad 17. * \frac{(1-e^{-3p})^2}{p^2}.$$

$$18. * \frac{(1-e^{-2p})(e^{-4p}-e^{-2p}+1)}{p}.$$

1.3.

$$19. 2 \cos t + 3 \sin t. \quad 20. 3 \cos 2t - 2 \sin 2t. \quad 21. e^{-t} + te^{-t}.$$

$$22. \cos t - e^{-t}. \quad 23. e^{2t} - t^2 e^{2t}.$$

$$24. * e^{-t} - \frac{1}{2} te^{-t} - \frac{1}{2} \sin t + \cos t.$$

$$25. * \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} \cos t + \frac{5}{2} e^{-t} \sin t.$$

$$26. * 7 \sin t - 7 \cos t + 7e^{-2t} \cos t + 10e^{-2t} \sin t.$$

1.4.

27. $\frac{5}{4}e^{4t} - \frac{1}{4}$. 28. $\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})$. 29. $2(t - \sin t)$. 30. te^{-2t} .

31.* $te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}$. 32.* $\frac{1}{2}\operatorname{ch}2t$. 33.* $1 + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t}$. 34.* $\frac{t^2}{2}$.

ГЛАВА 2

2.1

35. $S = 0$. 36. $S = \frac{3}{4}$. 37. $S = \frac{4}{3}$. 38. $S = \frac{3}{4}$. 39. $S = \frac{8}{15}$.

40. $S = \frac{1}{2}$. 41. $S = -\frac{1}{2}$. 42. $S = \frac{5}{4}$. 43. $S = \frac{7}{10}$. 44. $S = \frac{1}{2}$.

45. $S = \frac{2}{3}$. 46. $S = -\frac{2}{3}$. 47. $S = \frac{6}{5}$. 48. $S = \frac{13}{42}$. 49. $S = \frac{3}{4}$.

50. $S = \frac{1}{6}$. 51. $S = \frac{5}{6}$. 52. $S = \frac{7}{12}$. 53. $S = \frac{9}{20}$. 54. $S = \frac{11}{30}$.

2.2.

55. Сходится. 56. Сходится. 57. Расходится. 58. Сходится.

59. Сходится. 60. Расходится. 61. Сходится. 62. Расходится.

63. Сходится. 64. Сходится. 65. Сходится. 66. Сходится.

67. Сходится. 68. Расходится. 69. Расходится. 70. Сходится.

71. Расходится. 72. Сходится. 73. Сходится. 74. Расходится.

75. Сходится. 76. Сходится. 77. Расходится. 78. Сходится.

79. Сходится. 80. Расходится. 81. Расходится. 82. Сходится.

83. Сходится. 84. Расходится. 85. Сходится. 86. Сходится.

87. Расходится. 88. Сходится. 89. Сходится. 90. Сходится.

91. Расходится. 92. Сходится. 93. Расходится. 94. Расходится.

2.3.

95. Сходится условно. 96. Расходится. 97. Сходится абсолютно.
 98. Расходится. 99. Сходится абсолютно.
 100. Сходится абсолютно. 101. Сходится абсолютно.
 102. Расходится. 103. Сходится абсолютно.
 104. Сходится условно. 105. Расходится.
 106. Сходится абсолютно. 107. Сходится абсолютно.
 108. Сходится абсолютно. 109. Сходится абсолютно.
 110. Расходится. 111. Расходится. 112. Расходится.
 113. Сходится абсолютно. 114. Сходится условно.
 115. $-0,82$ ($n = 10$). 116. $0,19$ ($n = 4$). 117. $-0,87$ ($n = 7$).
 118. $-0,21$ ($n = 7$). 119. $0,90$ ($n = 4$). 120. $0,04$ ($n = 5$).
 121. $-0,34$ ($n = 5$). 122. $-0,64$ ($n = 4$). 123. $0,95$ ($n = 5$).
 124. $0,03$ ($n = 4$). 125. $0,09$ ($n = 4$). 126. $-1,90$ ($n = 5$).
 127. $-0,19$ ($n = 5$). 128. $0,10$ ($n = 6$). 129. $-0,09$ ($n = 4$).
 130. $0,11$ ($n = 4$). 131. $0,13$ ($n = 5$). 132. $0,19$ ($n = 6$).
 133. $-0,36$ ($n = 3$). 134. $-0,17$ ($n = 4$).

2.4.

135. $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$. 136. $(-7, 1)$. 137. $(-8, -2)$. 138. \emptyset . 139. $(-1, 1)$.
 140. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. 141. $(-\infty, -1) \vee (1, +\infty)$. 142. $\left[-\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$.
 143. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 144. $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$. 145. $(-\infty, +\infty)$.
 146. $(-\infty, +\infty)$. 147. $(-\infty, 0)$. 148. $[1, 3)$. 149. $(-1, 2] \cup (4, +\infty)$.

$$150. \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right). \quad 151. \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right].$$

$$152. \left[-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right]. \quad 153. (-\pi + 2\pi n; 2\pi n). \quad 154. (1, +\infty).$$

2.5.

$$155. -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \quad 156. -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

$$157. -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^{n+1}}. \quad 158. -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}.$$

$$159. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+1)!}. \quad 160. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$161. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n}}{(2n+1)!}. \quad 162. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} 2^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

$$163. 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}. \quad 164. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x \ln 2)^n}{n!}. \quad 165. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

$$166. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 3)^n}{n!}. \quad 167. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}. \quad 168. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+2} x^{2n+1}}{(2n+2)!}.$$

$$169. -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4x)^n}{n}. \quad 170. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}.$$

2.6.

$$171. \frac{x}{(1-x)^2}, (-1, 1). \quad 172. -\ln|x-1|, [-1, 1).$$

$$173. -1 - \frac{\ln|x-1|}{x}, [-1, 1). \quad 174. -2 + \frac{2}{(1-x^2)^2}, (-1, 1).$$

$$175. \frac{2x-x^2}{(1+x)^2}, (-1, 1). \quad 176. \ln|1+x|, [-1, 1).$$

$$177. -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, [-1, 1). \quad 178. \frac{1}{(x-1)^2}, (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

$$179. \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|, (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \quad 180. -\ln|1-2x|, \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

$$181. -\frac{3x}{(x+3)^2}, (-\infty, -3) \cup (3, +\infty). \quad 182. \frac{x^3}{(x+1)^2}, (-1, 1).$$

$$183. -\ln|1-\sin x|, \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right).$$

$$184. -\ln|1-\cos x|, (-\pi + \pi n; \pi n).$$

$$185. -\frac{x}{(x+1)^2}, (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

2.7.

$$186. f(x) = -1 - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

$$187. f(x) = 2 + \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

$$188. f(x) = 3 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

$$189. f(x) = 4 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

$$190. f(x) = -3 - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

$$191. f(x) = 1 - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{5}.$$

$$192. f(x) = -2 + \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{3}.$$

$$193. f(x) = -3 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{3}.$$

$$194. f(x) = 4 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{6}.$$

$$195. f(x) = 3 - \frac{20}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{7}.$$

$$196. f(x) = \frac{-12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}.$$

$$197. f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin 2n\pi x.$$

$$198. f(x) = \frac{15}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{2n\pi x}{5}.$$

$$199. f(x) = \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{6}.$$

$$200. f(x) = \frac{7}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

$$201. f(x) = \frac{3}{5\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{5n\pi x}{4}.$$

$$202. f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{4n\pi x}{3}.$$

$$203. f(x) = \frac{26}{5\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{5n\pi x}{16}.$$

$$204. f(x) = -3 + \frac{24}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m-1)\pi x}{3}}{(2m-1)^2}.$$

$$205. f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2(2m-1)\pi x}{(2m-1)^2}.$$

$$206. f(x) = -\frac{9}{2} + \frac{36}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m-1)\pi x}{6}}{(2m-1)^2}.$$

$$207. f(x) = \frac{5}{16} - \frac{5}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{8(2m-1)\pi x}{3}}{(2m-1)^2}.$$

$$208. f(x) = -\frac{15}{16} + \frac{15}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2(2m-1)\pi x}{5}}{(2m-1)^2}.$$

$$209. f(x) = \frac{7}{2} - \frac{28}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{3(2m-1)\pi x}{7}}{(2m-1)^2}.$$

$$210. f(x) = 6 - \frac{48}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m-1)\pi x}{15}}{(2m-1)^2}.$$

$$211. f(x) = -\frac{2}{5} + \frac{16}{5\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{5(2m-1)\pi x}{6}}{(2m-1)^2}.$$

ГЛАВА 3

3.1.

$$212. 1. 213. \ln \frac{4}{3}. 214. \frac{752}{3}. 215. \frac{4}{3}. 216. \frac{1}{24}.$$

$$217. \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^y f dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{1}{2}y}^2 f dx. 218. \int_0^1 dy \int_0^e f dx. 219. \int_0^4 dy \int_{\frac{1}{12}y}^{\sqrt{\frac{1}{3}y}} f dx.$$

$$220. \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f dy. 221. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y^3}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f dx.$$

$$222. \int_{-4}^0 dy \int_{-y}^4 f dx + \int_0^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f dx. 223. \int_{-1}^1 dx \int_{x-1}^{\arccos x} f dy. 224. \frac{121}{486}.$$

$$225. \frac{13}{3}. 226. \frac{64}{3}. 227. 13,5. 228. J_x = \frac{1}{12}, J_y = \frac{7}{12}, J_0 = \frac{2}{3}.$$

3.2.

$$229. 242 \frac{2}{3}. 230. \frac{1}{144}. 231. 10. 232. 2. 233. \frac{7}{24}. 234. 12 \frac{4}{21}.$$

$$235. e^2 - e^{-2} - 2. 236. \frac{2}{15}. 237. m = 10. 238. M_0 \left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}; \frac{8}{5} \right).$$

$$239. {}^*M_0\left(\frac{18}{7}; \frac{15\sqrt{6}}{16}; \frac{12}{7}\right).$$

3.3.

$$240. \frac{\pi}{2} \ln \frac{R}{r}. \quad 241. \frac{3}{2}(e-1). \quad 242. \frac{\pi^2}{6}. \quad 243. {}^* \frac{R^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right).$$

$$244. {}^* \frac{\pi}{4} \left((1+R^2) \ln(1+R^2) - R^2 \right). \quad 245. \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6} R^3. \quad 246. 0.$$

$$247. 164\pi. \quad 248. \frac{4\pi}{15} (R^5 - r^5). \quad 249. {}^* \frac{\pi}{8}. \quad 250. \frac{7\pi\sqrt{2}}{24}.$$

$$251. \frac{19\pi}{6} \text{ и } \frac{15\pi}{2}. \quad 252. \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \quad 253. 2.$$

3.4.

$$254. 2a\pi^2 \sqrt{1+a^2}. \quad 255. \frac{\pi R^7}{2}. \quad 256. \sqrt{5} \ln \frac{3}{2}.$$

$$257. \frac{2}{3} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^3} - 1 \right). \quad 258. 0,5. \quad 259. -\pi ab. \quad 260. -4\pi.$$

$$261. \frac{\pi}{2}. \quad 262. 0. \quad 263. \frac{3\pi R^4}{2}. \quad 264. 4. \quad 265. 8.$$

$$266. u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C. \quad 267. u = \frac{y}{x^2} + C.$$

$$268. m = e^2 - 1. \quad 269. m = \frac{a \ln 3}{2}. \quad 270. A = 22,5. \quad 271. A = e^9 - e.$$

3.5.

$$272. 32. 273. 8\pi\sqrt{2}. 274. \frac{9\pi\sqrt{3}}{4}. 275. 72. 276. \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3}-1).$$

3.6.

$$277. \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. 278. \frac{125\sqrt{5}-1}{420}. 279. \frac{64\pi}{3}. 280. \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$281. \sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

3.7.

$$282. \frac{1}{6}. 283. \frac{1}{24}. 284. -\frac{1}{2}. 285. \frac{243\pi}{8}. 286. 2.$$

3.8.

$$287. 96\pi. 288. \frac{12\pi}{5}. 289. 36\pi.$$

3.9.

$$290. 2\pi. 291. 6\pi. 292. 1.$$

ГЛАВА 4

4.1.

$$293. \frac{5}{3}. 294. -2\pi. 295. \frac{\pi}{2}R^4. 296. 0. 297.* 2\sqrt{3}\pi. 298.* \frac{\pi}{6}.$$

$$299.* -\pi. 300.* -64\pi.$$

4.2.

$$301. \frac{3}{4}\pi ab(a^2 + b^2). 302. -2\pi. 303. -5. 304. -4\pi.$$

$$305. 2\pi a^2 \omega. 306.* -\pi. 307.* 4\pi. 308.* -4\pi. 309.* \frac{4}{3}.$$

4.3.

$$310. -\frac{4}{3}R^2. 311. \frac{33}{2}. 312. -\frac{14}{15}. 313. \frac{5}{3}. 314.* -\pi a^2. 315.* \frac{1}{35}.$$

$$316.* \operatorname{rot} \bar{a} = 0. 317.* \frac{41}{6}.$$

4.4.

$$318. 0. 319. 6. 320.* 0. 321.* 2\bar{c} \cdot \bar{r}. 322. \operatorname{rot} \bar{a} = -\bar{i} - (2x-1)\bar{j}.$$

$$323. \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}. 324. M(0,0,1). 325.* \bar{\omega} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}.$$

$$326.* P_{\bar{n}_0}(M) = |\operatorname{rot} \bar{a}_M| = 5. 327.* (z-y)\bar{i} + (x-z)\bar{j} + (y-x)\bar{k}.$$

$$328. u(M) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3xyz + C.$$

$$329. u(M) = -x^4 y^3 + 3y^2 x - 5x + 4y + C.$$

$$330. u(M) = \frac{3y-x}{z} - \frac{z^2}{2} + C. 332. \text{Соленоидально.}$$

$$333. \text{Несоленоидально. 334.* } \frac{7}{3}.$$

ГЛАВА 5

5.1.

$$335. y_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}, \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2.$$

$$336. y_k(x) = \cos \frac{\pi k x}{l}, \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2.$$

$$337. y_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}, \lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2l} \right)^2.$$

$$338. y_k(x) = \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}, \lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2l} \right)^2.$$

$$339. u(x, y) = \varphi(y) + \psi(y) \cdot e^{-x/2}.$$

$$340. u(x, y) = \varphi(y) + \psi(y).$$

$$341. u(x, y) = e^x \cdot (\varphi(x) - \psi(y)).$$

$$342. * u(x, y) = \varphi(4x - y) + \psi(x - y).$$

$$343. * u(x, y) = e^{-3x} \cdot \varphi(2x - y) + \psi(2x - y).$$

5.2.

$$344. u(x, t) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2} \cos 11\pi t.$$

$$345. u(x, t) = \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{4} \cos \frac{3\pi t}{4}.$$

$$346. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{72((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} \cos \frac{\pi n x}{6} \sin \frac{4\pi n t}{3}.$$

$$347. u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-54}{\pi^4 (2k+1)^4} \sin \frac{2\pi(2k+1)x}{3} \sin \frac{\pi(2k+1)t}{3}.$$

$$348. * u(x, t) = \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{3} \sin \frac{5\pi t}{3}.$$

$$349. * u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \sin \frac{\pi n}{2}}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{6} \cos \frac{\pi n t}{6}.$$

5.3.

$$350. u(x, t) = \frac{3}{4} e^{-\pi^2 t} \sin \pi x - \frac{1}{4} e^{-9\pi^2 t} \sin 3\pi x - e^{-16\pi^2 t} \sin 4\pi x.$$

$$351. u(x, t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t} \sin (2n+1)\pi x.$$

$$352. * u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t} \sin (2n+1)\pi x.$$

5.4.

353. Да. 354. Нет. 355. Да ($\Delta u = 0$). 356. Нет.

$$357. u(x, y) = \frac{\operatorname{sh}\pi(1-y)}{\operatorname{sh}\pi} \sin \pi x.$$

$$358. * u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\pi(2n+1)(1-x) \cdot \sin \pi(2n+1)y}{(2n+1)\operatorname{sh}\pi(2n+1)}.$$