МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное научное учреждение
ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЕМ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ФОНД ЭЛЕКТРОННЫХ РЕСУРСОВ "НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ"
(основан в 1991 году)

СВИДЕТЕЛЬСТВО О РЕГИСТРАЦИИ ЭЛЕКТРОННОГО РЕСУРСА

ИУО РАО
ОФЭРНиО

№ 20970

Настоящее свидетельство выдано на электронный ресурс, отвечающий требованиям новизны и приоритетности:

Электронное учебное пособие
«Геометрия и топология. Ч. 1»

Дата регистрации: **16 июня 2015 года**

Автор: **Султанов С.Р.**

Организация-разработчик: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Рязанский государственный радиотехнический университет»**

Директор ФГБНУ ИУО РАО,
д.экон.н., профессор ________________ С.С. Неустроев

Руководитель ОФЭРНиО, почетный
работник науки и техники России ________________ А.И. Галкина

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ »

СУЛТАНОВ С.Р.

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

ЧАСТЬ 1

Электронное учебное пособие

Рязань 2015

Глава 1. Векторная алгебра и ее приложения.

§ 1. Свободные и связанные векторы. Декартова и аффинная системы координат.

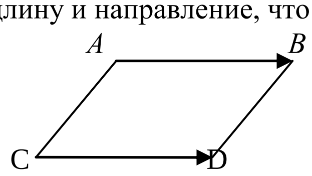
Определение. Направленный отрезок прямой, соединяющий две точки пространства, называют *связанным вектором*. Также, связанный вектор можно определить, как упорядоченную пару точек в пространстве.

Направление связанного вектора характеризуется порядком следования точек, первую точку пары назовем *началом,* а вторую – *концом* вектора.

Если точка A определяет начало, а B – конец вектора, то связанный вектор обозначают $\overrightarrow{AB}$.

Вектор характеризуется двумя его составляющими: *длиной* и *направлением.*

Определение. Будем говорить, что связанные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ *равны*, если они имеют одинаковую длину и направление, что равносильно тому, что либо одновременно совпадают точки A с C и B с D, либо тому, что построенный на данных точках четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом, то есть вектор $\overrightarrow{CD}$ получается из вектора $\overrightarrow{AB}$ при помощи параллельного переноса.



Для любого связанного вектора $\overrightarrow{AB}$, от любой точки C пространства (рассматривая ее как начало вектора) можно отложить вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$.

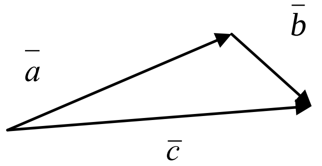
Два связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой, или на двух параллельных между собой прямых. Связанный вектор, начало и конец которого совпадают, имеет, очевидно, нулевую длину и называется *нулевым*, обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Два коллинеарных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называют *сонаправленными*, если при параллельном переносе их на одну прямую они задают одно направление на ней, сонаправленность обозначается: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, и *разнонаправленными* в противном случае: обозначается $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Отношение равенства связанных векторов определяет отношение эквивалентности в множестве всех связанных векторов пространства, в силу достаточно очевидной выполнимости свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности данного отношения равенства. Данное отношение эквивалентности приводит нас к понятию *свободного вектора.*

Определение. Возьмем связанный вектор $\overrightarrow{AB}$, и рассмотрим множество всех равных ему связанных векторов. Весь этот класс векторов, равных вектору $\overrightarrow{AB}$, мы назовем *свободным* вектором, и обозначим $\overline{AB}$. Будем говорить при этом, что связанный вектор $\overrightarrow{AB}$ является *представителем* свободного вектора $\overline{AB}$. Отметим, что свободный вектор будет определяться любым своим представителем. Свободный вектор мы можем отложить (через его представителя) от любой точки пространства. Два свободных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ мы будем называть *равными*, если у них есть общий представитель, и будем называть *коллинеарными* (сонаправленными, разнонаправленными), если они имеют коллинеарные (сонаправленные, разнонаправленные) представители.

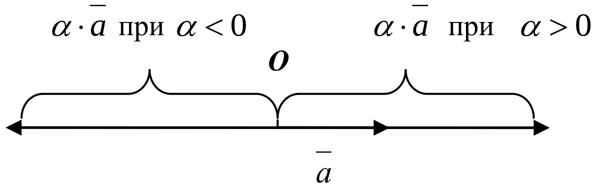
Рассмотрим множество всех свободных векторов в пространстве, и определим в этом множестве операции сложения векторов и умножения векторов на действительные числа.

Определение. Рассмотрим векторы $\overline{AB} = \bar{a}$ и $\overline{CD} = \bar{b}$. Возьмем произвольную точку пространства и отложим от нее вектор $\overline{AB}$ (через его представителя), от конца вектора $\overline{AB}$ отложим $\overline{CD}$ (через его представителя), и соединим начало вектора $\overline{AB}$ и конец вектора $\overline{CD}$. Тогда связанный вектор, определенный этими точками, будет определять *сумму векторов*: $\bar{c} = \overline{AB} + \overline{CD}$, или $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$. Отметим, что выбор



представителей векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не влияет на определенную таким образом сумму данных векторов, т.е. приведенное определение суммы свободных векторов дано корректно.

Определение. Пусть даны вектор $\overline{a}$ и $\alpha \in R$, тогда от произвольно выбранной точки O пространства отложим представитель вектора $\overline{a}$. Пусть $\left|\overline{a}\right|$ – длина *(модуль)* данного представителя, назовем ее длиной (модулем) вектора $\overline{a}$. Возьмем $\lambda = \left|\overline{a}\right| \times \left|\alpha\right|$, и отложим от точки O вектор длины λ в том же направлении, что и вектор $\overline{a}$ при $\alpha > 0$, и в противоположном, если $\alpha < 0$. Построенный связанный вектор определяет произведение $\alpha \cdot \overline{a}$ вектора $\overline{a}$ на число α.

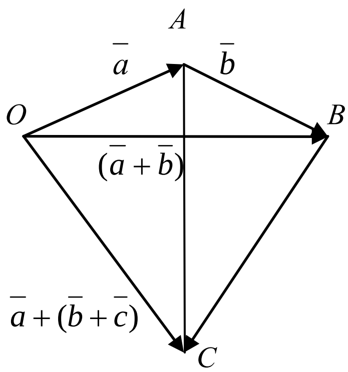


Очевидно, от выбора представителя результат умножения вектора на число не зависит, и, следовательно, определен корректно.

Теорема. *Множество всех свободных векторов в пространстве с введенными операциями сложения и умножения векторов на действительные числа образует линейное пространство.*

Доказательство. Пусть V_3 – множество всех свободных векторов в пространстве.

1) Докажем, что для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ выполняется равенство $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$.

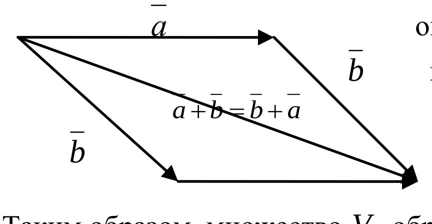


Отложим от конца вектора $\overline{a}$ вектор $\overline{b}$, от конца вектора $\overline{b}$ вектор $\overline{c}$, тогда вектор $\overline{OC} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$. С другой стороны $\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$, и следовательно $\overline{OC} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.

2) Наличие нулевого элемента в пространстве V_3 следует из того, что $\overline{0} + \overline{a} = \overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$ для каждого вектора $\overline{a} \in V_3$, где $\overline{0}$ – нулевой свободный вектор.

3) Наличие обратного элемента для произвольного вектора $\overline{a}$ следует из того, что $(-1) \cdot \overline{a} + \overline{a} = \overline{0}$, и таким образом вектор $-\overline{a} = (-1) \cdot \overline{a}$ является обратным для вектора $\overline{a}$.

4) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$. Коммутативность следует из приведенного построения: векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{b} + \overline{a}$



определяются диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и, следовательно, являются равными.

Таким образом, множество V_3 образует коммутативную группу (по сложению векторов).

5) Очевидно, $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$, поскольку при умножении вектора на 1 его направление и модуль не меняются.

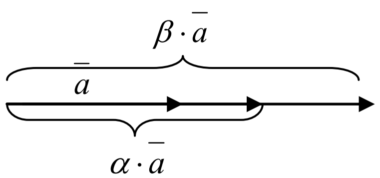
6) $\alpha\,(\beta \cdot \overline{a}) = (\alpha \cdot \beta\,)\overline{a}$ для любых $\alpha, \beta \in R$, и для каждого вектора $\overline{a} \in V_3$.

Рассмотрим $\left|\alpha\,(\beta\overline{a})\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\beta\overline{a}\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\beta\right| \cdot \left|\overline{a}\right|$ по определению произведения вектора на число. Аналогично $\left|(\alpha\,\beta\,)\overline{a}\right| = \left|\alpha\beta\right| \cdot \left|\overline{a}\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\beta\right| \cdot \left|\overline{a}\right|$, таким образом, модули данных векторов совпадают. Очевидно, данные векторы коллинеарны. Легко видеть, что и направление у них будет одинаковое в силу того, что при $\alpha\beta > 0$ направление каждого произведения будет совпадать с направлением вектора $\overline{a}$, а в случае $\alpha\beta < 0$ оно будет противоположно данному направлению.

7) $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ для любых $\alpha, \beta \in R$, и для каждого вектора $\overline{a} \in V_3$.

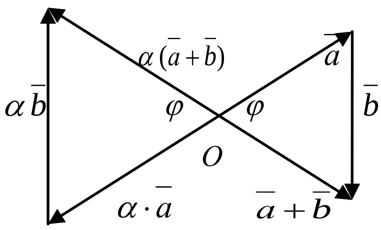
Действительно, если числа α и β одного знака, то векторы $\alpha \cdot \overline{a}$ и $\beta \cdot \overline{a}$ являются сонаправленными, следовательно $\left|\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}\right| = \left|\alpha\overline{a}\right| + \left|\beta\overline{a}\right| = |\alpha| \cdot \left|\overline{a}\right| + |\beta| \cdot \left|\overline{a}\right| = (|\alpha| + |\beta|) \cdot \left|\overline{a}\right| = |\alpha + \beta| \cdot \left|\overline{a}\right|$, и таким образом $(\alpha + \beta) \cdot \overline{a} = \alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{a}$. Если α и β разного знака, то $\left|\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}\right| = \left|\,\left|\alpha\,\overline{a}\right| - \left|\beta\overline{a}\right|\,\right| = \left|\,|\alpha| \cdot \left|\overline{a}\right| - |\beta| \cdot \left|\overline{a}\right|\,\right| =$

$$= \left|\,(|\alpha| - |\beta|) \cdot \left|\overline{a}\right|\,\right| = \left|\,|\alpha| - |\beta|\,\right| \cdot \left|\overline{a}\right| = |\alpha + \beta| \cdot \left|\overline{a}\right|$$, и равенство также выполняется.



8) $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$ для каждого $\alpha \in R$, и для любых векторов $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$.

Пусть $\alpha \le 0$. От точки O отложим вектор $\overline{a}$, от его конца – вектор $\overline{b}$ и построим вектор $\overline{a} + \overline{b}$. Затем построим вектор $\alpha \cdot \overline{a}$ и вектор $\alpha(\overline{a} + \overline{b})$, соединив концы данных векторов получим вектор $\alpha \cdot \overline{b}$ (в силу того, что построенные треугольники будут подобными). Тогда из построения следует, что $\alpha\overline{a} + \alpha\overline{b} = \alpha(\overline{a} + \overline{b})$.



Если $\alpha > 0$, то $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = (-1)(-\alpha)(\overline{a} + \overline{b}) = (-1)((-\alpha)\overline{a} + (-\alpha)\overline{b}) =$
$= (-1)((-\alpha)\overline{a}) + (-1)((-\alpha)\overline{b}) = \alpha\,\overline{a} + \alpha\,\overline{b}$.

Теорема доказана.

Таким образом, все свойства линейных пространств являются справедливыми для пространства свободных векторов V_3, и в дальнейшем будут использоваться нами без дополнительных оговорок.

Теорема. *Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.*

Доказательство. Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы, то найдется число α такое, что $\overline{a} = \alpha\overline{b}$, следовательно, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. Обратно, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то их можно отложить на одной прямой. Тогда, если вектор $\overline{b}$ не нулевой, то определим $|\alpha| = \left|\overline{a}\right| / \left|\overline{b}\right|$. Положим: $\alpha > 0$, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены, и $\alpha < 0$, если они противоположно направлены, тогда получим, что $\overline{a} = \alpha\overline{b}$. Если же вектор $\overline{b}$ нулевой, то $\overline{b} = 0\overline{a}$. Теорема доказана.

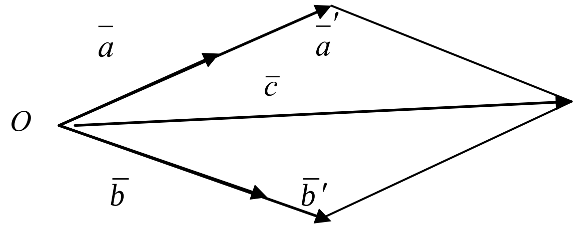
Полученный результат позволяет определить нам базис в пространстве свободных векторов, лежащих в данной плоскости.

Теорема. *Любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости.*

Доказательство. Поскольку $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, то они линейно независимы. Пусть γ – плоскость, определяемая векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и пусть $\overline{c}$ – любой вектор, лежащий в плоскости γ. Если вектор $\overline{c}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$ или $\overline{b}$, то очевидно вектор $\overline{c}$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Пусть вектор $\overline{c}$ неколлинеарен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Отложим все эти векторы от одной точки $O \in \gamma$.

Проведем из конца вектора $\overline{c}$ прямые, параллельные векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Они пересекутся с прямыми, на которых лежат данные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и точки пересечения определяют векторы $\overline{a}'$ и $\overline{b}'$.

Тогда $\overline{c} = \overline{a}' + \overline{b}'$. Поскольку $\overline{a}' \parallel \overline{a}$, то существует α такое, что $\overline{a}' = \alpha\,\overline{a}$, аналогично существует β такое,



что $\bar b' = \beta \ \bar b$, а тогда $\bar c = \alpha \ \bar a + \beta \ \bar b$, и теорема доказана.

Заметим, что множество векторов, лежащих в данной плоскости, образуют подпространство векторного пространства V_3, будем обозначать данное подпространство V_2.

Определение. Три (или более) векторов в пространстве называются *компланарными,* если они лежат в одной плоскости.

Условие компланарности тройки векторов в пространстве описывает следующая теорема.

Теорема. *Три вектора в пространстве являются компланарными тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ компланарны, тогда если два из них коллинеарны, то линейная зависимость данной тройки векторов очевидна.

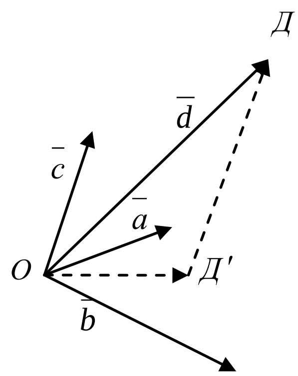
Пусть среди данной тройки нет коллинеарных векторов, тогда, если γ – плоскость, в которой лежит данная тройка, то векторы $\bar a$ и $\bar b$ образуют базис в ней, и вектор $\bar c$ является их линейной комбинацией, следовательно, векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ линейно зависимы.

Обратно, если векторы $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ линейно зависимы, то один из них является линейной комбинацией остальных и, следовательно, лежит в плоскости, определенной этими векторами. Теорема доказана.

Полученный результат позволяет нам определить базис в линейном пространстве V_3.

Теорема. *Любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве* V_3.

Доказательство. Пусть векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ некомпланарны, тогда они линейно независимы по доказанной теореме. Пусть $\bar d$ произвольный вектор пространства V_3. Пусть плоскость γ определена векторами $\bar a$ и $\bar b$, тогда вектор $\bar c$ не лежит в этой плоскости. Пусть вектор $\bar d$ также не лежит в этой плоскости. Отложим векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$, $\bar d$ от одной точки O плоскости γ. Через конец вектора $\bar d$ проведем прямую, параллельную вектору $\bar c$, найдем точку пересечения $Д'$ данной прямой с плоскостью γ. Тогда вектор $\bar d = \overline{OД'} + \overline{Д'Д}$.



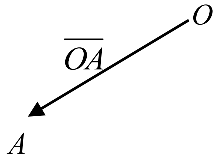
Отметим, что $\overline{OД'}$ лежит в плоскости γ, поэтому существуют α и β такие, что $\overline{OД'} = \alpha \ \bar a + \beta \ \bar b$. Поскольку $\overline{Д'Д}$ и $\bar c$ коллинеарны, то существует λ такое, что $\overline{Д'Д} = \lambda \bar c$, тогда вектор $\bar d = \alpha \ \bar a + \beta \ \bar b + \lambda \bar c$. Если же вектор $\bar d$ лежит в плоскости γ, то он представляется в виде линейной комбинации векторов $\bar a$ и $\bar b$, и, следовательно, является линейной комбинацией тройки векторов $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$. Теорема доказана.

Выбрав какой-то базис в V_3, мы можем каждому вектору поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел, образованную координатами данного вектора в заданном базисе, это соответствие определяет *канонический* изоморфизм пространства V_3 в пространство R^3, что позволяет нам отождествлять векторы пространства V_3 с упорядоченными тройками действительных чисел. Аналогично пространство V_2 изоморфно пространству R^2. Таким образом, векторы на плоскости отождествляются с упорядоченными парами действительных чисел.

Определение. *Аффинной системой координат на плоскости* мы будем называть систему, состоящую из двух неколлинеарных векторов этой плоскости и некоторой фиксированной точки данной плоскости, которая называется *началом координат*.

Аналогично *аффинная система координат в пространстве* задается любой тройкой некомпланарных векторов и фиксированной точкой пространства, определяющей начало системы координат. Отметим при этом, что данная тройка векторов образует базис в V_3. Понятие аффинной системы координат позволяет нам дать определение координат точки в пространстве (или на плоскости) в заданной системе координат.

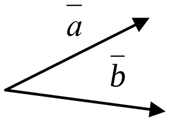
Определение. Пусть A – произвольная точка пространства, точка O – начало аффинной системы координат в пространстве. Построим вектор $\overline{OA}$ – *радиус - вектор точки* A. Тогда координаты вектора $\overline{OA}$ в данном базисе будут называться *координатами точки* A в данной аффинной системе координат.



Напомним, что в линейном пространстве при сложении, вычитании, умножении векторов на числа, соответственно складываются, вычитаются и умножаются на данные числа координаты данных векторов. Заметим, что если точки A_1 и A_2 пространства заданы своими координатами: $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{A_1A_2}$ имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

§ 2. Скалярное произведение векторов. Проекции вектора на ось.

Определим для любой пары $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторов пространства V_3 *скалярное произведение* $\bar{a}\,\bar{b}$ данных векторов, полагая



$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a}^\wedge \bar{b})$$

Таким образом, данная операция определяет отображение множества $V_3^{\,2}$ в множество R.

Следующая теорема говорит о том, что приведенное определение скалярного произведения векторов является корректным.

Теорема. *Введенная выше операция скалярного произведения векторов пространства* V_3 *удовлетворяет стандартному определению скалярного произведения векторов в линейном пространстве.*

Доказательство. Проверим выполнимость условий скалярного произведения. Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – произвольные векторы пространства V_3. Тогда:

1) $\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}$.

Данное равенство выполняется в силу того, что $\cos(\bar{a}^\wedge \bar{b}) = \cos(\bar{b}^\wedge \bar{a})$.

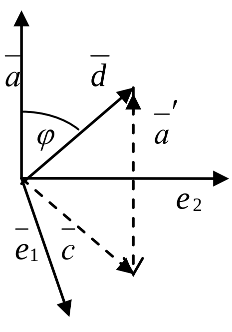
2) $\alpha(\bar{a}\bar{b}) = (\alpha\bar{a})\bar{b}$ для любого $\alpha \in R$.

Действительно, для любого $\alpha \in R$, $\cos(\alpha\bar{a}^\wedge \bar{b}) = \cos(\bar{a}^\wedge \bar{b})$ если $\alpha > 0$, и $\cos(\alpha\bar{a}^\wedge \bar{b}) = -\cos(\bar{a}^\wedge \bar{b})$, если $\alpha < 0$. Поэтому $(\alpha\bar{a})\bar{b} = |\alpha\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\alpha\bar{a}^\wedge \bar{b}) = |\alpha| \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\alpha\bar{a}^\wedge \bar{b}) =$
$= \alpha \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos(\bar{a}^\wedge \bar{b}) = \alpha(\bar{a}\bar{b})$.

3) При $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{a}^2 > 0$.

4) $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$

Пусть в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{a})$ вектор $\bar{a} \perp \bar{e}_1$ и $\bar{a} \perp \bar{e}_2$. Рассмотрим произвольный вектор $\bar{d}$, найдем координату вектора $\bar{d}$ в данном базисе по базисному вектору $\bar{a}$.



Заметим, что $\bar{d} = \bar{a}' + \bar{c}$, причем вектор $\bar{c} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$, вектор $\bar{a}' = \alpha\,\bar{a}$, где $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha)$ – координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{a})$. Таким образом, вектор $\bar{d} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha\,\bar{a}$, причем очевидно $|\bar{a}'| = |\bar{d}| \cdot |\cos\varphi|$.

Заметим, что если угол φ острый, то координата α является положительной, если угол φ тупой, то $\alpha < 0$, тогда, поскольку $|\alpha| = \dfrac{|\bar{a}'|}{|\bar{a}|} = \dfrac{|\bar{d}||\cos\varphi|}{|\bar{a}|}$, то $\alpha = \dfrac{|\bar{a}| \cdot |\bar{d}| \cos\varphi}{|\bar{a}|^2} = \dfrac{\bar{a}\,\bar{d}}{\bar{a}^2}$.

Таким образом, если мы обозначим координаты вектора $\bar{d}$ в данном базисе $(d_{\bar{e}_1}, d_{\bar{e}_2}, d_{\bar{a}})$, то получим, что

$$d_{\bar{a}} = \frac{\bar{a}\,\bar{d}}{\bar{a}^2} \tag{1}$$

Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – три произвольных вектора, причем вектор $\bar{c} \neq \bar{0}$, тогда найдем два вектора $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ перпендикулярных вектору $\bar{c}$ так, чтобы векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{c}$ образовывали базис.

Рассмотрим произведение $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Найдем координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{a} + \bar{b}$ в данном базисе по базисному вектору $\bar{c}$, используя полученную формулу (1). Тогда $a_{\bar{c}} = \dfrac{\bar{c}\bar{a}}{\bar{c}^2}$, $(a+b)_{\bar{c}} = \dfrac{\bar{c}\,(\bar{a}+\bar{b})}{\bar{c}^2}$, $b_{\bar{c}} = \dfrac{\bar{c}\bar{b}}{\bar{c}^2}$.

Поскольку при сложении векторов соответствующие их координаты складываются, то $a_{\bar{c}} + b_{\bar{c}} = (a+b)_{\bar{c}}$, тогда $\dfrac{\bar{c}\bar{a}}{\bar{c}^2} + \dfrac{\bar{c}\bar{b}}{\bar{c}^2} = \dfrac{\bar{c}\,(\bar{a}+\bar{b})}{\bar{c}^2}$, откуда и следует, что $\bar{c}\,(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{c}\bar{a} + \bar{c}\bar{b}$, и таким образом свойство 4 доказано.

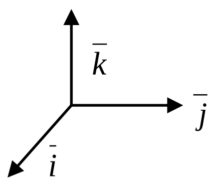
Следовательно, определенная нами операция скалярного умножения векторов пространства V_3 удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения векторов линейного пространства, и теорема доказана.

Отметим, что полученный результат позволяет считать пространство V_3 евклидовым, в нем существуют ортонормированные базисы.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – два ненулевых вектора, они будут перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, и, таким образом, в пространстве свободных векторов условие ортогональности и условие перпендикулярности векторов равносильны.

Напомним, что нулевой вектор по определению имеет любое направление, то есть его можно считать коллинеарным и ортогональным любому вектору.

Рассмотрим *канонический базис* $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ в пространстве V_3. Данный базис состоит из попарно перпендикулярных векторов единичной длины, причем кратчайший поворот от вектора $\bar{i}$ к вектору $\bar{j}$ с конца вектора $\bar{k}$ наблюдается против часовой стрелки, при совмещении начал всех векторов данной тройки.



Поскольку $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$, то $\bar{i}\,\bar{j} = \bar{j}\bar{k} = \bar{i}\,\bar{k} = 0$, $\bar{i}^2 = |\bar{i}|^2 = 1$, $\bar{j}^2 = 1$, $\bar{k}^2 = 1$.

Таким образом, векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют ортонормированный базис в пространстве V_3. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ пространства V_3 заданы своими координатами в данном базисе, тогда обозначим: $\bar{a} = \overline{(a_x, a_y, a_z)}$ и $\bar{b} = \overline{(b_x, b_y, b_z)}$. В силу свойства дистрибутивности, скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в данном базисе тогда будет находиться по следующей формуле:

$$\bar{a}\,\bar{b} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \tag{2}$$

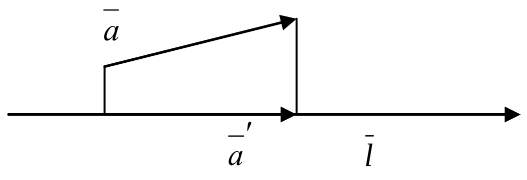
Отметим, что в частности

$$\bar{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \text{ и } |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{3}$$

Заметим, что данные формулы справедливы только в случае ортонормированного базиса.

Определение. *Декартовой прямоугольной системой координат* в пространстве называется система, состоящая из тройки векторов ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) и некоторой точки O пространства, называемой началом координат.

Рассмотрим некоторые понятия, связанные с операцией скалярного произведения векторов пространства. Прямую линию с выбранным на ней направлением мы назовем *осью* $\bar{l}$. Определим (ортогональную) *проекцию вектора* $\bar{a}$ на ось $\bar{l}$.

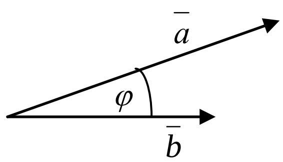


Рассмотрим перпендикуляры к прямой $\bar{l}$, проведенные из начала и конца $\bar{a}$, точки пересечения данных перпендикуляров с $\bar{l}$ определяют вектор $\bar{a}'$, который называют *ортогональной* (*геометрической*) *проекцией* вектора $\bar{a}$ на ось $\bar{l}$.

Алгебраической проекцией вектора $\bar{a}$ на ось $\bar{l}$ мы будем называть число $\left|\bar{a}'\right|$, если вектор $\bar{a}'$ и ось $\bar{l}$ имеют одно направление, и число $-\left|\bar{a}'\right|$, если векторы $\bar{a}'$ и $\bar{l}$ - разнонаправленные.

Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ мы называем алгебраическую проекцию вектора $\bar{a}$ на луч, определяемый вектором $\bar{b}$, будем обозначать ее $pr_{\bar{b}}\bar{a}$. Отметим, что $pr_{\bar{b}}\bar{a} = \left|\bar{a}\right|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Используя операцию скалярного произведения векторов, мы получим формулу

$$pr_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\overline{ab}}{\left|\bar{b}\right|} \tag{4}$$



Рассмотрим вектор $\bar{a} = \overline{(a_x, a_y, a_z)}$ в декартовой прямоугольной системе координат. Тогда, если вектор $\bar{a}$ образует с базисными векторами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ углы α, β и γ соответственно, то $a_x = \frac{\bar{i}\cdot\bar{a}}{\bar{i}^2} = \overline{ia} = \left|\bar{a}\right| \cos\alpha$, и $\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\bar{a}\right|}$. Аналогично, $\cos\beta = \frac{a_y}{\left|\bar{a}\right|}$, и $\cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\bar{a}\right|}$. Данные числа называют *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$. Таким образом, мы видим, что координаты вектора $\bar{a}$

$$a_x = \left|\bar{a}\right|\cos\alpha,\quad a_y = \left|\bar{a}\right|\cos\beta,\quad a_z = \left|\bar{a}\right|\cos\gamma \tag{5}$$

Если мы возьмем вектор $\bar{a}$ единичной длины, то его координаты в данном базисе будут находиться по следующим формулам

$$a_x = \cos\alpha,\quad a_y = \cos\beta,\quad a_z = \cos\gamma, \tag{6}$$

и таким образом, в этом случае вектор $\bar{a} = \overline{(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$, где α, β, γ – углы, которые образуют вектор $\bar{a}$ с базисными векторами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соответственно.

Заметим, что в силу выбора вектора $\bar{a}$ будет справедливо следующее равенство

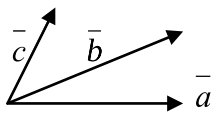
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{7}$$

Если $\left|\overline{a}\right| \neq 0$, то определим вектор $\overline{a}_0 = \dfrac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|} = (\overline{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma})$, назовем данный вектор $\overline{a}_0$ *ортом* вектора $\overline{a}$ и отметим, что орт вектора $\overline{a}$ – это вектор единичный длины того же направления, что и вектор $\overline{a}$. Заметим, что поскольку $\overline{a} = \left|\overline{a}\right|(\overline{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma})$, то будут справедливы следующие соотношения

$$a_x = pr_{\overline{i}}\,\overline{a},\ \ a_y = pr_{\overline{j}}\,\overline{a},\ \ a_z = pr_{\overline{k}}\,\overline{a}. \qquad (8)$$

§ 3. Векторное и смешанное произведения векторов.

Определение. Тройка некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется *правой*, если выполняется следующее условие: при совмещении начал данных векторов в одной точке кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ с конца вектора $\overline{c}$ наблюдается против часовой стрелки, и *левой* в противном случае. Если тройка некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ является правой, то нетрудно видеть, что следующие тройки векторов



$$\left.\begin{array}{c}(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})\\ (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a})\\ (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b})\end{array}\right\} \text{– правые, а тройки } \left.\begin{array}{c}(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c})\\ (\overline{c}, \overline{b}, \overline{a})\\ (\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})\end{array}\right\} \text{– являются левыми.}$$

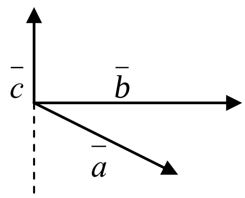
Определим в пространстве V_3 бинарную операцию, называемую векторным произведением векторов.

Определение. Вектор $\overline{c}$ называется *векторным произведением* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если выполняются следующие условия:

1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b})$;

2) $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

3) тройка векторов $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ является правой.



Векторное произведение $\overline{c}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будем обозначать: $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Отметим следующие достаточно очевидные свойства векторного произведения:

1) модуль векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
2) векторное произведение двух векторов равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда данные векторы коллинеарны;
3) $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$.

Определение. *Смешанным произведением* векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется число, обозначаемое $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$, определяемое равенством: $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b})\,\overline{c}$.

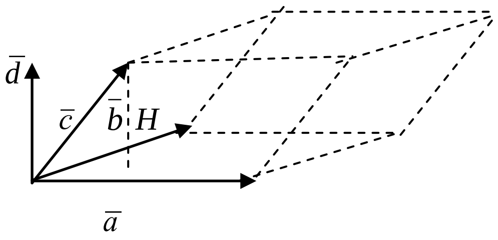
Таким образом, смешанное произведение $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| \cdot |\,\overline{c}\,| \cdot \cos(\overline{d} \,\hat{,}\, \overline{c})$, где вектор $\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Теорема. *Смешанное произведение $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ некомпланарных векторов, взятое по модулю, совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на данных векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, как на ребрах.*

Доказательство. Пусть вектор $\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$, и пусть H – высота данного параллелепипеда, тогда

$H = \left|pr_{\bar d}\,\bar c\right| = \left|\dfrac{\bar c\bar d}{|\bar d|}\right|$, и $|\bar c\bar d| = H\cdot|\bar d|$. Следовательно, $|\bar a\bar b\bar c| = |(\bar a\times\bar b)\bar c| = |\bar d\cdot\bar c| = H\cdot|\bar d|$, но $|\bar d| = S_\Diamond$, где $S_\Diamond$ –

площадь основания, и $|\bar a\bar b\bar c| = V$. Теорема доказана.



Приведем далее еще несколько полезных свойств смешанного и векторного произведений.

1) $\bar a\,\bar b\,\bar c = \bar a(\bar b\times\bar c)$**.**

Действительно, если тройка $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ – правая, то и $\bar b$, $\bar c$, $\bar a$ – правая тройка. Модули данных произведений совпадают, как объем одного параллелепипеда, а их знаки также совпадают в силу одинаковой ориентации троек.

2) $(\bar a+\bar b)\bar c\,\bar d = \bar a\,\bar c\,\bar d + \bar b\,\bar c\,\bar d$**.**

Действительно, $(\bar a+\bar b)\bar c\,\bar d = (\bar a+\bar b)(\bar c\times\bar d) = \bar a(\bar c\times\bar d) + \bar b(\bar c\times\bar d) = \bar a\,\bar c\,\bar d + \bar b\,\bar c\,\bar d$.

3) $(\bar a+\bar b)\times\bar c = \bar a\times\bar c + \bar b\times\bar c$**.**

Действительно, рассмотрим координату вектора $(\bar a+\bar b)\times\bar c$ по вектору $\bar i$ в базисе $\bar i,\bar j,\bar k$: $((\bar a+\bar b)\times\bar c)_x = ((\bar a+\bar b)\times\bar c)\cdot\bar i = (\bar a+\bar b)\bar c\bar i = \bar a\bar c\bar i + \bar b\bar c\bar i = (\bar a\times\bar c)_x + (\bar b\times\bar c)_x$, следовательно, справедливо равенство $((\bar a+\bar b)\times\bar c)_x = ((\bar a\times\bar c)+(\bar b\times\bar c))_x$. Аналогичные равенства будут выполняться и для остальных координат вектора $(\bar a+\bar b)\times\bar c$ (по y и по z). Тогда, требуемое равенство будет справедливо в силу равенства координат данных векторов.

4) $(\alpha\bar a)\times\bar b = \alpha(\bar a\times\bar b) = \bar a\times(\alpha\bar b)$**.**

Действительно, $|(\alpha\bar a)\times\bar b| = |\alpha\bar a||\bar b|\sin(\widehat{\alpha\bar a,\bar b}) = |\alpha||\bar a||\bar b|\sin(\widehat{\alpha\bar a,\bar b}) = |\alpha||\bar a||\bar b|\sin(\widehat{\bar a,\bar b})$, отметим, что и направления векторов $(\alpha\bar a)\times\bar b$ и $\alpha(\bar a\times\bar b)$ будут совпадать, и таким образом, первое равенство справедливо. Тогда $\bar a\times(\alpha\bar b) = -(\alpha\bar b)\times\bar a = -\alpha(\bar b\times\bar a) == \alpha(\bar a\times\bar b)$.

Теорема. *В базисе* $(\bar i,\bar j,\bar k)$ *векторное произведение векторов* $\bar a(a_x,a_y,a_z)$ *и* $\bar b(b_x,b_y,b_z)$ *выражается формулой*

$$\bar a\times\bar b = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Доказательство. Заметим, что $\bar i\times\bar j = \bar k$, $\bar j\times\bar k = \bar i$, $\bar k\times\bar i = \bar j$. Тогда

$$\bar a\times\bar b = (a_x\bar i + a_y\bar j + a_z\bar k)\times(b_x\bar i + b_y\bar j + b_z\bar k) = a_xb_y\bar k + a_xb_z(-\bar j) + a_yb_x(-\bar k) + a_yb_z\bar i + a_zb_x\bar j + a_zb_y(-\bar i) =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\bar i + (a_zb_x - b_za_x)\bar j + (a_xb_y - a_yb_x)\bar k = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar k = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Смешанное произведение векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *в базисе* $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ *выражается формулой*

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Доказательство.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} (c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) = (A_{11}\bar{i} + A_{12}\bar{j} + A_{13}\bar{k})(c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) =$$

$$= c_x A_{11} + c_y A_{12} + c_z A_{13} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

§ 4. Поверхности и линии в пространстве.

4.1. Понятие алгебраической линии и поверхности.

Поверхность в пространстве состоит из некоторого непрерывного множества точек пространства, например, поверхность шара, призмы и т.д. Будем полагать, что поверхность в пространстве характеризуется площадью, но не имеет объема.

Линия в пространстве характеризуется только длиной, т.е. не имеет ширины и площади. Линия может быть получена пересечением двух поверхностей.

Пусть задана прямоугольная декартовая система координат в пространстве и S – некоторая поверхность.

Пусть задано некоторое соотношение, связывающее переменные x, y, z:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

Говорят, что уравнение (1) является уравнением поверхности S, если координаты всех точек поверхности S (в данной системе координат) и только они удовлетворяют уравнению (1). Таким образом, если мы возьмем точку, не лежащую на поверхности S, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (1).

Говорят, что некоторое соотношение определяет линию в пространстве, если координаты точек данной линии и только они удовлетворяют этому соотношению.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t, \\ z = at \end{cases} \quad \text{где} \quad \alpha \le t \le \beta, \quad r \text{ - положительная константа.}$$

Данная система определяет параметрические уравнения винтовой линии в пространстве.

Определение. *Алгебраической поверхностью* называется поверхность, которая в прямоугольной декартовой системе координат описывается уравнением:

$$A_1 x^{k_1} y^{m_1} z^{t_1} + \ldots + A_n x^{k_n} y^{m_n} z^{t_n} = 0, \qquad (2)$$

где k_i, m_i, t_i – неотрицательные целые числа. Число $\max\limits_{i=\overline{1,n}}(k_i + m_i + t_i)$ определяет *порядок поверхности.*

Определение. *Алгебраической линией* на плоскости называют линию, описываемую в прямоугольной декартовой системе координат уравнением:

$$A_1 x^{k_1} y^{m_1} + \ldots + A_n x^{k_n} y^{m_n} = 0, \qquad (3)$$

где k_i, m_i – неотрицательные целые числа. Число $\max\limits_{i=\overline{1,n}}(k_i + m_i)$ определяет *порядок линии*.

Отметим одно важное свойство алгебраических поверхностей и линий: если в прямоугольной декартовой системе координат алгебраические поверхности (или линии) заданы уравнениями (2) или (3), то при переходе к другой прямоугольной декартовой системе координат уравнения поверхностей (или линий) остаются алгебраическими того же порядка.

4.2. Уравнения плоскости в пространстве.

Рассмотрим алгебраическое уравнение первого порядка

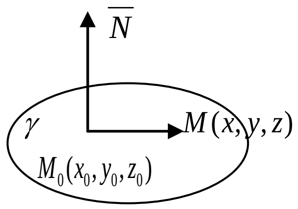
$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4}$$

где A,B,C – константы, не все одновременно равные нулю.

Данное уравнение задает в некоторой прямоугольной декартовой системе координат пространства алгебраическую поверхность первого порядка. Следующая теорема описывает данную поверхность.

Теорема. *Уравнение* (4) *в прямоугольной декартовой системе координат пространства является уравнением плоскости и обратно, каждая плоскость в прямоугольной декартовой системе координат может быть задана уравнением* (4).

Доказательство. Пусть определена прямоугольная декартовая система координат в пространстве, и пусть задана некоторая плоскость γ.



Возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$. Существует (ненулевой) перпендикулярный к плоскости γ вектор $\overline{N}$, он будет называться *нормалью* к плоскости γ. Пусть вектор $\overline{N}$ задан своими координатами: $\overline{N}(A, B, C)$. Заметим, что произвольная точка пространства $M \in \gamma$ тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$, что равносильно тому, что $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$. Последнее равенство в свою очередь равносильно тому, что $(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0$, или $(Ax + By + Cz) - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$.

Положим $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$. Тогда можно сказать, что точка $M \in \gamma$ тогда и только тогда, когда для координат точки M выполняется равенство (4), и, следовательно, уравнение (4) является уравнением плоскости γ. Таким образом, мы показали, что для любой плоскости γ существуют такие числа $A, B,$ C, при которых уравнение (4) описывает данную плоскость γ.

Обратно, пусть задано уравнение (4), тогда покажем, что данное уравнение является уравнением некоторой плоскости.

Очевидно, хотя бы одно из чисел A,B,C отлично от нуля. Тогда вектор $\overline{N}$ с координатами (A,B,C) является ненулевым.

Уравнение (4) имеет бесконечное множество решений. Пусть тройка чисел (x_0, y_0, z_0) образует некоторое решение уравнения (4). Возьмем точку M_0 с данными координатами, т.е. $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда, если мы вычтем из уравнения (4) тождество $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{5}$$

равносильное уравнению (4), и являющееся уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}$ (A,B,C). Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание 1. Из доказательства данной теоремы следует, что если плоскость задана уравнением (4), то числовые коэффициенты *A, B, C определяют координаты вектора нормали данной плоскости.*

Замечание 2. Также из доказательства теоремы следует, что уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

является *уравнением плоскости, проходящей через данную точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$*, перпендикулярно вектору* $\overline{N} = (\overline{A, B, C})$.

Уравнение (4) называется *общим уравнением плоскости.*

Теорема. *Если плоскость задана двумя своими общими уравнениями, то данные уравнения совпадают.*

Доказательство. Пусть уравнение (4) и уравнение

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \qquad (4')$$

определяют одну плоскость γ. Из замечания 1 следует, что векторы $\overline{N}(A, B, C)$ и $\overline{N}'(A', B', C')$ являются нормальными к данной плоскости, и, следовательно, векторы $\overline{N}$ и $\overline{N}'$ коллинеарны. Тогда существует отличное от нуля число α такое, что $A = \alpha A'$, $B = \alpha B'$, $C = \alpha C'$. Если мы вычтем из уравнения (4) уравнение (4′) умноженное на α, то получим равенство: $D - \lambda D' = 0$, или $D = \lambda D'$. Отсюда следует, что уравнения (4) и (4′) совпадают, так как уравнение (4) мы получаем умножением уравнения (4′) на число $\lambda \neq 0$. Теорема доказана.

Неполные уравнения плоскости.

Рассмотрим различные случаи неполных уравнений плоскости.

1. Пусть $D = 0$, тогда уравнение (4) имеет вид $Ax + By + Cz = 0$. Очевидно, в этом случае плоскость проходит через начало координат.

2. Пусть $B = 0, C = 0$, тогда вектор нормали имеет координаты $\overline{N} = (\overline{A,0,0})$, следовательно, вектор $\overline{N}$ коллинеарен базисному вектору $\bar{i}$. Тогда плоскость либо совпадает с плоскостью *YOZ*, либо параллельна ей.

3. Пусть $C = 0$**,** тогда вектор нормали имеет вид $\overline{N} = (\overline{A, B,0})$, следовательно, вектор $\overline{N}$ лежит в плоскости *XOY*, а значит, он перпендикулярен оси *OZ*. Тогда плоскость либо содержит ось *OZ*, либо параллельна оси *OZ*.

Уравнение плоскости в отрезках.

Уравнение (4), в котором все коэффициенты A, B, C, D являются ненулевыми, мы можем записать в следующем виде:

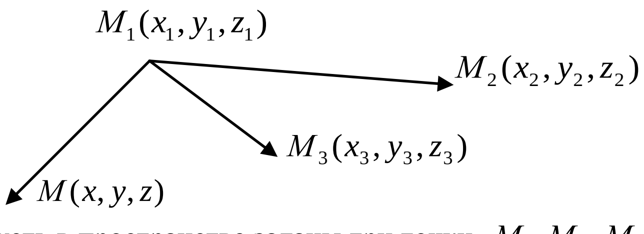
$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Обозначим $-D/A = a$, $-D/B = b$, $-D/C = c$, тогда, данное уравнение мы можем переписать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (6)$$

Числа a, b, c в этом уравнении определяют координаты точек пересечения плоскости с осями координат.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.



Пусть в пространстве заданы три точки M_1, M_2, M_3, не лежащие на одной прямой. Тогда данные точки будут определять некоторую плоскость γ. Рассмотрим произвольную точку M пространства. Тогда точка $M \in \gamma$ тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ являются компланарными, а это равносильно тому, что смешанное произведение $\overline{M_1M}\,\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3} = 0$. В координатной форме последнее равенство имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Полученное уравнение называется *уравнением плоскости, проходящей через три данные точки.*

Взаимное расположение двух плоскостей.

Пусть заданы две плоскости γ_1 и γ_2, описываемые уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, соответственно. Тогда возможны следующие варианты:

1) Векторы нормали $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ данных плоскостей коллинеарны, тогда найдется число λ такое, что $\overline{N_1}=\lambda\,\overline{N_2}$, $A_1=\lambda A_2$, $B_1=\lambda B_2$, $C_1=\lambda C_2$. Тогда:

а) если $D_1=\lambda D_2$, то плоскости γ_1 и γ_2 совпадают;

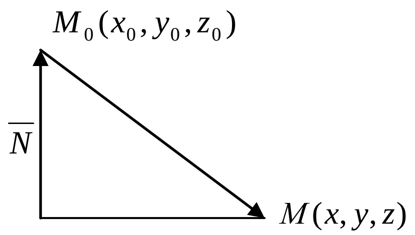
б) если $D_1\neq\lambda D_2$, то плоскости γ_1 и γ_2 параллельны.

2) $\overline{N_1} \nparallel \overline{N_2}$. Данное условие равносильно тому, что координаты указанных векторов не пропорциональны. Очевидно также, данное условие равносильно тому, что $\gamma_1\bigcap\gamma_2\neq\varnothing$, и при этом $\gamma_1\neq\gamma_2$ (плоскости пересекаются по прямой линии).

3) Пусть плоскости $\gamma_1\perp\gamma_2$. Это условие равносильно тому, что нормали $\overline{N_1}\perp\overline{N_2}$, что выполняется тогда и только тогда, когда скалярное произведение $\overline{N_1}\,\overline{N_2}=0$, или, в координатной форме

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\ . \qquad (8)$$

Расстояние от точки до плоскости.



Пусть дана плоскость γ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\notin\gamma$. Опустим из точки M_0 перпендикуляр на плоскость γ, на нем определим вектор нормали $\overline{N}$ к данной плоскости γ. Пусть точка $M(x,y,z)\in\gamma$. Тогда расстояние d от точки M_0 до плоскости γ равно модулю проекции вектора $\overline{M_0M}$ на вектор нормали $\overline{N}$: $d=\left|pr_{\overline{N}}\overline{M_0M}\right|=\left|\dfrac{\overline{M_0M}\cdot\overline{N}}{|\overline{N}|}\right|=\left|\dfrac{\overline{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}\overline{(A,B,C)}}{|\overline{N}|}\right|=\dfrac{|Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)|}{|\overline{N}|}=$

$=\dfrac{|-D-(Ax_0+By_0+Cz_0)|}{|\overline{N}|}=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|\overline{N}|}$, и, таким образом мы получаем формулу

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|\overline{N}|}\ . \qquad (9)$$

4.3. Прямая линия в пространстве.

Прямая линия в пространстве может быть определена, как линия пересечения двух плоскостей. Пусть плоскости γ_1 и γ_2 не параллельны, и плоскость γ_1 определяется уравнением $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, а плоскость γ_2 определяется уравнением $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Тогда прямая линия l пересечения этих двух плоскостей будет определяться системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (10)$$

Теорема (о пучке плоскостей). *Пусть прямая линия* l *задана системой уравнений* (10). *Тогда для любых чисел* α *и* β *уравнение*

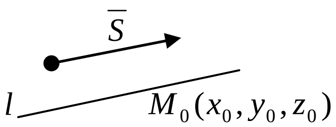
$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{11}$$
будет определять плоскость, проходящую через прямую l. *Обратно, каждая плоскость, проходящая через прямую* l, *может быть задана уравнением* (11) *при некоторых значениях* α *и* β.

Доказательство. Если прямая l задана системой уравнений (10), то координаты каждой точки прямой l являются решением данной системы (10), следовательно, удовлетворяют уравнению (11) при любых α, β. С другой стороны, уравнение (11) является уравнением плоскости в пространстве, и таким образом первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь γ – это некоторая плоскость, содержащая прямую l. Подберем коэффициенты α и β так, чтобы плоскость γ описывалась уравнением вида (11). Пусть плоскость γ не совпадает с плоскостями γ_1 и γ_2 (в противном случае коэффициенты очевидны), тогда существует точка M_0 такая, что $M_0 \in \gamma$, но $M_0 \notin l$ и $M_0 \notin \gamma_2$. Тогда $A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2 \neq 0$. Возьмем любое ненулевое число α, и рассмотрим число β, которое определяется следующим образом
$$\beta=\frac{-\alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)}{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2}.$$
Отметим, что β существует. Далее, составим уравнение вида (11) с данными числами α и β, тогда заметим, что координаты точки M_0 будут удовлетворять полученному уравнению. Координаты всех точек прямой l также удовлетворяют данному уравнению. Тогда плоскость, описываемая полученным уравнением (11), совпадает с плоскостью γ, поскольку существует только одна плоскость, проходящая через прямую и точку, не принадлежащую данной прямой. Теорема доказана.

Замечание. Множество плоскостей, описываемое уравнением (11), называется *пучком плоскостей*, проходящих через прямую l.

Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве.



$\overline{S} \,||\, l$

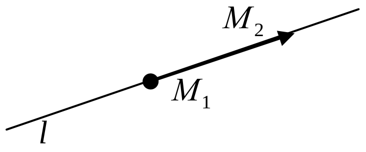
Чтобы задать прямую l в пространстве, достаточно задать точку на ней и вектор $\overline{S}$, коллинеарный данной прямой. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$. Заметим, что точка $M(x, y, z)$ будет принадлежать прямой l тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \,||\, \overline{S}$, где $\overline{S}=(\overline{m, n, p})$ – *направляющий* (т.е. коллинеарный) вектор для прямой l. Данное условие коллинеарности векторов можно записать в виде равенств:
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{12}$$
Эти равенства называются *каноническими уравнениями прямой* l. Отметим, что в знаменателях могут быть и нули, и данные равенства в таких случаях носят условный характер.

Заметим далее, что указанное условие $\overline{M_0M} \,||\, \overline{S}$ выполняется тогда и только тогда, когда найдется число t такое, что $\overline{M_0M}=t\cdot\overline{S}$, или, в координатной форме: $\begin{cases} x-x_0=mt \\ y-y_0=nt \\ z-z_0=pt \end{cases}$.

Таким образом, система
$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt, \quad (-\infty<t<+\infty) \\ z=z_0+pt \end{cases} \tag{13}$$
определяет *параметрические уравнения прямой* l, поскольку, пробегая все значения параметра t, мы получим все точки прямой l.

Уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежат на прямой l. Тогда вектор $\overline{S} = (\overline{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1})$ является направляющим для l, следовательно, канонические уравнения прямой l будут иметь вид:



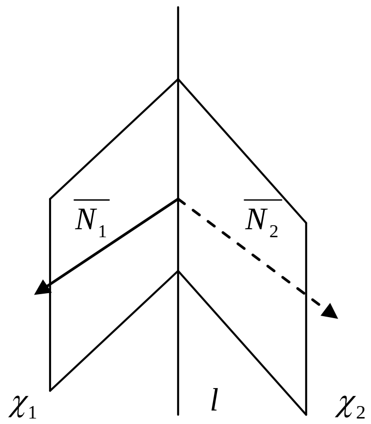
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (14)$$

Уравнения прямой заданной пересечением плоскостей.

Пусть прямая l, образованная пересечением плоскостей χ_1 и χ_2, задана системой уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (10)$$

Тогда вектор $\overline{N_1} = (\overline{A_1, B_1, C_1})$ – вектор нормали плоскости χ_1, а вектор $\overline{N_2} = (\overline{A_2, B_2, C_2})$ – вектор нормали плоскости χ_2.



Поскольку $\overline{N_2} \perp \chi_2$, а прямая $l \subset \chi_2$, то $\overline{N_2} \perp l$, аналогично $\overline{N_1} \perp l$, следовательно, вектор $\overline{S} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$ является направляющим вектором для прямой l.

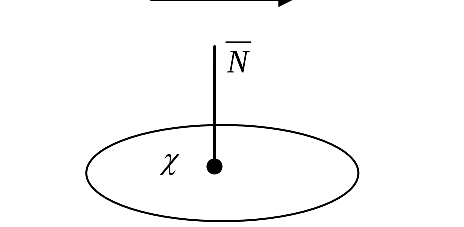
Система (10) имеет бесконечное множество решений. Придавая свободному переменному в данной системе некоторое значение, мы получим решение, которое определяет координаты точки прямой l. Зная координаты точки на прямой и координаты направляющего вектора прямой, мы можем найти канонические и параметрические уравнения данной прямой.

Взаимное расположение прямой и плоскости.

Пусть χ – некоторая плоскость, и l – прямая в пространстве.

1) Рассмотрим случай, когда прямая $l \parallel \chi$ или $l \subset \chi$. Пусть вектор $\overline{N} = (\overline{A, B, C})$ – нормаль к плоскости, а вектор $\overline{S} = (\overline{m, n, p})$ – направляющий вектор прямой l. Тогда данный случай характеризуется условием: $\overline{S} \perp \overline{N}$, что равносильно тому, что

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (15)$$



Чтобы выяснить, при выполнении данного условия (15), лежит ли прямая l в плоскости χ, возьмем произвольную точку M_0 прямой и подставим ее координаты в уравнение плоскости χ. Если координаты M_0 удовлетворяют данному уравнению, то $M_0 \in \chi$ и значит $l \subset \chi$. В противном случае $l \,||\, \chi$.

2) Пусть $Am + Bn + Cp \neq 0$. Данное условие равносильно тому, что плоскость χ не содержит прямую l и не параллельна ей (то есть они пересекаются в одной точке). В этом случае особый интерес представляет вариант ортогональности прямой и плоскости, который описывается условием

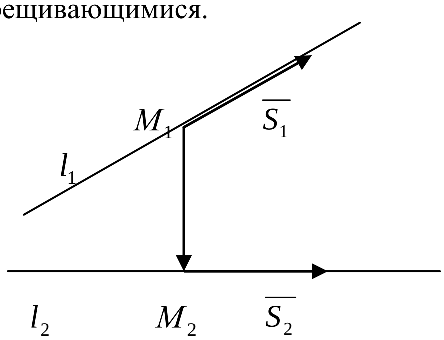
$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (16)$$

Взаимное расположение двух прямых.

Рассмотрим прямые l_1 и l_2 в пространстве, тогда они либо параллельны, либо нет. Пусть $\overline{S}_1 = \overline{(m_1, n_1, p_1)}$ и $\overline{S}_2 = \overline{(m_2, n_2, p_2)}$ – направляющие векторы данных прямых, соответственно.

1) Условие $l_1 \,||\, l_2$ равносильно тому, что $\overline{S_1} \,||\, \overline{S_2}$ и $l_1 \bigcap l_2 = \varnothing$. Заметим, что условие коллинеарности векторов $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ равносильно тому, что $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$. Таким образом, если выполняется данное условие, и произвольно выбранная точка M прямой l_1 принадлежит прямой l_2, то данные прямые совпадают; если же точка $M \notin l_2$, то прямые параллельны.

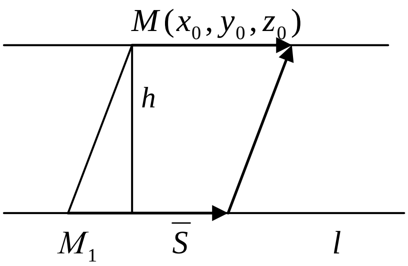
2) Пусть векторы $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ не коллинеарны. Тогда данные прямые либо пересекаются, либо являются скрещивающимися.



Выберем произвольным образом точки $M_1 \in l_1$ и $M_2 \in l_2$. Тогда прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ и $\overline{M_1M_2}$ являются компланарными, а это равносильно тому, что их смешанное произведение равно нулю. Таким образом, если $\overline{S_1}\,\overline{S_2}\,\overline{M_1M_2} = 0$, то прямые l_1 и l_2 пересекаются, если же $\overline{S_1}\,\overline{S_2}\,\overline{M_1M_2} \neq 0$, то прямые l_1 и l_2 – скрещивающиеся.

Расстояние от точки до прямой.

Пусть точка $M(x_0, y_0, z_0) \notin l$. Выберем на прямой l произвольным образом точку M_1, отложим от нее направляющий вектор $\overline{S}$ прямой l, и вычислим площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\overline{S}$ и $\overline{M_1M}$.

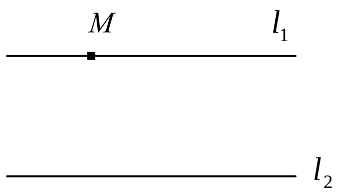


Тогда $S=\left|\overline{M_1M}\times\overline{S}\right|$. С другой стороны, площадь $S=\left|\overline{S}\right|\cdot h$, где h – длина высоты данного параллелограмма, и одновременно – расстояние от точки M до прямой l. Таким образом, искомое расстояние будет находиться по формуле

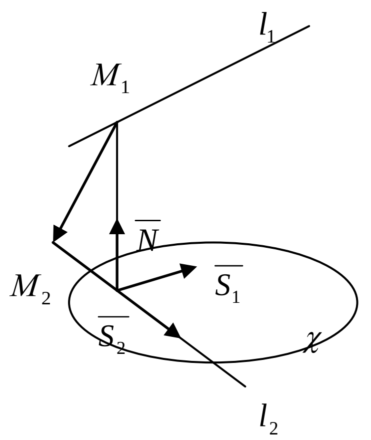
$$h=\frac{\left|\overline{M_1M}\times\overline{S}\right|}{\left|\overline{S}\right|}. \tag{17}$$

Расстояние между прямыми.

1) Пусть направляющие векторы $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ прямых l_1 и l_2 коллинеарны, и прямые не совпадают (следовательно, являются параллельными). В этом случае возьмем произвольную точку M на прямой l_1, и находим расстояние от данной точки до прямой l_2, которое и является расстоянием между прямыми l_1 и l_2.



2) Пусть векторы $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ неколлинеарны. В этом случае сначала выясним взаимное расположение данных прямых. Если они пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Пусть прямые скрещиваются. Тогда существует плоскость χ, которая содержит прямую l_2, и прямая $l_1 \,||\, \chi$. расстояние от прямой l_1 до плоскости χ и будет являться расстоянием от прямой l_1 до прямой l_2.



Заметим, что общий перпендикуляр к прямым l_1 и l_2 будет параллелен векторному произведению $\overline{S_1}\times\overline{S_2}$, поэтому, находя координаты некоторых точек $M_1\in l$ и $M_2\in l$, найдем вектор $\overline{N}=\overline{S_1}\times\overline{S_2}$, и найдем расстояние между прямыми l_1 и l_2, как $h=\left|pr_{\overline{N}}\,\overline{M_1M_2}\right|$.

Можно также находить данное расстояние *h*, как расстояние от любой точки прямой l_1 до плоскости χ по формуле (9).

§ 5. Линии на плоскости.

5.1. Прямая на плоскости.

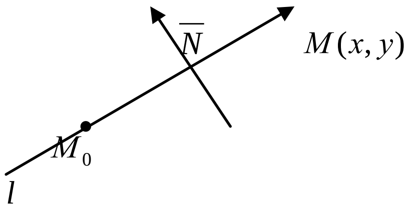
В данном параграфе мы будем изучать алгебраические уравнения первого и второго порядка, описывающие геометрические фигуры на плоскости. Простейший случай представляет уравнение прямой на плоскости.

Теорема. *Уравнение вида*

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

где $(a,b) \neq (0{,}0)$*, задает прямую на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат. Обратно, любая прямая на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат может быть задана уравнением вида (1).*

Доказательство. Рассмотрим прямую линию l на плоскости. Пусть на данной плоскости будет



определена прямоугольная декартова система координат, и точка $M_0(x_0, y_0) \in l$. Пусть вектор $\overline{N} \perp l$, назовем вектор $\overline{N}$ тогда *нормальным* для прямой l, и пусть $\overline{N} = (\overline{a,b})$.

Тогда точка плоскости $M_0(x_0, y_0) \in l$ тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$, что равносильно тому, что $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$, или, в координатной форме $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Обозначив $(-ax_0 - by_0) = c$, перепишем последнее равенство в виде $ax + by + c = 0$, и таким образом, мы показали, что прямая l описывается уравнением вида (1).

Обратно, пусть некоторая линия на плоскости описывается уравнением (1), тогда вектор $\overline{N} = (\overline{a,b})$ и любая точка плоскости M_0, координаты которой будут являться решением уравнения (1), будут определять прямую линию, уравнение которой будет совпадать с уравнением (1) (что следует из предыдущих рассуждений). Теорема доказана.

Уравнение (1) называется *общим уравнением прямой на плоскости.*

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что вектор $\overline{N}\ (a,b)$, координаты которого являются коэффициентами общего уравнения прямой на плоскости (1), является нормалью данной прямой на плоскости.

Ранее мы изучали уравнения прямой в пространстве. Чтобы использовать полученные результаты, мы можем выбрать систему координат так, чтобы ось OZ была перпендикулярна плоскости, в которой лежит прямая. Поэтому уравнения прямой на плоскости могут быть получены из соответствующих уравнений прямой в пространстве, отбрасыванием переменной z.

Если $\overline{S} = (\overline{m,n})$ – направляющий вектор прямой l на плоскости, то уравнение

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{2}$$

является *каноническим уравнением прямой* l *на плоскости*, а уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty), \tag{3}$$

где точка $M_0(x_0, y_0) \in l$, называют *параметрическими уравнения прямой* l *на плоскости*.

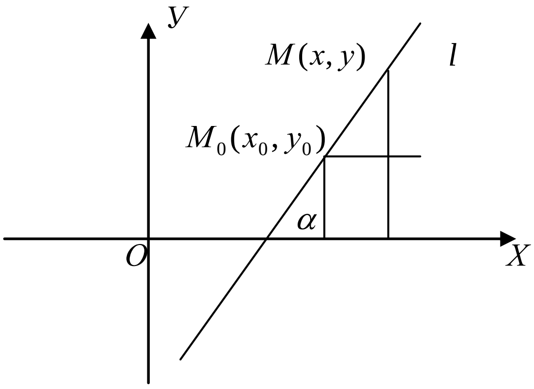
Пусть $m \neq 0$. Перепишем тогда каноническое уравнение прямой на плоскости в виде $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{n}{m}$,

или $y - y_0 = \dfrac{n}{m}(x - x_0)$. Обозначим $\dfrac{n}{m} = k$, тогда получим уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (4)$$

которое называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку с угловым коэффициентом* k.

Рассмотрим данное уравнение. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит прямой l. Тогда нетрудно видеть, что справедливо равенство $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, образованный прямой l с осью *OX*. Таким образом, угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg}\alpha$.



Перепишем каноническое уравнение прямой в виде $n(x - x_0) = m(y - y_0)$, или, перенося все члены уравнения в левую часть: $n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0$. Тогда из доказательства теоремы об общем уравнении плоскости следует, что вектор $\overline{N} = \overline{(n, -m)}$ является нормальным для прямой l. Таким образом, зная координаты направляющего вектора прямой, мы легко можем найти координаты нормального к ней вектора, и наоборот. Если вектор $\overline{N} = \overline{(a, b)}$ является нормальным вектором прямой l, то вектор $\overline{S} = \overline{(-b, a)}$ является направляющим для данной прямой. При этом, если вектор $\overline{N} = \overline{(a, b)}$ является единичным, то соответствующее ему уравнение (1) прямой l называется *нормальным.*

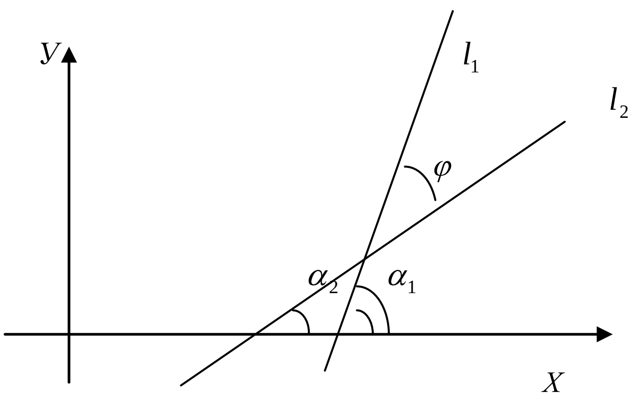
Пусть в уравнении (1) прямой l коэффициенты a, b и c – не нулевые, тогда $ax + by = -c$, откуда $\dfrac{x}{-c/a} + \dfrac{y}{-c/b} = 1$, или, полагая: $-c/a = a_1, -c/b = b_1$, получим уравнение

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1, \qquad (5)$$

которое носит название *уравнение прямой в отрезках*, поскольку числа a_1 и b_1 определяют координаты точек, отсекаемых прямой на координатных осях.

Пусть даны прямые l_1 и l_2 с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 соответственно. Тогда $k_1 = tg\alpha_1$, и $k_2 = tg\alpha_2$, где α_1 и α_2 – углы, образованные прямыми l_1 и l_2 с осью *OX*. Пусть φ – угол между данными прямыми, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 + \varphi$, откуда $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$, следовательно

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}.$$



Таким образом, угол между прямыми l_1 и l_2 может быть определен по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \qquad (6)$$

5.2. Линии второго порядка.

Эллипс.

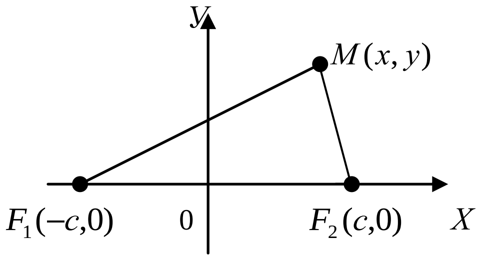
Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точки плоскости, удовлетворяющих следующему условию: сумма расстояний каждой точки эллипса до двух фиксированных точек плоскости, названных фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Теорема. *Координаты каждой точки эллипса в некоторой прямоугольной декартовой системе координат на плоскости удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ . \tag{7}$$

*Обратно***,** *каждое такое уравнение в некоторой прямоугольной декартовой системе координат на плоскости задает эллипс.*

Доказательство. Путь задан эллипс на плоскости и точки F_1 и F_2 определяют его фокусы. Проведем прямую через данные точки, тогда точка O, являющая серединой отрезка $F_1\,F_2$, будет определять начало системы координат, а вектор $\overline{F_1F_2}$ будет определять направление оси *OX*. Пусть $OF_1=OF_2=c$.



Тогда точка $M(x,y)$ принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда выполняется условие: $\left|\overline{MF_1}\right|+\left|\overline{MF_2}\right|=2a$, где $2a > 2c$ в силу того, что $\left|\overline{F_1F_2}\right|=2c$.

Данное условие в координатной форме имеет вид

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, или, после переноса, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,$$

откуда, после приведения следует, что

$$4xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

Продолжая преобразования, получим:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc\ ,$$

и, вновь возводя обе части в квадрат:

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2-2a^2xc\,.$$

Последнее уравнение равносильно тому, что

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\ .$$

Учитывая, что $a > c$, обозначим $a^2-c^2=b^2$, тогда получим $x^2b^2+y^2a^2=a^2b^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Обратно, пусть координаты точки M в некоторой прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению (7), причем $a > b > 0$. Тогда проводя те же рассуждения в обратном порядке, полагая $a^2-b^2=c^2$ (где $c > 0$), получим, что

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc\ ,$$

в силу того, что $|\,x\,|\le a,$ и $c\le a,$ откуда

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,$$

и, извлекая корни из обеих частей данного равенства, получим

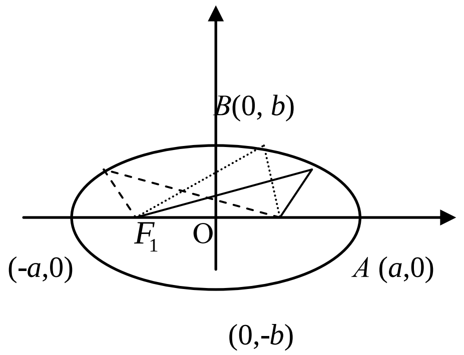
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,$$

так как $(x-c)^2+y^2 = x^2-2xc+c^2+y^2 \le 4a^2$. Действительно, $x^2 \le a^2, |xc| \le a^2, c^2 \le a^2$, и , поскольку $y^2 \le b^2$, а $b^2 = a^2-c^2$, то и $y^2 \le a^2$.

Таким образом, мы получаем, что

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a\ ,$$

что и означает, что данная точка M принадлежит эллипсу, фокусы которого расположены в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Теорема доказана.



Свойства эллипса

1). Эллипс симметричен относительно осей координат. Данное свойство выполняется в силу четности степеней входящих в уравнение эллипса переменных x и y.

2). Эллипс является ограниченной и замкнутой линией. Это следует из того, что $|x| \le a$ и $|y| \le b$, и его симметричности.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются *вершинами эллипса*, очевидно это точки: (a,0), (-a,0), (0,b) и (0,-b).

Чтобы построить эллипс, достаточно построить только его часть, расположенную в первой четверти, затем симметрично отобразить ее относительно координатных осей. Заметим, что в первой четверти эллипс описывается уравнением $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, таким образом является графиком непрерывной, убывающей функции и представляет собой ниспадающуюю дугу. Отображая данную дугу относительно осей координат, мы получим овал с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии.

Отрезок $OA = a$ называют *большой полуосью*, а отрезок $OB = b$ – *малой полуосью эллипса.*

Если в уравнении (7) мы имеем $b \rangle a$, то фокусы эллипса будут расположены симметрично относительно начала координат на оси ординат. В этом случае a будет определять малую, а b – большую полуоси эллипса.

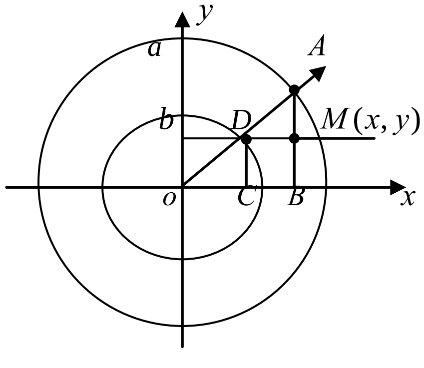
Уравнение (7) носит название *канонического уравнения эллипса*, а система координат, в которой эллипс представляется уравнением (7) – *канонической*.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Данная величина характеризует отношение расстояния между фокусами к длине его большой оси. Очевидно $\varepsilon < 1$.

Прямые, перпендикулярные большей оси эллипса и отстоящие от центра эллипса на расстоянии $d = \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами эллипса.*

Параметрические уравнение эллипса.

Пусть эллипс задан своим каноническим уравнением (7).



Построим две окружности радиуса a и b с центром в начале координат, и проведем из начала координат луч, образующий угол t с осью абсцисс. Пусть точки D и A определяют точки пересечения указанных окружностей с данным лучом. Проведем отрезки DC и AB параллельно оси ординат, и отрезок DM параллельно оси абсцисс. Пусть точка M имеет координаты (x, y). Тогда, замечая, что

$$\begin{cases} OB = a\cdot\cos t \\ MB = b\cdot\sin t \end{cases}, \quad \text{получаем} \quad \begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = b\cdot\sin t \end{cases}, \text{ откуда следует, что}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

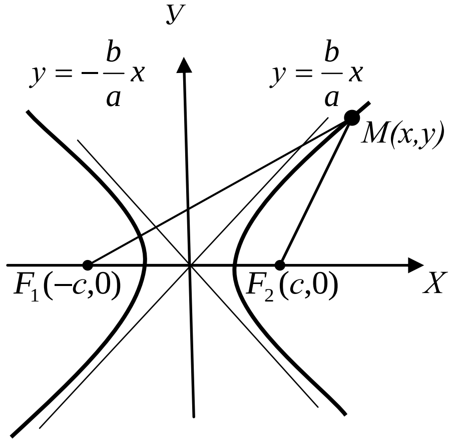
Таким образом мы показали, что определенная выше точка M лежит на данном эллипсе. Придавая параметру t все действительные значения от 0 до 2π, мы получим все точки эллипса. Следовательно, формулы

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = b\cdot\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{8}$$

задают параметрические уравнения эллипса.

5.3. Гипербола.

Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.



Пусть задана гипербола на плоскости и точки F_1 и F_2 определяют ее фокусы. Проведем прямую через данные точки, тогда точка O, являющая серединой отрезка F_1F_2, будет определять начало системы координат, а вектор $\overline{F_1F_2}$ будет определять направление оси OX. Пусть $OF_1 = OF_2 = c$. Тогда точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется условие $\left| |\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}| \right| = 2a$, где $2a < 2c$. Поскольку $\overline{F_1M} = (\overline{x+c, y})$ и $\overline{F_2M} = (\overline{x-c, y})$, то данное условие будет равносильно тому, что

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

или, освобождаясь от модуля,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Возведем обе части равенства в квадрат, получим

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \text{ откуда}$$

$$2xc = -2xc + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \text{ или } \quad xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возводя вновь в квадрат обе части последнего равенства, получим

$$(xc)^2 + a^4 - 2a^2xc = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc + a^2y^2, \text{ откуда}$$

$$x^2c^2 - x^2a^2 - y^2a^2 = a^2c^2 - a^4, \text{ или}$$

$$x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Поскольку $a < c$, полагая $c^2 - a^2 = b^2$, получим

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2, \text{ и}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{9}$$

Нетрудно показать, в свою очередь, что любая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению (9), принадлежит данной гиперболе, и таким образом, уравнеие (9) является уравнением гиперболы в прямоугольной декартовой системе координат. Данное уравнение называется *каноническим уравнением гиперболы*, а система координат, в которой гипербола описывается уравнением (9) – *канонической*.

Пусть гипербола задана каноническим уравнением (9). Тогда величины a и b определяют ее *действительную и мнимую полуоси*. Гипербола является симметричной относительно осей координат, это следует из четности степеней входящих в уравнение переменных. Таким образом, для построения гиперболы достаточно построить ее часть, расположенную в первой координатной четверти.

При условии $x \ge 0$, $y \ge 0$ из уравнения (9) следует, что $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Графиком данной монотонно возрастающей непрерывной функции является восходящая, выпуклая вверх непрерывная кривая, берущая начало на оси абсцисс при $x=a$. Отметим, что при $x\to+\infty$, $y\to+\infty$, следовательно, данная линия является неограниченной.

Рассмотрим прямую на плоскости, заданную уравнением $Y=\frac{b}{a}x$. Тогда, если точка $M(x,y)$ принадлежит данной гиперболе, а точка $M'(x,Y)$ лежит на указанной прямой, то при любом $x \ge a$ будет справедливо неравенство $У-y>0$. Заметим также, что

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\frac{x^2-(x^2-a^2)}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

поэтому $(У-y)\to 0$ при $x\to+\infty$. Таким образом, прямая $Y=\frac{b}{a}x$ является асимптотой для части гиперболы в первой четверти, причем расположенной ниже этой асимптоты, и ветвь гиперболы в первой четверти можно считать построенной. Для построения оставшейся части гиперболы мы отображаем построенную ветвь гиперболы симметрично относительно координатных осей, и получим фигуру на плоскости, состоящую из двух непересекающихся линий, для которых прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ являются асимптотами.

Величина $\varepsilon=\frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Очевидно, для гиперболы $\varepsilon>1$. Оси симметрии гиперболы обычно называют просто ее *осями*, а точку пересечения осей гиперболы – *центром* гиперболы. Точки пересечения гиперболы $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ с осью абсцисс называют *действительными вершинами*, а величину a – *действительной полуосью* гиперболы. Точки $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$ называют *мнимыми вершинами*, а величину b – *мнимой полуосью* гиперболы.

Прямоугольник с центром в начале координат, стороны которого параллельны координатным осям и проходят через вершины гиперболы называется *основным прямоугольником* гиперболы.

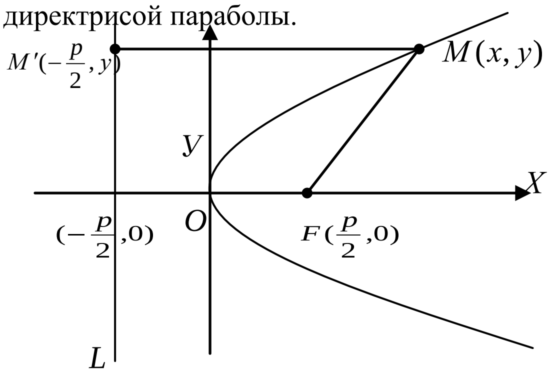
Прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и отстоящие от центра на расстояние $d=\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами* гиперболы. Отметим что для гиперболы (и эллипса) директрисы обладают одним важным свойством, которое мы приводим ниже без доказательства.

Теорема. *Для каждой точки эллипса и гиперболы, отношение расстояния от данной точки до фокуса к расстоянию от этой точки до директрисы (соответствующей данному фокусу), есть величина постоянная, равная эксцентриситету кривой.*

Отметим также, что указанное свойство позволяет определить эллипс (и гиперболу), как кривую на плоскости, каждая точка которой удовлетворяет условию, указанному в данной теореме, причем, если указанное отношение $\varepsilon<1$, то кривая представляет собой эллипс, если же данное отношение $\varepsilon>1$, то кривая является гиперболой.

5.4. Парабола.

Определение. *Параболой* называется геометрической место точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, и некоторой прямой, называемой директрисой параболы.



Пусть дана парабола на плоскости, прямая L – директриса, и точка F – фокус данной параболы. Проведем через данную точку F прямую, перпендикулярную директрисе, обозначим O – середину отрезка данной прямой, заключенного между директрисой и фокусом, и примем точку O за начало координат. При этом ось OX будет определяться построенной прямой, а ось $OУ$ параллельна директрисе L. Пусть расстояние от фокуса до директрисы равно p, тогда фокус F будет иметь координаты $(p/2,0)$.

Точка $M(x,y)$ плоскости будет принадлежать параболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\left|\overline{MM'}\right| = \left|\overline{MF}\right|$, где M' – это проекция точки M на директрису. Поскольку $\overline{FM} = (x - \frac{p}{2}, y)$, а $\overline{M'M} = (x + \frac{p}{2}, 0)$, то указанное условие равносильно тому, что

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|, \text{ или равенству } \quad (x-\frac{p}{2})^2 + y^2 = (x+\frac{p}{2})^2 .$$

Преобразуя, получаем уравнение $x^2 + (\frac{p}{2})^2 - px + y^2 = x^2 + (\frac{p}{2})^2 + px$, или, после сокращений,

$$y^2 = 2px . \tag{10}$$

Следовательно, уравнение (10) является уравнением данной параболы, оно называется *каноническим уравнением параболы.* Число p из канонического уравнения параболы называется *параметром параболы*.

Чтобы построить параболу нам достаточно построить ее часть, расположенную в первой четверти, поскольку из канонического уравнения параболы следует ее симметричность относительно оси *OX.* Отметим, также, что для любой точки $M(x,y)$ нашей параболы координата $x \geq 0$. Выражая из уравнения (10) $y = \sqrt{2px}$, делаем вывод, что в первой четверти парабола представляет собой непрерывную, выпуклую вверх восходящую линию, неограниченную, поскольку при $x \to +\infty$, $y \to +\infty$.

В завершение, приведем утверждение, позволяющее рассматривать эллипс, гиперболу и параболу с единой точки зрения, основанной на их общем свойстве.

Теорема. *Геометрическое место точек плоскости таких, что отношение расстояния от каждой из них до некоторой фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до некоторой фиксированной прямой плоскости (директрисы) есть величина постоянная, равная ε, является эллипсом при* $\varepsilon < 1$, *гиперболой при* $\varepsilon > 1$, *параболой при* $\varepsilon = 1$.

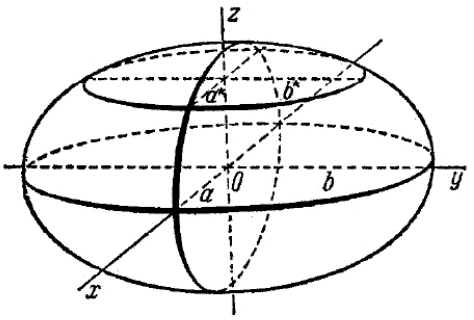
Данное утверждение можно рассматривать как определения эллипса, гиперболы, параболы.

§ 6. Поверхности второго порядка

6.1 Эллипсоид

Определение. *Эллипсоидом* называется поверхность в пространстве, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$



Для изучения формы эллипсоида (и других поверхностей второго порядка) обычно применяют метод параллельных сечений. Данный метод заключается в том, что поверхность пересекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Полученные в результате объекты позволяют судить о форме и расположении исходной поверхности. Так для изучения эллипсоида мы будем рассматривать его сечения плоскостями, заданными уравнениями вида $z = h$ при условии $h \geq 0$ (отметим, что эллипсоид представляет собой поверхность, симметричную относительно координатных плоскостей в силу четности степеней входящих в его уравнение переменных). В результате мы будем получать линии, описываемые системами уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}.$$

Заметим при этом, что эллипсоид является ограниченной поверхностью, поскольку из его уравнения следует, что $|z| \leq c$, $|y| \leq b$, $|x| \leq a$. Таким образом, если $h < c$, то линия пересечения описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{h^2}{c^2})} = 1$$

Обозначим $a^* = a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$, $b^* = b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$, тогда данное уравнение примет следующий вид

$$\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1.$$

Таким образом, мы видим, что указанная линия представляет собой эллипс с полуосями a^* и b^*, причем данные полуоси принимают наибольшие значения $a^* = a$ и $b^* = b$ при $z = 0$, а при $z = c$ мы получаем $x = y = 0$, и указанная линия пересечения вырождается в точку.

Аналогичные рассуждения мы можем привести в случае сечения эллипсоида плоскостями, параллельными остальным координатным плоскостям, что и позволяет нам судить о форме данной поверхности, как о замкнутой овальной поверхности, обладающей тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, совпадающими с координатными плоскостями. Величины a, b, c называются *полуосями* эллипсоида. Если все данные величины различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Если же две из них совпадают, например $a = b$, то в сечениях плоскостями $z = h$ мы будем получать окружности, и таким образом данный эллипсоид будет получаться при вращении эллипса вокруг оси OZ. В этом случае эллипсоид называют *эллипсоидом вращения.* Если же $a = b = c$, то эллипсоид вырождается в сферу.

Рассмотрим уравнение

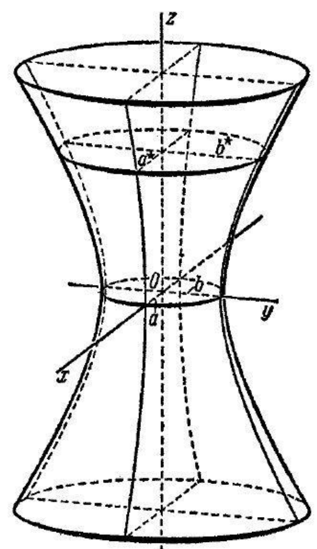
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (2)$$

Данное уравнение не имеет действительных решений, следовательно, не определяет реальной поверхности. Данное уравнение называют уравнением *мнимого эллипсоида.*

6.2 Гиперболоиды

Определение. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность в пространстве, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$



Для изучения формы данной поверхности также применим метод параллельных сечений плоскостями, параллельными оси OZ. Линии пересечения будут определяться системами уравнений вида

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$$

Данные линии будут существовать при любом значении z, и представляться уравнением

$$\frac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})}=1$$

Обозначая

$$a^*=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad b^*=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

перепишем данное уравнение в следующем виде

$$\frac{x^2}{(a^*)^2}+\frac{y^2}{(b^*)^2}=1$$

Таким образом, данные сечения представляют собой эллипсы, причем наименьшие оси будут у эллипса, лежащего в плоскости $z=0$. При увеличении значения z полуоси будут неограниченно возрастать.

Если мы будем рассматривать сечение данной поверхности плоскостью XOZ, то мы получим линию, определяемую системой уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

Данная система определяет гиперболу, лежащую в плоскости XOZ симметрично относительно координатных осей, действительные вершины ее имеют координаты $A_1(-a,0,0)$ и $A_2(a,0,0)$.

Если мы рассмотрим сечение гиперболоида плоскостью YOZ, то получим линию, определяемую следующей системой уравнений:

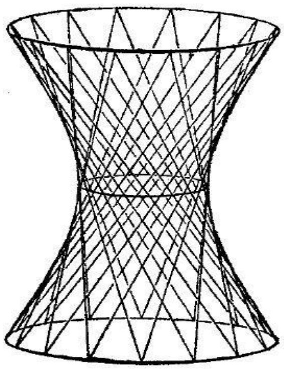
$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

Данная система также определяет гиперболу, расположенную в плоскости YOZ симметрично относительно координатных осей, действительные вершины ее имеют координаты $B_1(-b,0,0)$ и $B_2(b,0,0)$.

Учитывая, что данная поверхность является симметричной относительно каждой из координатных плоскостей, мы можем заключить, что однополостный гиперболоид представляет собой бесконечную трубу, вытянутую вдоль оси OZ, поперечные сечения которой представляют собой эллипсы, расширяющиеся с удалением от плоскости XOY.

Величины a, b, c называются *полуосями однополостного гиперболоида.* В случае если $a = b$ однополостный гиперболоид будет являться поверхностью, получаемой при вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащей в плоскости XOZ, вокруг оси OZ.

Отметим одно интересное свойство однополостного гиперболоида – это наличие у него прямолинейных образующих (прямых линий, всеми своими точками лежащих на данной поверхности). Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямолинейные образующие, уравнения которых можно получить следующим образом из уравнения (3): представим данное уравнение в виде



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \text{ или}$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

Рассмотрим теперь прямую линию, заданную следующей системой

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

где коэффициенты λ и $\mu \neq 0$.

Поскольку координаты каждой точки данной прямой удовлетворяют обоим уравнениям системы, то они удовлетворяют и уравнению (3). Следовательно, все точки данной прямой лежат на однополостном гиперболоиде; придавая коэффициентам λ и μ всевозможные ненулевые значения, получим бесконечную систему подобных прямых. Можно показать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит ровно одна прямая из указанной системы.

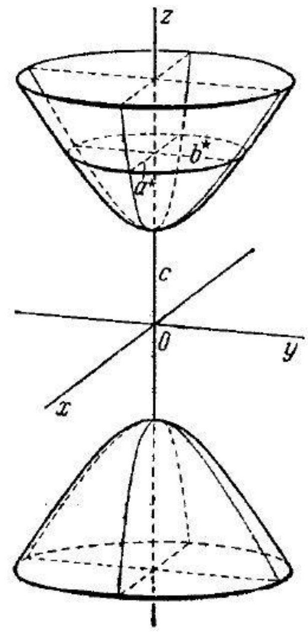
Такие же рассуждения проведем и для прямых линий, заданных системами уравнений вида

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}, \text{ где коэффициенты } \lambda \text{ и } \mu \neq 0,$$

и получить еще одну бесконечную систему таких прямых, причем данные две системы прямых не пересекаются. Следовательно, однополостный гиперболоид обладает *двумя различными системами прямолинейных образующих.*

Определение. *Двухполостным гиперболоидом* называется поверхность в пространстве, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (4)$$



Для изучения формы данной поверхности опять применим метод параллельных сечений плоскостями, параллельными оси *OZ*. Линии пересечения будут определяться системами уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h \end{cases}$$

Данные линии будут существовать при любом значении z таком, что $|z| > c$, и представляться уравнением

$$\frac{x^2}{a^2(\frac{h^2}{c^2} - 1)} + \frac{y^2}{b^2(\frac{h^2}{c^2} - 1)} = 1$$

Обозначая

$$a^* = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b^* = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1},$$

данное уравнение перепишем в следующем виде

$$\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1$$

Таким образом, данные сечения представляют собой эллипсы, причем наименьшие (равные нулю) оси будут у эллипсов, лежащих в плоскостях $z = c$ и $z = -c$. При увеличении значения $|z|$ полуоси будут неограниченно возрастать.

Если мы будем рассматривать сечение данной поверхности плоскостью *XOZ*, то мы получим линию, определяемую системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Данная система определяет гиперболу, лежащую в плоскости *XOZ* симметрично относительно координатных осей, действительные вершины ее имеют координаты $A_1(0,0,-c)$ и $A_2(0,0,c)$.

Если мы рассмотрим сечение гиперболоида плоскостью *YOZ*, то получим линию, определяемую системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases},$$

которая также определяет гиперболу, лежащую в плоскости *YOZ* симметрично относительно координатных осей, действительные вершины ее имеют те же самые координаты $A_1(0,0,-c)$ и $A_2(0,0,c)$.

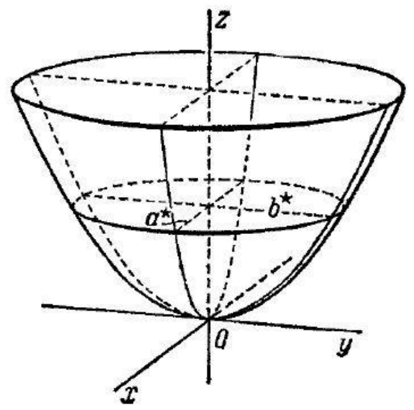
Заметим, что при $|z| < c$ двухполостный гиперболоид не определен. Заметим также, что данная поверхность является симметричной относительно координатных плоскостей. Исходя из вышесказанного, мы можем таким образом заключить, что двухполостный гиперболоид представляет собой поверхность, состоящую из двух отдельных симметричных чаш эллиптических поперечных сечений, бесконечно расширяющихся при увеличении $|z|$.

Величины a, b, c называются *полуосями* двухполостного гиперболоида. При условии $a = b$ двухполостный гиперболоид будет получаться при вращении гиперболы $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, лежащей в плоскости XOZ, вокруг оси *OZ*, и называется *двухполостным гиперболоидом вращения*.

6.3. Параболоиды.

Определение. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность в пространстве, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\,. \qquad (5)$$



Данное уравнение называется *каноническим уравнением* эллиптического параболоида. В силу четности степеней переменных x, y, входящих в данное уравнение, мы видим, что данная поверхность является симметричной относительно координатных плоскостей *XOZ* и *YOZ*. Далее заметим, что данная поверхность расположена выше координатной плоскости *XOY*. Исследуем ее методом сечений.

Рассмотрим сечение данной поверхности плоскостью *XOZ*, оно даст нам линию, описываемую системой уравнений

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases},$$

и таким образом являющейся параболой, лежащей в плоскости *XOZ*, ось симметрии которой совпадает с осью *OZ*, а вершина находится в начале координат. Аналогичный результат мы получим при сечении данной поверхности плоскостью *YOZ*. Наконец, сечения этой поверхности плоскостями $z = \alpha$ $(\alpha > 0)$ представляют собой эллипсы, описываемые уравнениями вида

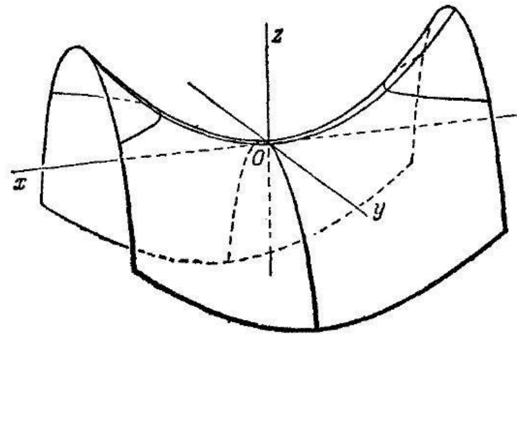
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2\alpha\, a^2} + \dfrac{y^2}{2\alpha\, b^2} = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Полуосями данного эллипса являются величины: $a^* = \sqrt{2\alpha}\ a$ и $b^* = \sqrt{2\alpha}\ b$. В плоскости же *XOY* данный эллипс вырождается в точку.

Исходя из вышесказанного, мы можем заключить, что эллиптический параболоид представляет собой бесконечную расширяющуюся чашу, поперечные сечения которой являются эллипсами, расположенную выше плоскости *XOY* симметрично относительно координатных плоскостей *XOZ* и *YOZ*. Начало координат при этом называется *вершиной* эллиптического параболоида, а величины a^2 и b^2 его *параметрами.* Если выполняется условие $a^2 = b^2$, то эллиптический параболоид называется *параболоидом вращения*, и может быть получен вращением параболы $2z = \dfrac{x^2}{a^2}$, лежащей в плоскости *XOZ* вокруг оси *OZ*.

Определение. Поверхность в пространстве, имеющая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнение вида

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad (6)$$



называется *гиперболическим параболоидом.*

Для исследования формы данной поверхности вновь применим метод сечений. Вначале рассмотрим сечение гиперболического параболоида плоскостью $y = 0$. Данное пересечение будут определяться системой уравнений

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases}, \qquad (7)$$

определяющей параболу, лежащую в плоскости *XOZ*, симметричную относительно оси *OZ*.

Вершина данной параболы находится в начале координат, а ветви направлены вверх. Аналогичным образом мы будем получать параболы, ветви которых симметричны относительно плоскости *YOZ* и направлены вверх при сечениях данной поверхности плоскостями $y = h$, определяемые системами уравнений вида

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{h^2}{b^2} \\ y = h \end{cases}$$

Все эти параболы имеют один и тот же параметр a^2, а вершины их будут опускаться с увеличением значений $|h|$.

Рассмотрим теперь сечения гиперболического параболоида плоскостью $x = 0$. Данное пересечение будут определяться системой уравнений

$$\begin{cases} 2z = -\dfrac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases},$$

определяющей параболу, лежащую в плоскости *YOZ*, симметричную относительно оси *OZ*. Вершина данной параболы находится в начале координат, а ветви направлены вниз. Аналогичным образом мы будем получать параболы, ветви которых симметричны относительно плоскости *XOZ* и направлены вниз при сечениях данной поверхности плоскостями $x = h$, определяемые системами уравнений вида

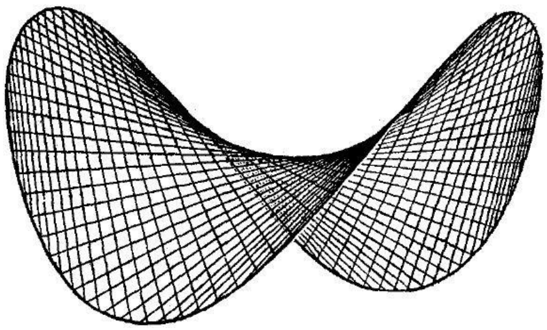
$$\begin{cases} 2z = \dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = h \end{cases}$$

Все эти параболы имеют один и тот же параметр $-b^2$, а вершины их будут подниматься с увеличением значений $|h|$ и находятся на параболе, заданной системой (7).

Рассмотрим, наконец, сечения нашей поверхности плоскостями $z = h$. Данные сечения будут описываться системами уравнений вида

$$\begin{cases} 2h = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = h \end{cases}.$$

Каждая такая система определяет гиперболу, симметричную относительно координатных плоскостей *YOZ* и *XOZ*, и лежащую в плоскости, параллельной координатной плоскости *XOZ*. Отметим, что при $h > 0$ данная гипербола не пересекает плоскость *YOZ*, а при $h < 0$ не будет пересекать плоскость *XOZ*. При $h = 0$ гипербола вырождается в пару прямых, лежащих в плоскости *XOУ* и проходящих через начало координат.



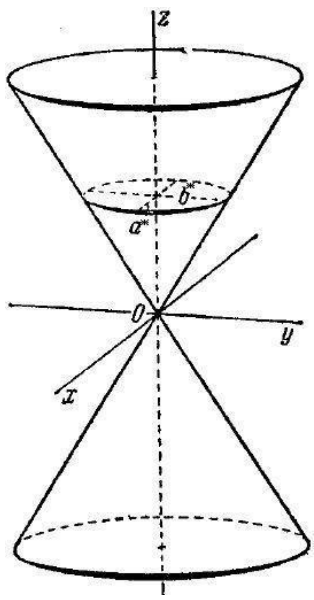
Исходя из вышеизложенного мы можем заключить, что гиперболический параболоид имеет форму седла, расположенного симметрично относительно координатных плоскостей *YOZ* и *XOZ*. Начало координат принято при этом расположении называть *вершиной*, а величины a^2 и b^2 – *параметрами* гиперболического параболоида.

Можно показать, что гиперболический параболоид также является линейчатой поверхностью, и он тоже, как и однополостный гиперболоид обладает двумя различными системами прямолинейных образующих.

6.4 Конус.

Определение. Поверхность в пространстве, имеющая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{8}$$



называется *конусом второго порядка*.

Применим метод сечений для исследования конуса. Рассмотрим сечения его плоскостями $z=h$, каждое такое сечение будет описываться системой уравнений вида

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h\end{cases}$$

определяющей эллипс с полуосями $a^*=\dfrac{a|h|}{c}$ и $b^*=\dfrac{b|h|}{c}$. При $z=0$ данный эллипс вырождается в точку O, значит конус проходит через начало координат.

При пересечении конуса с плоскостью $x=0$ мы получим пару пересекающихся прямых, симметричных относительно осей координат, и определяемых системой уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}=\pm\dfrac{z}{c}\\ x=0\end{cases}$$

Аналогичным образом при пересечении конуса с плоскостью $y=0$ мы получим пару пересекающихся прямых, симметричных относительно осей координат, и определяемых системой уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\pm\dfrac{z}{c}\\ y=0\end{cases}$$

Заметим, наконец, что каждая прямая, проходящая через любую точку конуса и начало координат будет полностью лежать на данной поверхности. Действительно, если точка $M(m,n,p)$ принадлежит конусу, то прямая, проходящая через данную точку и начало координат, будет задаваться системой уравнений

$$\begin{cases}x=mt\\ y=nt\\ z=pt\end{cases}, \quad \text{где } -\infty<t<+\infty.$$

Тогда нетрудно видеть, что координаты каждой точки данной прямой удовлетворяют уравнению (8).

Исходя из вышеизложенного, мы можем заключить, что конус второго порядка представляет собой линейчатую поверхность, состоящую из прямых, проходящих через начало координат, называемых *образующими* конуса. Начало координат называют при этом расположении *вершиной* конуса. Конус является симметричной относительно координатных плоскостей поверхностью, и представляет собой две бесконечные расширяющимися воронки с эллиптическими поперечными сечениями. Если величины a и b равны, то конус называют *круглым*, в этом случае он представляет собой поверхность, образованной при вращении прямой $\dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}$ вокруг оси OZ.

6.5. Цилиндры.

Определение. *Цилиндром* (*цилиндрической поверхностью*) называется поверхность, которая состоит из прямых линий, параллельных заданному направлению. Прямые линии, из которых состоит данная цилиндрическая поверхность, называются *образующими* цилиндра. Линия, лежащая на цилиндрической поверхности и пересекающая все ее образующие, называется *направляющей* цилиндра.

Если мы будем рассматривать цилиндр в прямоугольной декартовой системе координат, в которой образующие цилиндра параллельны одной из осей, например оси OZ, то очевидно цилиндр будет описываться представить в виде

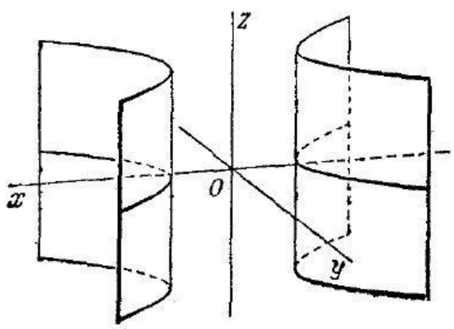
$$F(x, y) = 0\,. \qquad (9)$$

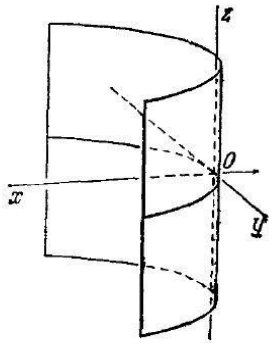
При этом удобно рассматривать в роли направляющей цилиндра линию его пересечения с координатной плоскостью *XOY*.

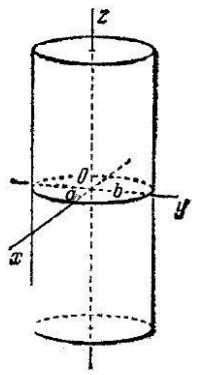
Здесь мы рассмотрим цилиндры второго порядка, которые задаются уравнениями вида

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dy + Fx + G = 0\,. \qquad (10)$$

Отметим, что форма цилиндрической поверхности будет полностью определена ее направляющей, лежащей в плоскости и являющейся кривой второго порядка. Таким образом, мы можем определить следующие типы цилиндрической поверхности второго порядка: эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр и параболический цилиндр.







Гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2Px$$

Эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Если уравнение (10) задает пару пересекающихся прямых в плоскости *XOY*, то цилиндрическая поверхность в таком случае будет образована парой плоскостей. Наконец, уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (11)$$

очевидно, задает в пространстве пустое множество, так называемый *мнимый цилиндр*.

6.6. Исследование поверхности второго порядка

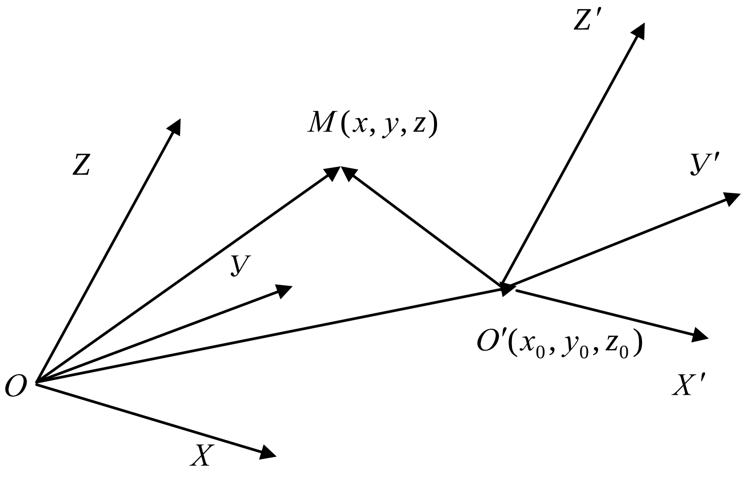
Для исследования поверхности второго порядка, заданной уравнением общего вида, приводят данное уравнение к каноническому виду, находя подходящую каноническую систему координат при помощи ортогонального преобразования базиса, и переноса начала координат (параллельного переноса).

Рассмотрим преобразование координат точек пространства при параллельном переносе системы координат ($O,\ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) в пространстве. При данном преобразовании начало координат в новой системе координат будет находиться в точке $O'(x_0, y_0, z_0)$, а базис в пространстве останется тем же самым. Тогда, поскольку для любой точки M пространства будет справедливо равенство $OM = \overline{OO'} + \overline{O'M}$, то если точка M в исходной системе координат имеет координаты (x, y, z) а в новой системе координат - (x', y', z'), то будет выполняться равенство

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (x', y', z'),$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases}. \qquad (12)$$



Таким образом, при параллельном переносе системы координат в пространстве координаты точек подвергаются линейному преобразованию, описываемому системой (12).

Рассмотрим поверхность второго порядка в пространстве, заданную в некоторой прямоугольной декартовой системе координат общим уравнением вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Fxz + 2Gyz + Qx + Ry + Pz + H = 0\,. \qquad (13)$$

Полагая

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Fxz + 2Gyz\,,$$

и переходя с помощью подходящего ортогонального преобразования к другому прямоугольному базису ($\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$) в пространстве, приведем данную квадратичную форму к каноническому виду

$$f(x, y, z) = A_1(x')^2 + B_1(y')^2 + C_1(z')^2\,.$$

При этом уравнение (13) нашей поверхности в новой системе координат примет следующий вид

$$A_1(x')^2 + B_1(y')^2 + C_1(z')^2 + Q'x + R'y + P'z + H' = 0\,.$$

Предположим, например, что все коэффициенты при квадратах неизвестных здесь - ненулевые (в другом случае наши дальнейшие рассуждения будут совершенно аналогичные).

Тогда, выделяя полные квадраты в данном выражении, перепишем его в виде

$$A_1(x' - x_0')^2 + B_1(y' - y_0')^2 + C_1(z' - z_0')^2 + H_1' = 0\,. \qquad (14)$$

Совершая параллельный перенос данной системы координат (O, $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$), при котором начало координат перейдет в точку $O'(x_0', y_0', z_0')$, мы найдем систему координат (O', $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$), в которой уравнение данной поверхности будет иметь вид

$$A_1(x'')^2 + B_1(y'')^2 + C_1(z'')^2 + H_1' = 0 \qquad (15)$$

Полученное уравнение является каноническим и позволяет нам определить тип поверхности в новой, канонической для нашей поверхности системе координат.

Заметим, что данный способ исследования применяется и для нахождения канонического уравнения кривой второго порядка, заданной своим общим уравнением на плоскости. В этом случае каноническая система координат будет получаться поворотом базиса вокруг начала координат, и дальнейшим переносом начала координат в новую точку.