

5442

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В. Ф. УТКИНА**

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСА В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

**Методические указания
к лабораторной работе**

Рязань 2019

УДК 57(021)

Исследование резонанса в цепи переменного тока: методические указания к лабораторной работе /Рязан. гос. радиотехн. ун-т.; сост.: А. С. Иваников, А. Н. Власов, А. В. Николаев. Рязань, 2019. 8 с.

Приводится теория вынужденных электромагнитных колебаний, дается определение добротности, описание экспериментальной установки.

Предназначены для студентов, изучающих курс “Физика”.

Табл. 3. Ил. 5. Библиогр.: 3 назв.

Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний, электромагнитные колебания, резонанс, добротность, векторные диаграммы

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра общей и экспериментальной физики РГРТУ (зав. кафедрой доц. М. В. Дубков)

Исследование резонанса в цепи переменного тока

Составители: И в а н и к о в Александр Сергеевич
В л а с о в Александр Николаевич
Н и к о л а е в Артём Владимирович

Редактор Р. К. Мангутова
Корректор С. В. Макушина

Подписано в печать 17.06.19 . Формат бумаги 60 × 84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 0,5.

Тираж 200 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

Цель работы: исследование зависимости силы тока в колебательном контуре от частоты внешней э.д.с., определение резонансной частоты и добротности контура.

Приборы и принадлежности: лабораторный стенд НТЦ 22.03.3, осциллограф.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

Процессы, возникающие в электрических цепях под действием внешнего периодического источника тока, называются *вынужденными колебаниями*.

Вынужденные колебания, в отличие от собственных колебаний в электрических цепях, являются *незатухающими*. Периодический внешний источник обеспечивает приток энергии к системе и не дает колебаниям затухать, несмотря на наличие неизбежных потерь.

Особый интерес представляет случай, когда внешний источник, напряжение которого изменяется по гармоническому закону с частотой ω , включен в электрическую цепь, способную совершать собственные свободные колебания на некоторой частоте ω_0 .

Если частота ω_0 свободных колебаний определяется параметрами электрической цепи, то *установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте ω внешнего источника*.

Электрические цепи, в которых происходят установившиеся вынужденные колебания под действием периодического источника тока, называются *цепями переменного тока*.

Рассмотрим последовательный колебательный контур, то есть цепь, состоящую из последовательно соединенных индуктивности L , емкости C и активного сопротивления R (рис. 1). Если к подобной цепи прикладывается напряжение от внешнего синусоидального источника ЭДС E , изменяющееся со временем t по гармоническому закону $E = E_m \cos(\omega t)$, то в электрической цепи возникают вынужденные колебания электрического тока и напряжения.

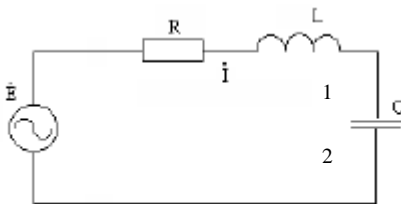


Рис. 1

Закон Ома для участка цепи 1LRE2 будет выглядеть как

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + E_c + E_m \cos(\omega t), \quad (1)$$

где E_c – э.д.с. самоиндукции.

Поскольку $E_c = -L dI/dt$ и $\varphi_2 - \varphi_1 = q/C$, уравнение (1) может быть переписано следующим образом:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = E_m \cos(\omega t). \quad (2)$$

С учётом того, что $I = dq/dt$, можно получить **дифференциальное уравнение вынужденных электрических колебаний** в контуре:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L} \cos(\omega t), \quad (3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ – **собственная частота контура**; $\beta = R/2L$ – **коэффициент затухания**.

Решение этого дифференциального уравнения для данных условий имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (4)$$

где q_m – амплитуда заряда на конденсаторе; ψ – разность фаз между колебаниями заряда и колебаниями внешней э.д.с. E .

Зависимость тока от времени определяется путём дифференцирования уравнения (4) по времени t . Таким образом, можно получить:

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = \omega q_m \cos(\omega t - \psi + \pi/2) = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (5)$$

где $I_m = \omega q_m$ – амплитуда тока; $\varphi = (\psi - \pi/2)$ – сдвиг по фазе между током и внешней э.д.с. E .

Можно найти **амплитуду тока** I_m и **фазовый сдвиг** φ , учитывая, что левая часть уравнения (2) представляет собой сумму напряжений на индуктивности L , сопротивлении R и емкости C . При этом в каждый момент времени эта сумма равна внешней э.д.с. E :

$$U_L + U_R + U_C = E_m \cos(\omega t). \quad (6)$$

С учетом выражений (4) и (5) можно записать:

$$U_R = RI = RI_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (7)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}), \quad (8)$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega L I_m \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}). \quad (9)$$

Из уравнений (7)-(9) следует, что напряжение на резисторе U_R находится **в фазе** с током I , напряжение на конденсаторе U_C **отстает по фазе** от тока I на $\pi/2$, а напряжение на катушке индуктивности U_L **опережает по фазе** ток I на $\pi/2$. Это наглядно представлено в виде **векторной диаграммы** на рис. 2, где изображены амплитуды напряжений $U_{Rm}=RI_m$, $U_{Cm}=I_m/\omega C$, $U_{Lm}=\omega L I_m$ и их векторная сумма, которая согласно уравнению (6) равна значению амплитуды вектора E_m .

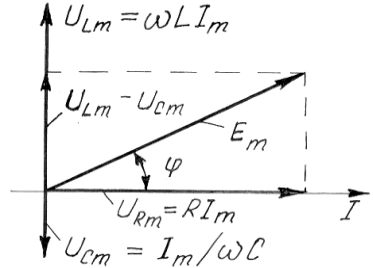


Рис. 2

Векторная диаграмма (рис. 2) позволяет получить искомые соотношения для амплитуды тока I_m и фазового сдвига:

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (11)$$

Из анализа выражений (10) и (11) следует, что амплитуда тока I_m в контуре и сдвиг фазы φ зависят не только от параметров контура L , R и C , но и от циклической частоты ω , с которой изменяется внешняя э.д.с. E .

Как видно на рис. 3, амплитуда силы тока резко возрастает с приближением частоты ω внешней э.д.с. к собственной частоте контура ω_0 и при $\omega > \omega_0$ вновь резко убывает. Это явление называется **резонансом напряжений**, а приведенные на рис. 3 зависимости – **резонансными кривыми**.

При $\omega L - 1/\omega C = 0$ сила тока имеет максимальное значение. Та-

ким образом, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура:

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (12)$$

Максимум при резонансе в контуре оказывается тем выше и острее, чем меньше его активное сопротивление R и, следовательно, чем меньше коэффициент затухания $\beta = R/2L$.

Резонансные свойства контура характеризуются его **добротностью** Q . В общем случае добротность Q колебательной системы определяется как величина, обратно пропорциональная **логарифмическому декременту затухания** $\lambda = \beta T$, и оценивается числом колебаний N с периодом T , совершаемых за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e \approx 2,7$ раза:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N. \quad (13)$$

Существуют и другие определения добротности, например через относительные **потери энергии** в контуре за один период колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (14)$$

где W – энергия, запасенная в контуре; ΔW – уменьшение энергии за один период.

Кроме того, добротность Q показывает, во сколько раз амплитуда напряжения на конденсаторе U_{Cm} (или на индуктивности U_{Lm}) при резонансе превышает значение амплитуды действующей в контуре внешней э.д.с. E_m :

$$Q = \frac{U_{Cm, \text{рез}}}{E_m} = \frac{1}{\omega_p RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (15)$$

Добротность контура связана и с другой важной характеристикой резонансной кривой – ее **шириной** (рис. 4). Можно доказать,

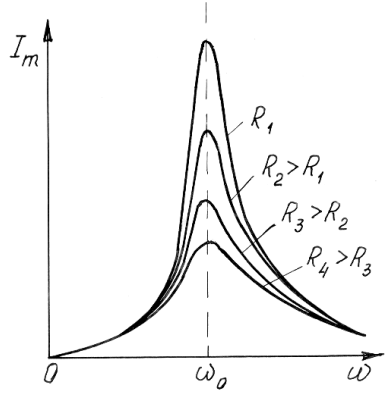


Рис. 3

что при выполнении условия $\beta^2 \ll \omega_0^2$ добротность колебательного контура может быть вычислена по формуле:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega}, \quad (16)$$

где $\Delta \omega$ – **ширина резонансной кривой**, измеренная на уровне, равном 0,7 от максимальной высоты резонансной кривой, то есть на уровне, соответствующем половине мощности в контуре (поскольку мощность пропорциональна квадрату тока, то при токе, составляющем 0,7 от максимального):

$$I_m^2 = (0,7 I_{m, \text{рез}})^2 \approx 0,5 I_{m, \text{рез}}^2.$$

Чтобы убедиться в справедливости соотношения (16), обратимся вновь к уравнению (10).

При резонансе выполняется соотношение $\omega = \omega_0 = \sqrt{1/LC}$. Отсюда следует, что $\omega L = 1/\omega C$. В этом случае амплитуда тока максимальна и имеет значение $I_{m, \text{рез}} = E_m/R$. Из уравнения (10) следует, что при $I_m = 0,7 I_{m, \text{рез}}$ должно выполняться условие

$$0,7 \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = R,$$

откуда после возведения в квадрат и с учетом того, что $0,7^2 \approx 0,5$, получаем, что для уровня 0,7 от максимальной высоты резонансной кривой

$$\omega L - 1/\omega C = R. \quad (17)$$

Используя соотношения (12) и (15), можно получить

$$L = QR/\omega_0, \quad C = 1/\omega_0 QR. \quad (18)$$

После подстановки выражений для L и C в уравнение (17) получается следующее соотношение:

$$\frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega \omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (19)$$

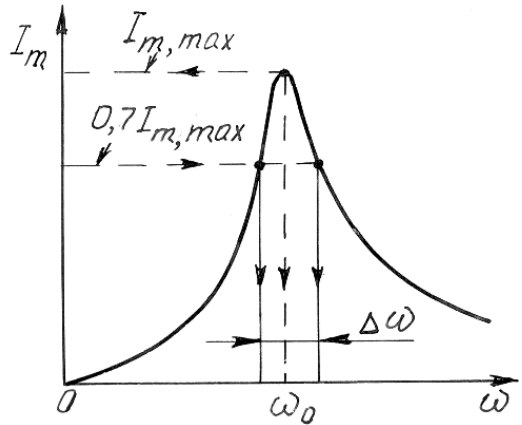


Рис. 4

С учетом того, что $(\omega - \omega_0) = \Delta\omega/2$, $(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0$ и $\omega\omega_0 \approx \omega_0^2$, окончательно получаем:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Однако эта формула справедлива лишь при $\beta^2 \ll \omega_0^2$, то есть при больших Q , когда затухание свободных колебаний в контуре мало.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Разместить установку на столе.
2. Установить регулятор 7 «Смещение» на генераторе в среднее положение, регулятор 8 «Амплитуда» в крайнее правое положение. Установить регулятор диапазона частот в положение «F2». Установить регулятор частоты «Плавно» в среднее положение. Установить регулятор 9 «R₁» в произвольное положение по указанию преподавателя. Все остальные регуляторы и переключатели установить в крайнее левое положение.
3. Подключить установку к сети. Включить тумблер "Сеть" на задней стенке.
4. Подключить измерительный модуль (осциллограф) к выходам генератора (клеммы 1 и 2). Включить осциллограф.
5. Нажать кнопку "ИЗМЕР" на передней панели осциллографа. С правой стороны экрана появятся данные, позволяющие определить $V_{\text{ампл. 0}}$ - удвоенное значение амплитуды напряжения U_0 , создаваемого генератором. Измерить $V_{\text{ампл. 0}}$ и определить U_0 .
6. По указанию преподавателя установить требуемое значение емкости C_1 , индуктивности L_1 . Данные занести в таблицу 1.
7. Рассчитать ω_0 по формуле $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
8. Подключить щупы осциллографа к резистору R_1 (клеммы 5 и 6).
9. С помощью переключателя диапазона частот и ручки «Грубо» определить диапазоны частот, на которых происходит вначале значительное увеличение, а затем значительное уменьшение амплитуды сигнала напряжения.
10. С помощью ручек "Грубо" и "Плавно" изменяя частоту f генератора, добиться, чтобы напряжение U на резисторе имело максимальную

амплитуду. По показаниям на экране осциллографа определить частоту колебаний $f_{рез}$, при которой это происходит. Измерить и записать напряжение $V_{ампл. рез}$, соответствующее частоте $f_{рез}$. Рассчитать циклическую частоту колебаний при резонансе $\omega_{рез} = 2\pi f_{рез}$ и сравнить её с рассчитанной ранее ω_0 . Рассчитать амплитудное напряжение $U_{рез}$ при резонансе по формуле $U_{рез} = \frac{V_{ампл. рез}}{2}$.

11. Уменьшая частоту генератора с помощью ручек "Грубо" и "Плавно", найти частоту f_1 , при которой амплитуда напряжения уменьшается примерно в два раза относительно амплитуды напряжения при резонансе.

12. Увеличивая частоту генератора с помощью ручек "Грубо" и "Плавно", вернуть значение частоты $f_{рез}$, соответствующее резонансу. Затем, продолжая увеличивать частоту генератора, найти частоту f_2 , при которой амплитуда напряжения также уменьшается примерно в два раза относительно амплитуды напряжения при резонансе.

13. Снять серию точек зависимости $U(f)$. Значения f , используемые для данной зависимости, должны быть выбраны от f_1 до f_2 , чтобы полученная зависимость имела чётко выраженный участок возрастания U , а затем – чётко выраженный участок убывания, причём максимальное полученное значение U было как минимум в два раза больше полученных минимальных значений. Результаты занести в таблицу.

14. На основании данных таблицы построить график зависимости $U_H = f(f_H)$.

Определить по графику ширину резонансной кривой Δf_H на уровне 0.7 от максимального значения (по методическим указаниям).

15. По формуле $Q = \frac{1}{\Delta f_H}$ определить величину добротности контура Q .

16. Рассчитать сопротивление резистора по формуле $R = \frac{1}{Q} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$.

17. Повторить пункты 6...16 при двух других величинах C и L , взятых по указанию преподавателя.

18. Найти среднее значение сопротивления R .

f , кГц								
$V_{\text{ампл}}$, В								
$U_m = V_{\text{ампл}}/2$, В								
$f_H = f/f_{\text{рез}}$								
$U_H = U_m/U_{\text{рез}}$								

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какая электрическая цепь называется электрическим колебательным контуром?
2. Каким образом возникают вынужденные колебания в колебательном контуре?
3. Нарисуйте векторную диаграмму напряжений в цепи переменного тока.
4. Как зависит частота вынужденных колебаний от параметров контура?
5. Что такое резонанс? При каких условиях он возникает? Что называется резонансной кривой?
6. Что называется добротностью колебательного контура? Как определить её, пользуясь резонансной кривой?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. М.: Наука, 1988.
2. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики. М.: Высш. шк., 2000.
3. Трофимова Т. И. Курс физики. М.: Высш. шк., 2001.