

**Студенческая математическая олимпиада РГРТУ  
(I тур Всероссийской студенческой олимпиады).  
2 марта 2019 года.**

1. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 2019 + a)^{2x+2019+a}}{(x + 2019)^{x+2019} \cdot (x + a)^{x+a}}$ .
2. Дана кучка камней из 2019 камней. Ее требуется разбить на 2019 кучек по 1 камню в каждой, причем за одну операцию разрешается делить любую имеющуюся кучку на две непустые кучки. Если по итогам операции количество камней в двух новых кучках получается различным, то выплачивается штраф – 1 шекель, если же новые кучки равны, то штраф отсутствует. Какой наименьший штраф придется заплатить, чтобы осуществить указанное разбиение?
3. Клад зарыт на необитаемом острове, на котором растет всего 2 пальмы (большая и маленькая) на расстоянии 400 футов друг от друга. Расстояние от клада до маленькой пальмы в 3 раза больше, чем расстояние от клада до большой пальмы. Траншею какой длины нужно будет вырыть, чтобы найти клад?
4. Сколько раз в десятичной записи числа  $A = 9 + 99 + 999 + \dots + 9 \dots 9$  встречается цифра 1?  
2019
5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x) = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3$ .
6. Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину  $C(4; -1)$ , а также уравнения высоты  $2x - 3y + 12 = 0$  и медианы  $2x + 3y = 0$ , проведенных из одной вершины.
7. Найти многочлен наименьшей степени, для которого в точке  $x = 1$  достигается максимум, равный 6, а в точке  $x = 3$  – минимум, равный 2.
8. Решить уравнение  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2020x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
9. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{8}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n-2)}\right) = \frac{1}{3}$ .
10. Вычислить  $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|$ , если  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$  и  $(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \perp (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .
11. Вычислить  $i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2019i^{2019}$ .
12. Доказать, что существует хотя бы одно решение дифференциального уравнения  $\frac{d^{2019}y}{dx^{2019}} + y = 0$ , удовлетворяющее условиям  $y(0) = 2019$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .
13. Вычислить интеграл  $\int_{\frac{1}{2019}}^{2019} \frac{x^2 \log_{2019} x}{x^2 + 1} dx$ .
14. Доказать равенство:  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)$ .
15. Вычислить интеграл  $\int_0^1 x(2x^2 - 1)^2 \arcsin x dx$ .
16. Известно, что  $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$ . Найти  $f(x)$  при  $0 \leq x \leq 1$ .