

Авдеев В. В.
Конспект лекций по дисциплине
«Радиотехнические цепи и сигналы».
Часть 1.

Оглавление.

Раздел 1. Основные характеристики детерминированных сигналов.....	4
§1. Понятие колебания и сигнала. Классификация сигналов.....	4
§2. Разложение колебания по системе ортогональных функций.....	5
§3. Гармонический анализ периодического колебания (разложение периодического колебания в ряд Фурье по тригонометрическим функциям)..	6
§4. Представление периодического колебания рядом Фурье в комплексной форме.....	8
§5. Спектральный анализ импульсного колебания. Прямое и обратное преобразование Фурье.....	12
§6. Свойства преобразования Фурье.....	14
§7. Распределение энергии в спектре импульсного колебания.....	15
§8. Соотношение между длительностью импульса и шириной его спектра.....	16
§8 ^a Примеры вычисления спектральной характеристики некоторых импульсных сигналов.....	21
§9. Корреляционный анализ импульсного колебания.....	20
§10. Связь АКФ импульса с его спектральной характеристикой.....	21
§11. Понятие взаимной корреляционной функции импульсного колебания (ВКФ).....	23
§12. Радиосигнал, как колебание с медленно меняющимися огибающей и фазой.....	23
§13. Радиосигнал с амплитудной модуляцией (АМ). Гармоническая АМ.....	24
§14. Распределение мощности в спектре радиосигнала с гармонической АМ.....	27
§15. Радиосигнал с АМ несколькими гармоническими колебаниями.....	27
§16. Радиосигнал с АМ импульсным колебанием.....	28
§17. Понятие угловой модуляции. ЧМК и ФМК. Радиосигнал с гармонической угловой модуляцией (УМ).....	30
§18. Спектр радиосигнала с гармонической угловой модуляцией.....	33
§19. Применение преобразование Гильберта для однозначного определения огибающей, частоты и фазы радиосигнала.....	35
§20. Комплексное представление радиосигнала. Аналитический сигнал и его свойства.....	37
§21. Понятие дискретного сигнала. Математическое описание. Спектральное представление.....	38
§22. Связь спектральных характеристик дискретного и аналогового сигналов.....	40
§23. Восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам. Теорема Котельникова В.А.....	42
Раздел 2. Прохождение детерминированного сигнала через линейную радиотехническую цепь (РТЦ).....	48
§1. Понятие линейной РТЦ. Основные параметры и характеристики.....	48
§2. Основные методы анализа прохождения детерминированного сигнала через линейную цепь.....	49

§3. Условия неискаженного прохождения детерминированного сигнала через линейную РТЦ.....	50
§4. Понятие усиления колебания. Схемы замещения линейного усилителя.....	51
§5. Линейный апериодический усилитель и его основные характеристики.....	54
§6. Прохождение прямоугольного видеоимпульса через апериодический усилитель.....	58
§7. Линейный резонансный усилитель (РУ) и его основные характеристики	54
§8. Прохождение радиосигнала с гармонической АМ через линейный резонансный усилитель.....	57
§9. Прохождение прямоугольного радиоимпульса через линейный резонансный усилитель.....	63
§10. Прохождение радиосигнала с гармонической ЧМ через избирательный усилитель.....	70
§11. Линейный усилитель с обратной связью (ОС). Влияние ОС на основные характеристики усилителя.....	77
Раздел 3. Нелинейные РТЦ. Методы анализа. Применение.....	81
§1. Понятие нелинейной РТЦ. Нелинейные элементы и методы аппроксимации их характеристик.....	81
§2. Преобразование спектра сигнала нелинейным резистивным элементом (Аппроксимация ВАХ степенным полиномом).....	82
§3. Преобразование спектра сигнала нелинейным резистивным элементом (кусочно-линейная аппроксимация).....	85
§4. Нелинейное резонансное усиление колебаний.....	87
§5. Применение нелинейной РТЦ для умножения частоты колебаний (умножитель частоты).....	92
§6. Применение нелинейной РТЦ для получения АМК (амплитудный модулятор смещения).....	95
§7. Применение нелинейной РТЦ для детектирования АМК.....	99
§8. Применение нелинейной РТЦ для детектирования ФМК (фазовый детектор).....	106
§9. Применение нелинейной РТЦ для детектирования ЧМК.....	108
§10. Применение нелинейной РТЦ для преобразования частоты сигнала.....	110

Раздел 1.

Основные характеристики детерминированных сигналов.

§1. Понятие колебания и сигнала. Классификация сигналов.

Колебанием $s(t)$ называется любой процесс, который на бесконечном интервале времени не удовлетворяет условию $s(t)=\text{const}$.

У нас в основном электрические колебания. Если колебание $s(t)$ содержит информацию о передаваемом сообщении или о состоянии какого-то объекта, то это колебание называется сигналом.

Помеха – это колебание, которое мешает приему полезной информации.

Классификация:

Все колебания по определенным признакам можно разбить на несколько групп.

Во-первых, все колебания делятся на

-детерминированные (регулярные);

-случайные.

Регулярные дают возможность аналитического описания, либо описания в другой форме (графической и т. д.) и позволяют определить значение колебания в любой момент времени.

Случайные не дают возможность аналитического описания и не дают возможность узнать значение колебания в любой момент времени.

Разделение на эти две группы достаточно условно и разделять мы будем по степени случайности.

Во-вторых, все колебания делятся на

-непрерывные;

-импульсные.

Непрерывные колебания продолжаются бесконечно долго (очень долго). Они обладают бесконечной энергией.

Импульсные колебания отличны от нуля на конечном интервале времени и обладают конечной энергией.

Среди непрерывных колебаний особое место занимают периодические колебания, то есть колебания, значения которых повторяются через равный промежуток времени, который называется периодом. Среди периодических колебаний очень интересны гармонические колебания.

В-третьих, все колебания можно разделить на:

-немодулированные высокочастотные (ВЧ) колебания (несущие), они являются гармоническими;

-управляющие колебания;

-модулированные высокочастотные (ВЧ) колебания (радиосигнал).

Радиосигнал получается путем модуляции несущего сигнала управляющим колебанием.

В-четвертых, все колебания делятся на

-аналоговые;

-дискретные;

-цифровые.

Аналоговые произвольны по величине и непрерывны по времени. Дискретные произвольны по величине, но дискретны по времени, то есть они определены лишь в дискретные моменты времени. Цифровые дискретны и по времени, и по величине.

В радиотехнике обычно применяют довольно сложные сигналы, поэтому для упрощения их анализа удобно представить сложные колебания суммой или линейной комбинацией более простых колебаний.

§2. Разложение колебания по системе ортогональных функций.

При разбиении сложного колебания на более простые составляющие в качестве последних обычно выбирают упорядоченную систему функций, например систему ортогональных функций.

Система вещественных функций $\{x_k(t)\} = \{x_0(t), x_1(t), \dots, x_m(t)\}$

называется ортогональной в интервале времени $[t_1; t_2]$, если на этом интервале выполняется условие попарной ортогональности функций:

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t) \cdot x_k(t) dt = 0; i \neq k \\ \int_{t_1}^{t_2} x_k^2(t) dt \neq 0; \\ \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} x_k^2(t) dt} = \|x_k\| - \text{норма функции } x_k(t). \end{cases}$$

Если нормы у всех функций равны 1, то такая система функций называется ортонормированной.

Из математики известно, что если функции $x_k(t)$ непрерывные, то произвольное кусочно-непрерывное колебание $s(t)$, удовлетворяющее условию:

$$\int s^2(t) dt < \infty$$

может быть представлено суммой

$$s(t) \approx \sum_k \alpha_k x_k(t) \quad (1)$$

где α_k – коэффициенты разложения.

Принято называть совокупность этих коэффициентов $\{\alpha_k\}$ спектром колебания $s(t)$ в ортогональной системе функций. Заметим, что набор коэффициентов $\{\alpha_k\}$ полностью определяет колебание $s(t)$.

Если коэффициенты α_k выбирают в соответствии с правилом

$$\alpha_k = \frac{1}{\|x_k\|^2} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \cdot x_k(t) dt \quad (2),$$

то ряд (1) называют обобщенным рядом Фурье.

Обобщенный ряд Фурье, при заданном числе слагаемых ряда, обеспечивает наилучшую сходимость в смысле средне квадратичного отклонения (то есть оно наименьшее)

$$\Delta = \int_{t_1}^{t_2} \left[S(t) - \sum_{k=0}^N \alpha_k \cdot x_k(t) \right]^2 dt \quad (3)$$

Δ - наименьшая

$$\Delta = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt - 2 \sum_{k=0}^N \alpha_k \int_{t_1}^{t_2} s(t) \cdot x_k(t) dt + \sum_{k=0}^N \alpha_k^2 \int_{t_1}^{t_2} x_k^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt - \sum_{k=0}^N \alpha_k^2 \|x_k\|^2 \quad (4)$$

Систему ортогональных функций называют полной, если при $N \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta \rightarrow 0$, следовательно, для полной системы

$$\int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 \|x_k\|^2 \quad (5)$$

Если колебание $s(t)$ электрическое, то левая часть равенства (5) представляет собой энергию, выделяемую этим колебанием на единичном сопротивлении на интервале времени от t_1 до t_2 .

Отсюда следует, что энергия W_s может быть вычислена по коэффициентам разложения

$$W_s = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 \|x_k\|^2 \quad (6)$$

Средняя мощность колебания $s(t)$ в интервале от t_1 до t_2 :

$$P_s = \frac{W_s}{t_1 - t_2} = \frac{1}{t_1 - t_2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 \|x_k\|^2$$

Рекомендации по выбору ортогональных систем функций.

1. Если требуется точное разложение на простейшие составляющие, то выбирается система гармонических ортогональных функций.
2. Если требуется разложение с заданной погрешностью Δ при минимальном числе слагаемых ряда, применяют специальные функции: полиномы Эрмита, Чебышева, Лагерра и т. д.

§3. Гармонический анализ периодического колебания (разложение периодического колебания в ряд Фурье по тригонометрическим функциям).

Колебание $s(t)$ называют периодическим, если оно удовлетворяет правилу $s(t) = s(t + nT)$,

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; T -период.

Периодическое колебание является непрерывным (бесконечно протяженным). Для разложения нужна система функций, ортогональных на интервале времени T . Этому требованию удовлетворяет система гармонических функций

$$\{x_k(t)\} = 1; \cos \frac{2\pi}{T} t; \sin \frac{2\pi}{T} t; \cos 2 \frac{2\pi}{T} t; \sin 2 \frac{2\pi}{T} t; \dots \cos k \frac{2\pi}{T} t; \sin k \frac{2\pi}{T} t; \dots$$

$$x_0 = 1; \|x_0\|^2 = T; \alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt = \frac{a_0}{2};$$

$$x_k(t) = \begin{cases} \cos(k \frac{2\pi}{T} t); \\ \sin(k \frac{2\pi}{T} t); \end{cases} \quad \|x_k\|^2 = \frac{T}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k \frac{2\pi}{T} t) dt = a_k; \\ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k \frac{2\pi}{T} t) dt = b_k; \end{cases} \quad k = \overline{[1, \infty)}$$

Ряд Фурье в тригонометрической форме:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t), \quad \text{где}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k \frac{2\pi}{T} t) dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k \frac{2\pi}{T} t) dt.$$

Если колебание $s(t)$ четная функция, то все $b_k = 0$, если нечетная то $a_k = 0$ для $k = \overline{[1, \infty)}$.

В радиотехнике большее распространение получил другой вариант разложения в ряд Фурье по тригонометрическим функциям:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_k) \quad (*),$$

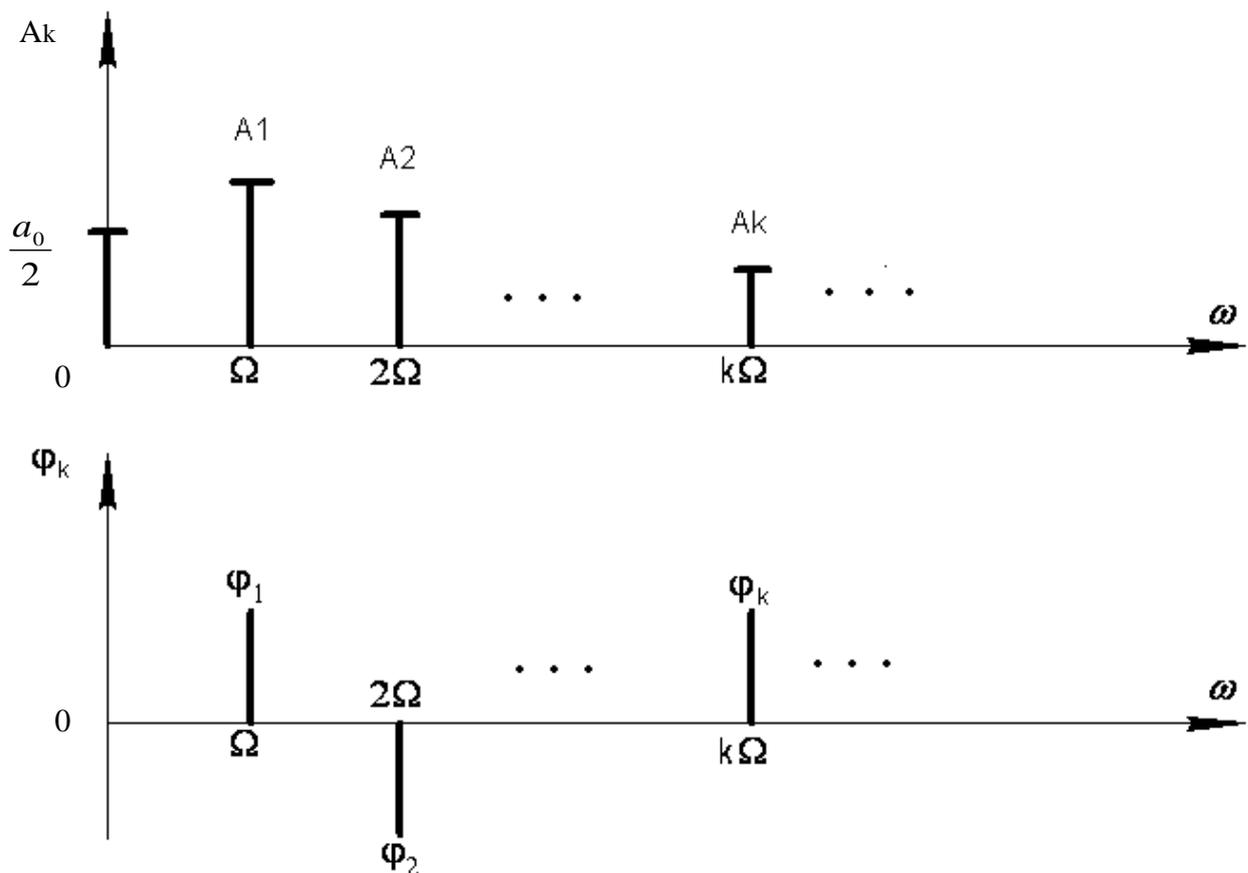
где

$$A_k \cos \varphi_k = a_k \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$A_k \sin \varphi_k = b_k \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

Вывод: из выражения (*) следует, что периодическое колебание $s(t)$ может содержать постоянную составляющую $\frac{a_0}{2}$ и набор гармонических составляющих с частотами $k \frac{2\pi}{T}$, амплитудами A_k и начальными фазами φ_k . Заметим, что никаких других составляющих, кроме гармонических с частотами, кратными основной частоте $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, быть не может.

Принято называть совокупность амплитуд гармонических составляющих периодического колебания спектром амплитуд $\{A_k\}$, совокупность фаз гармонических составляющих периодического колебания спектром фаз $\{\varphi_k\}$. Изображают спектр графически в виде спектральных диаграмм.



Вывод: спектр периодического колебания всегда линейчатый или дискретный, кроме того этот спектр гармонический, так как частоты всех гармонических составляющих кратны основной частоте Ω .

Найдем среднюю мощность P_s , выделяемую на единичном сопротивлении периодическим колебанием, через коэффициенты разложения в ряд Фурье. Для нахождения средней мощности периодического колебания достаточно найти среднюю мощность этого колебания за период $P_{ст}$.

$$P_s = P_{ST} = \frac{W_{ST}}{T} = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 \cdot \|x_k\|^2 = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{a_0}{2} \right)^2 \cdot T + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \frac{T}{2} \right] = \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2};$$

$$P_s = \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}, \text{ где}$$

$\left(\frac{a_0}{2} \right)^2$ – средняя мощность постоянной составляющей;

$\frac{A_k^2}{2}$ – средняя мощность k-ой гармонической составляющей.

Вывод: средняя мощность периодического колебания равна сумме средних мощностей его составляющих.

Заметим, что больший вклад в суммарную мощность вносят гармоники с большей амплитудой.

Особенности спектра периодического колебания.

1. Спектр дискретный (линейчатый), частоты всех гармонических составляющих кратны основной частоте $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

2. В общем случае количество гармонических составляющих периодического колебания бесконечно, то есть ширина спектра периодического колебания бесконечна.

3. Обычно в спектре периодического колебания с увеличением номера гармоники k, амплитуда составляющей уменьшается, следовательно, с увеличением k ее вклад в мощность колебания уменьшается, поэтому в спектре любого периодического колебания можно пренебречь или удалить гармоники, начиная с некоторого k_{\max} . При этом ширина спектра $[\Delta\omega]$ уменьшится и станет конечной

$$[\Delta\omega] = (k_{\max} - 1) \cdot \Omega$$

§4. Представление периодического колебания рядом Фурье в комплексной форме.

Преобразуем известное разложение в ряд Фурье по тригонометрическим функциям:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega t + \varphi_k) \quad (1)$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$;

Известно, что:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (2)$$

С учетом (2) получим:

$$A_k \cos(k\Omega t + \varphi_k) = \frac{1}{2} A_k (e^{j\varphi_k} \cdot e^{jk\Omega t} + e^{-j\varphi_k} \cdot e^{-jk\Omega t})$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j\varphi_k} \cdot e^{jk\Omega t}$$

$A_k \cdot e^{j\varphi_k} = \underline{A}_k$ – комплексная амплитуда k-ой гармонической составляющей.

$$A_k = A_{-k}$$

$$\varphi_{-k} = -\varphi_k \rightarrow \underline{A}_{-k} = A_k \cdot e^{-j\varphi_k}$$

Представление колебания рядом Фурье в комплексной форме:

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\Omega t} \quad (3)$$

При таком представлении считается, что в состав колебания входят гармоники с положительными и отрицательными частотами.

$$\underline{A}_k = A_k \cdot e^{j\varphi_k} = A_k (\cos \varphi_k + j \cdot \sin \varphi_k) = a_k - j \cdot b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) [\cos(k\Omega t) - j \cdot \sin(k\Omega t)] dt$$

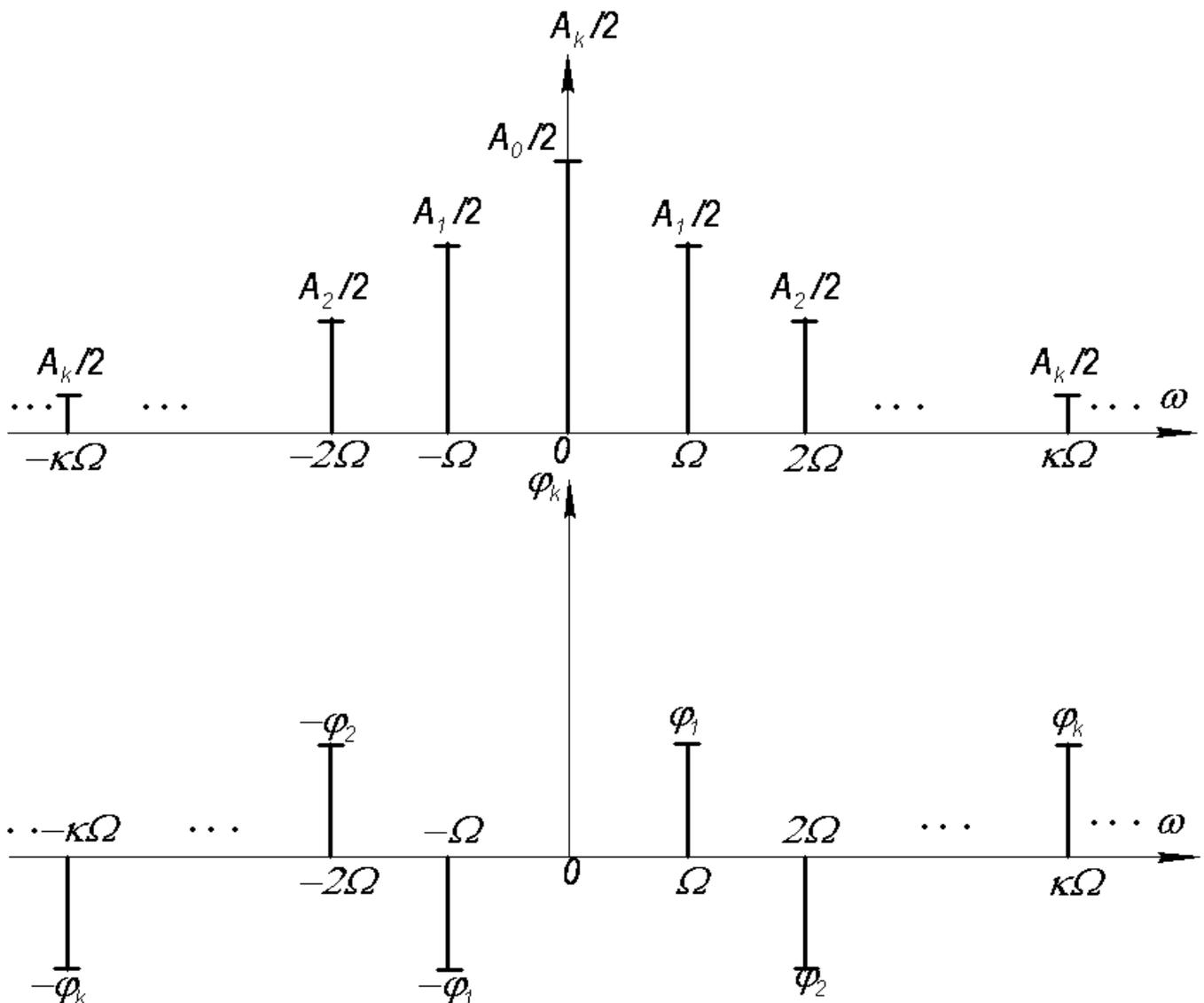
$$\underline{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\Omega t} dt$$

$$A_k = |\underline{A}_k|$$

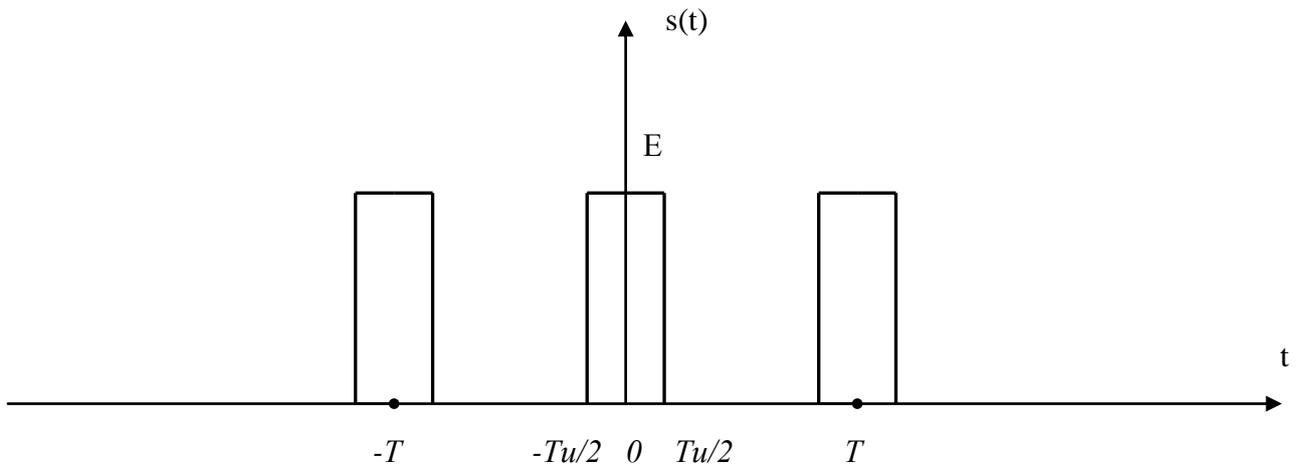
$$\varphi_k = \arg \underline{A}_k$$

При комплексном представлении ряда Фурье, амплитудные и фазовые спектры периодического колебания становятся двухсторонними. Амплитуды гармоник с частотами $k\Omega$ и $-k\Omega$ равны $\frac{A_k}{2}$.

На практике можно использовать и односторонние и двухсторонние спектры.



Пример:



$$\underline{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-T_u/2}^{T_u/2} E \cdot e^{-jk\Omega t} dt = \frac{2E}{T(-jk\Omega)} \cdot e^{-jk\Omega t} \Big|_{-T_u/2}^{T_u/2} = \frac{2E}{T(-jk\frac{2\pi}{T})} \cdot \left(\frac{e^{-jk\pi\frac{T_u}{T}} - e^{jk\pi\frac{T_u}{T}}}{-2j\sin(k\pi\frac{T_u}{T})} \right) =$$
$$= \frac{2ET_u}{T} \frac{\sin(k\pi\frac{T_u}{T})}{k\pi\frac{T_u}{T}};$$

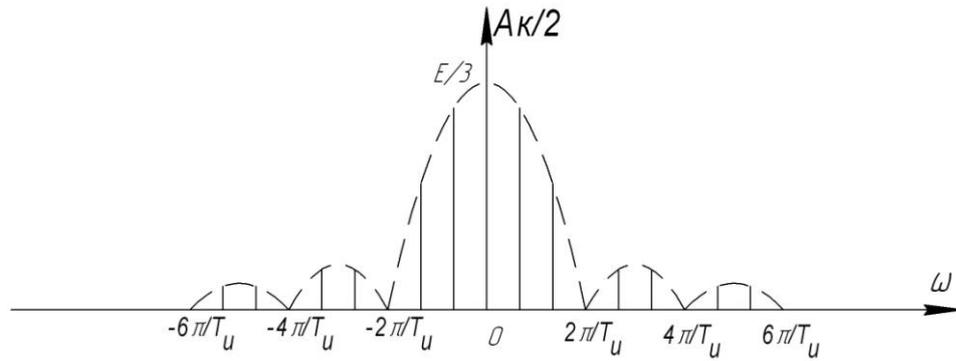
$$A_k = \frac{2ET_u}{T} \left| \frac{\sin k\pi\frac{T_u}{T}}{k\pi\frac{T_u}{T}} \right|$$

$$\frac{A_k}{2} = \frac{ET_u}{T} \left| \frac{\sin k\pi\frac{T_u}{T}}{k\pi\frac{T_u}{T}} \right|$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{ET_u}{T} = E\frac{T_u}{T} - \text{среднее значение (постоянная составляющая)}.$$

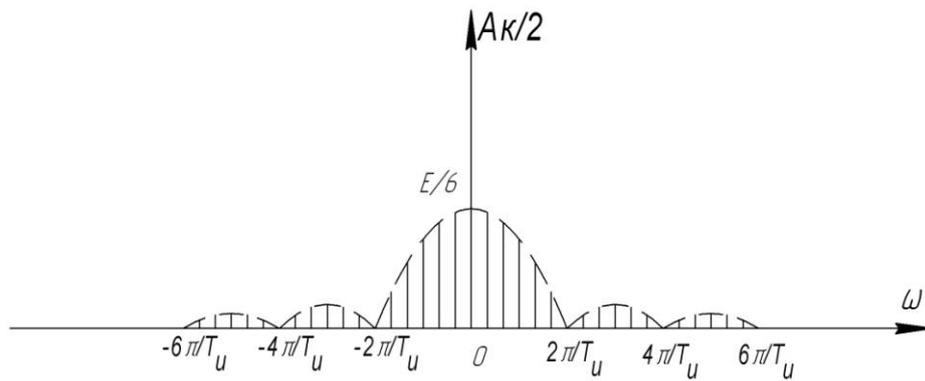
1) Пусть период $T = 3T_u$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{E}{3}$$



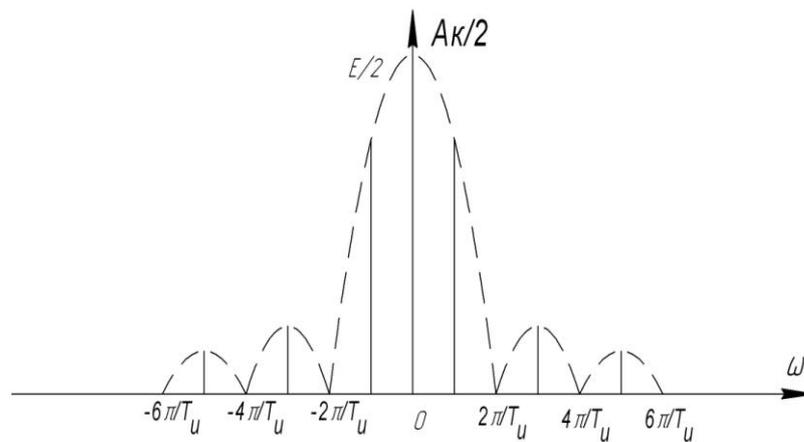
2) $T = 6T_u$

$$\frac{a_0}{2} = E \frac{T_u}{T} = E \frac{T_u}{6T_u} = \frac{E}{6}$$



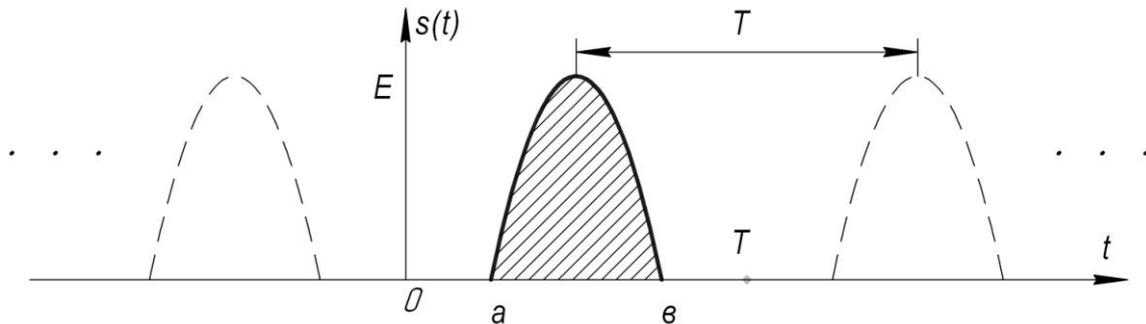
3) $T = 2T_u$

$$\frac{a_0}{2} = E \frac{T_u}{T} = E \frac{T_u}{2T_u} = \frac{E}{2}$$



§5. Спектральный анализ импульсного колебания. Прямое и обратное преобразование Фурье.

Пусть имеется одиночный импульс $s(t)$.



Мысленно (пунктиром) осуществим периодическое повторение этого импульса с периодом T , для этой периодической последовательности запишем:

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\Omega t} \quad (1)$$

$$\underline{A}_k = \frac{2}{T} \int_a^b s(t) \cdot e^{-jk\Omega t} dt \quad (2)$$

Подставим (2) в (1), получим:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_a^b s(t) e^{-jk\Omega t} dt \right) \cdot e^{jk\Omega t} \cdot \frac{\Omega}{2\pi} \quad (3)$$

Выражение (3) справедливо для нашего импульса лишь на интервале от 0 до T . При $T \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow d\omega$, $k\Omega \rightarrow \omega$, получим:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \underbrace{\left[\int_a^b s(t) e^{-j\omega t} dt \right]}_{\underline{S}(\omega)} d\omega$$

$\underline{S}(\omega)$ – спектральная характеристика импульсного колебания.

$$\underline{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (4) \text{ – прямое преобразование Фурье,}$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (5) \text{ – обратное преобразование Фурье.}$$

Вместо (4) и (5) договорились писать условное обозначение:

$$s(t) \Leftrightarrow \underline{S}(\omega)$$

Спектральная характеристика в общем случае комплексная функция, а значит у нее есть модуль и аргумент, то есть $\underline{S}(\omega) = S(\omega) \cdot e^{j\varphi_s(\omega)}$.

Выясним физический смысл спектральной характеристики и ее модуля. Сравним выражения (5) и (1):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (5)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\Omega t} \quad (1)$$

$\frac{1}{\pi} \underline{S}(\omega) d\omega$ и \underline{A}_k имеют один и тот же смысл.

$\frac{1}{\pi} \underline{S}(\omega) d\omega = d\underline{c}$ – комплексная амплитуда гармоники с частотой ω .

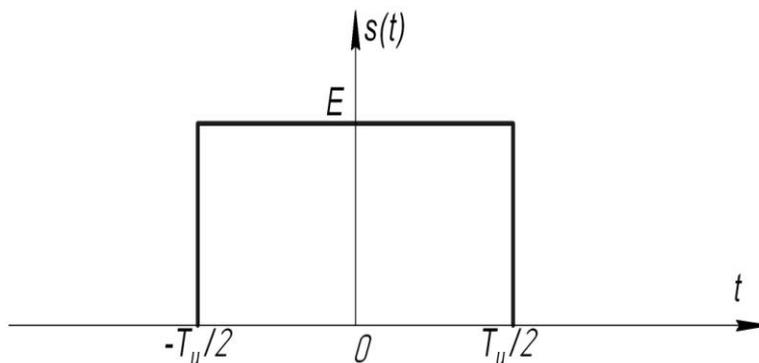
$$\underline{S}(\omega) = \pi \frac{dc}{d\omega} \quad (6)$$

$$S(\omega) = \pi \frac{dc}{d\omega} \quad (7) \text{ – модуль спектральной характеристики, имеет смысл спектральной}$$

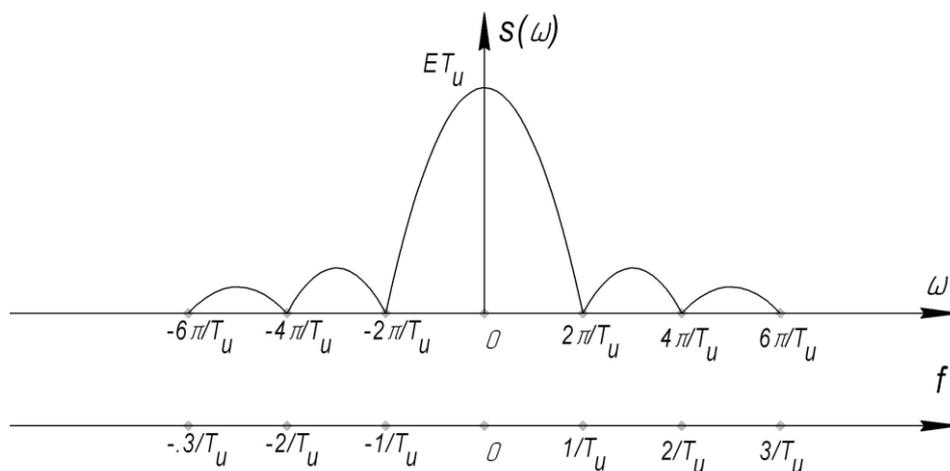
плотности амплитуд, его принято называть амплитудным спектром импульса.

$\varphi_s(\omega) = \arg \underline{S}(\omega)$ – фазовый спектр; в отличие от спектров периодического колебания спектры импульсного колебания являются непрерывными, сплошными.

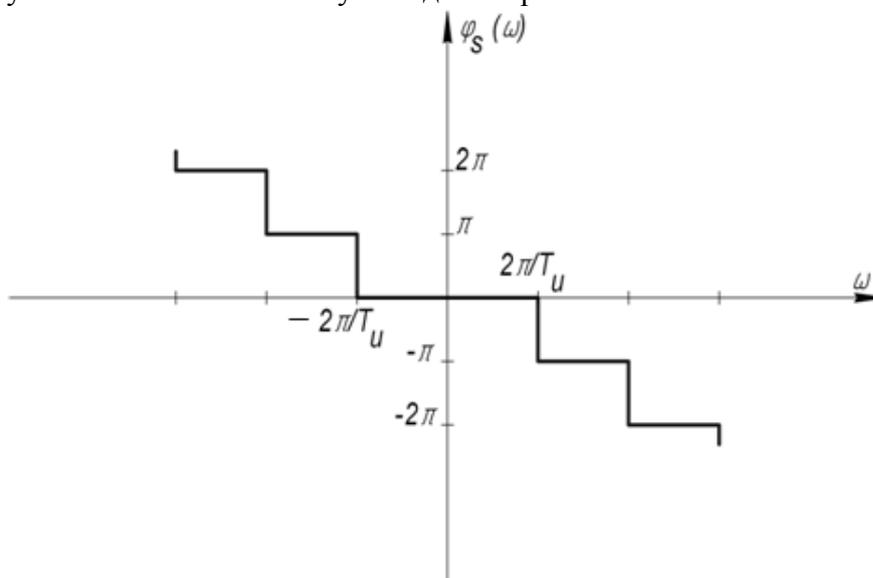
Пример: найдем спектральную характеристику импульса



$$\underline{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_u/2}^{T_u/2} E \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-T_u/2}^{T_u/2} = \frac{E}{j\omega} \left(2j \sin \omega \frac{T_u}{2} \right) = E \cdot T_u \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_u}{2}}{\omega \frac{T_u}{2}};$$



В состав импульсного колебания могут входить гармоники с любыми частотами.



Найдем связь спектра импульсного колебания (одиночного импульса) и спектра периодической последовательности таких импульсов. Для этого сопоставим выражения (2) и (4)

$$\underline{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-jk\Omega t} dt \quad (2)$$

$$\underline{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

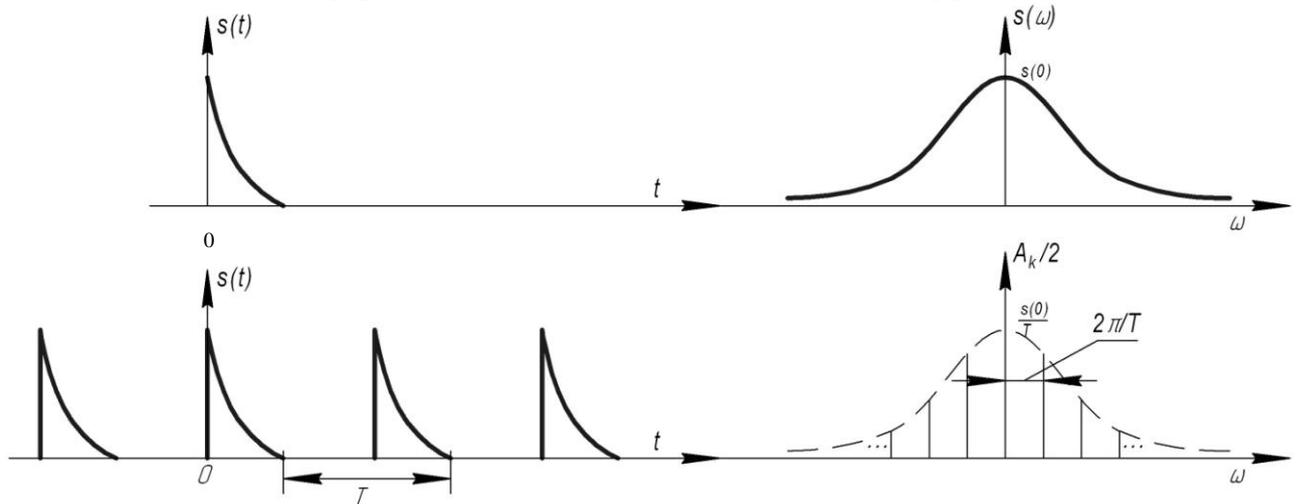
Можно сказать:

$$\underline{A}_k = \frac{2}{T} \underline{S}\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right) \quad (8)$$

$$A_k = \frac{2}{T} S\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right) \quad (9)$$

$$\frac{A_k}{2} = \frac{1}{T} S\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right) \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что модуль спектральной характеристики одиночного импульса и огибающая дискретного амплитудного спектра периодической последовательности этих импульсов, совпадают по форме и отличаются лишь масштабным коэффициентом $1/T$.



Проверим это на примере последовательности прямоугольных импульсов.

Пример:

$$S(\omega) = E \cdot Tu \cdot \left| \frac{\sin \omega \frac{T_u}{2}}{\omega \frac{T_u}{2}} \right|$$

$$\frac{A_k}{2} = \frac{ETu}{T} \left| \frac{\sin k\pi \frac{T_u}{T}}{k\pi \frac{T_u}{T}} \right|$$

§6. Свойства преобразования Фурье.

$$s(t) \Leftrightarrow \underline{S}(\omega)$$

Свойства:

1. Спектр суммы колебаний равен сумме спектров этих колебаний.

Замечание: под словом спектр мы понимаем спектральную характеристику.

$$s(t) = \sum_i s_i(t); s_i(t) \Leftrightarrow \underline{S}_i(\omega)$$

$$\sum_i s_i(t) \Leftrightarrow \sum_i \underline{S}_i(\omega)$$

2. Спектр производной импульса:

$$s(t) \Leftrightarrow \underline{S}(\omega); s'(t) \Leftrightarrow j\omega \underline{S}(\omega)$$

3. Спектр интеграла:

$$\int_{-\infty}^t s(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \underline{S}(\omega)$$

4. Спектр сдвинутого во времени импульса:

$$s(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-j\omega\tau} \underline{S}(\omega)$$

5. Сдвиг спектра по частоте:

$$\underline{S}(\omega + \omega_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega_0 t} s(t)$$

Сдвинутому по частоте спектру соответствует новый сигнал.

6. Изменение масштаба времени (сжатие – растяжение)

$$s(nt) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \underline{S}\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

Растяжение сигнала во времени приводит к сжатию его спектра во столько же раз.

7. Спектр произведения двух импульсов равен взятой с коэффициентом $1/2\pi$ свертке спектров этих колебаний.

$$s_1(t) \Leftrightarrow \underline{S}_1(\omega), s_2(t) \Leftrightarrow \underline{S}_2(\omega)$$

$$\underline{S}_1(\omega) \cdot \underline{S}_2(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [\underline{S}_1(\omega) \otimes \underline{S}_2(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_2(x) \cdot \underline{S}_1(\omega - x) dx$$

8. Спектр свертки двух импульсов равен произведению спектров этих импульсов.

$$\underline{S}_1(\omega) \otimes \underline{S}_2(\omega) \Leftrightarrow \underline{S}_1(\omega) \cdot \underline{S}_2(\omega),$$

где $\underline{S}_1(\omega) \otimes \underline{S}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_2(x) \cdot \underline{S}_1(\omega - x) dx$

§7. Распределение энергии в спектре импульсного колебания.

Если импульс $s(t)$ представляет собой электрическое колебание, то энергия, выделяемая этим колебанием на сопротивлении в 1 Ом, равна:

$$W_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

Воспользуемся 7-м свойством преобразования Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_2(x) \cdot \underline{S}_1(\omega - x) dx$$

Допустим что:

$$s_1(t) = s_2(t) = s(t)$$

Пусть $\omega=0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(x)|^2 dx$$

$$W_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega,$$

где $S^2(\omega)$ – спектральная плотность энергии импульса, она характеризует распределение энергии импульса по частоте.

$$W_S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega$$

$$W_S = 2 \int_0^{\infty} S^2(f) df$$

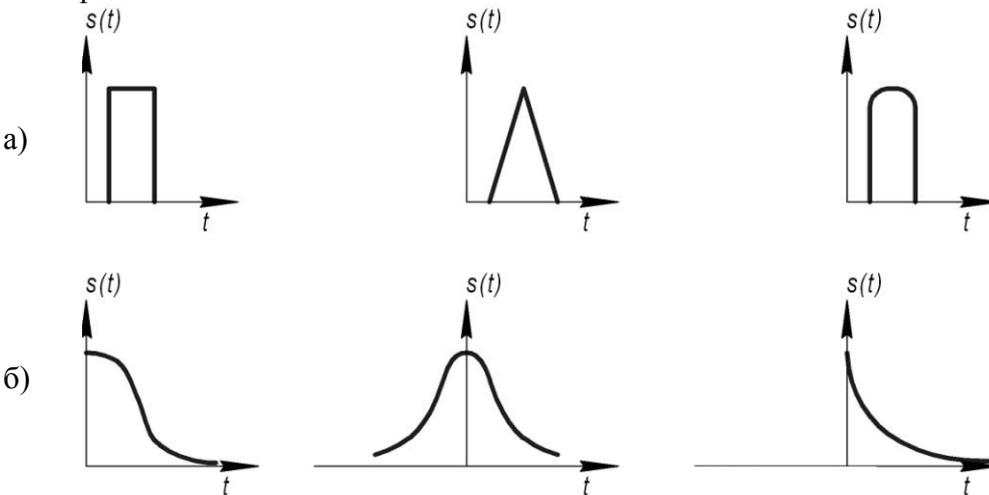
§8. Соотношение между длительностью импульса и шириной его спектра.

Это соотношение определяется 6-м свойством преобразования Фурье

$$s(nt) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \underline{S}\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

Чем протяженнее сигнал во времени, тем менее протяжен его спектр. Однако само понятие протяженность сигнала во времени (длительность импульса) и протяженность спектра по частоте (ширина спектра) нуждается в уточнении.

Начнем с длительности импульса. Есть импульсы (а) (например прямоугольный, треугольный...), у которых эти понятия определены. Но есть и такие (б), для которых это понятие не определено.



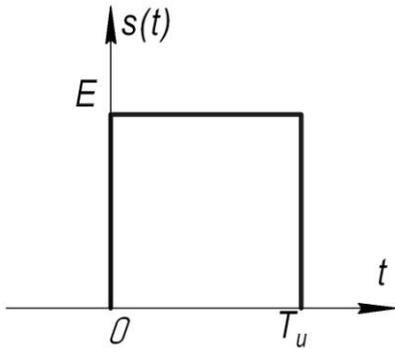
Чтобы получить единообразие в определении длительности импульсов используют энергетический метод, где вводят понятие активной длительности импульса Δt_a . Δt_a – это интервал времени, в котором содержится большая (основная) часть энергии импульса, например, 90%.

Если сигнал (импульс) начинается с нуля, то есть $s(t)=0, t<0$, то

$$W_S = \int_0^{\infty} s^2(t) dt$$

$$\int_0^{\Delta t_a} s^2(t) dt = 0,9W_S$$

Пример: найти активную длительность прямоугольного импульса.



$$W_s = \int_0^{\infty} s^2(t) dt = E^2 \int_0^{T_u} dt = E^2 \cdot T_u$$

$$\int_0^{\Delta t_a} s^2(t) dt = 0,9 E T_u$$

$$E^2 \cdot \Delta t_a = 0,9 E^2 T_u$$

$$\Delta t_a = 0,9 T_u$$

Вводится также понятие активной ширины спектра импульса $[\Delta\omega_a]$ – интервал частот, в котором содержится основная или большая часть энергии импульса, например, 90%

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{[\Delta\omega_a]} S^2(\omega) d\omega = 0,9 W_s.$$

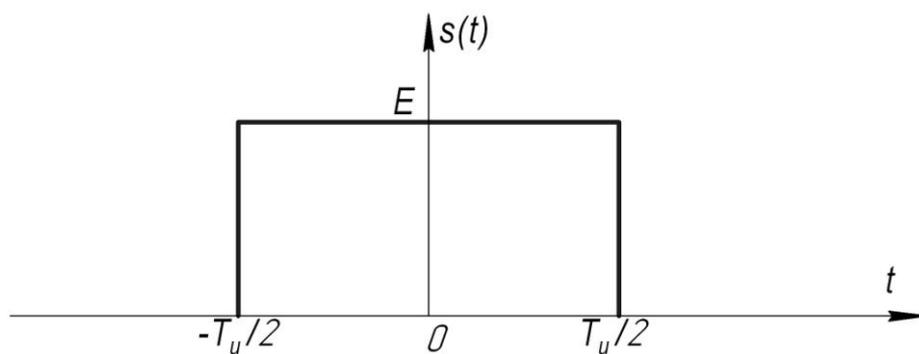
Если вычислить активную длительность импульса Δt_a и $[\Delta\omega_a]$ для импульсов различной формы, то выяснится общее для всех импульсов правило:

$$\Delta t_a \cdot [\Delta\omega_a] = const$$

Как бы мы не изменяли форму импульса, всегда $[\Delta f_a] \Delta t_a \geq \mu$, где μ – некоторая постоянная.

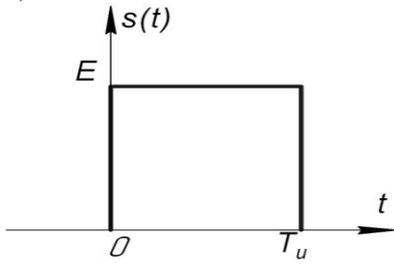
§8^a Примеры вычисления спектральной характеристики некоторых импульсных сигналов.

1)



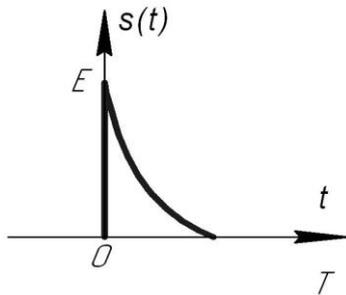
Ранее получено
$$\underline{S}(\omega) = E \cdot T_u \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_u}{2}}{\omega \frac{T_u}{2}},$$

2)

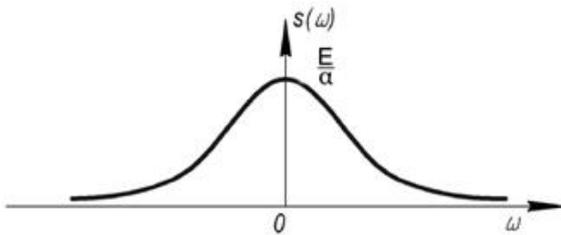


$$\underline{S}(\omega) = E \cdot T_u \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_u}{2}}{\omega \frac{T_u}{2}} e^{-j\omega \frac{T_u}{2}}$$

3.



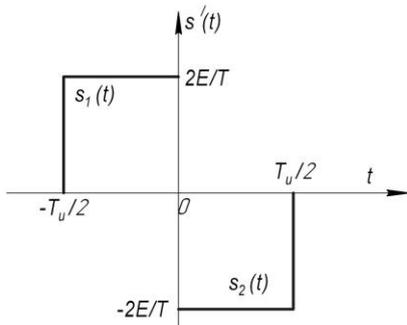
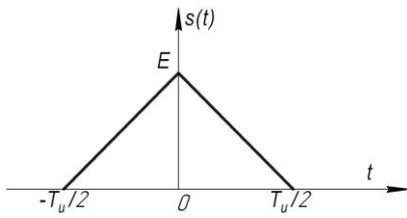
$$S(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ee^{-\alpha t}, & t \geq 0 \end{cases}$$



$$\underline{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = E \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{E}{\alpha + j\omega},$$

$$S(\omega) = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

4.



$$s(t) \Leftrightarrow \underline{S}(\omega)$$

$$s'(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$s_1(t) \Leftrightarrow \underline{S}_1(\omega)$$

$$s_2(t) \Leftrightarrow \underline{S}_2(\omega)$$

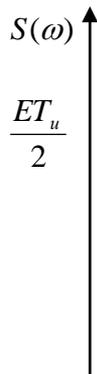
$$s'(t) \Leftrightarrow \underline{S}_{np}(\omega) = \underline{S}_1(\omega) + \underline{S}_2(\omega)$$

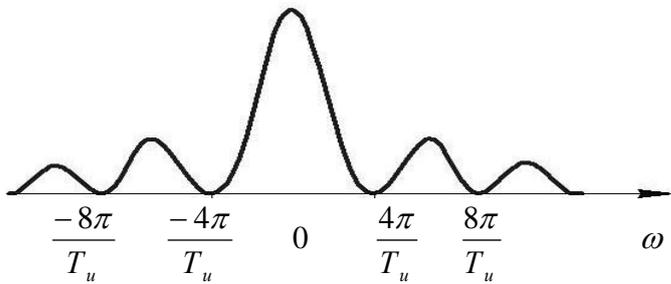
$$\underline{S}_1(\omega) = \frac{2E}{Tu} \cdot \frac{Tu}{2} \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_u}{4}}{\omega \frac{T_u}{4}} e^{j\omega \frac{T_u}{4}}$$

$$\underline{S}_2(\omega) = -\frac{2E}{Tu} \cdot \frac{Tu}{2} \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_u}{4}}{\omega \frac{T_u}{4}} e^{-j\omega \frac{T_u}{4}}$$

$$\underline{S}_{np}(\omega) = \underline{S}_1(\omega) + \underline{S}_2(\omega) = \frac{2E}{Tu} \cdot \frac{Tu}{2} \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_u}{4}}{\omega \frac{T_u}{4}} - \frac{2E}{Tu} \cdot \frac{Tu}{2} \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_u}{4}}{\omega \frac{T_u}{4}} e^{-j\omega \frac{T_u}{4}} = E \frac{\sin \omega \frac{T_u}{4}}{\omega \frac{T_u}{4}} \cdot 2 \cdot j \cdot \sin \omega \frac{T_u}{4}$$

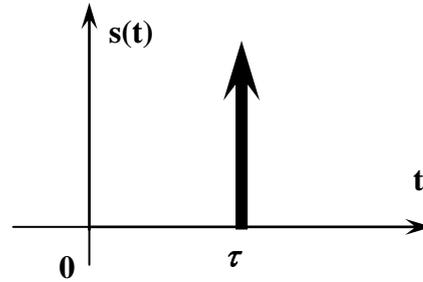
$$\underline{S}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \underline{S}_{np}(\omega) = \frac{ET_u}{2} \left(\frac{\sin \omega \frac{T_u}{4}}{\omega \frac{T_u}{4}} \right)^2 = S(\omega)$$





5. Функция Дирака (δ – импульс)

$$s(t) = \delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}$$



Свойства δ -импульса:

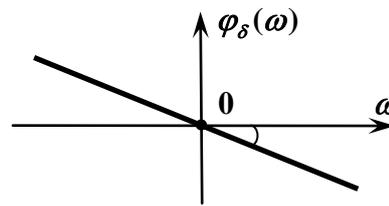
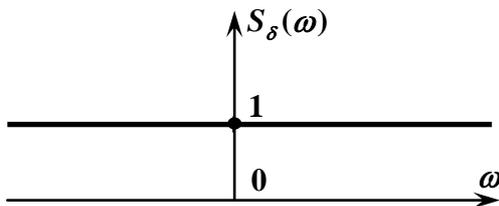
$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1$$

$$b) \int_{-\infty}^{\tau} \delta(t - \tau) dt = \int_{\tau}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = \frac{1}{2}$$

$$\underline{S}_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty(\tau-\varepsilon)}^{\infty(\tau+\varepsilon)} \delta(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \tau} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \delta(t - \tau) dt = e^{-j\omega \tau}, \text{ где } \varepsilon - \text{ бесконечная малая величина.}$$

$$\underline{S}_{\delta}(\omega) = e^{-j\omega \tau}$$

$$S_{\delta}(\omega) = 1 \quad \varphi_{S_{\delta}}(\omega) = -\omega \tau$$



Найдем обратное преобразование Фурье:

$$\delta(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega \tau} e^{j\omega t} d\omega$$

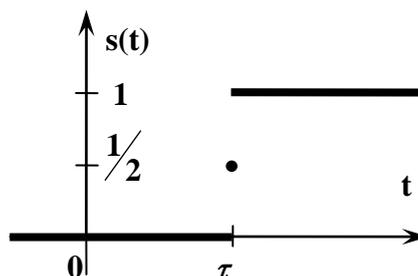
$$\delta(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} d\omega$$

6. Единичный скачок или функция Хевисайда.

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1/2, & t = \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}$$

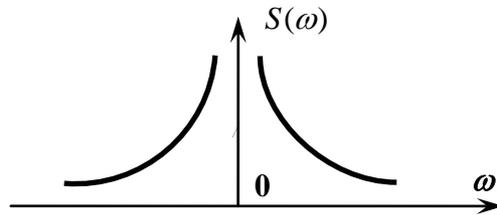
$$1(t - \tau) = \int_{-\infty}^t \delta(t - \tau) dt$$



$$\delta(t - \tau) = \frac{d}{dt} 1(t - \tau)$$

$$1(t - \tau) \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega\tau}$$

$$S(\omega) = \left| \frac{1}{\omega} \right|$$

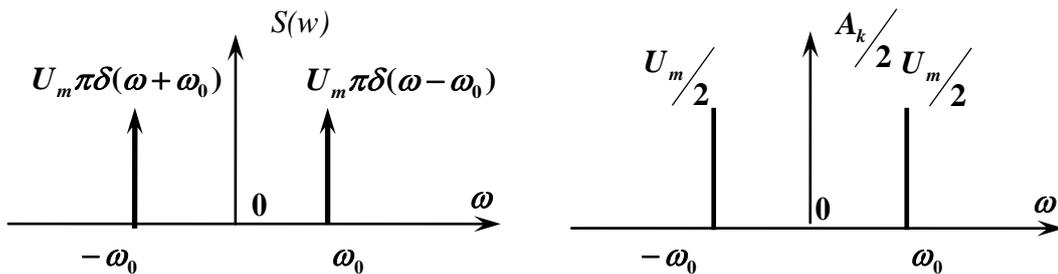


7. Гармоническое колебание.

$$s(t) = U_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\underline{S}(\omega) = U_m \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{U_m \cdot e^{j\varphi_0}}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} \cdot dt + \frac{U_m \cdot e^{-j\varphi_0}}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} \cdot dt =$$

$$= U_m \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) \cdot e^{j\varphi_0} + U_m \cdot \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0) \cdot e^{-j\varphi_0};$$



§9. Корреляционный анализ импульсного колебания.

Кроме спектрального анализа в радиотехнике широко используется корреляционный анализ. Введем понятие автокорреляционной функции импульсного колебания $s(t)$ – АКФ, которая характеризует связь этого сигнала с его копией, сдвинутой на время τ , $s(t-\tau)$. Обозначается функция $K_S(\tau)$.

$$K_S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t - \tau) dt$$

Свойства АКФ:

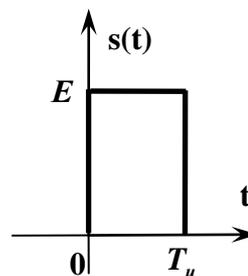
1. $K_S(\tau) = K_S(-\tau)$;
2. $K_S(0) = \max = W_S$; $W_S = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \cdot dt$ - энергия, выделяемая импульсом $s(t)$ на $R = 1[\text{Ом}]$;
3. $K_S(\tau) \leq K_S(0)$.

Пример № 1:

$$1) K_S(\tau) = \int_{\tau}^{T_u} E^2 dt = E^2(T_u - \tau) =$$

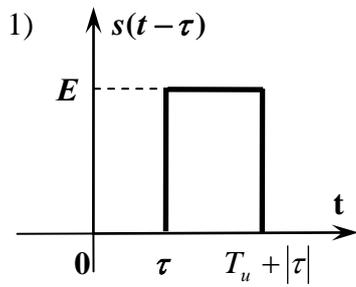
$$= E^2 T_u \left(1 - \frac{\tau}{T_u}\right)$$

$$2) K_S(\tau) = \int_0^{T_u - |\tau|} E^2 dt = E^2 T_u \left(1 - \frac{|\tau|}{T_u}\right)$$

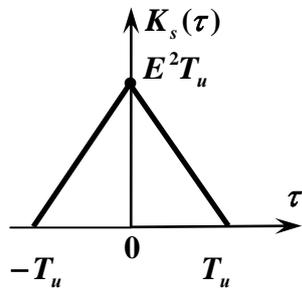


2) $s(t - \tau)$

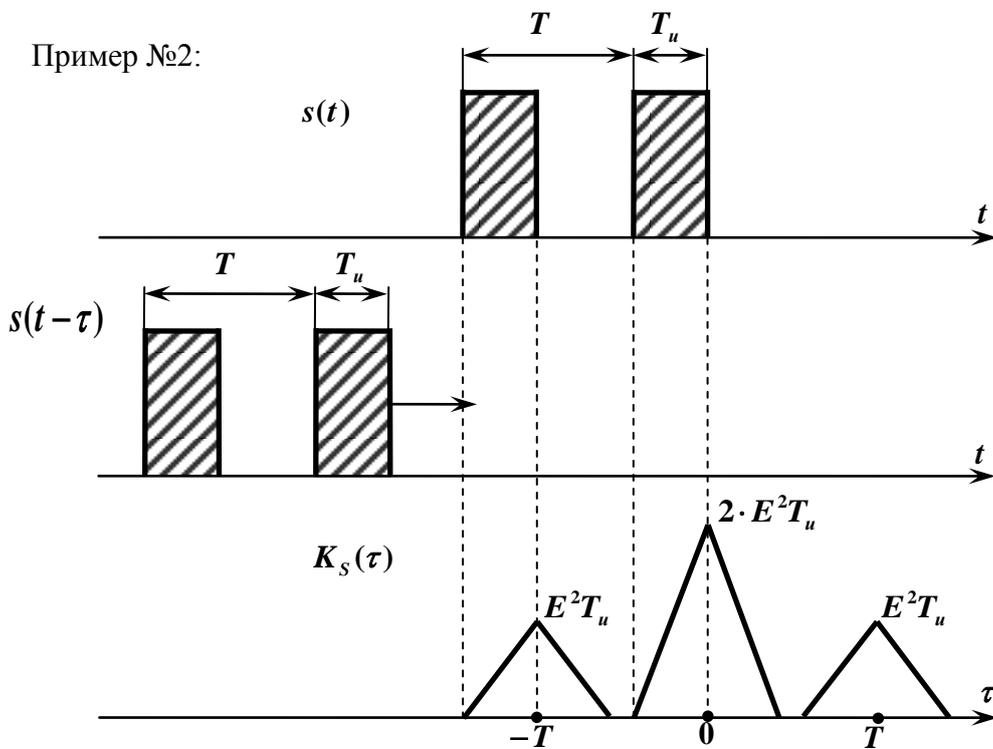




$$-|\tau| \quad 0 \quad T_u - |\tau|$$



Пример №2:



§10. Связь АКФ импульса с его спектральной характеристикой.

Воспользуемся свойством преобразования Фурье.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_1(x) \cdot \underline{S}_2(\omega - x) dx$$

Пусть $\omega = 0$, $s_1(t) = s(t)$, $s_2(t) = s(t - \tau)$; $s_1(t) \Leftrightarrow \underline{S}(x)$; $s_2(t) \Leftrightarrow \underline{S}(x) e^{-jx\tau}$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t - \tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(x) e^{jx\tau} dx$$

$$K_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(x) \cdot e^{jx\tau} dx \quad \text{или} \quad K_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$$

$S^2(\omega) = |\underline{S}(\omega)|^2$ – спектральная плотность энергии импульса

$$S^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_s(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

На основании свойств преобразований Фурье можно утверждать, что чем протяженнее спектр импульса, тем менее протяженна АКФ, и наоборот.

§11. Понятие взаимной корреляционной функции импульсного колебания (ВКФ).

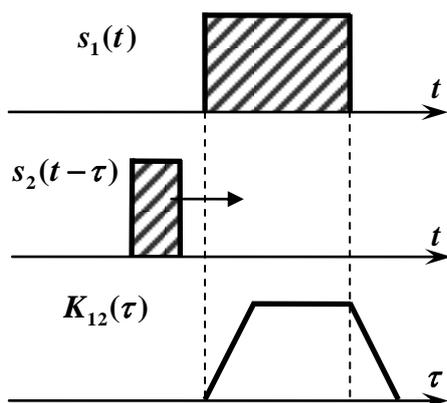
ВКФ характеризует связь импульса $s_1(t)$ с копией другого импульса, сдвинутой во времени на τ , $s_2(t - \tau)$.

$$K_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t - \tau) dt$$

У этой функции:

1. не обязательна четность
2. Не обязателен максимум в 0.

Пример:



§12. Радиосигнал, как колебание с медленноменяющимися огибающей и фазой.

Радиосигнал – высокочастотное модулированное колебание, получаемое путем изменения одного, или нескольких параметров несущего колебания, $a_{нес}(t)$ по закону управляющего (модулирующего) колебания.

$$a_{нес}(t) = A_0 \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

A_0 – амплитуда несущего колебания,

ω_n – несущая частота,

φ_n – начальная фаза несущего колебания. В общем случае аналитическое выражение

радиосигнала можно записать:

$$a(t) = A(t) \cos[\omega_n t + \varphi(t) + \varphi_n] = A(t) \cos \Psi(t)$$

$A(t)$ – огибающая радиосигнала,

$\psi(t)$ – полная фаза радиосигнала,

$\varphi(t)$ – фаза радиосигнала.

Для уменьшения искажения при прохождении радиосигнала по каналам связи необходимо, чтобы относительная ширина спектра радиосигнала была много меньше 1.

$$\frac{[2\Delta\omega_a]}{\omega_n} \ll 1$$

ω_n – средняя частота в спектре радиосигнала (центральная),

$[2\Delta\omega_a]$ – абсолютная ширина спектра.

$$[2\Delta\omega_a] \ll \omega_n$$

Как будет показано позже, абсолютная ширина спектра любого радиосигнала определяется шириной спектра управляющего сигнала.

$$[2\Delta\omega_a] \sim [2\Delta\omega_s]$$

$$[2\Delta\omega_s] \ll \omega_n$$

Ранее мы показали, что ширина спектра зависит от скорости изменения колебания во времени.

Управляющее колебание $s(t)$ должно быть медленно изменяющимся по сравнению с несущим.

Так как огибающая $A(t)$ и (или) фаза радиосигнала $\varphi(t)$ повторяют закон изменения управляющего колебания $s(t)$, то можно сделать окончательный вывод: $A(t)$ и $\varphi(t)$ являются медленно изменяющимися по сравнению с несущим колебанием.

Это позволяет утверждать, что за время, соизмеримое с периодом несущего колебания, огибающая и фаза радиосигнала практически не изменяются, то есть на коротком интервале времени радиосигнал может рассматриваться как немодулированное колебание, что упрощает анализ прохождения радиосигнала через линейные цепи.

§13. Радиосигнал с амплитудной модуляцией (АМ).

В самом общем виде аналитическое выражение амплитудно-модулированного сигнала записывается следующим образом:

$$a_{AM}(t) = A(t) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

Связь огибающей с управляющим колебанием $s(t)$:

$$A(t) = A_0 + \Delta A \cdot s(t) = A_0 \left[1 + \frac{\Delta A}{A_0} \cdot s(t) \right]$$

Если $|s(t)| \leq 1$, то $\frac{\Delta A}{A_0} = M$ – коэффициент глубины модуляции (глубина модуляции);

$$0 < M < 1,$$

Общее аналитическое выражение амплитудно-модулированного колебания:

$$a_{AM}(t) = A_0 [1 + M \cdot s(t)] \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (1)$$

Радиосигнал с гармонической АМ.

При гармонической АМ управляющее колебание гармоническое:

$$s(t) = \cos(\Omega t + \gamma)$$

Ω – частота модуляции, или модулирующая частота,

γ – начальная фаза управляющего колебания.

Аналитическое выражение радиосигнала с гармонической амплитудной модуляцией.

$$a_{AM}(t) = A_0 [1 + M \cdot \cos(\Omega t + \gamma)] \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2)$$

Спектральное представление радиосигнала с гармонической (тональной) АМ.

Развернем выражение (2)

$$a_{AM}(t) = A_0 \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_n - \Omega)t + \varphi_n - \gamma] + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_n + \Omega)t + \varphi_n + \gamma],$$

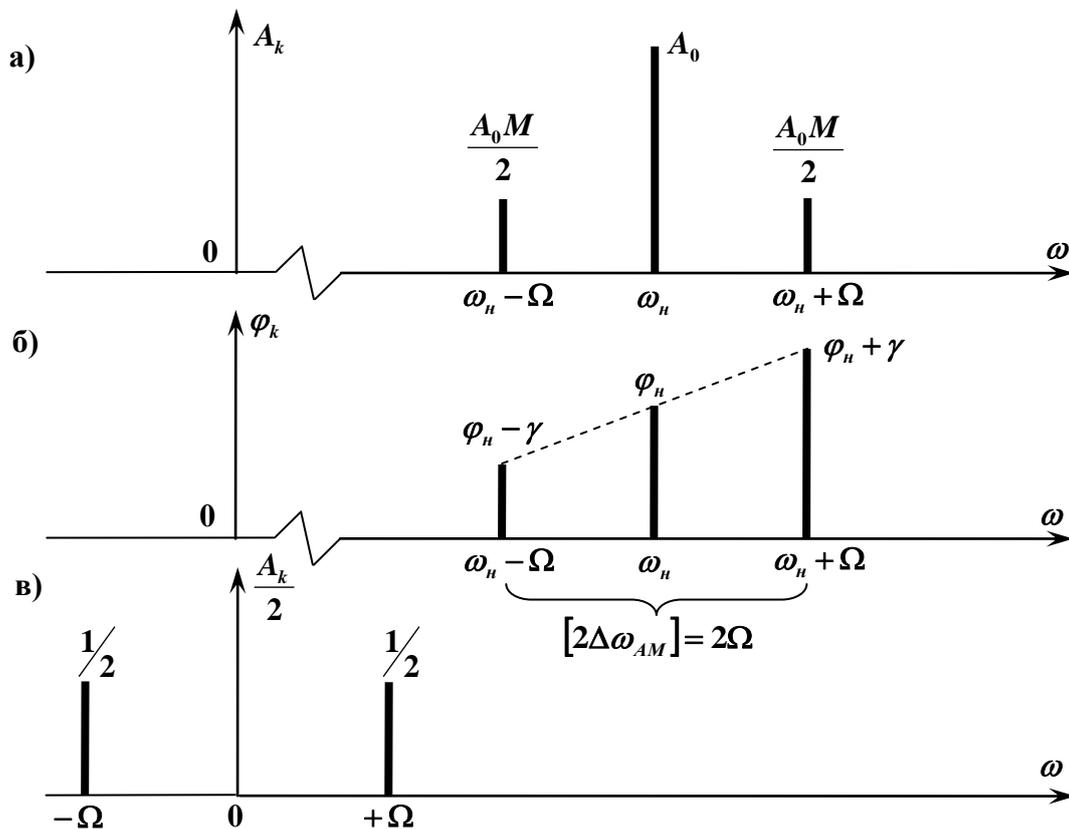
т.к. $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

Как видим, радиосигнал с гармонической АМ содержит три гармонических составляющих:

1. несущее колебание с амплитудой A_0 частотой ω_n и фазой φ_n .
2. Нижнее боковое колебание с амплитудой $\frac{MA_0}{2}$, частотой $\omega_n - \Omega$ и начальной фазой $\varphi_n - \gamma$.
3. Верхнее боковое колебание с амплитудой $\frac{MA_0}{2}$, частотой $\omega_n + \Omega$ и начальной фазой $\varphi_n + \gamma$.

Изобразим спектральные диаграммы такого радиосигнала:

- а) амплитудный спектр,
- б) фазовый спектр,
- в) амплитудный спектр управляющего колебания.

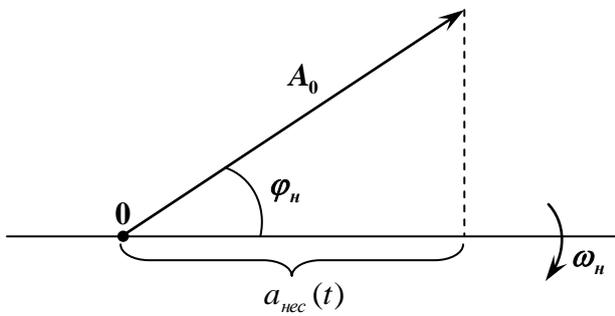


Как видим, ширина спектра АМК равна ширине спектра управляющего колебания.

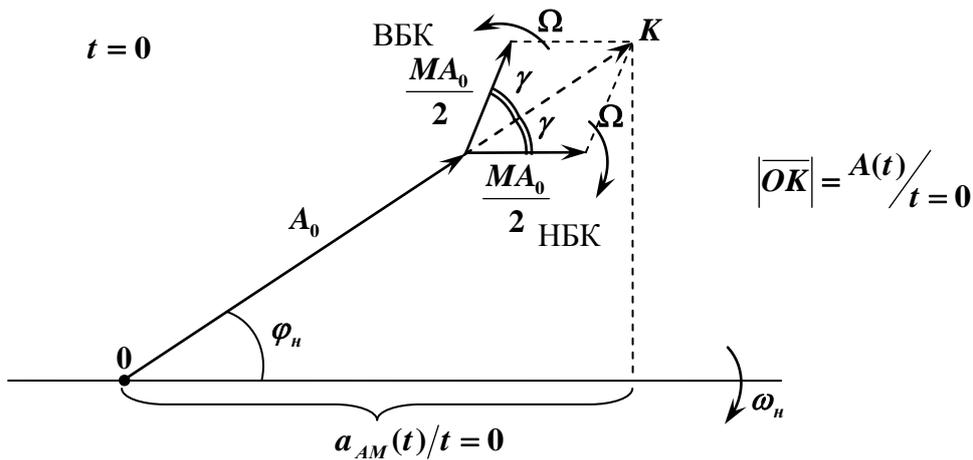
Векторное представление радиосигнала с гармонической АМ.

Любое гармоническое колебание, например, несущее колебание $a_{нес}(t)$ можно представить в виде вектора:

$$t = 0$$

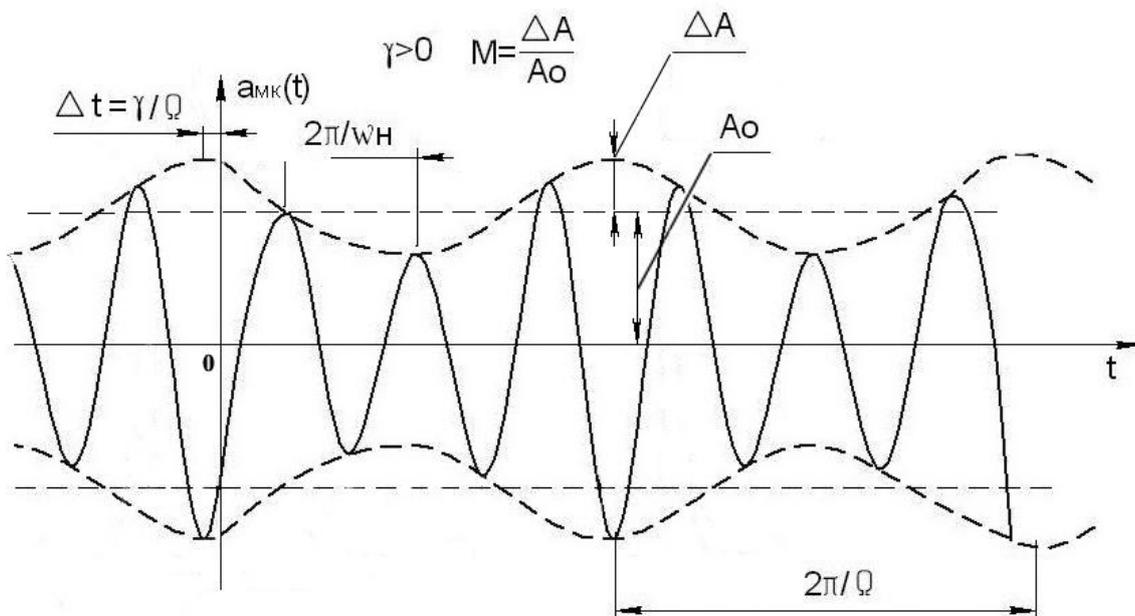


Векторная диаграмма радиосигнала с гармонической АМ.



Вектор \overline{OK} – результирующий вектор радиосигнала. Угловое положение вектора \overline{OK} не изменяется по отношению к горизонтали, что свидетельствует об отсутствии угловой модуляции. Частота и фаза радиосигнала постоянны. Меняется только длина вектора \overline{OK} , что свидетельствует о наличии АМ. $|\overline{OK}| = A(t)$

Временная диаграмма АМК.



§14. Распределение мощности в спектре радиосигнала с гармонической АМ.

Этот радиосигнал является периодическим колебанием, поэтому имеет смысл говорить о его средней мощности за период. Ранее было показано, что средняя мощность периодического колебания равна сумме средних мощностей его составляющих.

$$P_{cp} = P_{нес} + P_{нбк} + P_{вбк} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{MA_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{MA_0}{2} \right)^2 = \frac{A_0^2}{2} (1 + 0,5M^2) = P_{нес} (1 + 0,5M^2)$$

Выясним, справедливо ли распределена мощность радиосигнала между его составляющими. Введем понятие эффективности модуляции с информационной точки зрения. Так как информация о передаваемом сообщении заключена только в боковых составляющих, то

$$\eta = \frac{P_{нбк} + P_{вбк}}{P_{cp}} = \frac{M^2}{2 + M^2}$$

В лучшем случае $\eta \rightarrow 1/3$ (при $M \rightarrow 1$).

Вывод: амплитудная модуляция с энергетической точки зрения не выгодна. Так как не более 1/3 мощности приходится на боковые составляющие, которые содержат информацию. Для повышения η можно в передатчике подавить несущее колебание. Такая модуляция называется балансной амплитудной модуляцией (БАМ). При ней в приемнике нужно иметь генератор несущей частоты.

§15. Радиосигнал с АМ несколькими гармоническими колебаниями.

$$s(t) = \sum_{K=1}^N C_K \cos(\Omega_K t + \gamma_K)$$

C_k – амплитуда, γ_k – начальная фаза k-ой гармоники с частотой Ω_k .

$$\begin{aligned} a_{AM}(t) &= A_0 \left[1 + M \cdot \sum_{k=1}^N C_k \cos(\Omega_k t + \gamma_k) \right] \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \\ &= A_0 \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \sum_{k=1}^N \frac{A_0 M C_k}{2} \cos[(\omega_n - \Omega_k)t + \varphi_n - \gamma_k] + \sum_{k=1}^N \frac{A_0 M C_k}{2} \cos[(\omega_n + \Omega_k)t + \varphi_n + \gamma_k] \end{aligned}$$

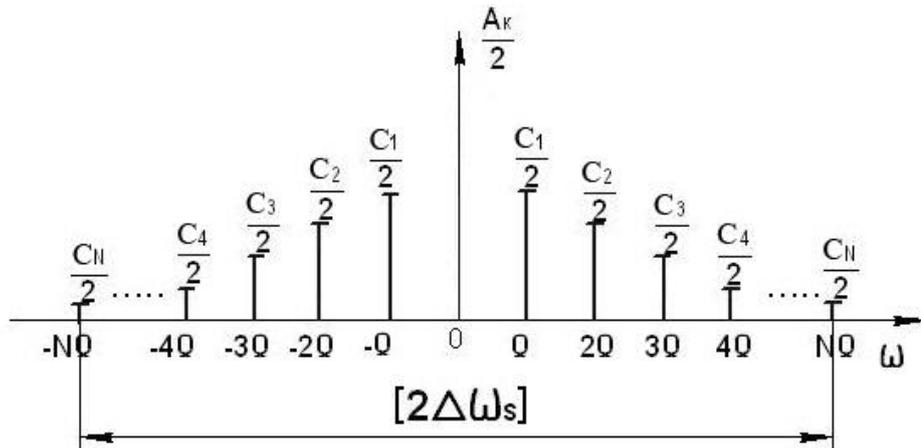
В состав этого радиосигнала входит гармоническое колебание с частотой ω_n , амплитудой A_0 и начальной фазой φ_n (несущее колебание), набор нижних боковых колебаний с частотами $(\omega_n - \Omega_k)$, амплитудами $\frac{A_0 M C_k}{2}$ и начальными фазами $(\varphi_n - \gamma_k)$ (нижняя боковая полоса); набор верхних боковых колебаний с частотами $(\omega_n + \Omega_k)$, амплитудами $\frac{A_0 M C_k}{2}$ и начальными фазами $(\varphi_n + \gamma_k)$ (верхняя боковая полоса). Спектр дискретный.

Ω_N – наивысшая частота модуляции.

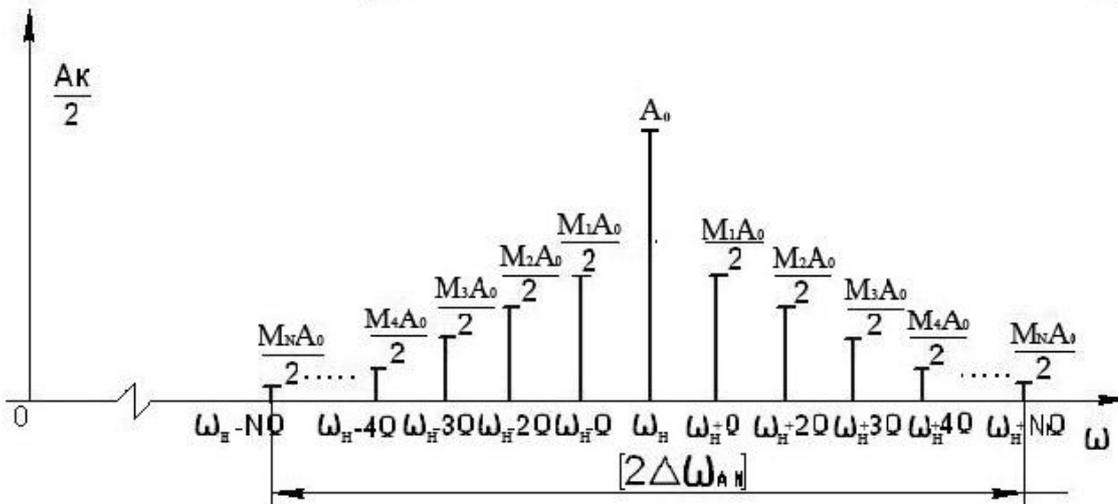
$M C_k = M_k$ – частичный (парциальный) коэффициент глубины модуляции, который характеризует степень влияния гармоники с частотой Ω_k на изменение огибающей радиосигнала.

Изобразим спектральную диаграмму управляющего колебания (а) и спектральную диаграмму этого радиосигнала (б).

а) спектральная диаграмма управляющего колебания



б) спектральная диаграмма модулированного колебания



$$[2\Delta\omega_{AM}] = [2\Delta\omega_s]$$

Вывод: ширина спектра АМК при модуляции несколькими гармониками определяется максимальной частотой модуляции и не зависит от того, содержатся ли в управляющем колебании гармоники с меньшей частотой.

Форма спектра АМ радиосигнала повторяет форму спектра управляющего колебания. Сам спектр радиосигнала отличается от спектра $s(t)$ сдвигом по оси частот на ω_n . Следовательно, при амплитудной модуляции происходит сдвиг спектра $s(t)$ по оси частот на величину ω_n .

§16. Радиосигнал с АМ импульсным колебанием.

Пусть $s(t) \Leftrightarrow \underline{S}(\omega)$

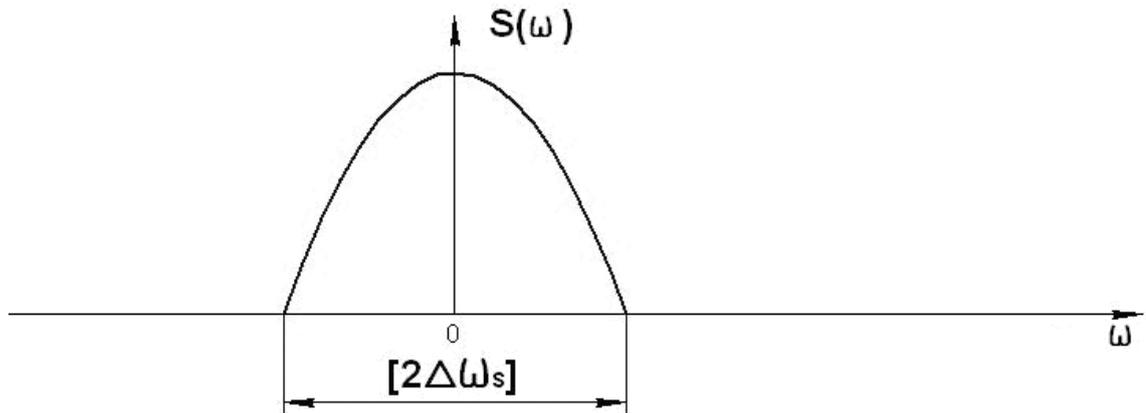
$$a_{AM}(t) = A_0[1 + M \cdot s(t)] \cdot \cos(\omega_H t + \varphi_H)$$

Найдем спектральную характеристику радиосигнала:

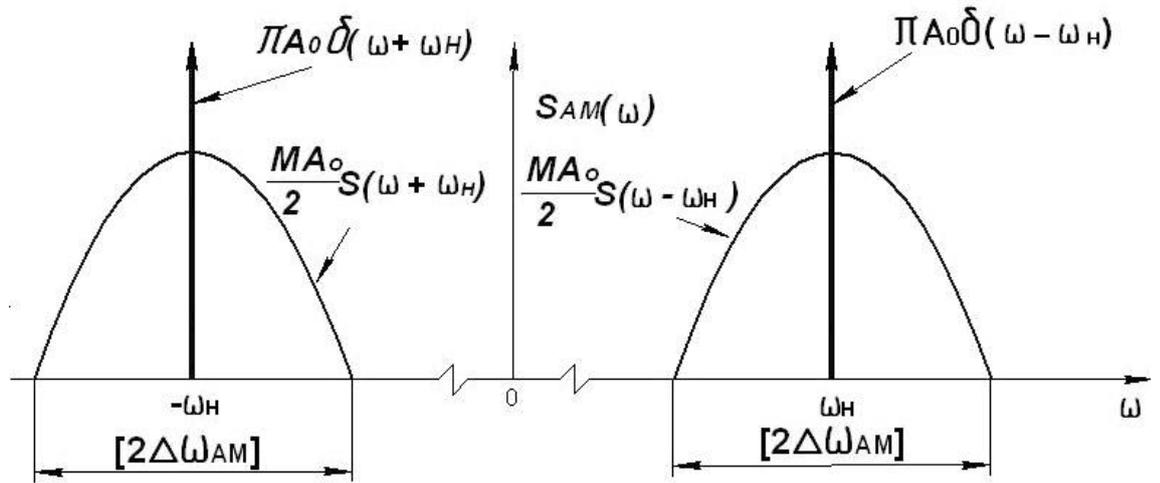
$$\begin{aligned} \underline{S}_{AM}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} a_{AM}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_H t + \varphi_H) \cdot e^{-j\omega t} dt + MA_0 \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \cos(\omega_H t + \varphi_H) \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{A_0 e^{j\varphi_H}}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_H)t} dt}_{2\pi\delta(\omega - \omega_H)} + \frac{A_0 e^{-j\varphi_H}}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_H)t} dt}_{2\pi\delta(\omega + \omega_H)} + \frac{MA_0 e^{j\varphi_H}}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_H)t} dt}_{\underline{S}(\omega - \omega_H)} + \\ &+ \frac{MA_0 e^{-j\varphi_H}}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j(\omega + \omega_H)t} dt}_{\underline{S}(\omega + \omega_H)} = \pi A_0 \delta(\omega - \omega_H) \cdot e^{j\varphi_H} + \pi A_0 \delta(\omega + \omega_H) \cdot e^{-j\varphi_H} + \frac{MA_0 e^{j\varphi_H}}{2} \cdot \underline{S}(\omega - \omega_H) + \\ &+ \frac{MA_0 e^{-j\varphi_H}}{2} \cdot \underline{S}(\omega + \omega_H) \end{aligned}$$

Изобразим модуль спектральной характеристики управляющего колебания (а) и модуль спектральной характеристика радиосигнала с АМ импульсным управляющим сигналом (б).

а) амплитудный спектр управляющего колебания



б) амплитудный спектр модулированного колебания



$$[2\Delta\omega_{AM}] = [2\Delta\omega_S]$$

Как видим, ширина спектра такого АМК равна ширине спектра управляющего колебания, а сам спектр радиосигнала смещен относительно спектра управляющего колебания на величину несущей частоты ω_n .

§17. Понятие угловой модуляции. ЧМК и ФМК. Радиосигнал с гармонической угловой модуляцией (УМ).

Аналитическое выражение радиосигнала с УМ.

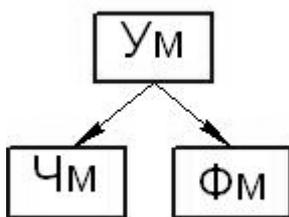
$$a_{\text{ум}}(t) = A_0 \cos[\underbrace{\omega_n t + \varphi(t) + \varphi_n}_{\psi(t)}] \quad (1), \text{ где } \psi(t) - \text{ полная фаза.}$$

При УМ вводится понятие мгновенной частоты сигнала:

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_n + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$$\omega(t) = \omega_n + \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2)$$

Из выражения (2) следует, что при изменении фазы колебания $\varphi(t)$ меняется мгновенная частота $\omega(t)$ и наоборот. Это позволяет говорить о двух разновидностях угловой модуляции: частотной и фазовой.



Условимся считать радиосигнал частотно модулированным, если по закону управляющего колебания меняется мгновенная частота.

$$\omega(t) \sim s(t)$$

$$\omega(t) = \omega_n + \omega_d \cdot s(t) \quad (3)$$

ω_n – средняя частота радиосигнала,

ω_d – коэффициент, учитывающий влияние $s(t)$ на изменение $\omega(t)$, – девиация частоты (отклонение от средней частоты).

С учетом выражения (2):

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_d s(t)$$

$$\varphi(t) \sim \int s(t) dt .$$

Как видим, при изменении мгновенной частоты по закону $s(t)$, одновременно изменяется и фаза по закону $\int s(t)dt$.

Условимся называть фазомодулированным колебанием такой радиосигнал, у которого по закону управляющего колебания меняется фаза.

$$\varphi(t) \sim s(t)$$

$$\varphi(t) = \varphi_D \cdot s(t) \quad (4)$$

φ_D – девиация фазы.

$$\omega(t) \sim \frac{ds(t)}{dt}.$$

Как видим, при изменении фазы по закону $s(t)$, одновременно изменяется мгновенная частота по закону $\frac{ds(t)}{dt}$.

Рассмотрим частный случай гармонической угловой модуляции, когда управляющее колебание гармоническое.

$$s(t) = \cos(\Omega t + \gamma)$$

1) ЧМК.

$$\omega(t) = \omega_H + \omega_D \cdot \cos(\Omega t + \gamma)$$

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t)dt + \varphi_H = \omega_H t + \underbrace{\frac{\omega_D}{\Omega} \cdot \sin(\Omega t + \gamma)}_{\varphi(t)} + \varphi_H$$

$$\varphi(t) = \underbrace{\frac{\omega_D}{\Omega}}_{\varphi_D} \cdot \sin(\Omega t + \gamma)$$

При ЧМ по закону косинуса в радиосигнале существует и ФМ по закону синуса.

$$\varphi_D = \frac{\omega_D}{\Omega} - \text{девиация фазы.}$$

Будем обозначать по-другому девиацию фазы:

$$\varphi_D = m = \frac{\omega_D}{\Omega} - \text{индекс угловой модуляции}$$

Аналитическое выражение радиосигнала с гармонической ЧМ по закону косинуса:

$$a_{\text{чм}}(t) = A_0 \cos[\omega_H t + m \cdot \sin(\Omega t + \gamma) + \varphi_H]$$

2) ФМК.

$$\varphi(t) = m \cdot \cos(\Omega t + \gamma)$$

$$\psi(t) = \omega_H t + m \cdot \cos(\Omega t + \gamma) + \varphi_H$$

Аналитическое выражение радиосигнала с гармонической ФМ по закону косинуса.

$$a_{\text{фм}}(t) = A_0 \cos[\omega_H t + m \cdot \cos(\Omega t + \gamma) + \varphi_H]$$

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_H - \underbrace{m\Omega}_{\omega_D} \sin(\Omega t + \gamma)$$

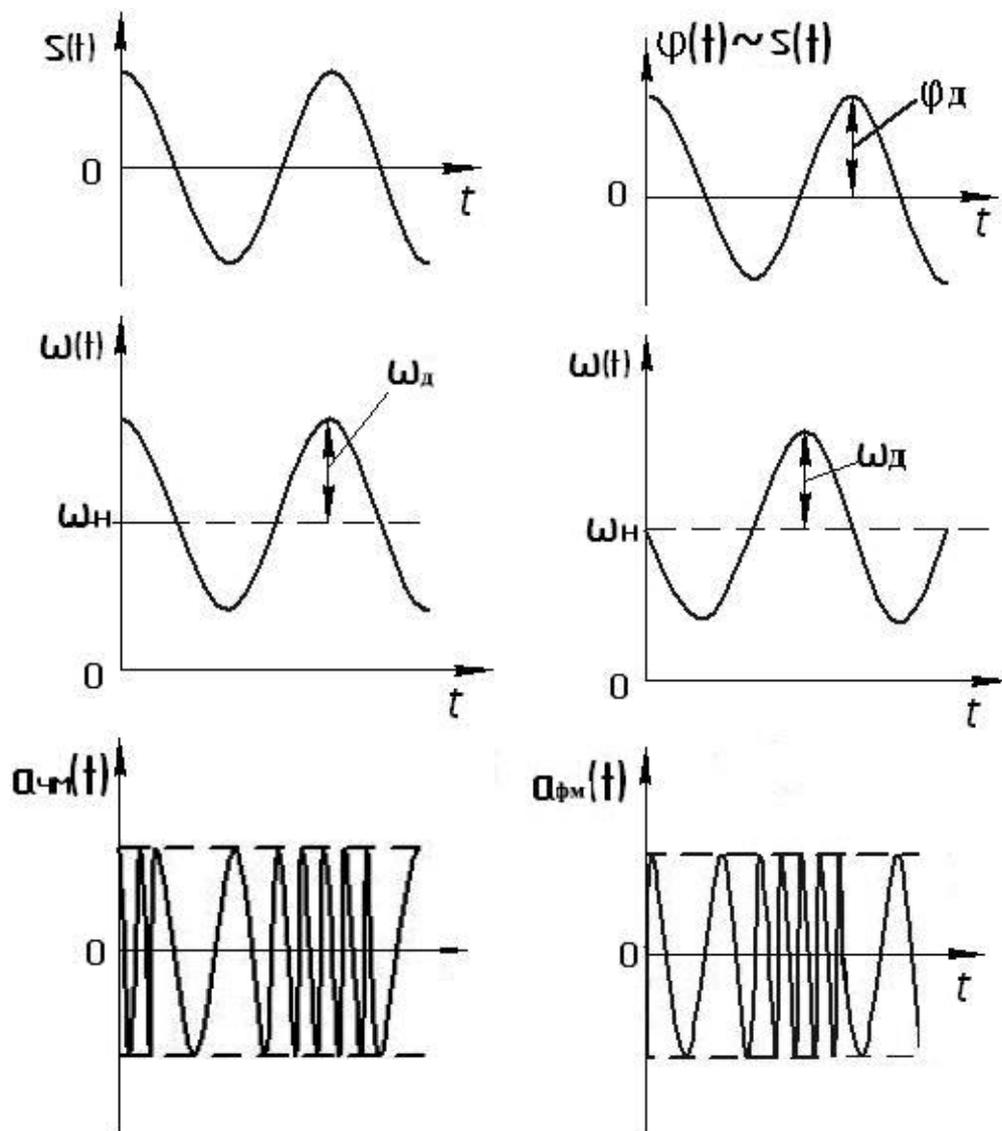
При фазовой модуляции по закону косинуса в радиосигнале присутствует частотная модуляция по закону минус синуса:

$$\omega(t) = \omega_H - \omega_D \sin(\Omega t + \gamma)$$

Изобразим временные диаграммы ЧМК и ФМК:

ЧМК

ФМК



Как видим, форма радиосигналов с гармонической ЧМ и ФМ совпадает. Отличаются эти колебания лишь сдвигом во времени на четверть периода модуляции.

Заметим, что при любом другом законе модуляции (не гармоническом) формы колебаний ФМК и ЧМК будут различны.

§18. Спектр радиосигнала с гармонической угловой модуляцией.

1) Частотная модуляция.

$$s(t) = \cos(\Omega t + \gamma) \quad (1)$$

$$\omega(t) = \omega_H + \omega_D \cos(\Omega t + \gamma) \quad (2)$$

$$a_{\text{чм}}(t) = A_0 \cos[\omega_H t + m \cdot \sin(\Omega t + \gamma) + \varphi_H] \quad (3)$$

Ответ на вопрос о спектре радиосигнала с гармонической ЧМ не является очевидным: с одной стороны мгновенная частота $\omega(t)$ меняется непрерывно в пределах $[\omega_H - \omega_D; \omega_H + \omega_D]$, поэтому кажется, что спектр такого радиосигнала является сплошным с шириной $2\omega_D$.

С другой стороны такой радиосигнал является периодическим, поэтому его спектр должен быть дискретным. Чтобы доказать это, раскроем выражение (3), приняв для упрощения обе начальные фазы равными нулю.

После разложения этого колебания в ряд Фурье получим:

$$\begin{aligned} a_{\text{чм}}(t) &= A_0 \cos[m \cdot \sin \Omega t] \cdot \cos \omega_H t - A_0 \sin[m \cdot \sin \Omega t] \cdot \sin \omega_H t = \\ &= A_0 J_0(m) \cos \omega_H t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(m) \cos(\omega_H - k\Omega)t + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(m) \cos(\omega_H + k\Omega)t \quad (4) \quad (\text{без вывода}) \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения в ряд Фурье выражены через функции Бесселя k -го порядка от аргумента m , $J_k(m)$.

Из выражения (4) следует, что в состав радиосигнала с гармонической ЧМ входят:

- колебание с несущей частотой ω_H и амплитудой $A_0 J_0(m)$,
- бесконечный набор нижних боковых колебаний с амплитудами $A_0 J_k(m)$ и частотами $\omega_H - k\Omega$,
- бесконечный набор верхних боковых колебаний с амплитудами $A_0 J_k(m)$ и частотами $\omega_H + k\Omega$.

Следовательно, спектр радиосигнала с гармонической ЧМ является дискретным, а ширина спектра в общем случае бесконечна.

Из математики известно, что функции Бесселя $J_k(m)$ являются знакопеременными и обладают таким свойством, что их значения становятся много меньше 1 при $k > m + 1$, следовательно, в спектре радиосигнала с гармонической ЧМ, ввиду малости, можно пренебречь боковыми составляющими с номером $k > m + 1$. Значит, число боковых составляющих справа и слева от несущей будет равно $m + 1$, где m – индекс угловой модуляции, $m = \frac{\omega_D}{\Omega}$.

Исходя из этого введем понятие практической или действительной ширины спектра ЧМК.

$$[2\Delta\omega_{\text{чм}}] = 2(m+1)\Omega.$$

Оценим среднюю мощность радиосигнала с гармонической частотой модуляции. Для периодического колебания:

$$P_{\text{cp}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} = \frac{A_0^2}{2} \left[\underbrace{J_0^2(m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(m)}_1 \right]$$

(по свойству функции Бесселя)

$$P_{\text{cp}} = \frac{A_0^2}{2} = P_{\text{нес}}$$

Выясним, как распределена средняя мощность между составляющими. Можно исследовать два крайних случая: быстрой и медленной ЧМ.

- Быстрая частотная модуляция, $m \ll 1, \Omega \gg \omega_D$.

$$J_k(m) \approx 0, k = 2, 3, \dots$$

$$J_0(m) \approx 1; J_1(m) \approx \frac{m}{2} \ll 1$$

$$[2\Delta\omega_{\text{чм}}] \approx 2\Omega$$

$$\eta = \frac{\sum P_{\text{бок}}}{P_{\text{cp}}} \ll 1$$

Эффективность модуляции много меньше 1.

При быстрой модуляции распределение мощности энергетически невыгодно. На практике она не применяется.

- Медленная угловая модуляция, $m \gg 1, \Omega \ll \omega_D$.

$$[2\Delta\omega_{\text{чм}}] \approx 2m\Omega = 2\omega_D$$

Если учесть, что функция $J_0(m)$, определяющая амплитуду несущего колебания, является знакопеременной, то всегда можно подобрать значение m , при котором $J_0(m)$ обращается в ноль, и тогда в спектре будут присутствовать только боковые колебания.

$$J_0(m) = 0$$

$$\eta = \frac{\sum P_{\text{бок}}}{P_{\text{cp}}} = 1 - \text{энергетически медленная угловая модуляция выгодна.}$$

2) Фазовая модуляция.

Если провести анализ спектра радиосигнала с фазовой гармонической модуляцией, то получится почти такое же разложение, как и при ЧМ. Амплитудные спектры при ЧМК и ФМК одинаковы, отличаются лишь фазовые спектры, следовательно, справедливы все рассуждения о числе учитываемых боковых колебаний и ширине спектра. Практическая ширина спектра ФМК:

$$[2\Delta\omega_{\text{фм}}] \approx 2(m+1)\Omega$$

Различие спектра ЧМК и ФМК проявляется при изменении Ω . Рассмотрим случай медленной угловой модуляции ($m \gg 1$):

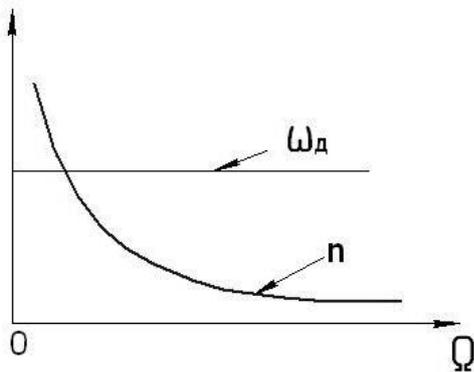
ЧМК

Неизменным параметром является девиация частоты: $\omega_D = const$ (не зависит от Ω)

$$n \approx m = \frac{\omega_D}{\Omega} - \text{число нижних (верхних)}$$

боковых составляющих в спектре

$$[2\Delta\omega_{\text{чм}}] \approx 2\omega_D = const$$



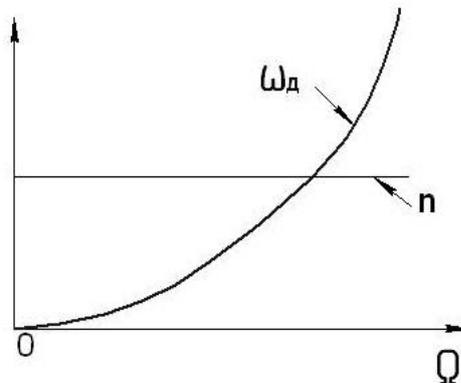
ФМК

Неизменным параметром является девиация фазы: $\varphi_D = m = const$ (не зависит от Ω)

$$\omega_D = m\Omega - \text{зависит от } \Omega$$

$[2\Delta\omega_{\text{фм}}] \approx 2m\Omega$ - изменяется при изменении частоты Ω

$$n \approx m - \text{постоянно}$$



§19. Применение преобразование Гильберта для однозначного определения огибающей, частоты и фазы радиосигнала.

В общем виде любой радиосигнал представляется формулой:

$$a(t) = A(t) \cos \psi(t) \quad (1)$$

Выражение (1) не дает однозначного определения понятий:

$A(t)$ – огибающей радиосигнала,

$\Psi(t)$ – полной фазы радиосигнала.

Можно подобрать бесконечно много пар параметров $A(t)$ и $\Psi(t)$, удовлетворяющих уравнению (1). Для однозначного определения этих понятий условились применять преобразование Гильберта. Преобразование Гильберта для радиосигнала $a(t)$, будем обозначать $\hat{a}(t)$.

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2) - \text{прямое преобразование Гильберта};$$

$$a(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{a}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3) - \text{обратное преобразование Гильберта};$$

Условились, что:

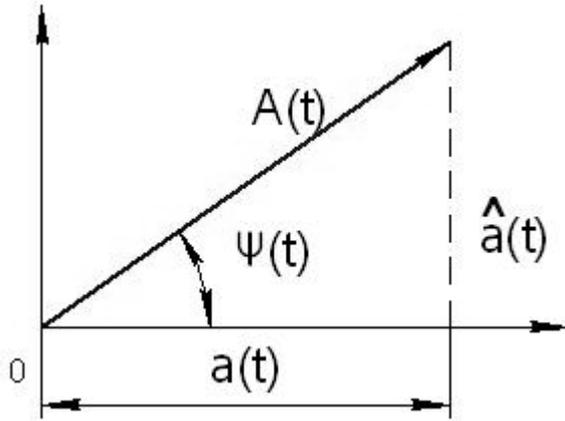
$$A(t) = \sqrt{a^2(t) + \hat{a}^2(t)} \quad (4) - \text{огибающая радиосигнала};$$

$$\psi(t) = \text{arctg} \frac{\hat{a}(t)}{a(t)} \quad (5) - \text{полная фаза};$$

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \psi(t) = \omega_H + \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (6);$$

ω_H - средняя частота радиосигнала.

Геометрическое представление преобразования Гильберта.



Примеры:

1) Преобразование Гильберта гармонического сигнала:

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_H t + \varphi_H)$$

$$\hat{a}(t) = A_0 \sin(\omega_H t + \varphi_H)$$

$$A(t) = \sqrt{a^2(t) + \hat{a}^2(t)} = A_0 - \text{соответствует интуитивному представлению об огибающей.}$$

2) Преобразование Гильберта от суммы гармонических колебаний:

$$a(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k t + \gamma_k) = \sum_{k=1}^N a_k(t),$$

где $a_k(t) = A_k \cos(\omega_k t + \gamma_k)$

$$\hat{a}_k(t) = A_k \sin(\omega_k t + \gamma_k)$$

$$\hat{a}(t) = \sum_{k=1}^N \hat{a}_k(t)$$

$$A(t) = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^N a_k(t)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N \hat{a}_k(t)\right)^2}$$

$$\psi(t) = \text{arctg} \frac{\sum_{k=1}^N \hat{a}_k(t)}{\sum_{k=1}^N a_k(t)}$$

Преобразование Гильберта от суммы гармонических колебаний представляет собой сумму гармонических колебаний с теми же частотами и амплитудами. Фазы этих колебаний отличаются на $-\pi/2$. Это означает, что амплитудный спектр преобразования Гильберта совпадает с амплитудным спектром исходного радиосигнала, а фазовый спектр отличается сдвигом на $-\pi/2$.

3) преобразование Гильберта от радиосигнала $a(t)$, с непрерывным спектром.

$$a(t) \Leftrightarrow \underline{S}_a(\omega)$$

$$\underline{S}_a(\omega) = S_a(\omega) e^{j\varphi_a(\omega)}$$

$$\hat{a}(t) \Leftrightarrow \underline{S}_{\hat{a}}(\omega) = S_{\hat{a}}(\omega) e^{j\varphi_{\hat{a}}(\omega)}$$

В соответствии с примером (2) амплитудный спектр преобразования Гильберта совпадает с амплитудным спектром исходного радиосигнала, а фазовый сдвинут на $-\pi/2$.

$$S_{\hat{a}}(\omega) = S_a(\omega)$$

$$\varphi_{\hat{a}}(\omega) = \varphi_a(\omega) - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{При } \omega > 0: \underline{S}_{\hat{a}}(\omega) = S_a(\omega) e^{j\varphi_a(\omega)} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j}$$

$$\underline{S}_{\hat{a}}(\omega) = -j\underline{S}_a(\omega)$$

При $\omega < 0$: $\varphi_{\hat{a}}(-\omega) = -\varphi_{\hat{a}}(\omega) = -\varphi_a(\omega) + \frac{\pi}{2}$

$$\underline{S}_{\hat{a}}(\omega) = j\underline{S}_a(\omega)$$

$$\underline{S}_{\hat{a}}(\omega) = \begin{cases} -j\underline{S}_a(\omega), & \omega > 0 \\ j\underline{S}_a(\omega), & \omega < 0 \end{cases}$$

§20. Комплексное представление радиосигнала. Аналитический сигнал и его свойства.

Пусть имеется радиосигнал:

$$a(t) = A(t) \cos \psi(t) = A(t) \cos[\omega_n t + \varphi(t) + \varphi_n]$$

Будем называть комплексным представлением радиосигнала:

$$\underline{Z}(t) = a(t) + j\hat{a}(t)$$

Радиосигнал $a(t) = \text{Re } \underline{Z}(t)$, а $\hat{a}(t) = \text{Im } \underline{Z}(t)$

$$|\underline{Z}(t)| = \sqrt{a^2(t) + \hat{a}^2(t)} = A(t) - \text{огибающая радиосигнала}$$

$$\arg \underline{Z}(t) = \text{arctg} \frac{\hat{a}(t)}{a(t)} = \psi(t)$$

$$\underline{Z}(t) = A(t)e^{j\psi(t)}$$

$$\psi(t) = \omega_n t + \varphi(t) + \varphi_n$$

$$\underline{Z}(t) = A(t)e^{j[\varphi(t)+\varphi_n]} \cdot e^{j\omega_n t}$$

$$\underline{Z}(t) = \underline{A}(t)e^{j\omega_n t}$$

$$\underline{A}(t) = A(t)e^{j[\varphi(t)+\varphi_n]} - \text{комплексная огибающая радиосигнала.}$$

Параметр комплексная огибающая интересен тем, что содержит одновременно информацию и об амплитудной, и об угловой модуляции радиосигнала.

Принято называть комплексное представление радиосигнала $\underline{z}(t)$ аналитическим сигналом.

Свойства аналитического сигнала.

1) Спектр аналитического сигнала сосредоточен только в области положительных частот.

$$\underline{Z}(t) = a(t) + j\hat{a}(t)$$

$$\underline{S}_{\underline{Z}}(\omega) = \underline{S}_a(\omega) + j\underline{S}_{\hat{a}}(\omega) = \begin{cases} 2\underline{S}_a(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

$$\underline{Z}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \underline{S}_{\underline{Z}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\underline{Z}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \underline{S}_a(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

2) Связь спектральных характеристик аналитического сигнала и комплексной огибающей радиосигнала.

$$\underline{S}_{\underline{Z}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{Z}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(t) e^{j\omega_n t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{A}(t) e^{-j(\omega - \omega_n)t}}_{\underline{S}_{\underline{A}}(\omega - \omega_n)} dt$$

$$\underline{S}_{\underline{Z}}(\omega) = \underline{S}_{\underline{A}}(\omega - \omega_n)$$

$$\underline{S}_{\underline{A}}(\omega) = \underline{S}_{\underline{Z}}(\omega + \omega_n)$$

3) Связь спектральных характеристик радиосигнала и его комплексной огибающей (без вывода).

$$\underline{S}_a(\omega) = \frac{1}{2} \underline{S}_A(\omega - \omega_n) + \frac{1}{2} \underline{S}_A^*(-\omega - \omega_n)$$

4) Энергия аналитического сигнала.

$$W_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}_z(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega} 4S_a^2(\omega) d\omega_z = 2 \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega} S_a^2 \omega d\omega}_{W_a} = 2W_a$$

Энергия аналитического сигнала W_z в два раза больше энергии исходного радиосигнала W_a .

§21. Понятие дискретного сигнала.

Математическое описание.

Спектральное представление.

В отличие от аналогового сигнала $s(t)$, который определен во всех точках временной оси, дискретный сигнал определен лишь в дискретных точках $\dots, t_3, t_2, t_1, t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$.

Чаще всего отсчетные точки на временной оси берутся через равный интервал T . При этом любая отсчетная точка $t_n = nT$, ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

С учетом сказанного, обозначим дискретное колебание как $s_T(t)$.

Одной из моделей дискретного колебания можно считать результат прохождения аналогового колебания $s(t)$ через временной дискретизатор (ВД).

Представим ВД в виде идеального импульсного элемента (или ключа), который замыкается через равные промежутки времени T на бесконечно малое время

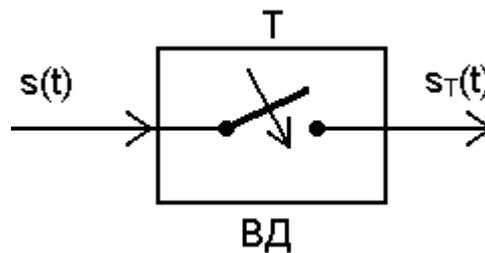


Рис. 1.

В каждый момент замыкания $t_n = nT$ на выходе такого ВД образуется δ -импульс, площадь которого равна значению входного аналогового сигнала в момент замыкания

$$s(nT) = s(t) \Big|_{t=nT}$$

При таком подходе математическая модель дискретного сигнала имеет вид:

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \delta(t-nT) \quad (1)$$

Временные диаграммы аналогового сигнала $s(t)$ и полученного из него дискретного сигнала $s_T(t)$ представлены на рисунке 2.

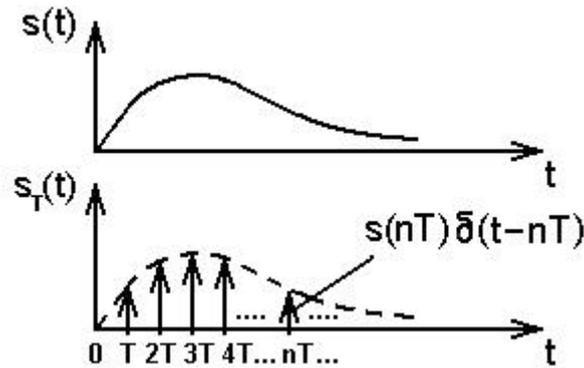


Рис. 2.

Для большей наглядности δ - импульсы на рисунке 2 изображены в виде стрелок, высота которых пропорциональна площади соответствующего δ - импульса, т.е. отсчету аналогового сигнала $s(nT)$.

Очевидно, что в дискретном сигнале $s_T(t)$ содержится определенная информация об аналоговом сигнале $s(t)$, а именно информация о мгновенных значениях аналогового сигнала $\{s(nT)\}$. Заключается она в значениях площади соответствующих δ - импульсов. Однако, в общем случае утверждать, что дискретный сигнал содержит полную информацию об аналоговом сигнале, нельзя.

Учитывая, что входящие в выражение (1) δ - импульсы определены лишь в дискретных точках $t_n=nT$, перепишем выражение для $s_T(t)$ в виде:

$$s_T(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = s(t) \delta_T(t) \quad , \quad (2)$$

где $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ - периодическая последовательность δ - импульсов

Такое представление позволяет рассматривать дискретный сигнал как результат перемножения аналогового сигнала $s(t)$ и периодической последовательности δ - импульсов.

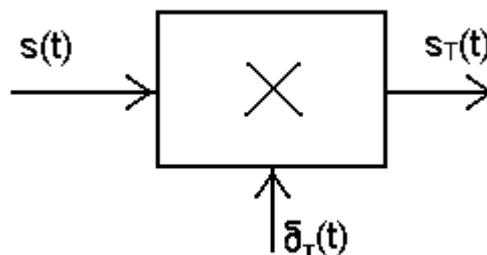


Рис. 3.

С учетом выражения (2) и свойств преобразования Фурье легко найти спектральную характеристику дискретного сигнала $s_T(t)$:

$$\underline{S}_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) e^{-jn\omega T} \quad (3)$$

§22. Связь спектральных характеристик дискретного и аналогового сигналов.

Обозначим спектральные характеристики аналогового сигнала $s(t)$ и полученного из него дискретного сигнала $s_T(t)$ соответственно $\underline{S}(\omega)$ и $\underline{S}_T(\omega)$, т.е.:

$$S(t) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \underline{S}(\omega)$$

$$S_T(t) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \underline{S}_T(\omega)$$

Используя свойства преобразования Фурье и вторую модель дискретного сигнала, запишем:

$$\begin{array}{ccc} S_T(t) = \underbrace{s(t) \delta_T(t)} & & \\ \downarrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \\ \underline{S}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} [\underline{S}(\omega) \otimes \underline{S}_{\delta_T}(\omega)] & & \end{array}$$

где \otimes - обозначение свертки двух функций;

$\underline{S}_{\delta_T}(\omega)$ - спектральная характеристика периодической последовательности $\delta_T(t)$.

Отсюда

$$\underline{S}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\omega - x) \underline{S}_{\delta_T}(x) dx \quad (4)$$

Представим $\delta_T(t)$ рядом Фурье в комплексной форме:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t},$$

где

$$\underline{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{2}{T} .$$

Тогда

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk \frac{2\pi}{T} t} ;$$

$$\underline{S}_{\delta_T}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - k \frac{2\pi}{T}) t} dt}_{2\pi \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})} ;$$

$$\underline{S}_{\delta_T}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}) . \quad (5)$$

Подставив (5) в (4) получим:

$$\underline{S}_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\omega - x) \delta(x - k \frac{2\pi}{T}) dx .$$

Окончательно с учетом строблирующего (или фильтрующего) свойства δ - импульса:

$$\underline{S}_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{S}(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \quad (6)$$

Выражение (6) показывает, что спектральная характеристика дискретного сигнала с точностью до коэффициента $\frac{1}{T}$ предствляет собой периодически повторяющуюся через интервал $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$ спектральную характеристику аналогового сигнала.

Здесь $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$ - частота дискретизации

Изобразим аналоговый и дискретный сигналы и их амплитудные спектры для случая, когда спектр аналогового колебания ограничен по частоте величиной Ω_c :

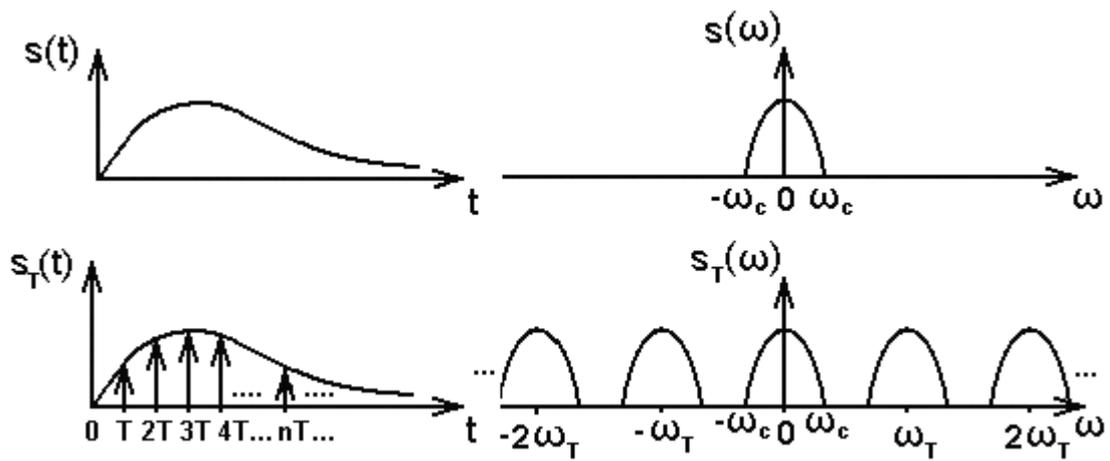


Рис. 4.

В приведенном примере, когда $\Omega T > 2\Omega_c$ или $(T < \pi/\Omega_c)$ спектр дискретного сигнала содержит полную информацию о спектре аналогового сигнала. Извлечь эту информацию, то есть восстановить аналоговый сигнал по дискретному сигналу, можно пропустив последний через идеальный ФНЧ с полосой пропускания $2\Delta\omega_{\text{ФНЧ}} = 2\Omega_c$. На рисунке 5 изображена АЧХ такого фильтра.

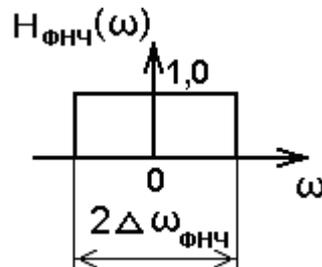


Рис. 5.

Очевидно, что восстановление аналогового сигнала с ограниченным спектром по дискретному сигналу возможно лишь при условии $\Omega T \geq 2\Omega_c$ или $T \leq \pi/\Omega_c$.

При невыполнении этого условия повторяющиеся части спектра дискретного сигнала частично перекрываются и восстановить аналоговый сигнал по дискретному без искажений нельзя.

§23. Восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам. Теорема Котельникова В.А.

Допустим, что дискретный сигнал $s_T(t)$ получен путем временной дискретизации аналогового сигнала $s(t)$, спектр которого ограничен частотой $\Omega_c = 2\pi f_c$

Интервал дискретизации выбираем из условия:

$$T = \frac{\pi}{\Omega_c} = \frac{1}{2f_c} \quad (7)$$

При этом, как показано в предыдущем параграфе, возможно полное восстановление аналогового сигнала из дискретного с помощью идеального фильтра нижних частот, передаточная функция которого имеет вид:

$$\underline{H}_{\text{ФНЧ}}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (8)$$

Импульсная характеристика такого фильтра:

$$\begin{aligned} g_{\text{ФНЧ}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}_{\text{ФНЧ}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi jt} \underbrace{(e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t})}_{2j \sin \omega_c t} = \frac{\omega_c \sin \omega_c t}{\pi \omega_c t} . \end{aligned}$$

$$g_{\text{ФНЧ}}(t) = \frac{1}{T} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \quad (9)$$

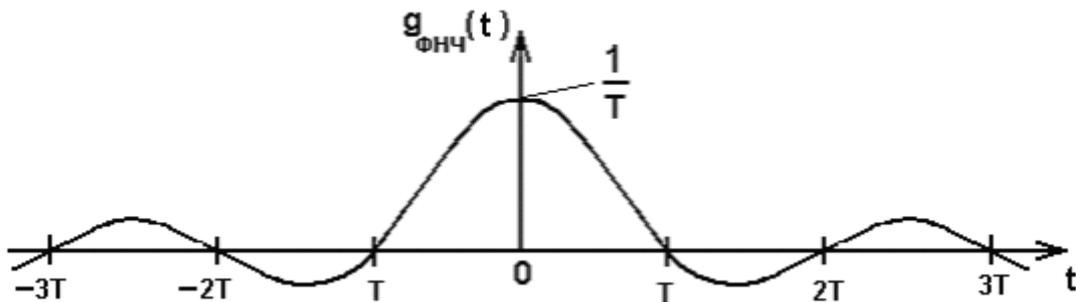


Рис. 6.

Заметим, что физическая реализация фильтра с такой импульсной характеристикой невозможна, так как реакция на δ -импульс, поданный на фильтр в момент времени $t=0$, не может начаться ранее этого момента.

Тем не менее, найдем реакцию идеального ФНЧ на дискретный сигнал, используя полученное ранее соотношение

$$\underline{S}_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{S}(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \quad (6)$$



Рис. 7.

Из рисунка 7 следует что:

$$\frac{1}{T} \underline{S}(\omega) = \underline{H}_{\text{ФНЧ}}(\omega) \cdot \underline{S}_T(\omega)$$

Используя свойства преобразования Фурье, запишем:

$$\begin{aligned} \underline{S}(\omega) &= T \underbrace{\underline{H}_{\text{ФНЧ}}(\omega)} \cdot \underline{S}_T(\omega) \\ \downarrow \uparrow & \quad \quad \quad \downarrow \uparrow \\ s(t) &= T g_{\text{ФНЧ}}(t) \otimes s_T(\omega). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$g_{\text{ФНЧ}}(t) = \frac{1}{T} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \quad \text{и} \quad s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \delta(t-nT),$$

получаем:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \delta(t-nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c (t-x)}{\omega_c (t-x)} \delta(x-nT) dx. \\ s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \frac{\sin \omega_c (t-nT)}{\omega_c (t-nT)} \quad (10) \end{aligned}$$

Полученное выражение (10), называемое рядом Котельникова В.А., представляет собой разложение аналогового сигнала $s(t)$ по системе ортогональных функций $\left\{ \frac{\sin \omega_c (t-nT)}{\omega_c (t-nT)} \right\}$.

Эти функции называются функциями отсчетов.

Коэффициенты разложения в ряде Котельникова В.А. являются отсчетами аналогового сигнала $s(nT)$, взятыми через интервал $T = \pi/\omega_c$

Из выражения (10) следует, что для восстановления аналогового сигнала $s(t)$ по его отсчетам $\{s(nT)\}$ необходимо каждый отсчет умножить на соответствующую функцию отсчетов $\left\{ \frac{\sin \omega_c (t-nT)}{\omega_c (t-nT)} \right\}$, а результаты перемножений сложить.

Заметим, что функции отсчетов по форме совпадают с импульсной характеристикой идеального ФНЧ и отличаются друг от друга лишь сдвигом во времени на величину, кратную T .

Результаты полученные в этом и предыдущих параграфах, позволяют сформулировать теорему отсчетов во временной области (теорему Котельникова В.А.):

- 1) Аналоговый сигнал $s(t)$, спектр которого ограничен частотой $\omega_c = 2\pi f_c$, полностью определяется своими отсчетами $\{s(nT)\}$, взятыми через интервал $T \leq \pi/\omega_c = 1/2f_c$.
- 2) Значения аналогового сигнала $s(t)$ в любой момент времени могут быть найдены по его дискретным отсчетам $\{s(nT)\}$ с помощью ряда Котельникова В.А.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \frac{\sin \omega_c (t - nT)}{\omega_c (t - nT)}$$

Примечания:

- 1) Теорему Котельникова В.А. можно применять лишь для сигналов $s(t)$, обладающих ограниченным спектром, т.е. для сигналов, бесконечно протяженных во времени. Все реальные сигналы имеют ограниченную длительность, т.е. имеют бесконечно протяженный спектр.
- 2) Реализация идеального фильтра нижних частот, необходимого для восстановления аналогового сигнала из дискретного, физически невозможна.
- 3) Математическая модель дискретного сигнала в виде последовательности δ - импульсов также физически не реализуема, и сигнал на выходе реального временного дискретизатора представляют собой последовательность импульсов конечной длительности.

Отсюда следует, что восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам в соответствии с теорией Котельникова В.А. на практике сопровождается неминуемыми искажениями.

На практике при расчетах в качестве длительности сигнала и ширины его спектра обычно выбирают активную длительность и активную ширину спектра сигнала, которые, как известно, соответствуют интервалам, где заключена большая часть (90%) энергии сигнала. Тогда число отсчетов аналогового сигнала $s(t)$, необходимых для его восстановления, можно записать в виде:

$$N = 1 + \frac{T_c}{T} = 1 + 2 f_c T_c \quad (11)$$

где T_c – активная длительность сигнала
 f_c – активная ширина спектра сигнала

Это число N является конечным и определяется так называемой базой сигнала $B = f_c T_c$. Для простых сигналов база $B \approx 1$, для сложных сигналов – $B \gg 1$.

Рассмотрим пример восстановления прямоугольного видеоимпульса длительностью T_c по его отсчетам, приняв активную ширину спектра $f_c = 1/T_c$. Тогда необходимое число отсчетов $N=3$,

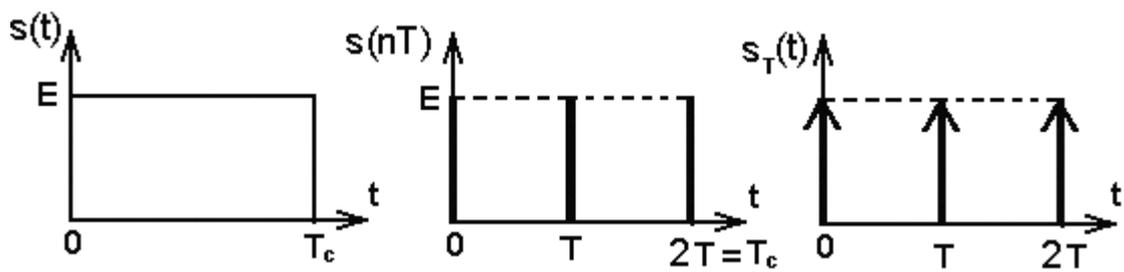


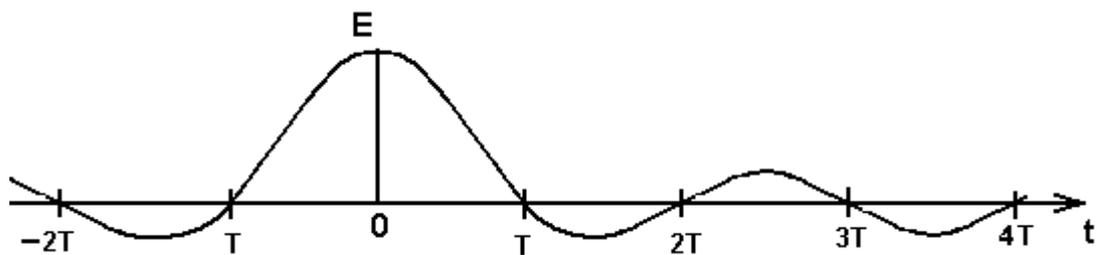
Рис. 8.

В соответствии с теоремой Котельникова В.А.:

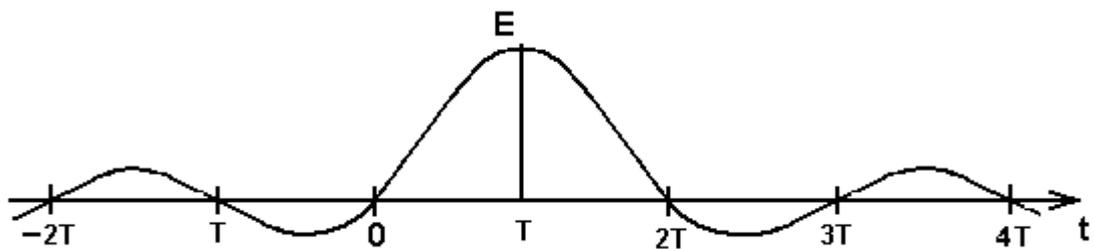
$$\begin{aligned}
 s(t) &\cong \frac{E \sin \omega_c t}{\omega_c t} + \frac{E \sin \omega_c (t-T)}{\omega_c (t-T)} + \frac{E \sin \omega_c (t-2T)}{\omega_c (t-2T)} = \\
 &= E \frac{\sin \frac{2\pi}{T_c} t}{\frac{2\pi}{T_c} t} + E \frac{\sin \frac{2\pi}{T_c} (t - \frac{T_c}{2})}{\frac{2\pi}{T_c} (t - \frac{T_c}{2})} + E \frac{\sin \frac{2\pi}{T_c} (t - T_c)}{\frac{2\pi}{T_c} (t - T_c)}
 \end{aligned}$$

На рисунке 9 показан результат восстановления прямоугольного видеоимпульса по трем его отсчетам при использовании идеального фильтра нижних частот.

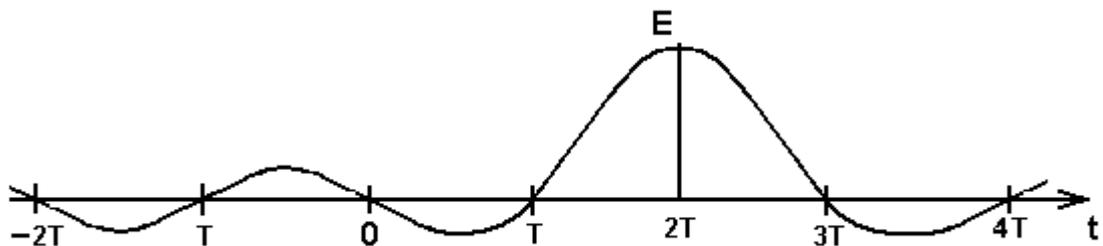
Отклик на первый отсчет:



Отклик на второй отсчет:



Отклик на третий отсчет:



Суммарный отклик идеального фильтра нижних частот.

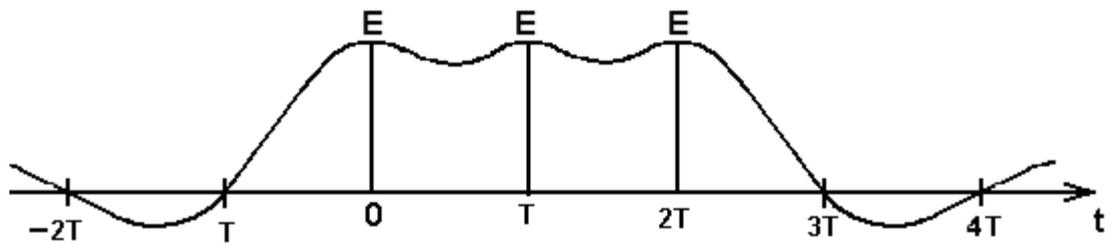


Рис. 9.

Как видим, восстановленный сигнал существенно отличается от исходного. При использовании для восстановления реального ФНЧ и реальных отсчетных импульсов искажения будут еще больше. Единственным средством их уменьшения может быть лишь увеличение числа отсчетов N . Однако это существенно усложнит процедуру дискретизации и последующего восстановления сигнала.