

Студенческая математическая олимпиада РГРТУ.

29 февраля 2020 года.

1. Из пунктов А и В навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости (в разные моменты времени), – равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно $4/3$. В момент встречи поезда имели равные скорости, а в пункты А и В прибыли одновременно. Найдите отношение ускорений поездов.

2. Найдите целую часть выражения $A = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}}}$, если $x \in \mathbb{N}$.

3. Определить, при каких значениях a уравнение $(1+x+x^2)^2 = \frac{a+1}{a-1}(1+x^2+x^4)$

имеет действительные корни, и найти их.

4. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет решение матричное уравнение $XA + \alpha X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1 \end{pmatrix}$. Найти эти решения.

5. Докажите, что кривая $2x^2 - xy + y - x + 5 = 0$ – гипербола. Найдите площадь четырехугольника, образованного асимптотами гиперболы и перпендикулярами, опущенными на асимптоты из точки касания касательной $4x + y + 5 = 0$ к ней.

6. Найти $f(x)$, ограниченную на любом конечном интервале, удовлетворяющую функциональному уравнению $f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x - x^2$.

7. Какой сектор необходимо вырезать из данного круга, чтобы из остатка можно было изготовить круглый конус наибольшего объема?

8. Пусть для некоторых матриц V , $X = X(V)$ размером $n \times n$, справедливо равенство $VX = 2V + PV$, где у матрицы P верхний левый элемент равен 1, а остальные нули и $\det V \neq 0$. Чему равно выражение $X^2 + 6E$, где E – единичная матрица.

9. Докажите, что отрезки $[AB]$, $A(0,0,0)$, $B(0,1,-1)$ и $[CD]$, $C(0,0,-1)$, $D(-1,0,0)$ не лежат в одной плоскости. Какие значения могут принимать расстояния между точками этих отрезков?

10. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\operatorname{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right) - \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{\frac{x^2}{2}}}$.

11. Доказать, что уравнение $f\left(\frac{x}{1+x}\right) - f(x) = x$ при $x \in [0, +\infty)$ не имеет непрерывных решений.

12. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2 + \left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}}$.

13. При каких значениях параметра a решение задачи Коши для уравнения $y'' + y = \cos^2 x$, $y(0) = \frac{1}{3}$, $y'(0) = a$ для всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $y(x) \geq 0$?

14. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^n} < \frac{9}{4}$.

Студенческая математическая олимпиада РГРТУ.

29 февраля 2020 года.

1. Из пунктов А и В навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости (в разные моменты времени), – равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно $4/3$. В момент встречи поезда имели равные скорости, а в пункты А и В прибыли одновременно. Найдите отношение ускорений поездов.

2. Найдите целую часть выражения $A = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}}}$, если $x \in \mathbb{N}$.

3. Определить, при каких значениях a уравнение $(1+x+x^2)^2 = \frac{a+1}{a-1}(1+x^2+x^4)$

имеет действительные корни, и найти их.

4. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет решение матричное уравнение $XA + \alpha X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1 \end{pmatrix}$. Найти эти решения.

5. Докажите, что кривая $2x^2 - xy + y - x + 5 = 0$ – гипербола. Найдите площадь четырехугольника, образованного асимптотами гиперболы и перпендикулярами, опущенными на асимптоты из точки касания касательной $4x + y + 5 = 0$ к ней.

6. Найти $f(x)$, ограниченную на любом конечном интервале, удовлетворяющую функциональному уравнению $f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x - x^2$.

7. Какой сектор необходимо вырезать из данного круга, чтобы из остатка можно было изготовить круглый конус наибольшего объема?

8. Пусть для некоторых матриц V , $X = X(V)$ размером $n \times n$, справедливо равенство $VX = 2V + PV$, где у матрицы P верхний левый элемент равен 1, а остальные нули и $\det V \neq 0$. Чему равно выражение $X^2 + 6E$, где E – единичная матрица.

9. Докажите, что отрезки $[AB]$, $A(0,0,0)$, $B(0,1,-1)$ и $[CD]$, $C(0,0,-1)$, $D(-1,0,0)$ не лежат в одной плоскости. Какие значения могут принимать расстояния между точками этих отрезков?

10. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\operatorname{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right) - \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{\frac{x^2}{2}}}$.

11. Доказать, что уравнение $f\left(\frac{x}{1+x}\right) - f(x) = x$ при $x \in [0, +\infty)$ не имеет непрерывных решений.

12. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2 + \left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}}$.

13. При каких значениях параметра a решение задачи Коши для уравнения $y'' + y = \cos^2 x$, $y(0) = \frac{1}{3}$, $y'(0) = a$ для всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $y(x) \geq 0$?

14. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^n} < \frac{9}{4}$.