НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1.1. Определения. Формы записи

Определение 1. Числа $1,2,3,\dots$ называются ***натуральными числами.***

Множество натуральных чисел обозначается буквой $\mathbf{N}$. Таким образом, по определению

$$\mathbf{N} \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел, записанных в их естественном порядке, называется также ***натуральным рядом***.

Если m и n – два произвольных натуральных числа и m предшествует n (m стоит раньше n) в натуральном ряду, то говорят, что m меньше n и пишут $m < n$. Для любых двух натуральных чисел m, n имеет место одно и только одно из трех отношений: $m < n$, $m = n$, $m > n$.

Натуральные числа можно складывать и умножать. При этом вновь получается натуральное число, то есть для любых $m,n \in \mathbf{N} : (m+n) \in \mathbf{N}$ и $m \cdot n \in \mathbf{N}$. Желая подчеркнуть это, говорят, что множество натуральных чисел ***замкнуто*** относительно операций сложения и умножения.

Операция вычитания $m - n$ на множестве натуральных чисел определена только для таких чисел m, n, которые связаны неравенством m>n. В этом случае $(m-n) \in \mathrm{N}$, но противоположное число $(n-m) \notin \mathbf{N}$. Разделить одно натуральное число на другое можно лишь при условии, что делимое m кратно делителю n, т.е. $\exists k \in \mathrm{N} : m = n \cdot k$. Например, если $m = 6$, а $n = 3$, то $m - n = 6 - 3 = 3$, т.е. $(m-n) \in \mathbf{N}$, но $n - m = 3 - 6$ и $(n-m) \notin \mathbf{N}$; $\dfrac{m}{n} = \dfrac{6}{3} = 2$ и $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{N}$, но $\dfrac{n}{m} = \dfrac{3}{6}$ и $\dfrac{n}{m} \notin \mathbf{N}$.

Наряду с множеством натуральных чисел $\mathbf{N}$ в математике часто рассматривают множество $\mathbf{N}_0$ – множество натуральных чисел, дополненное нулем. Оно называется ***расширенным***

множеством натуральных чисел, а также ***расширенным натуральным рядом***:

$$\mathbf{N}_0 \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{0}\} \cup \mathbf{N} = \{\, 0, 1, 2, 3, \dots \,\}.$$

Для любого $n \in \mathbf{N}_0$ справедливы равенства

$$n + 0 = n, \qquad\qquad n \cdot 0 = 0,$$

в частности $0 + 0 = 0$ и $0 \cdot 0 = 0$.

Операции сложения и умножения на множестве $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_0$ удовлетворяют следующим свойствам.

Переместительное свойство (свойство коммутативности)

1. $m + n = n + m$. **1.** $m \cdot n = n \cdot m$.

Сочетательное свойство (свойство ассоциативности)

2. $m + (n + k) = (m + n) + k$ **2.** $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$

Распределительное свойство (свойство дистрибутивности)

3. $(m + n)k = mk + nk$.

Определение 2. Числа вида $-n$, где n – натуральное число, называются ***целыми отрицательными числами***. Множество $\{\dots, -n, -n+1, \dots, -2, -1\,\}$ обозначается буквой $\mathbf{Z}^-$.

Числа n, $n \in \mathbf{N}$ и $-n$, $-n \in \mathbf{Z}^-$ называются противоположными числами.

Определение 3. Множество, состоящее из отрицательных целых чисел, нуля и натуральных чисел, называется ***множеством целых чисел*** и обозначается буквой $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Z}^- \bigcup \{0\} \bigcup \mathrm{N}.$$

Элементы множества $\mathbf{Z}$ называются ***целыми числами***. Множество целых положительных чисел, то есть натуральных чисел, будем обозначать также буквой $\mathbf{Z}^+$.

Множество целых чисел замкнуто относительно трех операций: сложения, умножения и вычитания. Это означает, что сумма, произведение и разность любых двух целых чисел являются целым числом. Имеют место включения $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Z}$.

В десятичной системе счисления запись натурального числа m осуществляется с помощью цифр $0,1,2,\ldots,9$ и имеет в сокращенной форме следующий вид:

$$m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0},$$

а в развернутой –

$$m = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Здесь $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – цифры от 0 до 9, причем $a_n \neq 0$. В приведенной записи числа m цифра a_0 определяет число единиц, a_1 – число десятков, a_2 – число сотен и т.д. Это означает, что позиция цифры a_k в сокращенной записи $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_k \ldots a_1 a_0}$ определяет степень k числа 10 в развернутой записи, т.е.

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_k \ldots a_1 a_0} =$$
$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_k \cdot 10^k + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

1.2. Деление натуральных и целых чисел. Признаки делимости

1.2.1. Определения

Определение 1. Натуральное число m делится на натуральное число n, если существует натуральное число k такое, что $m = n \cdot k$.

Если m делится на n (n делит m, n является делителем числа m), будем писать $m \,\vdots\, n$. Например, запись $24 \,\vdots\, 6$ означает, что натуральное число 24 делится нацело на 6 или что существует $k \in \mathbf{N}$ $(k = 4)$ такое, что $24 = 6 \cdot k$. Очевидно, что всякое натуральное число m, отличное от 1, делится на 1 и на самого себя. Отметим, что 0 делится на любое целое число n, отличное от нуля, и при этом $0 : n = 0$.

Определение 2. Натуральное число m, большее единицы, называется ***простым***, если оно имеет только два делителя: 1 и само число m.

Если натуральное число имеет три и более делителей, то оно называется ***составным.***

Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 являются простыми, так как делителями каждого из них являются только 1 и само число. Числа 6, 72, 234, напротив, являются составными. Число 6 имеет четыре делителя (1, 2, 3, 6), натуральное число 72 имеет 11 натуральных делителей, а число 234 – 10 натуральных делителей.

Как простых, так и составных чисел в натуральном ряду бесконечно много. Бесконечность множества простых чисел легко доказывается методом от противного. Действительно, допустим, что множество простых чисел конечно и что это числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Тогда любое число $m \in \mathbf{N}$ и отличное от 1 и чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$ должно быть составным. В частности, составным должно быть число $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$. Оно не совпадает ни с одним из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, больше каждого из них и как составное должно делиться хотя бы на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Но m не делится ни на одно из этих чисел. Это означает, что построенное число m является простым, и поэтому предположение о конечности множества простых чисел неверно, т.е. ***множество простых чисел бесконечно***.

Получить ряд последовательных простых чисел конечной, но сколь угодно большой длины можно с помощью простейшего алгоритма, названного по имени его создателя ***решетом Эратосфена.***[1] Основан он на последовательном, пошаговом вычеркивании всех составных чисел, кратных выделенному на данном шаге простому числу.

---

[1] Эратосфен Киренский (276 – 194 до н.э.) - древнегреческий ученый; в области математики известен тем, что нашел простой способ выделения простых чисел из натурального ряда (решето Эратосфена).

Первой из натурального ряда вычеркивается единица, не являющаяся простым числом.

Шаг 1. 2 – простое число. Зачёркиваются все числа, кратные 2, т.е. 4, 6, 8, …. После этого шага в натуральном ряде останутся только нечётные числа (исключая число 2).

Шаг 2. Первое не зачёркнутое число 3 – простое. Теперь зачёркиваются числа, которые следуют за 3 и делятся на 3, т.е. 9, 15,21,….

Шаг 3. Следующее за 3 не зачёркнутое число 5 – простое. Зачёркиваем все числа, кратные 5. Среди не зачёркнутых чисел в первой «сотне» осталось только 5 таких чисел: 25, 35, 55, 85, 95.

Продолжая этот процесс дальше, получаем необходимое множество простых чисел. Уместно заметить, что уже после следующего, четвертого шага вычеркивания всех чисел, кратных 7, в отрезке натурального ряда от 1 до 100 останутся только простые числа. При этом на четвертом шаге придется зачеркнуть всего три числа, кратных 7: 49, 77 и 91 (проверьте!). В результате получим первые 25 простых чисел:

2	5	11	17	23	29		41	47	53	59		71		83	89		
3	7	13	19		31	37	43			61	67	73	79			97.	

Они записаны в порядке возрастания, но не в одной строке, а в двух. Сделано это специально по следующей причине. Можно заметить, что в каждой строке последующее число (начиная с 11 и 13) получается из предыдущего прибавлением к нему числа, кратного 6. В свою очередь, в каждом столбце, начиная со второго, простые числа принадлежат одному из множеств $\{6n-1,\ n \in N\}$ и $\{6n+1,\ n \in N\}$. Отмеченное свойство справедливо и для других простых чисел, больших 97, а именно: если p – простое число, то оно имеет вид $6n-1, n \in N$ или $6n+1, n \in N$. Следует заметить, что не каждое число указанного вида является простым. Это видно уже из приведенного списка первых 25 простых чисел.

Найдем таким способом, т.е. среди чисел $6n-1$ и $6n+1$ при соответствующих значениях $n \in N$, простые числа из отрезка натурального ряда: 101, 102, … , 200.

n:	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$6n-1$:	101	107	113	-	-	131	137	-	149	-	-	167
$6n+1$:	103	109	-	-	127	-	139	-	151	157	163	-
n:	29	30	31	32	33							
$6n-1$:	173	179	-	191	197							
$6n+1$:	-	181	-	193	199.							

Из второй “сотни” натуральных чисел выделено 21 простое число, т.е. на 4 меньше, чем из первой “сотни”. Это общая закономерность: чем дальше от начала натурального ряда, тем ниже в среднем плотность простых чисел в отрезке натурального ряда фиксированной длины.

Количество простых чисел, не превосходящих данное натуральное число n, обозначается $\pi(n)$. *Так, например,* $\pi(10)=4$, $\pi(50)=15$, $\pi(100)=25$, $\pi(200)=46$, $\pi(1000)=168$, $\pi(10^6)=78498$.

Выдающийся русский ученый Пафнутий Львович Чебышев (1821 – 1894) установил, что при очень больших значениях n: $\pi(n) \approx \dfrac{n}{\ln n}$, *так что* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(n)}{\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)} = 1.$

Отметим, что простые числа, разность между которыми равна 2, называются ***близнецами***. *Например, простые числа 5 и 7, 11 и 13, ..., 191 и 193, 197 и 199 - близнецы.*

Составное число можно представить в виде произведения своих делителей различными способами. Например, $72 = 2\cdot 36 = 4\cdot 18 = 6\cdot 12 = 8\cdot 9$, а также $72 = 2\cdot 2\cdot 18 = 3\cdot 6\cdot 4$ и т.д. Однако для любого составного числа существует *единственное* разложение его на произведение степеней простых чисел, а именно справедлива

Основная теорема арифметики. *Всякое натуральное число* m $(m>1)$ *можно единственным образом представить в виде произведения степеней простых чисел*

$$\boxed{m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}} \qquad (1.1)$$

Здесь $p_1, p_2, \ldots, p_r$ *– простые числа,* $k_1, k_2, \ldots, k_r$ *– натуральные числа. Число* k_i *определяет кратность вхождения простого числа* p_i *в разложение* (1.1).

Например, $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Кратность вхождения простого числа 2 в разложение числа 72 равна 3, т.е. $p_1 = 2$, а отвечающее ему значение $k_1 = 3$.

Разложение (1.1) натурального числа m на произведение степеней простых чисел называется *каноническим разложением* этого числа.

Для нахождения канонического разложения числа m необходимо:

1. Найти наименьшее простое число p_1, являющееся делителем m. Пусть $m : p_1 = m_1$.
2. Если $m_1 \vdots p_1$, то находим $m_2 \in \mathbf{N}$ такое, что $m_1 : p_1 = m_2$. Если же m_1 не делится на p_1, то ищем следующее, ближайшее к p_1 простое число p_2 $(p_2 > p_1)$ такое, что $m \vdots p_2$ и т.д.

Найдем каноническое разложение числа 4200. Наименьшее простое число p_1, на которое делится это число, равно 2. Имеем $4200 = 2 \cdot 2100$; 2100 также делится на 2: $2100 = 2 \cdot 1050$ и вновь $1050 = 2 \cdot 525$. Число 525 не делится на 2, но делится на 3: $525 = 3 \cdot 175$. Число 175 не делится на 3. Ближайший простой делитель 5: $175 = 5 \cdot 35$ и далее $35 = 5 \cdot 7$. Таким образом, с учетом числа повторений простых чисел 2, 3, 5, 7 – делителей числа 4200 – получаем его каноническое разложение: $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Разумеется, каноническое разложение натурального числа удобнее осуществлять в виде многоступенчатой процедуры деления натуральных чисел в «столбик».

$$\begin{array}{r|l} 4200 & 2 \\ 2100 & 2 \\ 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad 4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 .$$

1.2.2. Признаки делимости

Пусть m – натуральное число, большее 1, и

$$m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \text{ –}$$

его сокращенная и развернутая записи в десятичной системе счисления.

Рассмотрим признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11. Эти признаки зафиксированы в следующих семи теоремах:

Теорема 1.1. $m \vdots 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 \vdots 2$.

Теорема 1.2. $m \vdots 3 \quad \Leftrightarrow \quad (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) \vdots 3$.

Теорема 1.3. $m \vdots 4 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a_1 a_0} \vdots 4$.

Теорема 1.4. $m \vdots 5 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 0$ или $a_0 = 5$.

Теорема 1.5. $m \vdots 8 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$.

Теорема 1.6. $m \vdots 9 \quad \Leftrightarrow \quad (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) \vdots 9$.

Теорема 1.7. $m \vdots 11 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0\right) \vdots 11 .$$

Формулировки теорем приведены в символьной, «бессловесной» форме. Такая форма записи утверждений и теорем является не только компактной, но и наглядной и хорошо запоминающейся. Знак эквивалентности «$\Leftrightarrow$» в записи теорем 1.1 … 1.7 заменяет словосочетания «тогда и только тогда, когда», «необходимо и достаточно». Например, теорему 1.1 следует читать так: «m делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра (цифра единиц) числа m делится на 2», теорему 1.5: «m делится на 8 тогда и только тогда, когда на 8 делится число, образованное тремя последними цифрами числа m», теорему 1.7: «Для того чтобы натуральное число m делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы на 11 делилась знакопеременная сумма цифр числа m».

Справедливость теорем 1 и 5 достаточно очевидна. Докажем теоремы 3, 6 и 7.

Теорема 1.3. $m \vdots 4 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a_1 a_0} \vdots 4$.

Доказательство. Необходимость

Дано: $m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \vdots 4$. *Требуется доказать, что на 4 делится число* $\overline{a_1 a_0} = 10a_1 + a_0$. *Преобразуем число* m *к виду*

$$m \equiv a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 =$$
$$= \left(a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \cdots + a_3 10 + a_2\right) \times 100 + a_1 10 + a_0 .$$

Число 100 делится на 4 и потому на 4 делится первое слагаемое $q = \left(a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \cdots + a_3 10 + a_2\right) \cdot 100$ *в составе числа* m $\left(m = q + \overline{a_1 a_0}\right)$. *Но тогда и число* $\overline{a_1 a_0} = m - q$ *должно делиться на 4.*

Достаточность. *Дано:* $\overline{a_1 a_0} \vdots 4$. *Требуется доказать, что* $m \vdots 4$. *Так как* $m = q + \overline{a_1 a_0}$ *;* $q \vdots 4$ *и* $\overline{a_1 a_0} \vdots 4$*, то и* $m \vdots 4$.∎

Заметим, что теорема 1.5 доказывается аналогично приведенному доказательству теоремы 1.3.

Теорема 1.6. $m \vdots 9 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0\right) \vdots 9$.

Доказательство. *Поскольку* $10^k = \underbrace{99\ldots9}_{k\ \text{раз}} + 1$ *для любого* $k \in \mathbf{N}$, *то*

$$a_1 10 = a_1(9+1) = 9a_1 + a_1,$$

$$a_2 10^2 = a_2(99+1) = 99a_2 + a_2,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{n-1}10^{n-1} = a_{n-1}\left(\underbrace{99\ldots9}_{n-1} + 1\right) = \underbrace{99\ldots9}_{n-1} a_{n-1} + a_{n-1},$$

$$a_n 10^n = a_n\left(\underbrace{99\ldots99}_{n} + 1\right) = \underbrace{99\ldots99}_{n} a_{n-1} + a_n.$$

Используя эти равенства, преобразуем m *к следующему виду:*

$$m = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 =$$

$$= \left(\underbrace{99\ldots9}_{n} a_n + \underbrace{99\ldots9}_{n} a_{n-1} + \cdots + 99a_2 + 9a_1\right) +$$

$$+ \left(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0\right). \qquad (1.2)$$

В правой части равенства (1.2) первое слагаемое $q = 9\left(\underbrace{11\ldots1}_{n} a_n + \underbrace{11\ldots1}_{n-1} a_{n-1} + \cdots + 11a_2 + a_1\right)$ *делится на 9. Поэтому, если* $m \vdots 9$, *то и сумма цифр* $\left(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0\right)$ *числа* m *должна делиться на 9 (необходимость), и, наоборот, если* $\left(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0\right) \vdots 9$, *то и* $m \vdots 9$ *(достаточность)*. ∎

Теорема 1.7.

$$m \vdots 11 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0\right) \vdots 11.$$

Доказательство. *Представим каждое число* 10^k *в десятичной записи числа* m *в следующем виде:*

$$\begin{array}{ll} 10 = 11 - 1, & 100 = 99 + 1, \\ 1000 = 990 + 11 - 1, & 10^4 = 9999 + 1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 10^{2k-1} = \underbrace{99\ldots9}_{2k-2}0 + 11 - 1, & 10^{2k} = \underbrace{99\ldots99}_{2k} + 1. \end{array} \tag{1.3}$$

И преобразуем с учетом (1.3):

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 10^3 + \cdots + a_n 10^n =$$

$$= a_0 + a_1(11-1) + a_2(99+1) + a_3(990+11-1) + \cdots + a_n\left(h + (-1)^n\right) =$$

$$= \left(11a_1 + 99a_2 + (990+11)a_3 + \cdots + ha_n\right) +$$

$$+ \left(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n\right).$$

Здесь $h = \underbrace{99\ldots99}_{2n}$ *– при четном* n *и* $h = \underbrace{99\ldots9}_{2n-2}0 + 11$ *– при нечетном* n.

Введем обозначения: $q = \left(11a_1 + 99a_2 + \cdots + ha_n\right)$, $p = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$. *Тогда* $m = q + p$ *и при этом* q *делится на 11.*

Поэтому, если $m \vdots 11$*, то и* $p \vdots 11$ *(необходимость), и, наоборот, если* $p \vdots 11$*, то и* $m \vdots 11$. ■

Замечание. *Частные от деления натурального числа* m *на* n *и противоположного ему целого отрицательного* $(-m)$ *на* n *отличаются лишь знаком. Поэтому признак делимости на 11:* $m \vdots 11 \iff \left(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n\right) \vdots 11$ *можно переписать в равносильной форме:*

$$m \vdots 11 \iff \left(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n\right) \vdots 11.$$

Примеры. Число 4288 делится на 2, так как последняя цифра числа 8 делится на 2; оно делится на 4, поскольку число 88, образованное двумя последними цифрами этого числа, делится на 4; делится оно и на 8, потому что $288 \vdots 8$. Однако это число не делится на 3 и 9, так как сумма цифр числа 4288 равна $4+2+8+8=22$, но 22 не делится ни на 3, ни на 9; не делится оно и на 11, поскольку знакопеременная сумма $4-2+8-8=2$, а 2 не делится на 11. Напротив, число 9295 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 8, но делится на 11, так как знакопеременная сумма цифр этого числа $9-2+9-5=11$ делится на 11.

Известен еще один признак делимости на простые числа 7, 11, 13. Он основан на том, что произведение этих чисел равно 1001, т.е. $7\cdot 11\cdot 13=1001$, и при этом

$$10^3=1001-1,$$

$$10^6=999999+1=1001\cdot 999+1,$$

$$10^9=1000\,000\,001-1=1001\cdot 999001-1 \text{ и т.д.}$$

Любое натуральное число n можно представить в виде алгебраической суммы степеней числа 1000 с последующим преобразованием этих степеней по приведенным равенствам. Так, например, для шестизначного числа $\overline{abcdef}$ будем иметь

$$\overline{abcdef}=\overline{abc}\cdot 1000+\overline{def}=\overline{abc}(1001-1)+\overline{def}=$$
$$=\overline{abc}\cdot 1001+\left(\overline{def}-\overline{abc}\right).$$

Отсюда следует, что число $\overline{abcdef}$ делится на m, где m равно одному из чисел 7, 11, 13 тогда и только тогда, когда на m делится разность $\overline{def}-\overline{abc}$.

Для семизначного числа $\overline{abcdefg}$ аналогично получаем

$$\overline{abcdefg}=a\cdot 10^6+\overline{bcd}\cdot 10^3+\overline{efg}=$$
$$=a(1001\cdot 999+1)+\overline{bcd}(1001-1)+\overline{efg}=$$
$$=\left(a\cdot 999+\overline{bcd}\right)\cdot 1001+\left(\overline{efg}-\overline{bcd}+a\right),$$

откуда следует, что

$$\overline{abcdefg}\,\vdots\, m \quad\Leftrightarrow\quad \left(\overline{efg}-\overline{bcd}+a\right)\vdots\, m.$$

И далее

$$\overline{abcdefgh}\,\vdots\, m \quad\Leftrightarrow\quad \left(\overline{fgh}-\overline{cde}+\overline{ab}\right)\vdots\, m$$

$$\overline{abcdefghk} \vdots m \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overline{ghk} - \overline{def} + \overline{abc}\right) \vdots m$$

и т.д.

На практике для проверки делимости натурального числа n на 7, 11 или 13 необходимо разбить это число на грани справа налево по три цифры в каждой грани (в последней грани может быть одна, две или три цифры) и из полученных трёхзначных чисел составить знакопеременную сумму. Если полученное число делится на m, где $m \in \{7,11,13\}$, то на m делится и число n.

Пусть, например, $n = 19712$. Поскольку $712 - 19 = 693$ и 693 делится на 7 и 11, но не делится на 13, то число 19712 делится на 7 и 11, но не делится на 13.

Пусть теперь $n = 2.566.412.849$. Вычислим знакопеременную сумму $849 - 412 + 566 - 2 = 1001$. Это число делится на 7, 11 и на 13, поэтому и число 2566412849 делится на 7, 11 и на 13.

Литература

1. Элементарная математика: теория чисел, основы комбинаторики, неравенства: учеб. пособие / А.И. Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 184 с.