ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Допустим, что требуется решить уравнение $a^x = b$ при $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Поскольку функция a^x является монотонной и принимает значения на R_+ $\left(E\left(a^x\right) = R_+\right)$, то такое уравнение имеет единственное решение для любого $b \in R_+$. Искомое число x является логарифмом числа b по основанию a, т.е. $x = \log_a b$.

Пусть теперь требуется решить уравнение $a^y = x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, а x - произвольное положительное число. Его решением будет отображение $y = \log_a x$, которое ставит в соответствие каждому $x_0 \in R_+$ единственное значение $y_0 \in R$ (рис. 8.1).

<u>Определение</u>. Функция вида $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называется логарифмической функцией. Число a называется основанием логарифмической функции.

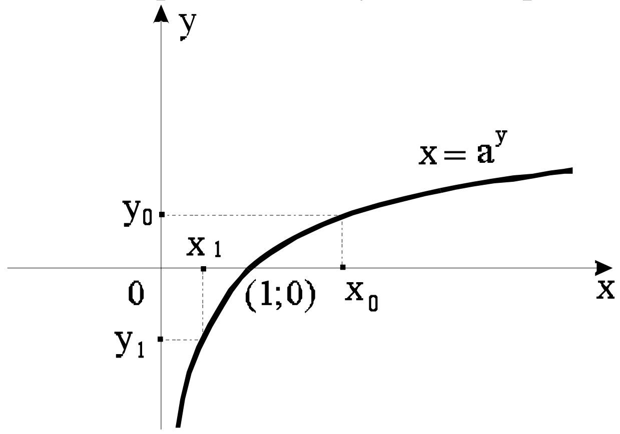

Рис. 8.1

Свойства логарифмической функции

1) <u>Область определения.</u> $D(f) = R_+$. Это утверждение следует из определения логарифма действительного числа: выражение $\log_a x$ определено при $x > 0$.

2) <u>Область значений.</u> $E(f) = R$. Действительно, множество $E(f)$ - это множество $\{y\}$ решений уравнения $a^y = x$, $a > 0$, $a \neq 1$, когда x пробегает все значения на R_+. В соответствии со свойствами показательной функции $\{y\} = R$.

3) <u>Четность и нечетность. Периодичность.</u> Логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной, так как определена на несимметричном относительно нуля множестве R_+. По той же причине она не является и периодической.

4) <u>Интервалы монотонности</u>. Если $a > 1$, то логарифмическая функция является монотонно возрастающей на $D(f)$; если $0 < a < 1$, то монотонно убывающей.

<u>Доказательство.</u> Пусть $a > 1$ и x_1, x_2 - произвольные положительные числа: $0 < x_1 < x_2$. Покажем, что $\log_a x_2 > \log_a x_1$.

Имеем $\log_a x_2 - \log_a x_1 = \log_a \frac{x_2}{x_1}$.

Обозначим $\log_a \frac{x_2}{x_1} = c$. По определению логарифма действительного числа

$a^c = \frac{x_2}{x_1}$. По условию $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, т.е. $\frac{x_2}{x_1} > 1$.

Следовательно, $c > 0$ в соответствии со свойствами показательной функции ($a^x > 1$ при $x > 0$, если $a > 1$). Таким образом, $\log_a x_2 - \log_a x_1 = c > 0$, т.е. $\log_a x_2 > \log_a x_1$. +

Аналогично доказывается вторая часть утверждения о монотонном убывании логарифмической функции на $D(f)$ при $0 < a < 1$.

5) <u>Точки пересечения с координатными осями.</u> Ось OY график логарифмической функции не пересекает, поскольку выражение $\log_a x$ определено для $x > 0$. Ось OX график функции пересекает в единственной точке $A(1;0)$. Действительно, $\log_a 1 = 0$ при любом $a > 0$, $a \neq 1$.

Других точек пересечения графика с осью OX нет в силу монотонности функции.

6) <u>Интервалы знакопостоянства</u>. Поскольку логарифмическая функция является монотонной и $y(1) = \log_a 1 = 0$ при любом $a > 0$, $a \neq 1$, то

а) $\log_a x < 0$ при $0 < x < 1$; $\log_a x > 0$ при $x > 1$, если $a > 1$;

б) $\log_a x > 0$ при $0 < x < 1$; $\log_a x < 0$ при $x > 1$, если $0 < a < 1$.

7) <u>График функции</u>. На рис. 8.1 изображен график функции $y = \log_a x$, $a = 2$, а на рис. 8.2 - функции $y = \log_a x$, $a = \frac{1}{2}$.

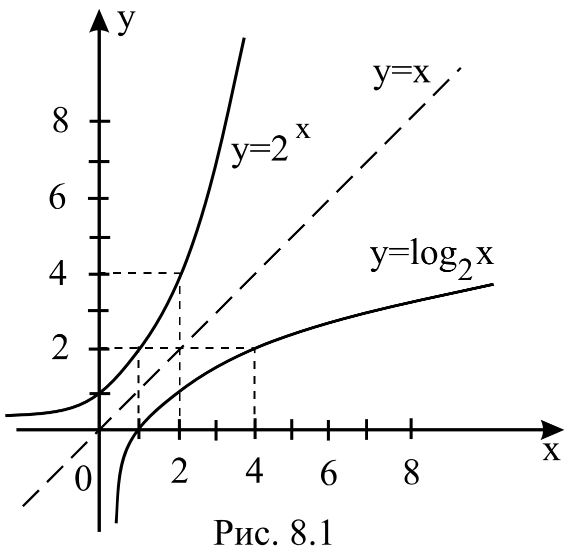

Рис. 8.1

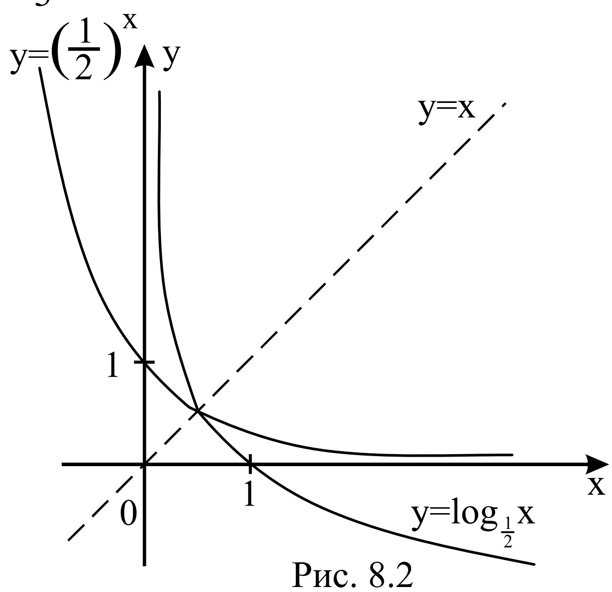

Рис. 8.2

Функция $y = \log_a x$ является обратной по отношению к функции $y = a^x$. Действительно, для любого y_0, являющегося решением уравнения $a^y = x_0$, справедливо равенство $\log_a x_0 = \log_a \left(a^{y_0}\right) = y_0$. График функции $y = \log_a x$ симметричен графику показательной функции $y = a^x$ при том же основании относительно прямой $y = x$ (см. рис. 8.1 и рис. 8.2).

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.