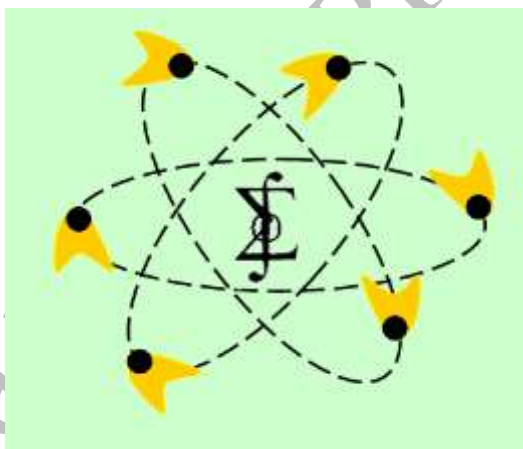


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

М.Е. ИЛЬИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЁЖНОСТИ



Рязань 2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

М.Е. ИЛЬИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЁЖНОСТИ

Учебное пособие

Рязань 2020

УДК 519.21+681.3.06

Основы теории надёжности: учеб. пособие / М.Е. Ильин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2020. – 112 с.

Рассматриваются основные математические модели, используемые в теории надёжности технических элементов, систем элементов и программного обеспечения. Приведены показатели надежности, методы их расчета и оценивания по результатам статистических наблюдений. Приведенные примеры позволяют студентам получить навыки практического применения математического аппарата.

Предназначено для студентов 10.05.01 «Компьютерная безопасность», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем», а также для студентов всех направлений и специальностей, рабочие программы которых включают дисциплины, имеющие отношение к теории надежности.

Табл. 4. Ил. 22. Библиогр.: 6 назв.

Надежность, отказ, модели надежности: элемента, системы, программы; поток восстановления, последовательное и параллельное соединения элементов в системе, план испытаний, методы оценивания, точёная и интервальная оценки

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра информационной безопасности Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. техн. наук В.Н. Пржегорлинский)

Оглавление

1.	Надежность элемента, работающего до первого отказа.....	3
2.	Восстанавливаемость элемента	13
3.	Надёжность восстанавливаемого элемента	16
4.	Надёжность системы.....	40
5.	Испытания на надёжность	59
6.	Методы оценки показателей надёжности	63
7.	Оценка параметра экспоненциального закона	80
8.	Надежность программного обеспечения	95
	Библиографический список.....	112

Рассматриваются основные показатели надежности единичного элемента, системы, состоящей из отдельных элементов и программ, приводятся типовые примеры их расчета. Отказ элемента или системы - случайное событие, происходящее под влиянием многих факторов. Соответственно количественные показатели случайных событий строятся на основе вероятностной меры, которая имеет смысл тогда, когда имеется достаточно большая совокупность наблюдаемых событий. При этом следует помнить, что всеобъемлющей характеристикой любой случайной величины является её закон (функция) распределения [1, 2]. Надежность технических средств и программного обеспечения регламентируется документами [3, 4].

1. Надежность элемента, работающего до первого отказа

В качестве показателей безотказности невосстанавливаемых элементов применяют следующие количественные характеристики: вероятность отказа, вероятность безотказной работы, интенсивность отказов, средняя наработка до отказа (до первого отказа).

1.1. Математическая модель надежности элемента

Определение 1.1. *Наработка до первого отказа или время жизни τ – случайная величина - интервал времени от момента включения элемента до первого отказа.*

Случайная величина τ имеет свой закон распределения

$$Q_o(t) = P\{\tau < t\}. \quad (1.1)$$

Функция $Q_o(t)$ - вероятность отказа элемента до момента t [точнее на множестве $[0; t)$]. Будем полагать, что функция $Q_o(t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на полуоси $t > 0$. Эти

предположения удобны, кроме того, в теории вероятностей они естественны. Так, например, разрыв функции $Q_o(t)$ означает, что в какой-то заранее определенный момент элемент может отказать с конечной вероятностью, что маловероятно. Исключение составляет только начальный момент $t = 0$, так как некоторые элементы отказывают в момент включения. Однако отказ в момент включения сразу же обнаруживают и элемент заменяют новым. Поэтому мы не принимаем во внимание такие отказы, и тогда функция $Q_o(t)$ будет непрерывна и при $t = 0$. Эту функцию (1.1) часто ещё называют функцией ненадёжности элемента. Наряду с функцией $Q(t)$ и не менее часто употребляется и другая функция (надежности) элемента

$$P_o(t) = 1 - Q_o(t) = P\{\tau > t\}, t \geq 0. \quad (1.2)$$

Определение 1.2. Функция $P_o(t)$ надежности - вероятность безотказной работы элемента за время t [на интервале $[0; t]$].

Эту функцию принято (см. рис. 1.1) считать основной количественной характеристикой безотказности. Итак, функция надежности (1.2) - вероятность того, что наработка до первого отказа τ элемента не меньше величины t .

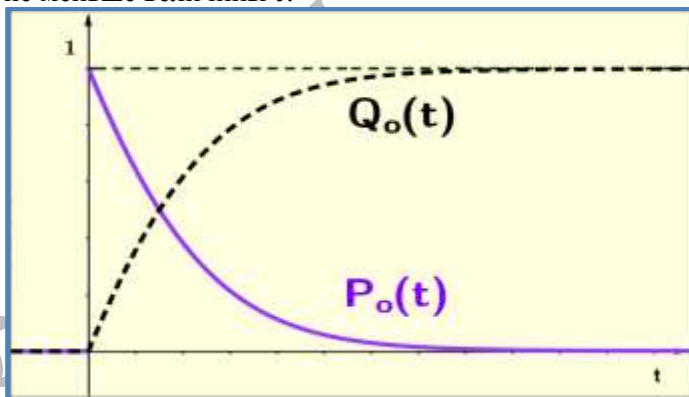


Рис. 1.1. Вероятность безотказной работы и вероятность отказа

Полагая, что в момент включения элемент работоспособен, т.е. $P_o(0) \equiv 1$, функция $P_o(t)$ монотонно убывает от 1 до 0 (рис.1.1). Очевидно, что $P_o(+\infty) = 0$, т.е. любой элемент при $t \rightarrow +\infty$ со временем откажет. Примерные зависимости этих двух функций $Q_o(t)$ и $P_o(t)$ показаны на рис.1.1. На отрицательной полуоси $(-\infty; 0)$ эти

функции не определены и могут быть произвольно продолжены на отрицательную полуось, например, значением ноль.

Вероятность $P_o(t)$ безотказной работы – это вероятность того, что за время t не произойдет отказа элемента. Вероятность $Q_o(t)$ – вероятность того, что отказ элемента произойдет через время, меньшее величины t $\{\tau < t\}$. Поскольку два события $\{\tau < t\}$ и $\{\tau \geq t\}$ образуют полную группу событий, то выполняется тождество

$$Q_o(t) + P_o(t) \equiv 1.$$

Функция $P_o(t)$ приближенно определяется из опыта. Допустим, что необходимо найти значение этой функции при $t = t_0$, то есть вероятность безотказной работы элемента в течение времени t_0 . Ставим на испытания N одинаковых элементов и наблюдаем их в одинаковых условиях в течение времени t_0 . Пусть к моменту окончания испытаний не отказало n элементов. Наш эксперимент – серия из N независимых испытаний, при каждом из которых происходит одно из двух событий: или элемент отказывает, или он не отказывает. Тогда отношение $\frac{n}{N}$ есть частота появления (первого) отказа на интервале $[0; t_0)$, и по теореме Бореля выполняется равенство [2]

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{n}{N} - P(t_0) \right| < \varepsilon \right) = 1, \forall \varepsilon > 0.$$

Это означает практически, что при большом N с вероятностью, близкой к единице, выполняется приближенное равенство

$$\frac{n}{N} \approx P_o(t_0).$$

Если функция $Q_o(t)$ дифференцируема, то безотказность можно характеризовать также плотностью распределения времени безотказной работы или частотой (интенсивностью) отказа как производной от функции ненадежности:

$$q_o(t) = \frac{dQ_o(t)}{dt} = -\frac{dP_o(t)}{dt}. \quad (1.3)$$

Определение 1.3. Частота (времени) или плотность отказа – производная функции ненадежности $Q_o(t)$, которая определяет вероятность отказа элемента на единичном промежутке времени.

Из (1.3) следует, что вероятность безотказной работы элемента на интервале $(0, t)$ равна интегралу функции плотности распределения от момента времени t до $+\infty$ (заштрихованной площади под кривой на рис. 1.2):

$$P_o(t) = \int_t^{+\infty} q_o(t)dt$$

или с учётом выражений (1.2) и (1.3):

$$P_o(t) = 1 - \int_0^t q_o(t)dt.$$

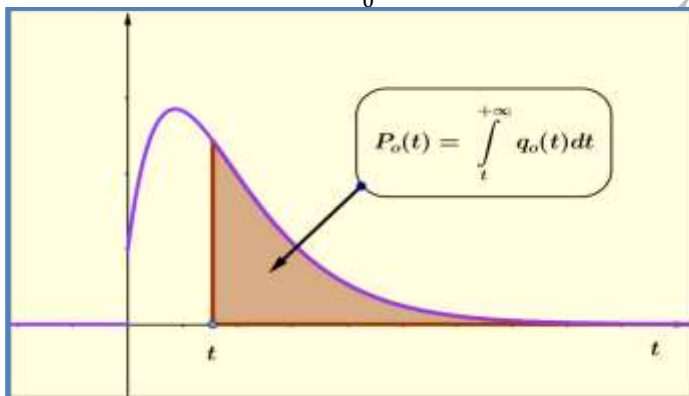


Рис. 1.2. Плотность распределения наработке на отказ

Определение 1.4. Распределение вероятности безотказной работы $P_o(t)$ от момента включения до момента первого отказа называют математической моделью безотказной работы (безотказностью устройства) элемента.

1.2. Математическое ожидание и дисперсия длительности безотказной работы элемента

Хотя функция распределения (интегральная или плотность) полностью характеризует случайную величину, но для решения многих задач достаточно знать числовые моменты случайной величины. Начальным моментом k -го порядка называют интеграл вида:

$$\alpha_v = M[\tau^v] = \int_0^{+\infty} t^v q_o(t)dt$$

при условии его конечности. Если существует начальный момент k -го порядка, то существуют и начальные моменты порядка $r < k$. Момент первого порядка (математическое ожидание) $\alpha_1 = M[\tau]$

обозначают символом T_0 и называют средней наработкой на отказ или средним временем безотказной работы элемента:

$$M[\tau] = T_0 = \int_0^{+\infty} tq_o(t)dt = - \int_0^{+\infty} t dP_o(t).$$

Интегрируя по частям это выражение с учетом (1.3), получаем:

$$T_0 = -tP_o(t)|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} P_o(t)dt.$$

Теперь учтем, что выполняются соотношения:

- 1) $P_o(0) = 1$ - в момент включения элемент исправен;
- 2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} tP_o(t) = 0$ - выполняется необходимый признак сходимости несобственного интеграла первого рода.

Тогда для среднего времени безотказной работы получаем:

$$\alpha_1 = M[\tau] = T_0 = \int_0^{+\infty} P_o(t)dt. \quad (1.4)$$

Величина T_0 – параметр функции $P_o(t)$, который во многих случаях позволяет восстановить всю функцию. Среднее время безотказной работы T_0 является приемлемой характеристикой для сравнения элементов по показателям безотказности. Вычислим начальный момент второго порядка. Он равен:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = M[\tau^2] &= \int_0^{+\infty} t^2 q_o(t)dt = - \int_0^{+\infty} t^2 dP_o(t) = \\ &= -t^2 P_o(t)|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} P_o(t)dt^2. \end{aligned}$$

Внеинтегральный член равен нулю. Следовательно, для начального момента второго порядка получаем:

$$\alpha_2 = M[\tau^2] = \int_0^{+\infty} P_o(t)dt^2 = 2 \int_0^{+\infty} tP_o(t)dt.$$

Из этого выражения, с учетом (1.4), находим дисперсию (центральный момент второго порядка) времени безотказной работы элемента:

$$\mu_2 = M[(\tau - M[\tau])^2] = M[\tau^2] - T_0^2 = 2 \int_0^{+\infty} t P_0(t) dt - T_0^2.$$

Итак, получаем для дисперсии выражение

$$\mu_2 = D[\tau] = 2 \int_0^{+\infty} t P_0(t) dt - T_0^2.$$

Решим основную задачу нахождения вероятности безотказной работы элемента на интервале, следующем за интервалом безотказной работы.

Пример 1.1. Пусть элемент проработал безотказно до момента t . Какова вероятность того, что он не откажет на интервале $[t, t_1]$?

Решение. Обозначим эту искомую вероятность $P(t, t_1)$. Пусть A – событие, означающее безотказную работу элемента на интервале $(0, t)$, а B – событие, означающее безотказную работу на интервале $[t, t_1]$. Тогда искомая вероятность – условная вероятность

$$P(t, t_1) = P\{B|A\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}}.$$

Но событие AB означает безотказную работу элемента на интервале $(0, t_1)$. Поэтому

$$P(t, t_1) = \frac{P_0(t_1)}{P_0(t)}.$$

Вероятность отказа на (t, t_1) определяется следующим выражением:

$$Q(t, t_1) = 1 - P_0(t, t_1) = \frac{P_0(t) - P_0(t_1)}{P_0(t)}.$$

Рассмотрим предельный переход, когда отрезок $[t, t_1]$ стягивается в точку. Положим $t_1 = t + \Delta t$. Тогда выполняется

$$Q(t, t + \Delta t) = \frac{P_0(t) - P_0(t + \Delta t)}{P_0(t)}.$$

Предполагая, что функция $P(t)$ дифференцируема, получаем:

$$Q(t, t + \Delta t) = -\frac{P'_0(t)}{P_0(t)} \Delta t + o(\Delta t).$$

Введем обозначение

$$\lambda(t) = -\frac{P'_0(t)}{P_0(t)} = -\frac{d \ln P_0(t)}{dt} = \frac{q_0(t)}{P_0(t)}.$$

Определение 1.5. Функция

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_o(t) - P_o(t + \Delta t)}{\Delta t P_o(t)} = -\frac{P_o'(t)}{P_o(t)} = -\frac{d \ln P_o(t)}{dt} \quad (1.5)$$

называется интенсивностью (опасностью) отказов элемента.

Эта функция допускает естественную интерпретацию: коэффициент пропорциональности вероятности отказа на бесконечно малом интервале времени, примыкающем к моменту времени t .

Теорема 1.1. Функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ неотрицательна на полупрямой $t \geq 0$ и выполняется $\lambda(0) = q_o(0)$.

При малом Δt справедливо приближенное равенство

$$Q(t, t + \Delta t) \approx \lambda(t)\Delta t.$$

Дифференциальное уравнение (1.5) разрешимо относительно производной (функции отказов)

$$P_o(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}. \quad (1.6)$$

Из этой основной формулы (1.6) следует, что вероятность безотказной работы на интервале $[t_1, t_2]$ выражается

$$P(t_1, t_2) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt}.$$

Следовательно, интенсивность отказов и вероятность безотказной работы являются характеристиками безотказности, связанными однозначным соответствием, поэтому можно задавать либо вероятность безотказной работы, либо интенсивность отказов. Сведем соотношения между показателями безотказности элемента в табл. 1.1.

Пример 1.2. Определить единичные показатели безотказности элемента: $P_o(t)$, $\lambda(t)$ и T_0 , если плотность отказов элемента имеет вид: $q_o(t) = 2ae^{-at}(1 - e^{-at})$.

Решение. Найдем функцию распределения

$$\begin{aligned} Q_o(t) &= \int_0^t q_o(t) dt = 2a \left(\int_0^t e^{-at} dt - \int_0^t e^{-2at} dt \right) = \\ &= 1 - 2e^{-at} + e^{-2at}. \end{aligned}$$

Теперь функцию надежности:

$$P_o(t) = 1 - Q_o(t) = 2e^{-at} - e^{-2at}.$$

Среднее время отказа:

$$T_0 = \int_0^{+\infty} P_o(t) dt = \int_0^{+\infty} (2e^{-at} - e^{-2at}) dt = \frac{3}{2a}.$$

Интенсивность отказа:

$$\lambda(t) = \frac{2ae^{-at}(1 - e^{-at})}{2e^{-at} - e^{-2at}} = \frac{2a(1 - e^{-at})}{2 - e^{-at}}.$$

Таблица 1.1

Связь между показателями безотказности элемента

Известный показатель	Выражения для определения неизвестных показателей			
	$Q_o(t)$	$q_o(t)$	$P_o(t)$	$\lambda(t)$
$Q_o(t)$		$\frac{dQ_o(t)}{dt}$	$1 - Q_o(t)$	$\frac{1}{1 - Q_o(t)} \frac{dQ_o(t)}{dt}$
$q_o(t)$	$\int_0^t q_o(t) dt$		$1 - \int_0^t q_o(t) dt$	$\frac{q_o(t)}{1 - \int_0^t q_o(t) dt}$
$P_o(t)$	$1 - P_o(t)$	$-\frac{dP_o(t)}{dt}$		$-\frac{1}{P_o(t)} \frac{dP_o(t)}{dt}$
$\lambda(t)$	$1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$	$e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$	

1.3. Экспоненциальная модель

Опытные данные показывают, что для многих элементов функция $\lambda(t)$ имеет характерный вид кривой рис. 1.3. Из поведения этого графика видно, что весь интервал времени эксплуатации можно условно разбить на три участка.

На первом функция $\lambda(t)$ имеет повышенные значения. Это связано с тем, что в большой партии элементов всегда имеются элементы со скрытыми дефектами, которые выходят из строя вскоре после начала работы. Этот период называют периодом приработки или периодом выжигания дефектных элементов. Второй период называется периодом нормальной работы. Он характеризуется постоянным (или приближенно постоянным) значением интенсивности отказа. Последний период – период старения. Необратимые процессы приводят к ухудшению качества элемента, элемент стареет. В этот период интенсивность отказа возрастает. Такая картина изменений интенсивности отказа не является универсальной, но, тем не менее, встречается довольно часто.

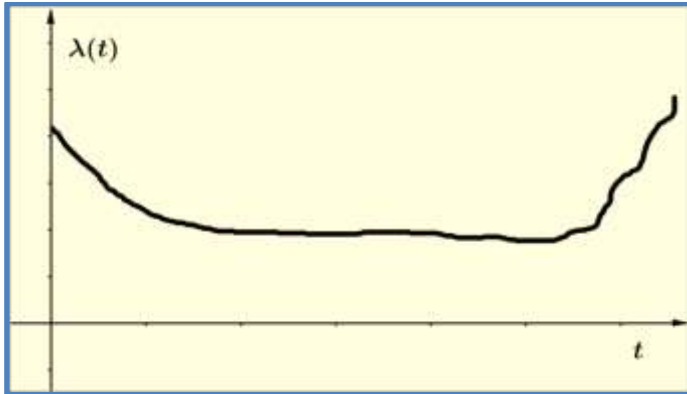


Рис. 1.3. Типичная зависимость интенсивности отказа от времени работы

Сформулированные соображения показывают, что для широкого класса элементов и на достаточно большом интервале времени эксплуатации справедливо допущение

$$\lambda(t) = \lambda = \text{const.}$$

Остановимся на этом важном случае. Из выражения (1.6) следует, что для постоянной интенсивности отказов функция надежности имеет вид

$$P_o(t) = e^{-\lambda t}. \quad (1.7)$$

Такой закон называется экспоненциальным, а сама модель отказов (1.7) – экспоненциальной моделью. Для неё вероятность отказа за время t равна

$$Q_o(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

а плотность вероятности отказов

$$q_o(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Среднее время жизни элемента для этого случая

$$T_o = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Для экспоненциального закона (1.7) опасность отказа обратна среднему времени. Поэтому функцию надежности можно записать в следующем виде:

$$P_o(t) = e^{-\frac{t}{T_o}}.$$

Важно отметить, что T_0 может в действительности и не быть средним временем. Интенсивность отказа, постоянная на рассматриваемом участке времени, может вне этого участка и не быть постоянной: любой элемент стареет. Точнее, T_0 – среднее время такого элемента, интенсивность отказа которого постоянна на числовой оси, а на рассматриваемом участке времени совпадает с интенсивностью отказа нашего элемента. Часто интересующее нас время t во много раз меньше среднего времени $t \ll T_0$ или $\frac{t}{T_0} \ll 1$, тогда получаем линейное приближение:

$$P_o(t) \approx 1 - \frac{t}{T_0}, Q_o(t) \approx \frac{t}{T_0},$$

ошибка которого не превосходит величины $\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T_0} \right)^2$.

Теорема 1.2. (характерное свойство). Для экспоненциальной модели надежности вероятность безотказной работы на данном интервале $[t, t + \tau)$ не зависит от времени предшествующей работы t , а зависит только от длины интервала τ .

Доказательство. Действительно, вероятность безотказной работы на $[t, t + \tau)$ согласно выражению (1.7) равна

$$P(t, t + \tau) = \frac{P_o(t + \tau)}{P_o(t)} = \frac{e^{-\lambda(t + \tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau}.$$

Что и требовалось доказать.

Покажем, что это свойство является и характеристическим, то есть, если оно выполняется для произвольного закона, то этот закон обязательно будет экспоненциальным. Пусть отношение $\frac{P_o(t + \tau)}{P_o(t)}$ не зависит от t . Тогда $\frac{P_o(t + \tau)}{P_o(t)} = \varphi(\tau)$. Поскольку $P_o(0) = 1$ при $t = 0$, поэтому $P_o(t + \tau) = P_o(t)P_o(\tau)$ для произвольных $t \geq 0$ и $\tau \geq 0$. Отсюда по индукции

$$P_o(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = P_o(t_1) \cdot P_o(t_2) \cdot \dots \cdot P_o(t_n).$$

Пусть

$$P_o(1) = q, 0 \leq q \leq 1.$$

Полагая $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$, получаем $P_o(1) = q = \left(P_o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n$ или

$P_o\left(\frac{1}{n}\right) = q^{\frac{1}{n}}$. Теперь при $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{m}$ получаем:

$$P_o\left(\frac{n}{m}\right) = q^{\frac{n}{m}}.$$

Пусть $t \geq 0$ – произвольное число. Тогда при любом целом $m > 0$ найдется единственное $n > 0$ такое, что $\frac{n-1}{m} \leq t \leq \frac{n}{m}$. Поскольку функция $P_o(t)$ монотонно не возрастает, то

$$P_o\left(\frac{n}{m}\right) \leq P_o(t) \leq P_o\left(\frac{n-1}{m}\right)$$

или

$$q^{\frac{n}{m}} \leq P_o(t) \leq q^{\frac{n-1}{m}}.$$

При $m \rightarrow \infty$ дроби $\frac{n}{m}$ и $\frac{n-1}{m} \rightarrow t$. Переходя к пределу, получаем:

$$P_o(t) = q^t.$$

Если $q = 0$, то $P_o(t) \equiv 0$ при произвольном $t > 0$ и элемент отказывает в момент включения; если же $q = 1$, то $P_o(t) \equiv 1$ и элемент абсолютно надежен. Предоставим постоянную q в форме

$$q = e^{-\lambda}, \lambda > 0.$$

Тогда получаем искомую модель надежности, совпадающую с (1.7). Соотношения между показателями безотказности экспоненциальной модели надежности приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Связь между показателями безотказности экспоненциальной модели

Показатель надежности	Выражение
$Q_o(t)$	$1 - e^{-\lambda t}$
$q_o(t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$
$P_o(t)$	$e^{-\lambda t}$
T_o	$1/\lambda$

2. Восстанавливаемость элемента

Рассматривается математическая модель восстановления элемента, для которой определяются основные величины, характеризующие эту модель. Показано определенное соответствие между показателями безотказности и восстанавливаемости элемента.

2.1. Свойства восстанавливаемости

Будем считать, что восстановление является случайным событием. Тогда интервал времени от момента отказа до момента

восстановления - случайная величина. Поэтому для характеристики восстановления следует применить функцию распределения вероятностей этой случайной величины, которую обозначим через η .

Определение 2.1. Вероятностью восстановления элемента называется вероятность того, что после момента наступления отказа работоспособность элемента будет восстановлена за время, меньшее заданного времени t .

$$P_b(t) = P\{\eta < t\}, \forall t > 0.$$

Функция $P_b(t)$ монотонно не убывает от 0 (при $t = 0$) до 1 при ($t \rightarrow +\infty$). Вероятность невосстановления на заданном интервале времени, то есть вероятность, что $\{\eta \geq t\}$ - элемент будет восстановлен за время, большее t , равна

$$Q_b(t) = P\{\eta \geq t\} = 1 - P_b(t), \forall t > 0.$$

Примерное поведение функций $P_b(t)$ и $Q_b(t)$ показано на рис. 2.1.

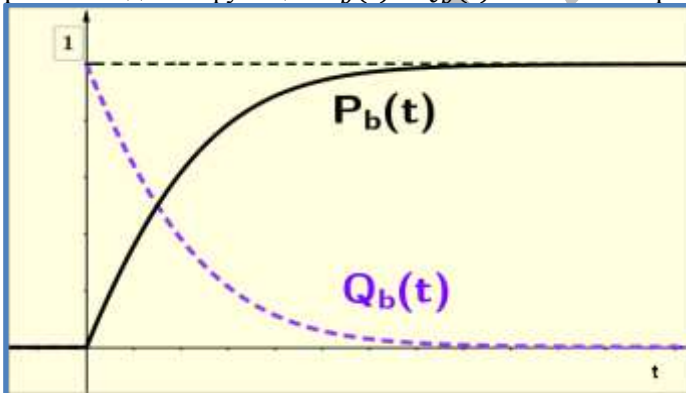


Рис. 2.1. Функции восстановления и невосстановления
Плотность распределения времени восстановления (частота восстановления)

$$p_b(t) = \frac{dP_b(t)}{dt}, \forall t > 0.$$

Среднее значение и дисперсия времени восстановления элемента определяются аналогично:

$$\alpha_v = \int_0^{+\infty} t^v p_b(t) dt = v \int_0^{+\infty} t^{v-1} Q_b(t) dt, k = 0, 1, 2, \dots$$

Момент первого порядка (математическое ожидание) – среднее время восстановления обозначают символом T_b :

$$T_b = \alpha_1 = \int_0^{+\infty} Q_b(t)dt = \int_0^{+\infty} (1 - P_b(t))dt.$$

Среднее время восстановления равно площади под кривой невосстановления (см. рис. 3.1). Дисперсия времени восстановления

$$\sigma_b^2 = 2 \int_0^{+\infty} t(1 - P_b(t))dt - T_b^2.$$

2.2. Интенсивность восстановления

Вероятность восстановления – интегральная характеристика. Введем теперь и дифференциальную характеристику процесса восстановления. Для этой цели определим условную вероятность $P_b(\Delta t|t)$, то есть вероятность того, что восстановление произойдет на интервале $(t, t + \Delta t)$, следующем за интервалом времени $(0, t)$, на котором ещё не произошло восстановления работоспособности:

$$P_b(\Delta t|t) = \frac{P_b(t + \Delta t) - P_b(t)}{1 - P_b(t)}.$$

Теперь условная вероятность невосстановления равна:

$$Q_b(\Delta t|t) = 1 - P_b(\Delta t|t) = \frac{Q_b(t + \Delta t)}{Q_b(t)}.$$

Рассмотрим предел отношения при $\Delta t \rightarrow 0$, то есть дифференциальную плотность вероятности восстановления в момент времени t , при условии, что после отказа устройство не было восстановлено до момента времени t :

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_b(\Delta t|t)}{\Delta t} = \frac{P'_b(t)}{1 - P_b(t)},$$

которая называется интенсивностью восстановления элемента. С учетом равенства $p_b(t) = P'_b(t)$ получим:

$$\mu(t) = \frac{p_b(t)}{1 - P_b(t)} = - \frac{d \ln(1 - P_b(t))}{dt}.$$

Воспользуемся начальным условием $P_b(0) = 0$ и проинтегрируем последнее равенство по частям:

$$\int_0^t \mu(t)dt = - \int_0^t d \ln(1 - P_b(t)) = -\ln(1 - P_b(t)) \Big|_0^t = \\ = -\ln(1 - P_b(t)).$$

Определим вероятность восстановления:

$$1 - P_b(t) = e^{-\int_0^t \mu(t)dt} \Rightarrow P_b(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(t)dt}.$$

Следовательно, между вероятностью восстановления и интенсивностью восстановления элемента существует взаимно-однозначное соответствие (см. табл. 2.1). Вероятностные характеристики безотказности и восстанавливаемости независимы: один и тот же элемент может обладать высокими показателями безотказности, быть плохо восстанавливаемым или наоборот.

Таблица 2.1

Связь между показателями восстановления

Известный показатель	Формулы определения остальных показателей			
	$P_b(t)$	$p_b(t)$	$Q_b(t)$	$\mu(t)$
$P_b(t)$		$\frac{dP_b(t)}{dt}$	$1 - P_b(t)$	$\frac{1}{1 - P_b(t)} \frac{dP_b(t)}{dt}$
$p_b(t)$	$\int_0^t p_b(t)dt$		$1 - \int_0^t p_b(t)dt$	$\frac{p_b(t)}{1 - \int_0^t p_b(t)dt}$
$Q_b(t)$	$1 - P_b(t)$	$-\frac{dQ_b(t)}{dt}$		$-\frac{1}{Q_b(t)} \frac{dQ_b(t)}{dt}$
$\mu(t)$	$1 - e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$	$\mu(t)e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$	$e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$	

3. Надёжность восстанавливаемого элемента

Теперь рассмотрим более общую ситуацию: последовательность отказов элементов, их замену (восстановление) и дальнейшую работу. Такую последовательность отказов и восстановлений называют потоком (процессом) восстановления. Таким образом, мы переходим к изучению комплексных показателей надежности.

3.1. Поток восстановления

Собственно восстановление может носить различный характер. Первоначально предположим, что время восстановления пренебрежимо мало по сравнению с временем жизни элемента.

Пусть элемент начинает свою работу в момент $t = 0$ и, проработав случайное время τ_1 , выходит из строя (см. рис. 3.1). В этот момент он заменяется новым элементом, который, проработав время τ_2 , выходит из строя и заменяется третьим элементом. Этот процесс продолжается неограниченно. Время жизни элементов - случайные величины $\tau_1, \tau_2, \dots$ независимы, имеют один и тот же закон распределения, который обозначим

$$F(t) = P\{\tau_n < t\}.$$

Определение 3.1. Моменты отказов или восстановления

$$t_1 = \tau_1, t_2 = \tau_1 + \tau_2, \dots, t_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n, \dots$$

образуют случайный поток - процесс восстановления.

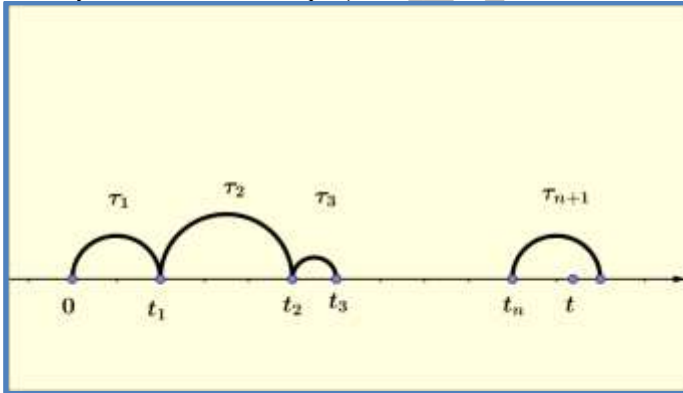


Рис. 3.1. Процесс восстановления

Пусть среднее время жизни элемента и его дисперсия конечны

$$T_0 = \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt, \sigma^2 = 2 \int_0^{+\infty} t(1 - F(t)) dt - T_0^2.$$

Существует непрерывная плотность распределения $f(t) = F'(t)$. Рассмотрим основные характеристики процесса восстановления. При изучении процесса восстановления основную роль играет целочисленная неотрицательная случайная величина $v(t)$ - число отказов, происшедших за время t , определяемая условием

$$t_{v(t)} < t \leq t_{v(t)+1}.$$

Найдем её распределение. Для этого заметим, что

$$P\{v(t) \geq n\} = P\{t_n < t\} = P\{\tau_1 + \dots + \tau_n < t\} = F_n(t), \quad (3.1)$$

где $F_n(t)$ функции распределения случайных величин t_n определяются выражением

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t - \tau) dF(\tau), \quad F_1(t) = F(t),$$

из которого следует, что

$$P_n(t) = P\{v(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad P_0(t) = 1 - F(t) - \quad (3.2)$$

функция распределения случайной величины $v(t)$.

Фундаментальное значение при изучении процесса восстановления имеет так называемая функция восстановления $H(t)$ - среднее число отказов, происшедших до момента t . Используя выражения вероятностей $P_n(t)$, получаем для этой функции явный вид:

$$\begin{aligned} H(t) = M[v(t)] &= \sum_{n=1}^{+\infty} n P_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n [F_n(t) - F_{n+1}(t)] = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n F_n(t) - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) F_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t). \end{aligned}$$

Или

$$H(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t). \quad (3.3)$$

Функция (3.3) конечна и подчинена интегральному уравнению

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t - \tau) dF(\tau),$$

которое удобно использовать при изучении свойств $H(t)$. Важность функции $H(t)$ объясняется тем, что через неё выражаются все основные характеристики нашего процесса. Так, математическое ожидание (среднее число отказов) на интервале $[t_1, t_2]$ равно

$$M[v(t_2) - v(t_1)] = H(t_2) - H(t_1).$$

Дисперсия числа отказов

$$D[v(t)] = 2 \int_0^t H(t - \tau) dH(\tau) + H(t) - H^2(t).$$

Вместо функции $H(t)$ часто вводят в рассмотрение её дифференциальную характеристику (плотность восстановления)

$$h(t) = H'(t),$$

равную среднему числу отказов на единичном интервале времени, начиная с момента t . Из выражения (3.3) получаем, что плотность (интенсивность) потока восстановления определяется рядом

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t), f_n(t) = F'_n(t).$$

Рассмотренные величины $P_n(t)$, $H(t)$ и $f_n(t)$ используются при решении задач теории надежности.

Пример 3.1. Найти наименьшее число запасных элементов n , которых с вероятностью, не меньшей $1 - \alpha$ (α - малое число), хватит на время t .

Решение. Чтобы n запасных элементов хватило на время t , число отказов за это время не должно превосходить n . Следовательно, для определения n получаем уравнение

$$P\{v(t) \leq n\} \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow P\{v(t) > n\} < \alpha.$$

Из выражения (3.3) имеем:

$$F_{n+1}(t) < \alpha.$$

Наименьшее n , при котором выполняется это неравенство, и дает искомое число запасных элементов.

n – кратная свертка функций $F(t)$, $F_n(t)$ лишь в редких случаях вычисляется в конечном виде. Перечислим эти случаи для тех распределений, которые встречаются в теории надежности.

1. Экспоненциальный закон

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Процесс восстановления будет образовывать пуассоновский процесс, и характеристики процесса восстановления имеют простой вид

$$P_n(t) = P\{v(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, H(t) = \lambda t, h(t) = \lambda.$$

Среди всех процессов восстановления только пуассоновский процесс является стационарным процессом без последствия.

2. Нормальный закон. Будет предполагать $\sigma \ll T_0$. Тогда

$$F_n(t) = \Phi\left(\frac{t - nT_0}{\sigma\sqrt{n}}\right), \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Функция восстановления

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{t - nT_0}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

значения которой вычисляются с помощью таблиц. Плотность восстановления (интенсивность потока восстановления)

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(t-nT_0)^2}{2\sigma^2 n}}$$

имеет характерный колеблющийся вид (см. рис. 3.2).

Для других законов распределения, которые используются в теории надежности, функции $F_n(t)$ не выражаются в конечном виде.

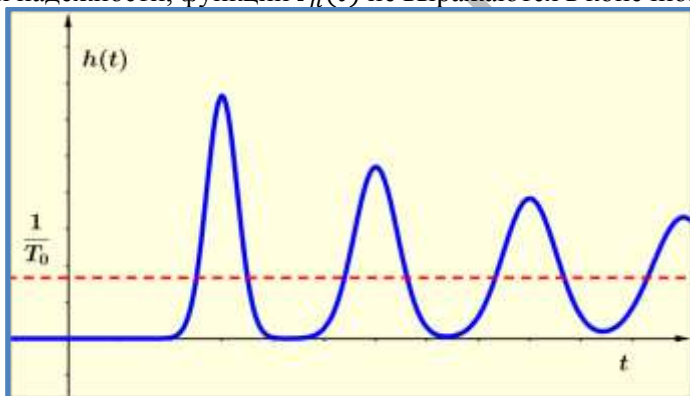


Рис. 3.2. Плотность потока восстановления нормального закона

Помимо точных выражений, могут быть получены оценки функции восстановления $H(t)$. Приведем основные. Из неравенства

$$\max_{1 \leq k \leq n} \tau_k \leq \tau_1 + \dots + \tau_n = t_n$$

следует, что справедливо соотношение

$$F_n(t) = P(t_n < t) \leq P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \tau_k < t\right\} = P\{\tau_1 < t, \tau_2 < t, \dots, \tau_n < t\},$$

или

$$F_n(t) \leq F^n(t).$$

Отсюда

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F^n(t) = \frac{F(t)}{1 - F(t)}.$$

Принимая во внимание очевидное неравенство $H(t) \geq F(t)$, получаем необходимую оценку:

$$F(t) \leq H(t) \leq \frac{F(t)}{1 - F(t)}.$$

Из полученной оценки следует, что на начальном участке времени, где $F(t) \ll 1$, справедливо приближенное равенство

$$H(t) \approx F(t).$$

Далее, беря математическое ожидание от обеих частей неравенства

$$t \leq \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{v(t)+1},$$

и применяя тождество Вальда, получаем:

$$t \leq T_0(H(t) + 1) \Rightarrow H(t) \geq \frac{t}{T_0} - 1.$$

С другой стороны, для стареющих элементов, у которых опасность отказа $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ монотонно возрастает, можно получить оценку

$$H(t) \leq \frac{t}{T_0}.$$

Таким образом, функция восстановления стареющих элементов для произвольного момента времени t подчиняется неравенству

$$\frac{t}{T_0} - 1 \leq H(t) \leq \frac{t}{T_0}.$$

3.2. Асимптотическое поведение процесса восстановления

На практике основной интерес представляет изучение процесса восстановления для большого времени t . Нас интересует поведение процесса на тех участках, которым предшествует большое количество отказов. Поэтому необходимо изучить асимптотическое поведение процесса и его характеристик при $t \rightarrow +\infty$. Приведем основные факты из теории восстановления, которая в основном и занимается изучением асимптотических свойств таких процессов.

Теорема 3.1. Для произвольного закона распределения $F(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{T_0}.$$

Интерпретация этого утверждения достаточно проста: для большого участка времени среднее число отказов, приходящееся на

единицу времени, близко к величине, обратной среднему времени жизни элемента.

Теорема 3.2 (Блекуэлл). Если случайное время τ_k распределено непрерывно, то для произвольного α

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (H(t + \alpha) - H(t)) = \frac{\alpha}{T_0}.$$

Теорема 3.3 (Смит, узловая теорема восстановления). Если время жизни элемента τ_k распределено непрерывно, а $Q(t)$ — монотонная невозрастающая, интегрируемая на $[0; +\infty)$ функция, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t - \tau) dH(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{+\infty} Q(t) dt. \quad (3.4)$$

Это равенство удобно тем, что, выбирая различные функции $Q(t)$, получаем различные предельные варианты процесса восстановления.

Теорема 3.4. Если τ_k имеют конечную дисперсию σ^2 , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(H(t) - \frac{t}{T_0} \right) = \frac{\sigma^2}{2T_0^2} - \frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем, что для большого времени t справедлива оценка

$$H(t) \approx \frac{t}{T_0} + \frac{\sigma^2}{2T_0^2} - \frac{1}{2}.$$

Теорема 3.5. Если непрерывная плотность распределения $f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{1}{T_0}.$$

Это утверждение отражает факт, что с течением времени процесс восстановления становится стационарным, его характеристики перестают зависеть от времени и от начальных условий.

3.3. Асимптотическое поведение числа отказов

Исследуем подробнее поведение величины $v(t)$ — числа отказов за время t с ростом времени. Возвратимся к равенству (3.1):

$$P\{v(t) \geq n\} = P\{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n < t\}.$$

Так как величины τ_k одинаково распределены и имеют конечную дисперсию σ^2 , то случайная величина

$$\xi_n = \frac{\frac{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n}{n} - T_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n - nT_o}{\sigma\sqrt{n}}$$

сходится при $n \rightarrow +\infty$ по вероятности к стандартному нормальному распределению.

Пусть теперь при $t \rightarrow +\infty$, а $n = \frac{t}{T_o} + z_n\sqrt{t}$, где z_n выбирается так, чтобы $z_n \rightarrow z$ (z – произвольно выбранное число), а n было бы целым. Теперь перепишем равенство (3.1) в форме

$$P \left\{ \frac{v(t) - \frac{t}{T_o}}{\sqrt{t}} \geq z_n \right\} = P \left\{ \xi_n \leq -\frac{T_o z_n \sqrt{t}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{T_o} + z_n \sqrt{t}}} \right\}.$$

При $t \rightarrow +\infty$ получаем:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{v(t) - \frac{t}{T_o}}{\sqrt{t}} \geq z_n \right\} = P \left\{ \xi_n \leq -\frac{T_o^{\frac{3}{2}} z}{\sigma} \right\}.$$

Сделаем замену $x = \frac{T_o^{\frac{3}{2}} z}{\sigma}$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{v(t) - \frac{t}{T_o}}{\frac{\sigma\sqrt{t}}{T_o^{\frac{3}{2}}}} \geq x \right\} &= P\{\xi < -x\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следовательно, случайная величина $v(t)$ асимптотически нормальна со средним $M[v(t)] \approx \frac{t}{T_o}$ и дисперсией $D[v(t)] \approx \frac{\sigma^2 t}{T_o^3}$

$$v(t) \sim N \left(\frac{t}{T_o}; \frac{\sigma^2 t}{T_o^3} \right).$$

Доказанный факт позволяет просто оценить возможное число отказов на достаточно большом интервале времени. Из равенства

(3.5) с вероятностью $1 - \alpha$ имеем, что число отказов на большом интервале $[0; t)$ заключено в пределах

$$\frac{t}{T_0} - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma\sqrt{t}}{T_0^2} < v(t) < \frac{t}{T_0} + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma\sqrt{t}}{T_0^2},$$

где множитель $u_{\frac{\alpha}{2}}$ – корень уравнения

$$u_{\frac{\alpha}{2}}: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_{\frac{\alpha}{2}}}^{u_{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha.$$

Пример 3.2. Пусть среднее время жизни элемента $T_0 = 100$ ч, дисперсия времени жизни $\sigma^2 = 3600$ ч². С коэффициентом доверия $\alpha = 0.95$ оценить число запасных элементов, необходимое для бесперебойной работы в течение времени $t = 8000$ ч.

Решение. В данном случае необходима лишь односторонняя оценка. Поэтому уравнение для нахождения множителя u_{α} принимает вид

$$u_{\alpha}: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_{\alpha}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha,$$

откуда $u_{\alpha} = 1.65$ и с вероятностью 0.95 выполняется неравенство

$$v(t) < \frac{t}{T_0} + u_{\alpha} \frac{\sigma\sqrt{t}}{T_0^2} = 80 + 1.65 \cdot \frac{60\sqrt{8000}}{100^2} \approx 89.$$

3.4. Надёжность элемента на заданном участке времени

Рассмотрим следующую важную задачу: какова вероятность того, что элемент проработает безотказно на интервале $[t; t + \tau)$? Такая задача возникает для устройств, которые постоянно находятся в рабочем состоянии, но выполняют свои функции лишь на отдельных участках времени. Обозначим искомую вероятность $p_t(\tau)$ и будем её искать. Рассмотрим систему несовместных событий:

$$A_0 = \{t + \tau < \tau_1\}, A_n = \{t_n < t < t + \tau < t_n + \tau_{n+1}\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Событие A_n означает, что до момента времени t произошло ровно n отказов и на интервале $[t; t + \tau)$ отказов не было. Очевидно, что интересующее нас событие B , заключающееся в безотказной работе элемента на интервале $[t; t + \tau)$, есть сумма всех событий

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

В силу несовместности событий A_n получаем выражение для искомой вероятности:

$$p_t(\tau) = P\{B\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{A_n\}.$$

Найдем вероятности события A_n , воспользовавшись формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned} P\{A_n\} &= P\{t_n < t < t + \tau < t_n + \tau_{n+1}\} = \\ &= \int_0^t P\{x < t_n < x + dx\} P\{\tau_{n+1} > t + \tau - x\} = \\ &= \int_0^t (1 - F(t + \tau - x)) f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда получим искомое:

$$p_t(\tau) = 1 - F(t + \tau) + \int_0^t (1 - F(t + \tau - x)) h(x) dx. \quad (3.6)$$

Из последнего выражения при $\tau = \Delta t \rightarrow 0$ нетрудно получить, что асимптотически выполняется

$$1 - p_t(\Delta t) = h(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Это равенство показывает, что плотность восстановления $h(t)$ равна вероятности отказа в единицу времени.

Выражение (3.6) почти никогда не используется на практике, так как нас обычно интересуют далекие моменты времени, для которых процесс восстановления становится стационарным и вероятность $p_t(\tau)$ перестает зависеть от времени. Поэтому в равенстве (3.6) перейдем к пределу, устремив $t \rightarrow +\infty$. Первое слагаемое в правой части $1 - F(t + \tau)$ с ростом t стремится к нулю, а для нахождения предела интеграла в (3.6) воспользуемся узловой теоремой восстановления, выбрав в равенстве (3.4):

$$Q(x) = 1 - F(x + \tau).$$

Тогда получаем:

$$p(\tau) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_t(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_0^{+\infty} (1 - F(x + \tau)) dx,$$

или

$$p(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{\tau}^{+\infty} (1 - F(t)) dt. \quad (3.7)$$

Интерпретация этого результата следующая (см. рис. 3.3).
Время, протекшее от момента t до очередного отказа, назовем остаточным временем жизни элемента и обозначим его через ξ_t .

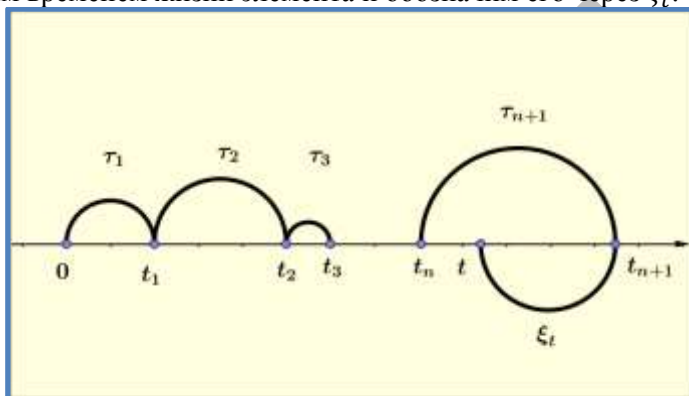


Рис. 3.3. Остаточное время жизни элемента
Функция распределения для ξ_t определяется равенством
 $P\{\xi_t > \tau\} = p_t(\tau)$.

С ростом t величина ξ_t сходится к некоторой стационарной случайной величине ξ , функция распределения которой равна

$$P\{\xi > \tau\} = p(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{\tau}^{+\infty} (1 - F(t)) dt.$$

Найдем числовые характеристики этого закона. Начальный момент первого порядка (среднее время)

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_0^{+\infty} p(\tau) d\tau = \frac{1}{T_o} \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} (1 - F(t)) dt = \\
&= \frac{1}{T_o} \int_0^{+\infty} t(1 - F(t)) dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2} f(t) dt = \quad (3.8) \\
&= \frac{\sigma^2 + T_o^2}{2T_o}
\end{aligned}$$

или

$$T_1 = \frac{T_o}{2} + \frac{\sigma^2}{2T_o}.$$

Интересно заметить, что на первый взгляд среднее время T_1 должно равняться $\frac{T_o}{2}$, так как момент времени t должен делить время жизни элемента τ_{v+1} в среднем пополам. На самом деле, как видно из выражения (3.8), среднее время больше. Это объясняется тем, что момент t с большей вероятностью попадает на больший интервал τ_i , поэтому средняя длина того интервала τ_i , на который попал момент t , будет больше, чем T_o .

Опасность отказа $\lambda_1(t)$ для величины ξ определяется выражением

$$\lambda_1(t) = \frac{1 - F(t)}{\int_t^{+\infty} (1 - F(t)) dt}.$$

Для стареющего элемента $\lambda(t)$ монотонно возрастает. Тогда дифференцирование предыдущего соотношения приводит к

$$\frac{\lambda'_1(t)}{\lambda_1(t)} = \lambda_1(t) - \lambda(t).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
1 - F(t) &= \int_t^{+\infty} f(x) dx = \int_t^{+\infty} \lambda(x)(1 - F(x)) dx \geq \\
&\geq \lambda(t) \int_t^{+\infty} (1 - F(x)) dx.
\end{aligned}$$

Откуда получаем неравенство

$$\lambda_1(t) \geq \lambda(t),$$

и, следовательно, $\lambda_1'(t) \geq 0$. То есть функция $\lambda_1(t)$ монотонно возрастает. Полезно построить для функции $p(t)$ простые оценки. Так как

$$p''(t) = \frac{f(t)}{T_o} \geq 0,$$

то функция $p(t)$ выпукла вниз и её график лежит выше касательной (см. рис. 3.4). Отсюда получаем оценку:

$$p(t) \geq 1 - \frac{t}{T_o}. \quad (3.9)$$

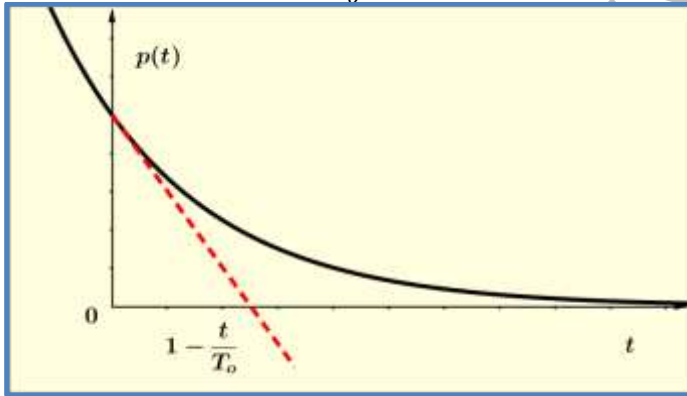


Рис. 3.4. Оценка распределения остаточного времени жизни элемента

Для стареющих элементов можно получить оценку и с другой стороны. Из монотонного возрастания $\lambda(t)$ следует возрастание $\lambda_1(t)$. Тогда выполняется неравенство

$$\lambda_1(t) \geq \lambda_1(0) = \frac{1}{T_o}.$$

Откуда следует

$$\int_0^T \lambda_1(t) dt \geq \frac{T}{T_o},$$

и для функции надёжности получим:

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda_1(t) dt} \leq e^{-\frac{t}{T_o}}.$$

Соединяя эту оценку с оценкой (3.9), получаем двустороннюю оценку (см. рис. 3.5):

$$1 - \frac{t}{T_o} \leq p(t) \leq e^{-\frac{t}{T_o}}.$$

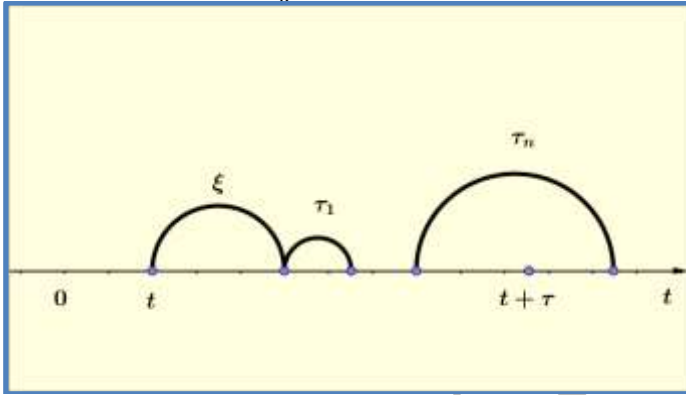


Рис. 3.5. Оценка распределения остаточного времени жизни элемента

Следовательно, для стареющих элементов справедливо приближенное равенство

$$p(t) \approx 1 - \frac{t}{T_o}, \quad (3.10)$$

которое имеет ошибку, не превосходящую $\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T_o} \right)^2$.

3.5. Вероятность конечного числа отказов на интервале

Вычислим теперь для стационарного случая вероятность появления на интервале $[t; t + \tau)$ ровно n отказов. Обозначим случайное число отказов на интервале $[t; t + \tau)$ через v_τ . Тогда

$$P\{v_\tau \geq n\} = P\{\xi + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} < \tau\}$$

и, так как величины ξ и τ_i независимы, то выполняется

$$P\{v_\tau \geq n\} = \frac{1}{T_o} \int_0^\tau (1 - F(\tau - x)) F_{n-1}(x) dx,$$

откуда следует

$$P\{v_\tau = n\} = \frac{1}{T_0} \int_0^\tau (1 - F(\tau - x))(F_{n-1}(x) - F_n(x))dx = \\ = \frac{1}{T_0} \int_0^\tau (F_{n-1}(x) - 2F_n(x) + F_{n+1}(x))dx.$$

Заметим, что согласно теореме Блекуэлла среднее число отказов на интервале $[t; t + \tau)$ при большом t равно

$$M[v_\tau] = \frac{\tau}{T_0}.$$

Из формулы (3.10) можно вычислить и дисперсию v_τ . Она равна

$$D[v_\tau] = \frac{2}{T_0} \int_0^\tau \left(H(x) - \frac{x}{T_0} + \frac{1}{2} \right) dx.$$

Заметим еще, что при $\tau \rightarrow +\infty$ справедлива предельная теорема (3.5), т. е. v_τ распределена асимптотически нормально со средним $\frac{\tau}{T_0}$

и дисперсией $\frac{\sigma^2 \tau}{T_0^3}$:

$$v_\tau \sim N\left(\frac{\tau}{T_0}; \frac{\sigma^2 \tau}{T_0^3}\right).$$

3.6. Процесс восстановления с конечным временем восстановления

До сих пор предполагали, что восстановление отказавшего элемента происходит мгновенно. В действительности это восстановление требует некоторого времени, которым нельзя пренебречь и которое сравнимо со временем жизни самого элемента. Время восстановления складывается обычно из времени, которое необходимо, чтобы найти неисправный элемент, и времени, которое требуется, чтобы заменить отказавший элемент новым или произвести ремонт отказавшего элемента. Далее будем рассматривать время восстановления в целом, не интересуясь, из каких частей оно складывается. Итак, будем рассматривать следующий процесс (рис. 3.6).

Элемент, проработав случайное время τ'_1 , выходит из строя и восстанавливается в течение случайного времени τ''_1 ; восстановленный элемент работает время τ'_2 и восстанавливается за время τ''_2 ; и так далее.

Моменты

$$t'_n = \tau'_1 + \tau''_1 + \tau'_2 + \tau''_2 + \dots + \tau'_{n-1} + \tau''_{n-1} + \tau'_n, n = 1, 2, \dots$$

будем называть отказами элемента, а моменты

$$t''_n = \tau'_1 + \tau''_1 + \tau'_2 + \tau''_2 + \dots + \tau'_n + \tau''_n, t''_0 = 0, n = 1, 2, \dots$$

будем называть восстановлениями.

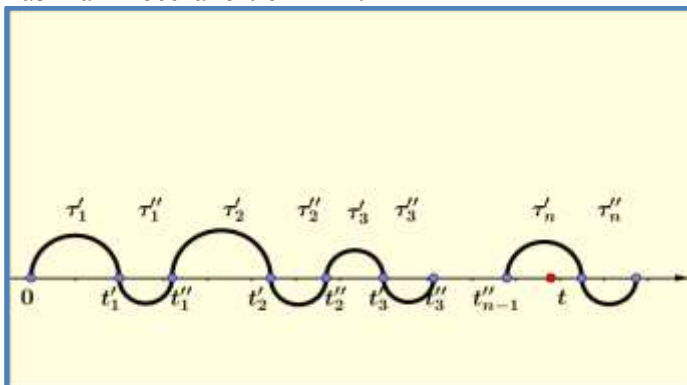


Рис. 3.6. Поток восстановления с конечным временем восстановления

Будем предполагать, что все величины τ'_i и τ''_j независимы и все периоды работы τ'_n распределены одинаково по одному закону

$$F(t) = P\{\tau'_n < t\}$$

со средним $T_1 = M[\tau'_n]$ и дисперсией $\sigma_1^2 = D[\tau'_n]$. Все периоды восстановления также распределены одинаково по закону

$$G(t) = P\{\tau''_n < t\}$$

со средним $T_2 = M[\tau''_n]$ и дисперсией $\sigma_2^2 = D[\tau''_n]$. Эти законы имеют непрерывную плотность $f(t) = F'(t)$ и $g(t) = G'(t)$, и справедливо неравенство $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 0$. Определенный таким образом процесс будем называть процессом восстановления с конечным временем восстановления. Рассмотрим основные характеристики этого процесса.

Определение 3.2. Коэффициент готовности $k_r(t)$ - вероятность исправного состояния элемента в момент времени t .

Для вывода определения коэффициента готовности рассмотрим события

$$A_n = \{t''_n < t < t'_{n+1}\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Событие A_n означает, что до момента t произошло ровно n восстановлений и в момент t элемент исправен. Очевидно, что событие B ,

закрывающееся в исправной работе элемента в момент t , равно сумме всех событий A_n

$$B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Отсюда в силу несовместимости событий A_n получим:

$$k_r(t) = P\{B\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{A_n\}.$$

Чтобы определить вероятности $P\{A_n\}$, введем обозначения. Пусть $t_{n1} = \tau'_1 + \tau'_2 + \dots + \tau'_n$ и $t_{n2} = \tau''_1 + \tau''_2 + \dots + \tau''_n$. Заметим, что $t_{n1} + t_{n2} = t''_n$. Законы распределения t_{n1}, t_{n2}, t''_n обозначим так:

$P\{t_{n1} < t\} = F_n(t), P\{t_{n2} < t\} = G_n(t), P\{t''_n < t\} = \Phi_n(t)$, а их плотности - $f_n(t) = F'_n(t), g_n(t) = G'_n(t)$. Эти законы определяются через исходные законы $F(t)$ и $G(t)$ выражениями:

$$F_1(t) = F(t), F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-x) dF(x);$$

$$G_1(t) = G(t), G_n(t) = \int_0^t G_{n-1}(t-x) dG(x);$$

$$\Phi_n(t) = \int_0^t F_n(t-x) dG_n(x).$$

Для вычисления вероятностей $P\{A_n\}$ воспользуемся формулой полной вероятности, позволяющей записать вероятность события A_n в виде следующего выражения:

$$\begin{aligned} P\{A_n\} &= P\{t''_n < t < t''_n + \tau'_{n+1}\} = \\ &= \int_0^t P\{x < t_n < x + dx\} P\{\tau'_{n+1} > t - x\} = \\ &= \int_0^t (1 - F(t-x)) \varphi_n(x) dx. \end{aligned}$$

Подставляя найденные вероятности в выражение для коэффициента готовности, получаем:

$$k_r(t) = 1 - F(t) + \int_0^t (1 - F(t-x))h_2(x)dx, \quad (3.11)$$

где

$$h_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Моменты восстановлений t_n'' образуют процесс восстановления. Функция $h_2(t)$ - плотность восстановления для этого процесса. Среднее расстояние между соседними точками этого процесса равно

$$M[\tau_n' + \tau_n''] = T_1 + T_2.$$

Формула (3.11) почти никогда не используется, так как на практике под коэффициентом готовности понимают обычно то стационарное значение, к которому стремится функция $k_r(t)$ с ростом времени. В равенстве (3.11) устремим t к бесконечности. Воспользуемся узловой теоремой восстановления, взяв в равенстве (3.4):

$$Q(x) = 1 - F(x).$$

Тогда

$$k_r = \lim_{t \rightarrow \infty} k_r(t) = \frac{1}{T_1 + T_2} \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx,$$

откуда окончательно

$$k_r = \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \quad (3.12)$$

То есть коэффициент готовности (3.12) - средняя доля времени, в течение которого элемент пребывает в исправном состоянии.

Для процесса восстановления с конечным временем восстановления рассмотрим две случайные величины:

$v_1(t)$ — число отказов на $[0; t)$,

$v_2(t)$ — число восстановлений на $[0; t)$

и соответствующие средние

$M[v_1(t)] = H_1(t)$ — среднее число отказов на $[0; t)$

и $M[v_2(t)] = H_2(t)$ — среднее число восстановлений на $[0; t)$.

Основной интерес представляет поведение этих величин для больших значений t_1 , а асимптотически $v_1(t)$ и $v_2(t)$ ведут себя одинаково: они могут отличаться друг от друга самое большее на

единицу, поэтому рассмотрим только моменты восстановлений. Расстояния между соседними моментами суть случайные величины

$$\tau_n = \tau'_n + \tau''_n,$$

распределенные по закону

$$P\{\tau_n < t\} = \Phi(t) = \int_0^t F(t-x)dG(x).$$

Поэтому функция восстановления

$$H_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t),$$

а плотность восстановления

$$h_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t), \varphi_n(t) = \Phi'_n(t).$$

С ростом времени $h_2(t)$ стремится к пределу $\frac{1}{T_1+T_2}$ - среднему числу восстановлений за единицу времени. Величина $v_2(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ асимптотически нормальна со средним - $\frac{t}{T_1+T_2}$ и дисперсией $\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t}{(T_1+T_2)^3}$. Это дает возможность, как и выше, оценивать число восстановлений за время t . Заметим, что число отказов $v_1(t)$ за время t имеет точно такую же асимптотику.

Совершенно аналогично ищется в нашем случае вероятность безотказной работы на $[t; t + \tau)$. Она равна

$$p_t(\tau) = 1 - F(t + \tau) + \int_0^t (1 - F(t + \tau - x))h_2(x)dx.$$

Воспользуемся узловой теоремой восстановления и получим, что

$$p(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(\tau) = \frac{1}{T_1 + T_2} \int_{\tau}^{+\infty} (1 - F(x))dx.$$

Эту формулу можно также представить в виде

$$p(\tau) = k_r \frac{1}{T_1} \int_{\tau}^{+\infty} (1 - F(x))dx,$$

откуда следует, что вероятность безотказной работы в течение времени t равна произведению вероятности того, что в начальный

момент система исправна, и вероятности исправной работы элемента в течение времени t для обычного процесса с мгновенным восстановлением (3.7).

3.7. Случай экспоненциальных законов

На практике часто рассматривают специальный случай процесса восстановления с конечным временем восстановления, когда длительности жизни и восстановления элемента подчинены экспоненциальному закону

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, G(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Если $\pi(t)$ - вероятность исправного состояния, а $r(t) = 1 - \pi(t)$ - вероятность неисправного состояния в момент t , то, сравнивая процесс в два бесконечно близких момента времени t и $t + \Delta t$, по формуле полной вероятности получаем:

$$\pi(t + \Delta t) = (1 - (\lambda \Delta t + o(\Delta t))) \pi(t) + (\mu \Delta t + o(\Delta t)) r(t).$$

Переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\pi'(t) = -\lambda \pi(t) + \mu r(t),$$

или

$$\pi'(t) + (\lambda + \mu) \pi(t) = \mu,$$

решение, которого подчиняется начальному условию $\pi(0) = 1$.

Решая это уравнение, находим искомую вероятность, которая, как легко видеть, есть коэффициент готовности

$$k_r(t) = \pi(t) = \frac{\mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t}}{\lambda + \mu}. \quad (3.13)$$

Стационарное значение этого коэффициента равно

$$k_r = \lim_{t \rightarrow \infty} k_r(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

Вероятность исправной работы на $[t; t + \tau)$ при большом t выражается так:

$$p(\tau) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda \tau}.$$

Из формулы (3.13) видно, с какой скоростью приближается коэффициент готовности к своему предельному значению $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$. Скорость оказывается экспоненциальной

$$k_r(t) - k_r = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} < e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

В общем случае для произвольных законов $F(t)$ и $G(t)$ найти скорость установления процесса трудно. Можно высказать только одно качественное соображение — при фиксированных средних временах процесс устанавливается тем медленнее, чем меньше суммарная дисперсия $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Заметим еще, что если плотности $f(t)$ и $g(t)$ стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью, т. е.

$$f(t) < C_1 e^{-\alpha_1 t}, g(t) < C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

то и процесс восстановления устанавливается с экспоненциальной скоростью

$$|k_r(t) - k_r| < C e^{-\alpha t}.$$

3.8. Распределение суммарной наработки

Рассмотрим следующую задачу. Назовем суммарной наработкой за время t сумму всех периодов работы τ_j до момента t , включая, может быть, и неполный период работы, примыкающий к моменту t (рис. 3.7). Обозначим суммарную наработку через h_t . Задача заключается в том, чтобы найти закон распределения случайной величины h_t и исследовать ее асимптотическое поведение при $t \rightarrow +\infty$.

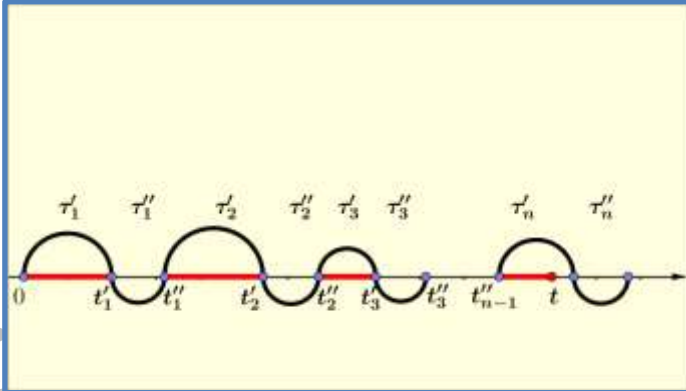


Рис. 3.7. Поток суммарной наработки

Введем в рассмотрение еще одну случайную величину τ_s , равную тому случайному моменту, когда суммарная наработка достигнет величины s . На практике часто задают суммарную наработку изделия s , по достижении которой изделие заменяется новым. Тогда τ_s будет календарным временем жизни изделия, и для нас важно уметь заранее оценить это время. Легко заметить, что между величинами h_t и τ_s существует простая связь

$$P\{h_t < s\} = P\{\tau_s > t\}.$$

Чтобы найти точный закон распределения h_t (а значит, и τ_s), рассмотрим отдельно два потока: поток, образованный последовательными, рабочими периодами, и поток, образованный периодами восстановления. Пусть $v_1(t)$ — число отказов до момента t в первом потоке, а $v_2(t)$ — число восстановлений до момента t во втором потоке. Докажем, что следующие два события эквивалентны, а значит, их вероятности равны

$$\{v_1(t) \geq v_2(t - s)\} = \{\tau_s > t\}.$$

Заметим прежде всего, что с вероятностью, равной единице, момент τ_s попадет внутрь рабочего периода. Поэтому

$$v_1(s) = v_2(\tau_s - s),$$

так как число отказов, происшедших до момента τ_s , равно числу восстановлений до этого момента. Тогда из события $\tau_s > t$ следует, что $v_1(s) = v_2(\tau_s - s) \geq v_2(t - s)$. Наоборот, если произошло событие $v_2(t - s) \geq v_1(s) = v_2(\tau_s - s)$, то $t \leq \tau_s$ в силу монотонности функции $v_2(x)$, что эквивалентно неравенству $t < \tau_s$. Итак, вероятность

$$\Phi(s, t) = P\{h_t < s\} = P\{\tau_s > t\} = P\{v_1(s) \geq v_2(t - s)\}.$$

Но последнюю вероятность можно легко вычислить, зная распределение $v_1(x)$ и $v_2(x)$. По формуле (3.2) получим, что

$$\begin{aligned} \Phi(s, t) &= P\{h_t < s\} = P\{\tau_s > t\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_n(t - s) - G_{n+1}(t - s)) F_n(s), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где, как обычно,

$$F_0(x) = Q_0(x) \equiv 1.$$

Выражение (3.14) можно использовать, если время t невелико по сравнению со средним временем жизни и восстановления элемента, хотя и в этом случае выкладки велики. Заметим еще, что ряд (3.14) не упрощается даже для экспоненциального закона, когда

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda t}, G(x) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Для этого случая имеем:

$$\Phi(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu(t - s))^n}{n!} e^{-\mu(t-s)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}. \quad (3.15)$$

Если же время t велико, то для вычисления рядов (3.14) и (3.15) потребуется брать много членов ряда, что делает эти формулы

практически малоприспособленными. По этой причине исследуем асимптотическое поведение вероятности $\Phi(s, t)$ при s и $t \rightarrow +\infty$. Как уже было доказано, число восстановлений $v(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ распределено асимптотически нормально со средним $\frac{t}{T_0}$ и дисперсией $\frac{\sigma^2 t}{T_0^3}$. Следовательно, при $s \rightarrow +\infty$ величина $v_1(s)$ асимптотически нормальна со средним $\frac{s}{T_0}$ и дисперсией $\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^3}$, а величина $v_2(t - s)$ при $t - s \rightarrow +\infty$ асимптотически нормальна со средним $\frac{t-s}{T_2}$ и дисперсией $\frac{\sigma_2^2 (t-s)}{T_2^3}$.

Так как величины $v_1(s)$ и $v_2(t - s)$ независимы, то их разность $v_1(s) - v_2(t - s)$ при s и $(t - s) \rightarrow +\infty$ также асимптотически нормальна со средним $\frac{t-s}{T_2} - \frac{s}{T_1}$ и дисперсией $\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^3} + \frac{\sigma_2^2 (t-s)}{T_2^3}$. Преобразуем вероятность $\Phi(s, t)$:

$$\begin{aligned} \Phi(s, t) &= P\{v_1(s) \geq v_2(t - s)\} = \\ &= P\left\{ \frac{v_2(t - s) - v_1(s) - \frac{t-s}{T_2} + \frac{s}{T_1}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^3} + \frac{\sigma_2^2 (t-s)}{T_2^3}}} \leq \right. \\ &\quad \left. \leq \frac{\frac{s}{T_1} - \frac{t-s}{T_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^3} + \frac{\sigma_2^2 (t-s)}{T_2^3}}} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $t \rightarrow +\infty$ и $s = \frac{T_1}{T_1 + T_2} t + z\sqrt{t}$. Тогда $s, (t - s) \rightarrow +\infty$ и левая часть неравенства под знаком вероятности асимптотически нормальна со средним значением нуль и дисперсией единица. Правая часть этого неравенства имеет конечный предел, равный

$$x = \frac{z(\sqrt{T_1 + T_2})^3}{T_1 T_2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2}}}$$

Отсюда при $t \rightarrow \infty$ и

$$s = \frac{T_1}{T_1 + T_2} t + \frac{T_1 T_2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2}}}{(\sqrt{T_1 + T_2})^3} x \sqrt{t},$$

где x - фиксированная величина, получаем:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(s, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P\{h_t < s\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

или

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{h_t - \frac{T_1}{T_1 + T_2} t}{\sqrt{t} T_1 T_2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2}}} (\sqrt{T_1 + T_2})^3 < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Иными словами, величина h_t асимптотически нормальна со средним

$$M[h_t] \approx \frac{T_1}{T_1 + T_2} t \text{ и дисперсией } D[h_t] \approx \frac{T_1^2 T_2^2 \left(\frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2} \right)}{(T_1 + T_2)^3} t.$$

Совершенно аналогично показывается, что при $s \rightarrow +\infty$ величина τ_s асимптотически нормальна со средним $M[\tau_s] \approx \frac{T_1 + T_2}{T_1} s$ и дис-

персией $D[\tau_s] \approx \frac{T_2^2}{T_1} \left(\frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2} \right) s$.

Пример 3.3. Пусть $T_1 = 5$ ч, $T_2 = 3$ ч, $\sigma_1 = 3$ ч, $\sigma_2 = 2$ ч. Найти суммарную наработку h_t за время $t = 800$ ч.

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины h_t $M[h_t] = 500$ ч, $\sqrt{D[h_t]} = 13$ ч. Значит, например, с вероятностью 0,95 суммарная наработка будет заключена в пределах

$$474 \text{ ч} < h_t < 526 \text{ ч}.$$

4. Надёжность системы

Определение 4.1. Система - произвольная конструкция, состоящая из частей (элементов), надёжность которых задана.

Структура системы и характер ее работы должны быть известны нам настолько, чтобы для любой группы элементов системы было известно, вызывает ли отказ всех элементов этой группы отказ системы или нет. Предположим также, что элементы отказывают независимо друг от друга, т. е. отказ любой группы элементов не изменяет надёжности других элементов.

4.1. Надёжность системы с независимыми элементами, работающей до первого отказа

Рассмотрим вначале работу системы до ее первого отказа. В этом случае надёжность системы полностью определяется функцией надёжности $P(t)$, которая равна вероятности безотказной работы системы в течение времени t . Пусть система состоит из n элементов, функции надёжности которых обозначим через $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$. Задача заключается в том, чтобы выразить функцию надёжности системы $P(t)$ через функции надёжности её элементов.

4.1.1. Последовательное соединение элементов в системе

Разберем сначала самый простой и самый важный случай.

Определение 4.2. Будем говорить, что элементы в системе соединены последовательно в смысле надёжности, если отказ любого элемента вызывает отказ всей системы.

Тогда для безотказной работы системы в течение времени t нужно, чтобы каждый элемент работал безотказно в течение этого времени. Так как элементы независимы в смысле надёжности, то

$$P(t) = p_1(t)p_2(t) \cdots p_n(t). \quad (4.1)$$

Итак, при последовательном соединении функции надёжности перемножаются. Выразим функции надёжности через интенсивности (опасности) отказа:

$$e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} = e^{-\int_0^t \lambda_1(t) dt - \int_0^t \lambda_2(t) dt - \cdots - \int_0^t \lambda_n(t) dt},$$

откуда

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \cdots + \lambda_n(t).$$

То есть при последовательном соединении элементов опасности отказов складываются. В частности, для экспоненциального закона, когда $\lambda_k(t) = \lambda_k = \text{const}$, выполняется

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

и модель надежности системы принимает вид

$$P(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t}.$$

Значит, надежность системы также будет подчиняться экспоненциальному закону. Если обозначить в этом случае через T_o среднее время жизни системы, а через T_k — среднее время жизни k -го элемента, то, очевидно, выполнится

$$\frac{1}{T_o} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \dots + \frac{1}{T_n}. \quad (4.2)$$

В сложной системе всегда имеются группы одинаковых элементов. Если эти одинаковые элементы находятся в примерно одинаковых условиях или различие условий не влияет существенно на их надежность, то надежности этих элементов равны. Пусть, например, в первой группе находится n_1 элементов с функцией надежности $p_1(t)$, во второй группе — n_2 элементов с функцией надежности $p_2(t)$ и т.д. Тогда формулы (4.1) – (4.2) записываются так:

$$P(t) = (p_1(t))^{n_1} (p_2(t))^{n_2} \dots (p_s(t))^{n_s};$$

$$\lambda(t) = n_1 \lambda_1(t) + n_2 \lambda_2(t) + \dots + n_s \lambda_s(t),$$

а в случае экспоненциальных законов — в виде

$$\lambda = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + \dots + n_s \lambda_s; \quad \frac{1}{T_o} = \frac{n_1}{T_1} + \frac{n_2}{T_2} + \dots + \frac{n_s}{T_s}.$$

В частности, когда все элементы системы имеют одинаковую надежность $p_k(t) = p(t)$, то

$$P(t) = (p(t))^n, \quad \lambda(t) = n \lambda_1(t),$$

а для экспоненциального закона

$$\lambda = n \lambda_1; \quad T_o = \frac{T_1}{n}.$$

Введем в рассмотрение вероятности отказа $Q(t) = 1 - P(t)$ и $q_k(t) = 1 - p_k(t)$. Тогда для последовательного соединения

$$Q(t) = 1 - (1 - q_1(t))(1 - q_2(t)) \dots (1 - q_n(t)).$$

Можно доказать по индукции следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_n) &< (1 - q_1)(1 - q_2) \dots (1 - q_n) < \\
&< 1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_n) + \\
&+ (q_1 q_2 + q_1 q_3 + \dots + q_{n-1} q_n) < \\
&< 1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_n) + \frac{1}{2} (q_1 + q_2 + \dots + q_n)^2,
\end{aligned}$$

откуда следует, что, если выполняется (сумма отказов пренебрежимо мала)

$$q_1(t) + q_2(t) + \dots + q_n(t) \ll 1,$$

то справедлива приближенная формула

$$Q(t) \approx q_1(t) + q_2(t) + \dots + q_n(t),$$

погрешность, которой не превосходит

$$\frac{1}{2} (q_1(t) + q_2(t) + \dots + q_n(t))^2.$$

4.1.2. Параллельное соединение элементов в системе

Рассмотрим теперь второй простейший случай соединения элементов в системе.

Определение 4.3. Будем говорить, что элементы в системе соединены параллельно в смысле надёжности, если отказ системы наступает только тогда, когда отказывают все элементы системы.

Примером системы с таким соединением элементов является устройство, состоящее из нескольких частей, выполняющих одну и ту же функцию. Функция не будет выполнена, если откажут все части. Так как элементы независимы в смысле надёжности, то получаем:

$$Q(t) = q_1(t)q_2(t) \dots q_n(t),$$

т. е. при параллельном соединении вероятности отказа перемножаются. В частности, когда все элементы равнонадежны, а этот случай наиболее интересен, получаем:

$$Q(t) = q^n(t).$$

Если надёжность каждого элемента подчиняется экспоненциальному закону, то надёжность системы уже не следовать этому закону. Например, для случая равных элементов

$$Q(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

В этом случае можно найти среднее время жизни системы

$$T_o = \int_0^{+\infty} P(t)dt = \int_0^{+\infty} (1 - (1 - e^{-\lambda t})^n)dt.$$

Сделаем замену $x = 1 - e^{-\lambda t}$,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{1-x}, dt = \frac{dx}{\lambda(1-x)},$$

откуда

$$\begin{aligned} T_o &= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) dx = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

или

$$T_o = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

При большом n

$$T_o \approx \frac{1}{\lambda} (\ln n + C), C = 0.577 \dots$$

4.1.3. Произвольное соединение элементов в системе

Рассмотрим теперь общий случай надежности системы с независимыми элементами. Пусть система состоит из n элементов и $p_k(t)$ — функции надежности, а $q_k(t) = 1 - p_k(t)$, $k = \overline{1, n}$. Если нам известна структура системы, то для каждого множества элементов системы (а таких множеств $2^n - 1$) нам должно быть известно, вызывает отказ всех элементов этого множества отказ системы или нет. Назовем группой отказа множество элементов, отказ которого вызывает отказ системы, а отказ любой собственной части этого множества еще не вызывает отказа системы. Пусть

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m -$$

все группы отказа. Пусть A_k — событие, заключающееся в том, что группа Γ_k не отказала за время t , т.е. не отказал хотя бы один ее элемент. Тогда надежность системы

$$\begin{aligned}
P(t) &= P\{A_1 A_2 \dots A_m\} = 1 - P\{\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_m\} = \\
&= 1 - \sum_k P\{\bar{A}_k\} + \sum_{k < l} P\{\bar{A}_k \bar{A}_l\} - \\
&\quad - \sum_{k < l < s} P\{\bar{A}_k \bar{A}_l \bar{A}_s\} + \dots,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\bar{A}_k$ — событие, противоположное событию A_k . Любая вероятность вида

$$P\{\bar{A}_{l_1} \bar{A}_{l_2} \dots \bar{A}_{l_s}\} = q_{s_1}(t) q_{s_2}(t) \dots q_{s_l}(t),$$

где $s_1, s_2, \dots, s_l$ — номера всех элементов, входящих в группы $\Gamma_{l_1}, \Gamma_{l_2}, \dots, \Gamma_{l_k}$, причем некоторые элементы могут входить сразу в несколько групп. Таким образом, формула (4.3) дает возможность вычислить надежность системы в общем случае. Когда число m велико, то пользоваться ею неудобно: в правой части (4.3) содержится 2^m слагаемых. Для упрощения вычислений можно поступить так.

Назовем две группы отказа связанными, если их можно соединить цепочкой пересекающихся групп. Тогда все группы отказа разбиваются на классы связанных групп. Пусть группы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{s_1}$ образуют первый класс, группы $\Gamma_{s_1+1}, \dots, \Gamma_{s_2}$ — второй класс и т. д. События A_k из разных классов независимы, и надежность системы выражается так:

$$P(t) = P\{A_1 A_2 \dots A_n\} = P\{A_1 A_2 \dots A_{s_1}\} P\{A_{s_1+1} A_{s_1+2} \dots A_{s_2}\} \dots$$

Каждый сомножитель в правой части равенства может быть подсчитан по формуле (4.3). Если классы связанных групп состоят из небольшого числа элементов, то вычисления существенно сокращаются. Следует заметить, что в большинстве случаев связи элементов в системе приводятся к комбинациям последовательного и параллельного соединений, и в этих случаях расчет надежности системы может быть произведен проще. Формула (4.3) показывает, что в самом общем случае функция надежности системы с независимыми элементами $P(t)$ есть многочлен от функций надежности элементов $p_k(t)$, — в этом и заключается основной смысл доказанного выше предложения.

4.2. Надежность системы с зависимыми элементами

Везде выше предполагали, что элементы системы независимы в смысле надежности. Это очень сильное допущение, в реальных системах оно часто не выполняется. Отказы одних элементов могут

существенно влиять на надежность других элементов, изменяя их параметры.

В случае параллельного соединения отказы одних элементов приводят к увеличению функциональной нагрузки на оставшиеся в живых элементы и их надежность падает. Рассмотрим такой характерный пример. Система состоит из n одинаковых элементов, соединенных параллельно. Предположим, что опасность отказа каждого элемента не зависит от времени, но зависит от числа не отказавших элементов. Если в данный момент работает k элементов, то опасность отказа каждого из них равна λ_k . Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент t работает ровно k элементов. В этом случае скажем, что система находится в состоянии k . Из этого состояния за бесконечно малое время Δt она может с вероятностью

$$k\lambda_k\Delta t + \underline{o}(\Delta t)$$

перейти в состояние $(k - 1)$ и с вероятностью

$$1 - k\lambda_k\Delta t + \underline{o}(\Delta t)$$

остаться в состоянии k . Сравнивая состояние системы в два момента времени t и $t + \Delta t$ по формуле полных вероятностей, получаем:

$$p_k(t + \Delta t) = \left((k + 1)\lambda_{k+1}\Delta t + \underline{o}(\Delta t) \right) p_{k+1}(t) + \left(1 - (k\lambda_k\Delta t + \underline{o}(\Delta t)) \right) p_k(t) + \underline{o}(\Delta t).$$

Разделив обе части равенства на Δt и переходя к пределу при стремлении Δt к нулю, получаем:

$$p'_k(t) = (k + 1)\lambda_{k+1}p_{k+1}(t) - k\lambda_k p_k(t), k = \overline{0, n - 1}. \quad (4.4)$$

При $k = n$ аналогично получается:

$$p'_n(t) = -n\lambda_n p_n(t).$$

Так как в начальный момент $t = 0$ все элементы работают, то $p_n(0) = 1$ и $p_k(0) = 0$ при $k < n$. Для решения этой системы используем преобразование Лапласа. Пусть

$$a_k(z) = \int_0^{+\infty} p_k(t)e^{-zt} dt, k = \overline{0, n}.$$

Умножив каждое уравнение (4.4) на e^{-zt} и проинтегрировав по t , получим:

$$\begin{aligned} -1 + za_n(z) &= -n\lambda_n a_n(z), \\ za_k(z) &= (k + 1)\lambda_{k+1}a_{k+1}(z) - k\lambda_k a_k(z), k = \overline{0, n - 1}. \end{aligned}$$

Решив эту алгебраическую систему, найдем:

$$\begin{aligned} a_n(z) &= \frac{1}{z + n\lambda_n}, \\ a_k(z) &= \frac{(k+1)\lambda_{k+1}a_{k+1}(z)}{z + k\lambda_k} = \\ &= \frac{(k+1)\lambda_{k+1}(k+2)\lambda_{k+2} \cdots n\lambda_n}{(z + k\lambda_k)(z + (k+1)\lambda_k) \cdots (z + n\lambda_n)}. \end{aligned}$$

В частности,

$$a_0(z) = \frac{n! \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}{z(z + \lambda_1)(z + 2\lambda_2) \cdots (z + n\lambda_n)},$$

откуда по формуле обращения

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \\ &= \frac{n! \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt} dz}{z(z + \lambda_1)(z + 2\lambda_2) \cdots (z + n\lambda_n)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Очевидно, что $p_0(t)$ есть вероятность того, что к моменту t все элементы отказали, т. е. произошел отказ системы. Поэтому

$$p_0(t) = Q(t) = 1 - P(t).$$

Таким образом, вероятность отказа системы выражается интегралом (4.5). Этот интеграл может быть выражен в виде суммы

$$Q(t) = 1 - n! \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-k\lambda_k t}}{k\lambda_k \omega'(-k\lambda_k)},$$

где $\omega(x) = (x - \lambda_1)(x - 2\lambda_2) \cdots (x - n\lambda_n)$. Чтобы найти среднее время жизни системы, рассмотрим интеграл

$$A(z) = \int_0^{+\infty} P(t) e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} (1 - p_0(t)) e^{-zt} dt = \frac{1}{z} - a_0(z).$$

Устремив z к нулю, получим искомую величину:

$$A(0) = T_0 = \int_0^{+\infty} P(t) dt = \frac{1}{n\lambda_n} + \frac{1}{(n-1)\lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\lambda_1}.$$

В общем случае задача определения надежности систем с зависимыми элементами не решена - неизвестны условные вероятности, а их опытное определение требует большого объема испытаний.

К оценке надежности сложных систем, состоящих из большого числа элементов, следует подходить иначе. Можно, например,

разбить систему на такие части, которые из физических соображений независимы, и каждую такую часть считать одним элементом. Если надежность этих частей определена из опыта, то надежность всей системы может быть уже просто рассчитана.

4.3. Надежность восстанавливаемой системы

До сих пор рассматривали работу системы до первого отказа. Теперь предположим, что каждый элемент системы после отказа восстанавливается.

Рассмотрим сначала тот случай, когда восстановление происходит мгновенно. Как и ранее, будем считать, что исходные свойства элемента восстанавливаются полностью. Предположим также, что работа, отказы и восстановление одного элемента никак не влияют на надежность других элементов. Моменты отказов каждого элемента образуют процесс восстановления, причем в силу наших предположений эти процессы независимы. Пусть $F_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ - закон распределения времени жизни k -го элемента. Предполагаем, как обычно, что эти законы имеют непрерывную плотность $f_k(t)$ и существуют среднее время жизни элемента T_k и дисперсия σ_k^2 . Далее будем рассматривать только тот случай, когда элементы в системе соединены (в смысле надежности) последовательно и отказ любого элемента вызывает отказ системы. Если моменты отказов всех элементов отложить на общей оси времени, то получим поток отказов системы. Этот поток есть сумма n процессов восстановления (рис. 4.1). Изучим этот поток отказов системы и найдем его основные характеристики.

Пусть $v_k(t)$ - случайное число отказов k -го элемента до момента t , $k = 1, 2, \dots, n$, а $v(t)$ — случайное число отказов системы до момента t . Очевидно, что

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t). \quad (4.6)$$

Отсюда довольно просто находится среднее число отказов системы до момента t , которое обозначим через

$$\begin{aligned} H(t) &= M[v(t)] = M[v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t)] = \\ &= M[v_1(t)] + M[v_2(t)] + \dots + M[v_n(t)] = \\ &= H_1(t) + H_2(t) + \dots + H_n(t), \end{aligned}$$

где $H_k(t)$ - функция восстановления k -го элемента. Производную её

$$h(t) = H'(t)$$

назовем интенсивностью отказов. Она равна среднему числу отказов за единицу времени. Интенсивность отказов $h(t)$, являющаяся основной характеристикой потока отказов системы, может быть определена из опыта.

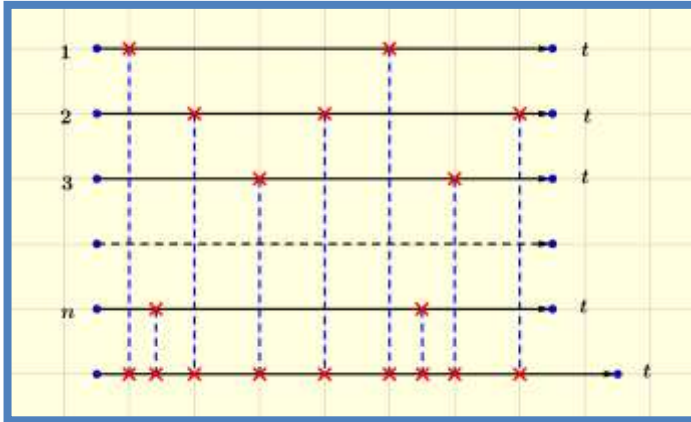


Рис. 4.1. Сумма потоков восстановления

Для этого регистрируем моменты отказов системы и разбиваем все время наблюдений на интервалы длины h так, чтобы в каждый интервал попало достаточное число отказов (не менее десяти). Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k$ — число отказов, попавших соответственно на первый, второй, третий и т. д. интервалы. На каждом k -м интервале строим столбик высотой $\frac{n_k}{h}$. Полученная ступенчатая кривая и дает нам оценку функции $h(t)$. Погрешность этой оценки трудно определить, так как в общем случае вероятностная природа потока отказов системы очень сложна.

Из равенства (4.6) можно найти и распределение числа отказов системы $v(t)$. Из (4.4) известно распределение числа отказов для процесса восстановления

$$P\{v_k(t) = s\} = F_{ks}(t) - F_{ks+1}(t) = P_{ks}(t).$$

[Здесь $F_{ks}(t)$ — s -кратная свертка закона распределения $F_k(t)$.]

Чтобы найти распределение $v(t)$, введем производящие функции для числа отказов элемента:

$$P(t, z) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s(t) z^s = M[z^{v(t)}] = M[z^{v_1(t)}] M[z^{v_2(t)}] \dots M[z^{v_n(t)}] = \\ = P_1(t, z) P_2(t, z) \dots P_n(t, z),$$

где $p_{s(t)} = P\{v(t) = s\}$.

Зная производящую функцию $P(t, z)$, найдем и искомые вероятности $p_s(t)$:

$$p_s(t) = \sum_{s_1+s_2+\dots+s_n=s} p_{1s_1}(t) p_{2s_2}(t) \dots p_{ns_n}(t).$$

На практике важно знать, проработает ли система безотказно на интервале $[t, t + \tau)$. Это событие наступит тогда и только тогда, когда каждый элемент не откажет на этом интервале. Обозначим через $p_t(\tau)$ вероятность безотказной на $[t, t + \tau)$ работы системы, а через $p_t^{(k)}(\tau)$ - вероятность безотказной работы k -го элемента на $[t, t + \tau)$. Так как элементы независимы, то

$$p_t(\tau) = p_t^{(1)}(\tau) p_t^{(2)}(\tau) \dots p_t^{(n)}(\tau),$$

где каждая вероятность $p_t^{(k)}(\tau)$ определяется по формуле (3.6).

Рассмотрим асимптотические свойства потока отказов системы, из которых и выведем простые и практически приемлемые приближенные формулы для различных характеристик потока отказов системы. Система, как правило, состоит из большого числа элементов, доходящего до тысяч и даже десятков тысяч. Вместе с тем каждый в отдельности взятый элемент имеет относительно большой срок службы и отказывает редко. Таким образом, поток отказов системы есть сумма большого числа редких потоков восстановления. Согласно нашим предположениям эти потоки независимы. Доля каждого элемента в общем потоке отказов системы очень мала, так как обычно в системе нет элемента, поток отказов которого был бы сравним по интенсивности с потоком отказов всей системы. В потоке отказов системы зависимы только те отказы, которые принадлежат одному элементу, но они с вероятностью, близкой к единице, разделены большим числом отказов других элементов. Отсюда следует, что появление отказов на одном участке времени не меняет (точнее, почти не меняет) вероятности появления какого-либо числа отказов на другом участке, не пересекающемся с первым. Из этих физических соображений следует, что при сделанных выше допущениях в

потоке отказов системы должно отсутствовать последствие. Кроме того, предположили выше, что законы распределения $F_k(t)$ имеют непрерывные плотности.

Отсюда следует, что функция $H(t)$ — среднее число отказов — непрерывна и, как нетрудно показать, поток отказов системы является ординарным, т. е. вероятность одновременного появления двух отказов равна нулю. В теории массового обслуживания доказывается, что ординарный поток с непрерывной функцией $H(t)$, в котором отсутствует последствие, является простейшим нестационарным потоком. Это значит, что вероятность появления s отказов на любом интервале $[t_1, t_2]$ выражается формулой

$$p_s(t_1, t_2) = \frac{(H(t_2) - H(t_1))^s}{s!} e^{-(H(t_2) - H(t_1))}, \quad (4.7)$$

и для любой системы неперекрывающихся интервалов события, заключающиеся в появлении заданного числа отказов на каждом интервале, независимы. Это означает, что при достаточно общих условиях поток отказов системы будет, по крайней мере приближенно, простейшим нестационарным потоком. Из формулы (4.7) видно, что число отказов на каждом интервале распределено по закону Пуассона. По этой причине такой поток отказов называют часто пуассоновским потоком с переменным параметром. Этим переменным параметром является интенсивность отказов $h(t)$. Формулу (4.7) можно записать и так:

$$P_s(t_1, t_2) = \frac{1}{s!} \left(\int_{t_1}^{t_2} h(t) dt \right)^s e^{-\int_{t_1}^{t_2} h(t) dt}.$$

Если на интервале $[t, t + \tau]$ функция $h(t)$ приближенно линейна, то хорошее приближение для этих вероятностей дает равенство

$$p_s(t, t + \tau) \approx \frac{\left(h \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \tau \right)^s}{s!} e^{-h \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \tau}.$$

Если же функция $h(t)$ на этом интервале приближенно постоянна, $h(t) \approx h$, то

$$p_s(t, t + \tau) \approx \frac{(h\tau)^s}{s!} e^{-h\tau}.$$

Этой последней формулой чаще всего и пользуются. В частности, вероятность безотказной работы на интервале $[t, t + \tau]$

$$p_0(t, t + \tau) \approx e^{-(H(t+\tau)-H(t))}. \quad (4.8)$$

Если, как и выше, $h(t)$ приближенно постоянна на этом интервале, то

$$p_0(t, t + \tau) \approx e^{-h(t)\tau}. \quad (4.9)$$

Из формулы (4.8) следует, что среднее время до первого отказа после момента t равно

$$T_{cp} = \int_0^{+\infty} e^{-(H(t+\tau)-H(t))} d\tau = e^{H(t)} \int_t^{+\infty} e^{-H(x)} dx. \quad (4.10)$$

Если же на участках между соседними отказами $h(t)$ почти не меняется, то, как следует из (4.9), это среднее время выражается приближенной формулой

$$T_{cp} \approx \frac{1}{h(t)}.$$

Рассмотрим еще несколько характеристик нашего потока. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_g$ — моменты последовательных отказов системы. Найдем закон распределения момента s -го отказа t_s :

$$P\{t_s < t\} = P\{v(t) \geq s\} = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{(H(t))^k}{k!} e^{-H(t)},$$

отсюда среднее время до s -го отказа

$$M[t_s] = \int_0^{\infty} P\{t_s > t\} dt = \sum_{k=0}^{s-1} \int_0^{\infty} \frac{(H(t))^k}{k!} e^{-H(t)} dt.$$

Нетрудно найти закон распределения времени между s -м и $(s+1)$ -м отказами:

$$P\{t_{s+1} - t_s > t\} = \int_0^{\infty} \frac{(H(x))^{s-1}}{(s-1)!} e^{-H(x+t)} h(x) dx,$$

а его среднее значение

$$M[t_{s+1} - t_s] = \int_0^{\infty} \frac{(H(t))^s}{s!} e^{-H(t)} dt.$$

Очень часто нас интересует надежность системы на начальном участке времени, на котором среднее число ожидаемых отказов системы ничтожно мало по сравнению с числом элементов в системе. Это значит, что выполняется $H(t) \ll n$.

Если надежность всех элементов примерно одного порядка, то отсюда следует, что $H_k(t) \ll 1$ и, тем более, $F_k(t) \ll 1$. Но при этих условиях было показано, что

$$H_k(t) \approx F_k(t).$$

Значит,

$$H(t) \approx \sum_{k=1}^n F_k(t),$$

причем относительная погрешность этого равенства не превосходит величины

$$\max_k \frac{F_k(t)}{1 - F_k(t)}.$$

Использование этого приближенного равенства сильно упрощает все расчеты.

С другой стороны, работа системы нередко продолжается столь долго, что почти все элементы системы успевают отказать по нескольку раз. При этих условиях процессы восстановления становятся стационарными и, значит, поток отказов системы также устанавливается. Так как плотности восстановления для каждого элемента стремятся к пределам

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_k(t) = \frac{1}{T_k},$$

то интенсивность отказов системы имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k}.$$

При этом поток системы становится пуассоновским потоком с постоянным параметром, т. е. простейшим потоком. Для этого потока вероятность появления s отказов на участке времени длительности τ не зависит от положения этого участка и выражается формулой

$$p_s(\tau) = \frac{(h_0 \tau)^s}{s!} e^{-h_0 \tau}.$$

В частности, вероятность безотказной работы системы в течение времени τ равна $p_0(\tau) = e^{-h_0 \tau}$, и, значит, среднее безотказной работы равно

$$T_{cp} = \frac{1}{h_0}.$$

Заметим еще, что, если надежность каждого элемента в системе подчиняется экспоненциальному закону

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t},$$

то процесс восстановления для каждого элемента будет образовывать простейший поток, и, значит, поток отказов системы как сумма простейших потоков также будет простейшим с интенсивностью

$$h = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

4.4. Надежность системы с конечным временем восстановления

Перейдем теперь к изучению надежности системы в том случае, когда восстановление каждого элемента требует некоторого времени, которым уже нельзя пренебречь. Пусть $F_k(t)$ — закон распределения жизни k -го элемента, а $G_k(t)$ — закон распределения времени его восстановления. Как всегда, предположим, что эти законы имеют непрерывные плотности $f_k(t)$ и $g_k(t)$ и существуют конечные средние T_{k1} и T_{k2} и дисперсии σ_{k1}^2 и σ_{k2}^2 .

Во время восстановления элемента система может вести себя по-разному. Рассмотрим только два случая.

1. Во время восстановления любого элемента система выключена, не работает. За это время во всех других элементах не происходит никаких существенных изменений, и поэтому с момента восстановления они начинают работать так, как если бы восстановление произошло мгновенно.

2. Во время восстановления одного элемента все другие элементы продолжают работать. Отказы и восстановления элемента не влияют на надежность других элементов. Время восстановления элемента не зависит от того, происходят в это время отказы других элементов или нет. Иными словами, каждый элемент отказывает и восстанавливается независимо от других.

Разберем сначала первый случай. Предположим, как и ранее, что число элементов в системе велико, а интенсивность отказов каждого составляет бесконечно малую долю от общей интенсивности отказов системы. При этих условиях поведение системы легко

описать. Интервалы работы системы чередуются с интервалами восстановления. Отдельно взятые участки работы $\tau'_1, \tau'_2, \dots$ образуют пуассоновский поток с переменным параметром. Распределение τ'_s находится по формуле (4.10). Длина каждого участка восстановления τ''_s практически не зависит от длин соседних участков работы и восстановления, так как отказы, принадлежащие одному элементу, разделены большими интервалами. Поэтому нетрудно найти и распределение интервалов восстановления τ''_s . Вероятность того, что на бесконечно малом интервале $(t, t + \Delta t)$ произошел отказ k -го элемента, равна

$$h_k(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

а вероятность отказа системы на этом интервале равна

$$h(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

где

$$h(t) = \sum_{k=1}^n h_k(t).$$

Отсюда следует, что условная вероятность отказа k -го элемента на этом интервале при условии, что на нем произошел отказ системы, равна

$$\frac{h_k(t)\Delta t + o(\Delta t)}{h(t)\Delta t + o(\Delta t)} = \frac{h_k(t)}{h(t)} + o(1).$$

Значит, вероятность того, что отказ системы, происшедший в момент t , принадлежит k -му элементу, равняется

$$\frac{h_k(t)}{h(t)}.$$

Поэтому распределение длительности периода восстановления, начавшегося в момент t , может быть найдено по формуле полной вероятности

$$P\{\tau'' < \tau\} = \sum_{k=1}^n \frac{h_k(t)}{h(t)} G_k(t). \quad (4.11)$$

Распределение начала s -го периода восстановления может быть найдено, если известно распределение предыдущих периодов работы и восстановления. Вновь применяя опять формулу полной вероятности, можем найти безусловное распределение периода τ''_s . Такой путь приведет к очень сложным формулам. Поэтому исследуем

поток отказов и восстановлений системы несколько иным путем. При наших предположениях интенсивности отказов $h_k(t)$ и $h(t)$ меняются очень медленно. Предположим, что на рассматриваемом участке времени они постоянны:

$$h_k(t) \equiv h_k, h(t) \equiv h.$$

Тогда периоды работы будут распределены по экспоненциальному закону

$$P\{\tau'_k < t\} = 1 - e^{-ht}, \quad (4.12)$$

периоды восстановления будут иметь, как следует из (4.11), распределение

$$P\{\tau''_k < t\} = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{h} G_k(t) = G(t),$$

причем все эти периоды будут независимы. Таким образом, поток отказов и восстановлений системы образует уже рассмотренный ранее процесс восстановления с конечным временем восстановления. Поэтому для изучения надежности системы могут использоваться найденные характеристики такого процесса. Среднее время работы системы из (4.12) равно

$$T_1 = \int_0^{\infty} e^{-ht} dt = \frac{1}{h}, \quad (4.13)$$

а среднее время восстановления

$$T_2 = \int_0^{\infty} (1 - G(t)) dt = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{h} T_{k2}.$$

Следовательно, коэффициент готовности выражается формулой

$$k_r = \frac{T_1}{T_1 + T_2} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n h_k T_{k2}}.$$

Вероятность безотказной работы в течение времени t равна

$$p(t) = k_r e^{-ht} = k_r e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (4.14)$$

Если система работает достаточно долго, то интенсивности $h_k(t)$ и $h(t)$ приближаются к своим пределам

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_k(t) = \frac{1}{T_{k1}}; \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_{k1}}.$$

Для этого случая формулы (4.13) – (4.14) принимают вид

$$T_1 = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_{k1}}}; \quad T_2 = T_1 \sum_{k=1}^n \frac{T_{k2}}{T_{k1}}; \quad k_r = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{T_{k2}}{T_{k1}}}; \quad p(t) = k_r e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (4.15)$$

Заметим, что если время работы и время восстановления каждого элемента подчиняются экспоненциальному закону, то формулы (4.15) являются точными на любом участке времени и при любом числе элементов.

Перейдем теперь к рассмотрению второго случая, когда каждый элемент работает и восстанавливается независимо от других. В этом случае поток отказов и восстановлений системы есть сумма n независимых процессов восстановления с конечным временем восстановления. Для такой системы очень просто находится коэффициент готовности $k_r(t)$, равный вероятности того, что в момент t система окажется исправной. Рассмотрим единичные случайные функции $v_s(t)$, $s = \overline{1, n}$, которые определяются так: $v_s(t) = 1$, если в момент t s -й элемент исправен и $v_s(t) = 0$, если в момент t s -й элемент неисправен. Тогда функция

$$v(t) = v_1(t)v_2(t) \cdots v_n(t)$$

равна единице, если в момент t система исправна, и равна нулю, если она неисправна. Функции $v_s(t)$ по условию независимы, и поэтому

$$k_r(t) = P\{v(t) = 1\} = M[v(t)] = M[v_1(t)]M[v_2(t)] \cdots M[v_n(t)] = k_r^{(1)} k_r^{(2)} \cdots k_r^{(n)},$$

где $k_r^{(s)}(t)$ — коэффициент готовности s -го элемента, вычисляемый по формуле (3.11). С течением времени поток отказов и восстановлений системы становится стационарным и для этого случая

$$k_r = \frac{T_{11}}{T_{11} + T_{12}} \frac{T_{21}}{T_{21} + T_{22}} \cdots \frac{T_{n1}}{T_{n1} + T_{n2}}. \quad (4.16)$$

Определяя другие характеристики надежности системы, ограничимся стационарным случаем, предполагая, что система работала достаточно долго. Пусть в момент t произошло восстановление системы. Найдем вероятность того, что система проработает безотказно в течение времени τ . Для вывода этой вероятности рассмотрим

следующие события: $A(\Delta t, \tau)$ — на интервале $(t - \Delta t; t)$ произошло восстановление системы и на интервале $(t; t + \tau)$ система работала безотказно, $A(\Delta t)$ — на интервале $(t - \Delta t; t)$ произошло восстановление системы. Очевидно, что искомая вероятность равна

$$p(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P\{A(\Delta t, \tau) | A(\Delta t)\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{A(\Delta t, \tau)\}}{P\{A(\Delta t)\}}.$$

Если пренебречь событиями, вероятность которых бесконечно мала по сравнению с Δt , то событие $A(\Delta t, \tau)$ представляется суммой непересекающихся событий

$$A(\Delta t, \tau) = A_1(\Delta t, \tau) + A_2(\Delta t, \tau) + \dots + A_n(\Delta t, \tau),$$

где событие $A_m(\Delta t, \tau)$ состоит в том, что m -й элемент восстанавливается на интервале $(t - \Delta t; t)$ и на $(t; t + \tau)$ работает безотказно, а остальные элементы работают безотказно на $(t; t + \tau)$. Вероятность этого события равна

$$P\{A_m(\Delta t, \tau)\} = \frac{1 - F_m(\tau)}{T_{m1} + T_{m2}} \prod_{s \neq m} \frac{\int_{\tau}^{\infty} (1 - F_s(x)) dx}{T_{s1} + T_{s2}} \Delta t + o(\Delta t).$$

Отсюда получаем:

$$P\{A(\Delta t, \tau)\} = \sum_{m=1}^n P\{A_m(\Delta t, \tau)\}.$$

Так как событие $A(\Delta t) = A(\Delta t, 0)$, то

$$P\{A(\Delta t)\} = \sum_{m=1}^n \frac{\Delta t}{T_{m1}} \prod_{s=1}^n \frac{T_{s1}}{T_{s1} + T_{s2}} + o(\Delta t).$$

Теперь можем найти искомую вероятность:

$$\begin{aligned} p(\tau) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{A(\Delta t, \tau)\}}{P\{A(\Delta t)\}} = \\ &= \frac{\sum_{m=1}^n \frac{1 - F_m(\tau)}{T_{m1}} \prod_{s \neq m} \frac{1}{T_{s1}} \int_{\tau}^{\infty} (1 - F_s(x)) dx}{\sum_{m=1}^n \frac{1}{T_{m1}}}. \end{aligned}$$

Чтобы привести эту формулу к компактному виду, обозначим закон распределения остаточного времени жизни s -го элемента через

$$\Phi_s(\tau) = \frac{1}{T_{s1}} \int_0^{\tau} (1 - F_s(x)) dx,$$

и пусть $\varphi_s(\tau) = \Phi'_s(\tau) = \frac{1-F_s(\tau)}{T_{s1}}$ — его плотность. Введем еще одно обозначение

$$\frac{1}{T_0} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{T_{m1}}.$$

T_0 — это среднее время между соседними отказами системы при мгновенном восстановлении. Тогда наша вероятность может быть записана так:

$$p(\tau) = T_0 \sum_{m=1}^n \varphi_m(\tau) \prod_{s \neq m} (1 - \Phi_s(\tau)) = -T_0 \left(\prod_{s=1}^n (1 - \Phi_s(\tau)) \right)'.$$

И средняя длительность рабочего периода системы равна

$$T_1 = T_0 = \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{T_{m1}} \right)^{-1}.$$

Видим, что среднее время работы системы оказывается таким же, как и при мгновенном восстановлении.

Пусть теперь T_2 — среднее время восстановления системы. Тогда, с одной стороны, коэффициент готовности системы k_Γ равен

$$k_\Gamma = \frac{T_1}{T_1 + T_2},$$

с другой — этот коэффициент выражается формулами (4.16). Приравняв эти выражения

$$\frac{T_1}{T_1 + T_2} = \frac{T_{11}}{T_{11} + T_{12}} \frac{T_{21}}{T_{21} + T_{22}} \dots \frac{T_{n1}}{T_{n1} + T_{n2}} = k_\Gamma,$$

получаем уравнение, из которого определяется среднее время T_2 :

$$T_2 = T_1 \frac{1 - k_\Gamma}{k_\Gamma}.$$

Если предположить, как это делали выше, что число элементов велико, а доля каждого элемента в потоке отказов и восстановлений системы бесконечно мала, то можно найти для вероятности $p(\tau)$ более простое приближенное выражение:

$$p(\tau) \approx e^{-\frac{\tau}{T_1}}.$$

Отсюда вероятность безотказной работы системы на $(t, t + \tau)$ равна

$$k_\Gamma p(\tau) \approx k_\Gamma e^{-\frac{\tau}{T_1}}.$$

В заключение заметим, что в случае, когда время жизни элементов распределено по показательному закону $F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t}$, а время восстановления распределено произвольно, можно не только определить средние времена работы и восстановления системы, но и найти точные законы их распределения.

5. Испытания на надёжность

Организация и проведение испытаний изделий на надежность выходит далеко за пределы использования лишь математических методов. Центральным моментом организации испытаний является выбор тех параметров, оценка значений которых должна считаться основной целью испытаний. Этот выбор определяется, прежде всего, физической значимостью предложенных характеристик, а также теми узкими местами, которые выявились в работе опытных изделий или же при эксплуатации изделий прежних выпусков. Роль математики выявляется позднее, когда возникнет необходимость оценки взаимной зависимости избранных параметров и обработки результатов испытаний.

Даже для относительно простых элементов — конденсаторов, сопротивлений, диодов и пр. — достаточно полная характеристика надежности редко может быть получена посредством измерения значения одного — единственного параметра. Как правило, требуется знание нескольких величин, чтобы можно было составить отчетливое представление об изделиях. Так, для примера, если речь идет о сопротивлении, его надежность недостаточно характеризуется только номинальной величиной в омах. Для оценки надежности большую роль играет устойчивость сопротивления к тепловым и электрическим воздействиям, длительности хранения, влиянию влажности.

Вторым по важности моментом организации испытаний следует считать выбор внешних условий, включая сюда и рабочий режим проведения испытаний. Само собой разумеется, выбор условий в значительной степени должен учитывать те особенности, в которых впоследствии придется работать изделиям. Эти условия (температура, влажность, напряжение, вибрации, удары, распределение нагрузок во времени и пр.) должны быть различны для партий изделий, предназначенных для работы в тропиках или же в Арктике, в зоне пустынь или же в высокогорных районах. Внешние условия

могут оказывать исключительно сильное влияние на характер изменения измеряемых параметров.

Момент наступления отказа заранее не может быть указан, он случаен. Собственно, вероятностный характер носят все параметры, определяющие надежность изделий, поскольку их значения меняются от одного изделия к другому и это изменение не упорядочено, случайно. Это обстоятельство приводит к необходимости оценивать на основании испытаний распределения интересующих нас числовых характеристик надежности, а также существующие между ними связи. Приходим, таким образом, к решению основных задач математической статистики:

- 1) оценке значений неизвестных параметров распределений;
- 2) проверке различного рода статистических гипотез.

Проведение испытаний может быть организовано многими путями. В зависимости от тех правил, в соответствии с которыми будут проводиться испытания, говорят о том или ином плане их проведения. План испытаний должен включать в себя ряд указаний, в частности количество изделий элементов или комплексов аппаратуры, которые необходимо поставить на испытания; когда производить проверку изделий (непрерывно или в заранее заданные моменты времени); заменять или не заменять отказавшие изделия; когда прекращать испытания или же добавлять новые изделия для продолжения испытаний.

Для удобства записи будем использовать следующие обозначения: обозначим буквой «Б» планы, в которых отказавшие элементы не заменяются новыми, буквой «В» — те, в которых каждый отказавший элемент заменяется новым, идентичным ему элементом. Предполагаем, что наблюдения за отказами производятся непрерывно, в результате чего отказы обнаруживаются в моменты их возникновения. Через r обозначим планы, в которых наблюдения ведутся до момента появления r -го отказа, через T — планы, при которых наблюдения ведутся в течение времени T . T обычно измеряется в часах. Иногда используются смешанные планы, когда наблюдения ведутся до момента t_r появления r -го отказа, если $t_r < T$, или до момента T , если $t_r \geq T$. Такие планы будем обозначать через (r, T) . Ради сокращения и уточнения записи введем обозначения для различных планов: станем указывать вначале число N

испытываемых элементов, затем наличие или отсутствие замены отказавших элементов и, наконец, длительность испытания. План, при котором испытывается N элементов, каждый отказавший элемент не заменяется новым, а наблюдения ведутся до момента T , обозначается через $[N, Б, T]$. Обозначение $[N = 100, Б, (r = 15, T = 1500)]$ соответствует плану, при котором испытывается 100 элементов, каждый отказавший элемент заменяется новым, а наблюдения ведутся либо до момента t_{15} появления 15-го отказа, либо в течение 1500 ч, если $t_{15} \geq 1500$ ч. В указанных условиях возможны лишь шесть различных планов:

$[N, Б, T]$; $[N, Б, r]$; $[N, Б, (r, T)]$; $[N, В, T]$; $[N, В, r]$; $[N, В, (r, T)]$.

Обозначим через $d(t)$ число отказов, возникших к моменту t . Функция $d(t)$, как это следует из определения, не может убывать и принимает последовательно значения $0, 1, 2, \dots$. Точки роста $d(t)$ отвечают случайным моментам времени t_i . Реально наблюдаемую во время испытаний функцию $d(t)$ называют реализацией процесса $d(t)$ или траекторией процесса $d(t)$.

Обозначим через $\mathbb{G}$ ту область плоскости $(t, d(t))$, попадания в которую траектории процесса $d(t)$ приводит к окончанию испытаний. Для планов $[N, Б, T]$ и $[N, В, T]$ в качестве области $\mathbb{G}$ должны взять полуплоскость $t > T$. Испытания при этих планах прекращаются в момент t , как бы ни шла траектория $d(t)$ (см. рис. 5.1).



Рис. 5.1. Планы испытаний $[N, Б, T]$ и $[N, В, T]$

В случае планов (см. рис. 5.2) $[N, Б, r]$ и $[N, В, r]$ испытания прекращаются в момент t_r первого попадания траектории $d(t)$ в

множество $\mathbb{G} = \{(d, t) \mid d > r\}$. Наконец, для планов $[N, B, (r, T)]$ и $[N, B, (r, T)]$ испытания прекращаются в момент первого попадания в множество $\mathbb{G} = \{(d, t) \mid d \geq r \vee t \geq T\}$ (см. рис. 5.3).

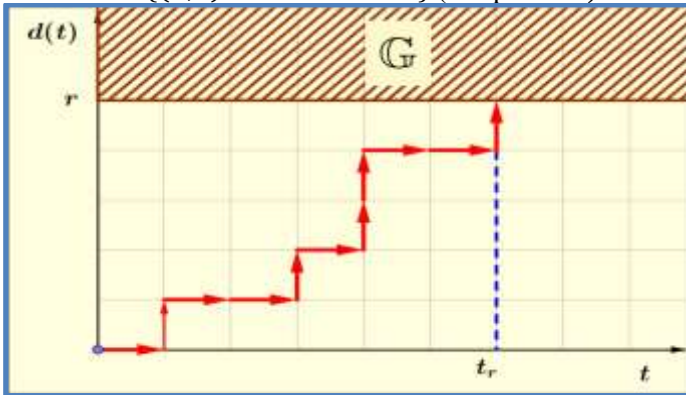


Рис. 5.2. Планы испытаний $[N, B, r]$ и $[N, B, r]$

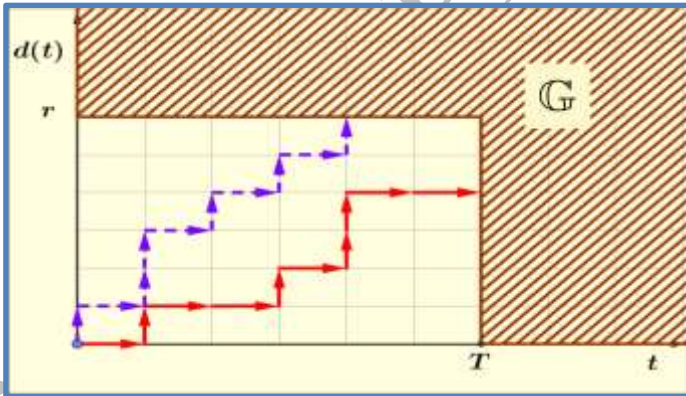


Рис. 5.3. Планы испытаний $[N, B, (r, T)]$ и $[N, B, (r, T)]$

В ряде случаев испытания могут планироваться на основе полученных значений суммарной наработки. Если через $N(t)$ обозначить число элементов, безотказно работающих до момента t , $N(t) = N - d(t)$, то значение суммарной наработки $S(t)$ в момент t определяется как сумма времен, в течение которых безотказно работали испытываемые элементы. Таким образом, имеем:

$$S(t) = \int_0^t N(s) ds = \sum_{i=1}^{d(t)} t_i + N(t)t,$$

где t_i — моменты отказов элементов. Так как для планов типа В значение $S(t) = Nt$, то нетривиальным дополнением к указанным выше шести планам являются следующие два плана типа Б.

Для первого плана, обозначаемого $[N, Б, HS_0]$, момент остановки испытаний t^* определяется как момент, когда впервые $SH(t^*) = S_0$; если же окажется, что $S(t_N) < S_0$, то $t^* = t_N$. Для второго плана момент остановки t^* определяется как момент, когда впервые наступает одно из следующих событий: либо $S(t^*) = S_0$ и $d(t^*) < r$, либо $t^* = t_r$, но $S(t^*) < S_0$. Здесь t_r — момент появления r -го отказа. Такой план будем обозначать $[N, Б, (N, HS_0)]$. Полезно иметь в виду, что $[N, Б, HS_0] = [N, Б, (N, HS_0)]$. Аналогичным образом имеем $[N, Б, (N, T)] = [N, Б, T]$, однако $[N, Б, (N, T)] \neq [N, В, T]$.

Из рис. 5.1 - 5.3 легко понять, что в принципе можно рассматривать планы типов Б, В, у которых момент прекращения испытаний совпадает с моментом первого попадания в множество G , граница которого, вообще говоря, может быть произвольной формы.

Если выбраны внешние условия проведения испытаний, согласована с заказчиком вероятностная характеристика и выбран план проведения испытаний, то по результатам испытаний, вся информация о которых содержится в отрезке траектории процесса $d(t)$ до момента первого попадания в множество G , требуется определить методику оценки выбранной характеристики надежности или методику построения доверительного интервала.

6. Методы оценки показателей надёжности

6.1. Эмпирическая функция распределения и гистограмма результатов испытаний

В настоящем разделе рассматриваются общие методы получения оценок параметров, определяющих надежность изделий. Эти методы могут быть использованы при обработке результатов наблюдений над изделиями, срок безотказной работы которых подчинен тому или иному распределению - показательному, Вейбулла, логарифмически нормальному и др. Для наглядности ограничимся при этом планами $[N, Б, r]$ и $[N, Б, T]$. Все последующие результаты применимы при обработке результатов испытаний не только элементов, сложных систем, но и программных продуктов.

План $[N, Б, N]$ можно использовать или в случае, когда элементы сравнительно ненадежны, или же при проведении

ускоренных испытаний. Предположим, что испытываемые элементы занумерованы числами $1, 2, \dots, N$ и i -й элемент отказывает в момент x_i . Первый отказ наступает в момент $t_1 = \min(x_1, x_2, \dots, x_N)$; $t_1 = x_{i_1}$, где i_1 — номер элемента (случайное число). Второй отказ наступает в момент $t_2 = \min(x_1, x_2, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_N)$ и т.д. Наконец, в момент $t_N = \max(x_1, x_2, \dots, x_N)$ отказывает последний элемент. В статистике такую упорядоченную последовательность чисел $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$ называют вариационным рядом для результатов наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_N$.

При использовании $[N, B, T]$ наблюдаются только те отказы, которые происходят до момента времени T . Если $t_1 \leq t_2 \leq \dots$ — последовательные моменты отказов, то в результате испытаний наблюдаем случайное число $d(T) = 0, 1, 2, \dots, N$ отказов, происходящих в моменты $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{d(T)} \leq T$. Отказ с номером $d(T) + 1$, если он возможен, наступает после момента T . Таким образом, $d(T)$ означает номер последнего отказа, который происходит до момента T окончания испытаний. Если элементы достаточно надежно работают в интервале времени $(0, T)$, то нередко случается, что отказы не наблюдаются и $d(T) = 0$. Заметим теперь же, что отсутствие отказов во время испытаний, т. е. условие $d(T) = 0$, не дает нам права заключить, что надежность изделий равна 1. Впоследствии будет указано правило оценки надежности в подобных случаях, основанное на понятии доверительного интервала.

Как уже указывалось ранее, наиболее полной характеристикой для надежности элементов является функция распределения $F(t)$ времени безотказной работы. О виде функции распределения можно судить по так называемой эмпирической функции распределения, определяемой посредством равенства $F_N(x) = \frac{k}{N}$ — для значений $x, t_k \leq x < t_{k+1}$. Согласно теореме Гливенко с вероятностью, равной единице, $\sup_{-\infty < x < \infty} |F_N(x) - F(x)| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. На рис. 6.1 показаны эмпирические функции распределения $F_{10}(t)$ и $F_{100}(t)$. Теоретическая функция распределения $F(t) = 1 - e^{-t}$.

Если используется план $[N, B, T]$, то значения эмпирической функции $F_N(t)$ могут быть определены только для $t \leq T$. Если же

используется план $[N, B, r]$, то значения эмпирической функции определяются только до уровня $-\frac{r}{N}$.

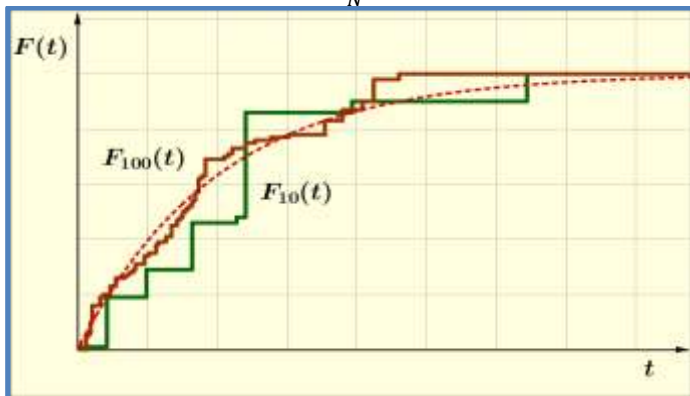


Рис. 6.1. Экспоненциальное распределение

Оценкой для плотности вероятностей $p(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ может служить так называемая гистограмма $p_N(t)$ [2]. В отличие от эмпирической функции $F_N(t)$ гистограмма $p_N(t)$ может быть построена различными способами. Например, можно разбить область значений времени t на интервалы $[S_k; S_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots, m, \dots$ и на каждом из этих интервалов положить

$$p_N(t) = \frac{d_k}{N} \frac{1}{S_{k+1} - S_k} \quad S_k \leq t < S_{k+1},$$

где d_k — число отказов, которые наблюдались в интервале $[S_k; S_{k+1})$. На рис. 6.2 слева приведен пример построения гистограммы показательного закона $F(t) = 1 - e^{-t}$, $N = 50$.

При втором способе выбирается число интервалов $k + 1$, так что $d = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \geq 10$, при этом $k \geq 5$, а остаток d' от деления N на d также близок к d . Первый интервал — $[0; S_1)$, где S_1 совпадает с моментом d -го отказа, второй интервал — $[S_1; S_2)$, где S_2 совпадает с моментом $2d$ -го отказа и т. д., наконец, k -й интервал — $[S_{k-1}; S_k)$, где $S_k = t_{kd}$. Последний, $(k + 1)$ -й, интервал — $[S_k; t_N]$. На каждом из k интервалов группировки $[S_l; S_{l+1})$, $l = \overline{0, k-1}$ полагаем

$$p_N(t) = \frac{d}{N} \frac{1}{S_{l+1} - S_l}, \quad p_N(t) = \frac{d'}{N} \frac{1}{t_N - S_k},$$

на интервале $[S_1, t_N]$ и $p_N(t) = 0$ для значений $t > t_N$. Гистограмма, построенная по этому способу для $F(t) = 1 - e^{-t}$, $N = 50$, $k + 1 = 5$, показана на рис. 6.2 справа.

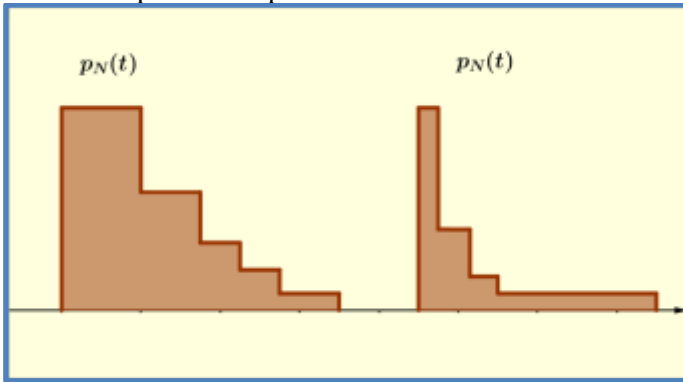


Рис. 6.2. Варианты гистограмм для показательного закона

Функция опасности отказов $\lambda(t)$ определялась по формуле $\lambda(t) = \frac{p(t)}{R(t)}$, где $R(t) = 1 - F(t)$. Если число испытываемых элементов N велико и интервалы между последовательными моментами отказов сравнительно невелики, то можно построить эмпирическую функцию опасности отказов. Ось времени разбиваем на несколько участков $[S_{i-1}; S_i]$, $i = 1, 2, \dots$, $S_0 = 0$. Оценкой для $R(t) = 1 - F(t)$ является отношение $\frac{N(t)}{N}$, где $N(t)$ — число элементов, исправно работающих к моменту времени t ; $N(t)$ — случайная величина. За оценку для $p(t)$ берем $\frac{d_i}{N} \frac{1}{S_i - S_{i-1}}$, где d_i — число элементов, отказавших на интервале $[S_{i-1}; S_i]$. Эмпирическую функцию опасности отказов $\lambda_N(t)$ полагаем равной отношению

$$\lambda_N(t) = \frac{\frac{d_i}{N} \frac{1}{S_i - S_{i-1}}}{\frac{N(t)}{N}} = \frac{d_i}{(S_i - S_{i-1})N(t)}.$$

При этом интервалы $[S_i; S_{i-1})$ можно выбирать способом, аналогичным одному из описанных выше способов построения гистограммы.

Иногда нет необходимости знать функцию распределения $F(t)$, ее плотность $p(t)$ или функцию опасности отказов $\lambda(t)$, а достаточно знать лишь некоторые характеристики: моменты, квантили и

др. Момент k -го порядка в случае плана $[N, Б, N]$ определяется по формуле

$$\bar{t}^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^k;$$

центральный момент k -го порядка - по формуле

$$\overline{(t - \bar{t})^k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^k.$$

Число t_p такое, что $F(t_p) = p$ называется квантилью уровня p . Эмпирической квантилью $\hat{t}_p$ уровня p называется одно из решений уравнения $F_N(\hat{t}_p) = p$. Всюду полагаем, что $F(t)$ является непрерывной.

6.2. Типы статистической устойчивости

В случае плана $[N, Б, N]$ нам известна вся эмпирическая функция распределения $F_N(t)$, а в случае плана $[N, Б, T]$ — лишь часть ее определенная для значений $t \leq T$. Для оценки неизвестной функции распределения $F(t)$ и различных числовых ее характеристик возможны три принципиально различных подхода, соответствующих различным реальным условиям, в которых решается задача.

В первом, наиболее простом случае заранее известен тип закона распределения $F(t)$. Например, в результате теоретических исследований и последующей экспериментальной проверки показано, что для определенного типа элементов и аппаратуры закон распределения времени безотказной работы является показательным, т.е. $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Неизвестно лишь значение параметра λ , которое надо оценить по результатам проведенных испытаний.

Во втором случае нет теоретических соображений, из которых следовало бы, что тип закона распределения $F(t)$ должен быть вполне определенным, например показательным, логарифмически нормальным или каким-то другим. Однако результаты испытаний показывают, что эмпирические функции распределения могут быть приближены плавно меняющимися функциями распределений. Из предварительной обработки экспериментальных данных видно, что качественный характер поведения эмпирических функций распределения или гистограмм не меняется от партии к партии. На рис. 6.3 показан вид двух гистограмм, соответствующих двум различным

партиям продукции. Анализируя вид гистограмм, замечаем, что обе они имеют существенную асимметрию и обе одновершинные. В таких случаях подбирают одно из возможных семейств функций распределения, для которого качественное поведение функций распределения, или плотностей, соответствует полученным экспериментальным данным.

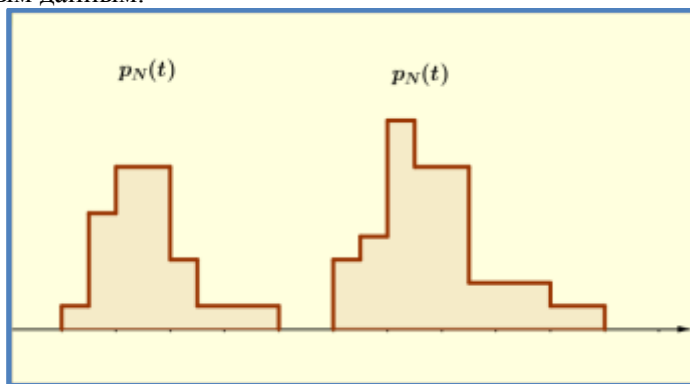


Рис. 6.3. Гистограммы для различных партий

Если семейство распределений выбрано, то задача определения функции $F(t)$ и ее характеристик сводится к оценке по результатам испытания неизвестных значений параметров или функций от них. Например, если пытаемся приблизительно описать данные с помощью логарифмически нормального закона, то неизвестными значениями параметров являются μ и σ . При этом в самом начале работ полезно сравнить результаты, получаемые при использовании двух-трех типов семейств распределений. Если два семейства дают одинаково хорошие результаты, то для дальнейшего использования выбирается то из них, для которого можно предложить теоретические обоснования.

Возможен, однако, и третий случай условий производства, когда качественный характер эмпирической функции $F_N(t)$ меняется от партии к партии или же когда для приближений нужны семейства со многими неизвестными параметрами и соответственно требуются громоздкие вычисления необходимых характеристик. В этих случаях можно использовать некоторые методы непараметрической статистики, т. е. методы, не связанные с аналитическим видом функции распределения $F(t)$.

Для весьма надежных элементов реализация плана $[N, Б, N]$ или $[N, B, N]$ приводит к необходимости проведения испытаний в течение многих тысяч часов. Именно по этой причине часто используются различные планы с фиксированной длительностью испытаний ($[N, Б, T]$, $[N, B, T]$, $[N, Б, (r, T)]$, $[N, B, (r, T)]$ и др.). При этом по наблюдениям, полученным за ограниченный промежуток времени, нужно оценить различные показатели надежности, связанные с отказами, которые могут произойти после момента T , среднее время безотказной работы в течение времени $t > T$ и др. Использование результатов за ограниченное время наблюдения для получения оценок всевозможных характеристик надежности законно в первом случае, когда вид функции распределения $F(t)$ нам известен до опыта и только неизвестны значения параметров, определяющих этот закон. В следующем разделе рассматривается этот случай и функция распределения $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Во втором случае надо иметь достаточный статистический материал, который хотя бы косвенно подтверждал правильность выводимых числовых оценок. Таким косвенным подтверждением могут служить результаты испытаний отдельных партий элементов, проводившихся в течение длительного времени, или сведения об отказах эксплуатируемого оборудования. Наконец, в третьем случае, когда нет устойчивости даже качественного поведения эмпирической функции распределения, получение оценок любых характеристик надежности, которые определяются по значениям $F(t)$ для $t > T$, где T - время испытаний, не является законным. В этом случае, прежде всего, необходимо отладить технологический процесс.

6.3. Неудачное оценивание

Рассмотрим пример. Предположим, что проводятся испытания $N = 1000$ элементов. Каждый элемент состоит из двух частей, отказ каждой из которых приводит к отказу элемента (например, проводящий слой сопротивления и контакты). Отказы обеих частей происходят независимо друг от друга. Таким образом, если t_1 — момент, когда произойдет отказ первой части (обрыв), а t_2 — момент отказа второй части (уход параметра за пределы допуска), то считается, что отказ элемента произойдет в момент $t = \min(t_1, t_2)$. Предположим далее, что

$$P\{t_1 > t\} = e^{-\frac{t}{\theta}}, P\{t_2 > t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

где $\theta = 2000$ ч, $\mu = 1000$ ч, $\sigma = 100$ ч. Однако неизвестен сам закон распределения времени безотказной работы

$$F(t) = 1 - P\{\min(t_1, t_2) > t\} = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Вид функции $F(t)$ показан на рис. 6.4. Решено проводить испытания в течение $T = 500$ ч. Вероятность отказа первого элемента равна

$$F(T) \approx 1 - e^{-\frac{T}{\theta}} = 1 - e^{-0.25}.$$

Таким образом, в среднем наблюдаем $NF(T) \approx 100$ отказов, причем практически все наблюдаемые отказы будут только первого типа (обрыв), так как отказы второго типа (уход параметров) при сделанных выше предположениях начнут наступать после 800 ч работы, но зато уже к 1200 ч работы почти все элементы выйдут из строя вследствие отказов второго типа. Отказов второго типа в течение $T = 500$ ч не наблюдаем, поэтому ошибочно считаем, что закон $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$. По результатам испытаний, проводимых в течение $T = 500$ ч, пользуясь методами следующего раздела, находим оценку для θ , близкую к 2000 ч, что приводит к неправильному выводу относительно характера распределения.

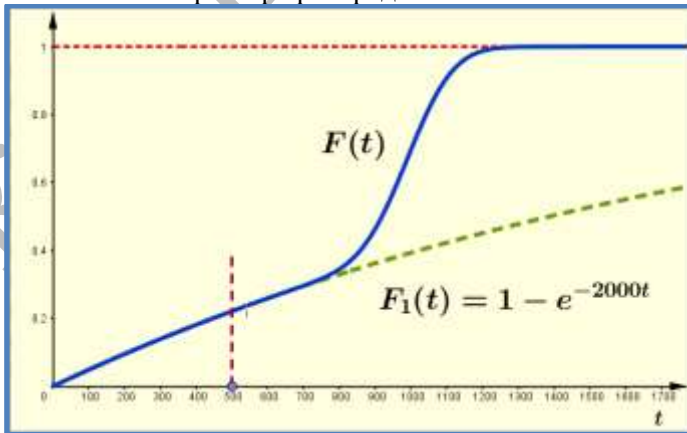


Рис. 6.4. Вид функции надежности

Вывод заключается в том, что необходима теоретическая или экспериментальная, а лучше обоими вариантами, проверка вида закона $F(t)$ и при значениях t , больших времени T , а уже затем – получение оценок характеристик надежности.

6.4. Методы построения оценок

Рассмотрим теперь некоторые общие методы получения оценок параметров распределения времени безотказной работы. В общем плане часть этих методов была изложена выше. При оценке параметров конкретного семейства распределений могут быть употреблены различные методы. В зависимости от используемого метода будут получаться отличающиеся друг от друга оценки неизвестных значений параметров. Необходимо провести сравнение различных методов и для дальнейшего выбрать метод, дающий наилучшие результаты.

6.4.1. Методы квантилей и моментов

Для получения оценок неизвестных значений параметров, определяющих вид закона распределения времени безотказной работы, могут быть использованы методы моментов и квантилей [2]. Здесь рассматриваем эти методы с точки зрения обработки результатов испытаний, полученных при использовании некоторых планов типа Б. Для определенности ограничимся случаем двух неизвестных параметров α, β .

Пусть закон распределения времени безотказной работы $F(t, \alpha, \beta)$ имеет непрерывно дифференцируемую плотность распределения, принимающую положительные значения для любых возможных значений параметров α, β . Если испытания проводились по плану $[N, B, r], r \gg 1$, то момент t_{l_i} появления l_i отказа можно рассматривать как эмпирическую квантиль, соответствующую уровню $q_i = \frac{l_i}{N}, i = 1, 2, \dots$. Если l_i и N достаточно велики, то можно считать, что $\delta t_{l_i} = t_{l_i} - t_{q_i} (i = 1, 2)$ имеют нормальное распределение с нулевыми средними и матрицей дисперсий

$$\begin{pmatrix} \frac{q_1(1-q_1)}{Nf_1^2} & \frac{q_1(1-q_2)}{Nf_1f_2} \\ \frac{q_1(1-q_2)}{Nf_1f_2} & \frac{q_2(1-q_2)}{Nf_2^2} \end{pmatrix},$$

элементы которой определены выражениями

$$q_i = F(t_{q_i}, \alpha, \beta), f_i = \left. \frac{dF(t, \alpha, \beta)}{dt} \right|_{t=t_{q_i}}.$$

Если бы значения квантилей t_{q_1}, t_{q_2} были нам известны точно, то значения параметров α, β можно было бы найти из уравнений:

$$F(t_{q_1}, \alpha, \beta) = q_1, F(t_{q_2}, \alpha, \beta) = q_2. \quad (6.1)$$

Нам известны лишь приближенные значения этих квантилей — моменты t_l и t_r появления l -го и r -го отказов. Заменяя в уравнениях (6.1) значения квантилей их оценками, получаем уравнения:

$$F(t_{q_1}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{l}{N}, F(t_{q_2}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{r}{N}, \quad (6.2)$$

решения которых $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ являются состоятельными оценками для параметров α, β , при $N \rightarrow +\infty$, $\frac{l}{N} = const, \frac{r}{N} = const$, что непосредственно следует из непрерывности функции $F(t, \alpha, \beta)$. Можно показать, что эти оценки при весьма общих предположениях типа гладкости функции $F(t, \alpha, \beta)$ являются асимптотически несмещенными и асимптотически нормально распределенными. Поэтому наиболее существенными показателями качества таких оценок являются их дисперсии.

Проиллюстрируем метод квантилей примером закона Вейбулла $F(t, p, \theta) = 1 - e^{-\frac{t^p}{\theta}}, t > 0$. Испытания проводятся по плану $[N, Б, r]$. Выбирается значение l (можно выбрать $l \approx \frac{r}{2}$). В результате испытаний фиксируются значения t_l и t_r моментов l -го и r -го отказов. Уравнения (6.2) переписываются в виде

$$1 - e^{-\frac{t_l^p}{\theta}} = \frac{l}{N}, 1 - e^{-\frac{t_r^p}{\theta}} = \frac{r}{N}.$$

Разрешая их относительно неизвестных значений параметров p, θ , получаем оценки:

$$\hat{p} = \frac{\ln \ln \frac{N}{N-r} - \ln \ln \frac{N}{N-l}}{\ln t_r - \ln t_l}, \hat{\theta} = \frac{\ln \frac{N}{N-l}}{t_l^{\hat{p}}}.$$

Если предположить, что у $F(t, \alpha, \beta)$ существуют вторые непрерывные частные производные по t и параметрам α, β , то, используя

прием разложения по формуле Тейлора, можно получить приближенное выражение дисперсии оценок параметров α, β .

Введем обозначения $q_i = l_i/N$, $F(t_{q_i}, \alpha, \beta) = q_i$, $\delta t_i = t_{l_i} - t_{q_i}$, $i = \overline{1,2}$; $\delta\alpha = \hat{\alpha} - \alpha$; $\delta\beta = \hat{\beta} - \beta$. Из уравнений (6.2) находим:

$$F(t_{l_1}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = F(t_{q_1}, \alpha, \beta) + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial t} \delta t_{l_1} + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \delta \beta + \bar{o}(\delta t, \delta \alpha, \delta \beta) = q_1.$$

Заметив, что $F(t_{q_1}, \alpha, \beta) = q_1$, получаем с точностью до бесконечно малых высших порядков:

$$\frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial t} \delta t_{l_1} + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \delta \beta = 0. \quad (6.3)$$

Аналогично находим, что

$$\frac{\partial F(t_{q_2}, \alpha, \beta)}{\partial t} \delta t_{l_2} + \frac{\partial F(t_{q_2}, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F(t_{q_2}, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \delta \beta = 0. \quad (6.4)$$

Разрешая эти линейные уравнения (6.3) и (6.4) относительно ошибок $\delta\alpha$ и $\delta\beta$, получаем их в виде линейных комбинаций от δt_{l_1} и δt_{l_2} :

$$\delta\alpha = a_{\alpha l_1} \delta t_{l_1} + a_{\alpha l_2} \delta t_{l_2}, \delta\beta = a_{\beta l_1} \delta t_{l_1} + a_{\beta l_2} \delta t_{l_2}.$$

Отсюда, используя матрицу вторых моментов для квантилей t_{l_1}, t_{l_2} , можно найти дисперсии ошибок:

$$\begin{aligned} D[\hat{\alpha}] &\approx a_{\alpha l_1}^2 M[(\delta t_{l_1})^2] + 2a_{\alpha l_1} a_{\alpha l_2} M[\delta t_{l_1} \delta t_{l_2}] + \\ &+ a_{\alpha l_2}^2 M[(\delta t_{l_2})^2], D[\hat{\beta}] \approx \\ &\approx a_{\beta l_1}^2 M[(\delta t_{l_1})^2] + 2a_{\beta l_1} a_{\beta l_2} M[\delta t_{l_1} \delta t_{l_2}] + \\ &+ a_{\beta l_2}^2 M[(\delta t_{l_2})^2], cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \sum a_{\alpha i} a_{\beta j} M[\delta t_i \delta t_j]. \end{aligned}$$

В частности, в случае закона Вейбулла получаем:

$$D[\hat{p}] \approx \frac{\theta^2}{N(\ln \frac{t_{q_2}}{t_{q_1}})^2} \left(\frac{q_1(1-q_1)}{t_{l_1}^{2p}} e^{\frac{t_{l_1}^p}{\theta}} - 2 \frac{q_1(1-q_2)}{t_{l_1}^p t_{l_2}^p} e^{\frac{t_{l_1}^p + t_{l_2}^p}{\theta}} + \frac{q_2(1-q_2)}{t_{l_2}^{2p}} e^{\frac{t_{l_2}^p}{\theta}} \right).$$

Метод квантилей в несколько видоизмененной форме можно использовать и в случае планов $[N, B, T]$. Тогда вместо уравнений (6.1) можем записать:

$$F(T_1, \alpha, \beta) = q_1, F(T_2, \alpha, \beta) = q_2, \quad (6.5)$$

$T_1 < T_2 \leq T$. Однако значения $F(t, \alpha, \beta)$ при $t = T_1$ и $t = T_2$ нам неизвестны. Нам известны лишь числа $d(T_1)$ и $d(T_2)$ отказов, происшедших к моментам T_1 и T_2 . При больших значениях N отношения $\frac{d(T_1)}{N}$ и $\frac{d(T_2)}{N}$ близки к теоретическим значениям q_1 и q_2 . Поэтому, заменяя в (6.5) значения q_1, q_2 их оценками, получаем уравнения:

$$F(T_1, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{d(T_1)}{N}, F(T_2, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{d(T_2)}{N}.$$

Для нахождения оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, используя разложение функции $F(t, \alpha, \beta)$ по формуле Тейлора по параметрам α и β , можно найти приближенные выражения дисперсий оценок.

Выбор уровней квантилей влияет на величину дисперсий оценок. Для планов испытаний $[N, B, N]$, законов нормального и экспоненциального типов и большого объема выборки N можно для получения оценки параметров использовать не все данные, а только значения k определенным образом выбранных эмпирических квантилей, $t_{(N_1)}, \dots, t_{(N_k)}$ где $N_k = [Np_k] + 1, 0 < p_1 < \dots < p_k < 1$. При этом числа $p_1, \dots, p_k$ подбираются таким образом, чтобы дисперсии ошибок неизвестных параметров были бы минимальными. Например, для случая закона экспоненциального типа $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$ оценка ищется в виде линейной комбинации

$$\hat{\theta}^* = \sum_{i=1}^k b_i t_{(N_i)},$$

где коэффициенты b_i и числа N_i подобраны таким образом, чтобы дисперсия оценки была наименьшей. Как известно, наилучшей оценкой для параметра θ при использовании всех данных является

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i. \text{ Подсчет отношения дисперсий } \kappa_k = \frac{D[\hat{\theta}]}{D[\hat{\theta}^*]} \text{ этих оценок}$$

в зависимости от выбранного числа квантилей k показал, что

$$\kappa_1 = 0,65, \kappa_2 = 0,82, \kappa_3 = 0,89, \kappa_{10} = 0,98.$$

В частности, для $k = 2$ оптимальными значениями p_i и b_i являются:

$$p_1 = 0,64, b_1 = 0,52, p_2 = 0,93, b_2 = 0,18.$$

Так же, как и метод квантилей, метод моментов может быть использован только при обработке результатов испытаний, в которых наблюдаемое число отказов достаточно велико. Если испытания проводятся в соответствии с планом $[N, B, T]$, то условная плотность вероятности распределения момента отказа при условии, что такой отказ произошел за время испытаний T , равна $\frac{f(t, \alpha, \beta)}{F(T, \alpha, \beta)}$. Таким образом, для момента k -го порядка, относящегося к наблюдаемым отказам, имеем:

$$\int_0^T t^k \frac{f(t, \alpha, \beta)}{F(T, \alpha, \beta)} dt = \varphi_k(\alpha, \beta). \quad (6.6)$$

Если $d(T)$ — число зарегистрированных за время T отказов, а моменты отказов $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{d(T)} \leq T$, то эмпирические моменты первого и второго порядков равны соответственно

$$\frac{1}{d(T)} \sum_{i=1}^{d(T)} t_i, \frac{1}{d(T)} \sum_{i=1}^{d(T)} t_i^2.$$

Если $d(T)$ достаточно велико, то в силу закона больших чисел значения эмпирических моментов близки к теоретическим. Приравнявая значения теоретических моментов в (6.6) к значениям эмпирических моментов, получаем уравнения для нахождения оценок $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$:

$$\varphi_j(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{1}{d(T)} \sum_{i=1}^{d(T)} t_i^j, j = 1, 2.$$

Если испытания проводились в соответствии с планом типа $[N, B, r], r \gg 1$, то соответствующие уравнения для оценок можно получить, исходя из средних значений для членов вариационного ряда. Здесь имеем:

$$\begin{aligned} \gamma_i(\alpha, \beta) &= M[t_i] = \\ &= \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \times \\ &\times \int_0^\infty t f(t, \alpha, \beta) F(t, \alpha, \beta)^{i-1} (1 - F(t, \alpha, \beta))^{N-i} dt. \end{aligned}$$

Выбирая два порядковых номера $l < k \leq r$, получаем уравнения для нахождения оценок:

$$\gamma_l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = t_{(l)}, \gamma_k(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = t_{(k)},$$

где $\gamma_j(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ определяется по предыдущей формуле.

В заключение заметим, что можно также использовать и смешанные методы, когда одно из уравнений для нахождения оценок описывается в соответствии с методом квантилей, а другое — в соответствии с методом моментов. Сравнение эффективности различных методов можно проводить путем сравнения дисперсии полученных оценок. При этом могут быть применены асимптотические методы, аналогичные методу разложения в ряд Тейлора и последующего использования асимптотической нормальности отклонений. Этим методом были получены выражения (6.4) для дисперсий оценок в методе квантилей.

В качестве примера, иллюстрирующего метод моментов, рассмотрим оценку параметров α, β в случае, когда плотность вероятности отказов принадлежит семейству гамма-распределений $f(t, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t}$, а испытания проводились в соответствии с планом $[N, Б, N]$. Так как

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}, \varphi_2(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2},$$

а оценками для φ_1 и φ_2 являются $\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$, $\bar{t}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^2$, то, заменяя в равенствах моменты их оценками, получаем уравнения:

$$\bar{t} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}, \bar{t}^2 = \frac{\hat{\alpha}(\hat{\alpha} + 1)}{\hat{\beta}^2}.$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\hat{\beta} = H_1(\bar{t}, \bar{t}^2) = \frac{\bar{t}}{\bar{t}^2 - (\bar{t})^2}, \hat{\alpha} = H_2(\bar{t}, \bar{t}^2) = \frac{(\bar{t})^2}{\bar{t}^2 - (\bar{t})^2}.$$

Введем обозначения $\delta \bar{t} = \bar{t} - \frac{\alpha}{\beta}$, $\delta \bar{t}^2 = \bar{t}^2 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$ и используем метод разложения по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \beta + \frac{\partial H_1(\bar{t}, \bar{t}^2)}{\partial \bar{t}} \delta \bar{t} + \frac{\partial H_1(\bar{t}, \bar{t}^2)}{\partial \bar{t}^2} \delta \bar{t}^2; \\ \hat{\alpha} &= \alpha + \frac{\partial H_2(\bar{t}, \bar{t}^2)}{\partial \bar{t}} \delta \bar{t} + \frac{\partial H_2(\bar{t}, \bar{t}^2)}{\partial \bar{t}^2} \delta \bar{t}^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Символы $\left[\frac{\partial H_i}{\partial \bar{t}}\right], \left[\frac{\partial H_i}{\partial \bar{t}^2}\right]$ означают, что рассматриваются значения производных при $\bar{t} = \frac{\alpha}{\beta}, \bar{t}^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} M[(\delta \bar{t})^2] &\approx D[\bar{t}] = \frac{\alpha}{N\beta^2}, M[(\delta \bar{t}^2)^2] \approx D[\bar{t}^2] = \\ &= \frac{2\alpha(\alpha+1)(2\alpha+3)}{N\beta^4}, M[(\delta \bar{t})(\delta \bar{t}^2)] \approx \\ &\approx \frac{2\alpha(\alpha+1)}{N\beta^3}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из (6.7) и (6.8) находим выражения для оценок дисперсий и ковариации, полученных методом моментов:

$$\begin{aligned} D[\hat{\alpha}] &= M[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] \approx \frac{2\alpha(\alpha+1)}{N}; \\ cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= M[(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)] \approx \frac{2\beta(\alpha+1)}{N}; \\ D[\hat{\beta}] &= M[(\hat{\beta} - \beta)^2] \approx \frac{(2\alpha+3)\beta^2}{N\alpha}. \end{aligned}$$

6.4.2. Метод максимального правдоподобия

Для оценки параметров наиболее часто используется метод максимального правдоподобия. При ограничениях типа гладкости на функцию распределения с помощью метода максимального правдоподобия можно получать асимптотически эффективные оценки. Однако планы типа $[N, B, N]$ очень редко могут быть использованы при испытаниях весьма надежных элементов, так как их проведение связано с большой длительностью испытаний. В этом случае можно использовать другие планы: $[N, B, r]$, $[N, B, (r, T)]$ и т. д. ($r \ll N$). Встает вопрос о том, насколько хороши будут оценки, полученные в результате использования метода максимального правдоподобия для планов, отличных от плана $[N, B, N]$.

Основная идея получения оценок максимального правдоподобия - построение функции правдоподобия и поиск её экстремума. В случае плана $[N, B, N]$ множество данных, полученных после проведения испытаний, имеет однородную структуру. В результате каждого испытания получаем N чисел $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$ соответствующих моментам отказов. Для других планов структура множества полученных данных может изменяться от опыта к опыту. Например,

может случиться, что при использовании плана $[N, Б, (r, T)]$ за время испытаний T не произошло ни одного отказа (событие A_0) или произошло d отказов (событие A_d), $d \leq r$. В случае события A_0 множество данных — пустое множество, данных нет; в случае события A_d , $d \leq r$ - множество данных является наборами d чисел $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_d \leq T$. В общем случае получаем данные, принадлежащие подмножествам определенного вида, на которых заданы семейства распределений, зависящие от неизвестных значений параметров. Следовательно, и функции правдоподобия будут различными. Для плана $[N, Б, (r, T)]$ это распределение вероятностей имеет вид: вероятность события A_0 - $p(A_0, \alpha, \beta) = (1 - F(T, \alpha, \beta))^N$, плотность вероятности того, что произошло событие A_d , $d < r$ и отказы наблюдались в моменты $t_1, t_2, \dots, t_d$, равна

$$\begin{aligned} p(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta) &= \\ &= N(N-1) \dots (N-d+1) \times \\ &\times \prod_{i=1}^d p(t_i, \alpha, \beta) (1 - F(T, \alpha, \beta))^{N-d}. \end{aligned}$$

Плотность вероятности того, что произошло событие A_r и отказы наблюдались в моменты $t_1, t_2, \dots, t_r$, равна

$$p(A_r, t_1, \dots, t_r, \alpha, \beta) = N(N-1) \dots (N-r+1) \prod_{i=1}^r p(t_i, \alpha, \beta),$$

где $p(t, \alpha, \beta) = \frac{dF(t, \alpha, \beta)}{dt}$. Если результаты испытаний рассматривать как набор случайных чисел, то вероятность или плотность вероятностей исходов испытаний [в нашем примере $p(A_0, \alpha, \beta), p(A_r, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta), d \leq r$] также являются случайными величинами. Как и в случае плана $[N, Б, N]$, эти случайные величины называют функциями правдоподобия. Для оценки параметров α, β подбираем такую пару чисел $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, чтобы значение функции правдоподобия при фиксированных значениях исходов опыта достигало экстремума.

Полученные таким образом оценки называются оценками максимального правдоподобия. Необходимым условием обращения функции двух переменных в максимум является равенство нулю ее частных производных по α и β . Если функция не обращается в нуль,

то для нахождения точки экстремума можно приравнять к нулю частные производные от логарифма этой функции.

Для плана $[N, Б, (r, T)]$ и события $A_d, d \leq r$ уравнения максимального правдоподобия имеют вид

$$\frac{\partial L(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial L(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0, \quad (6.9)$$

где $L(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta) = \ln p(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta)$. Как правило, уравнения (6.9) являются трансцендентными. Если решение этих уравнений не единственно, то необходимо привлечь дополнительные соображения для выбора одного из них. Для показательного закона распределения $F(t, \theta) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$ уравнение правдоподобия (в случае одного параметра будет одно уравнение), как правило, решается в явном виде. Этот случай будет подробно рассмотрен далее.

В заключение заметим, что из явного выражения функции правдоподобия можно сразу выписывать совокупность достаточных статистик, содержащих в себе всю информацию об оцениваемых параметрах. Для этого следует воспользоваться методом факторизации, позволяющим преобразовать функцию правдоподобия к виду, зависящему только от некоторых статистик. Применительно к плану $[N, Б, (r, T)]$ из критерия факторизации получаем, что если функция правдоподобия представима в виде

$$p(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta) = \varphi(S_1, \dots, S_k, \alpha, \beta) h(t_1, \dots, t_d), \quad (6.10)$$

где $S_1, \dots, S_k$ - функции от $t_1, \dots, t_d$, а $h(t_1, \dots, t_d)$ не зависит от α, β , то статистики $S_1, \dots, S_k$ являются достаточными для пары параметров α, β . Например, если

$$p(t, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t},$$

то

$$p(A_d, t_1, \dots, t_d) = N \cdots (N - d + 1) \times \times \frac{\beta^{d\alpha} (t_1 t_2 \dots t_d)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)^d} e^{-\beta \sum_{i=1}^d t_i} \left(\int_T^\infty \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} dt \right)^{N-d}. \quad (6.11)$$

Поэтому, полагая $h(t_1, \dots, t_d) \equiv 1$ и сравнивая (6.11) с (6.10), получаем, что статистики

$$S_1 = d, S_2 = \prod_{i=1}^d t_i, S_3 = \sum_{i=1}^d t_i$$

являются достаточными для параметров α, β . В случае $d = r$ достаточными будут статистики

$$S_2 = \prod_{i=1}^d t_i, S_3 = \sum_{i=1}^d t_i.$$

Достаточные статистики, отличные от полного набора $t_1, \dots, t_d$, существуют не всегда. В частности, они не существуют для семейства распределений Вейбулла.

7. Оценка параметра экспоненциального закона

Оценке параметра λ экспоненциального закона $F(t, \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$, посвящаем специальный раздел по двум причинам. Во-первых, экспоненциальный закон находит различные применения в задачах теории надежности, к настоящему времени имеется большое число моделей надежности, посвященных этому вопросу. Во-вторых, для случая показательного закона многие задачи удаётся разрешить в явной форме, выписав ответ в виде простых формул. Таким образом, на примере показательного закона можно изложить основные идеи методов получения оценок, не затемняя их сложными расчётами.

Уместно также будет заметить, что обычно в моделях надежности предполагают при оценке параметров закона Вейбулла $F(t, \lambda) = 1 - e^{-\lambda t^p}, p > 0, t > 0$, что значение параметра p нам априори известно. Однако при таком предположении закон Вейбулла заменой времени $t' = t^p$ может быть сведен к показательному закону.

Так называемый логарифмически показательный закон, для которого $F(t, \lambda) = 1 - (t + 1)^{-\lambda}, \lambda > 0, t > 0$, также заменой переменных $t' = \ln t$ может быть сведен к показательному. Таким образом, приводимые ниже оценки с учетом замены времени могут быть использованы и в этих случаях.

В качестве основного параметра, для которого в настоящем разделе строятся оценки, выбрано значение λ . Однако можно было бы строить оценки для параметра $\theta = \frac{1}{\lambda}$, равного среднему значению времени безотказной работы. В ряде случаев может возникнуть

необходимость получения оценок для вероятности безотказной работы в течение заданного времени T_3 , $R(T_3) = e^{-\lambda T_3}$.

В конце раздела даны формулы для несмещённых оценок $R(T_3)$, соответствующие планам $[N, B, r]$, $[N, B, r]$.

7.1. Планы типа B

Вначале рассмотрим планы испытаний с восстановлением отказавших элементов $[N, B, T]$, $[N, B, r]$, $[N, B, (r, T)]$. Для этих планов моменты наблюдаемых отказов образуют пуассоновский поток с интенсивностью $\Lambda = \lambda N$. Действительно, так как времена безотказной работы каждого элемента взаимно независимы, то последовательность моментов $\{t_{ik}\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, замен элементов в k -й ячейке стенда образует процесс восстановления, у которого интервалы $S_{i,k} = t_{i+1,k} - t_{i,k}$ являются взаимно независимыми, показательно распределёнными случайными величинами, $P\{S_{i,k} > t\} = e^{-\lambda t}$. Но такой процесс восстановления является пуассоновским потоком с интенсивностью, равной λ . Моменты замен элементов (отказов) взаимно независимы, поэтому взаимно независимы пуассоновские потоки моментов замен, соответствующие N различным ячейкам стенда. Так как поток всех отказов, которые происходят при испытаниях, является суперпозицией N взаимно независимых пуассоновских потоков с интенсивностями λ , то он также будет пуассоновским потоком с интенсивностью $\Lambda = \lambda N$.

7.1.1. План $[N, B, T]$

В случае плана $[N, B, T]$ наблюдаем пуассоновский поток отказов с интенсивностью $\Lambda = \lambda N$ в течение времени T . Пусть $d(T)$ — число наблюдаемых отказов, которые произошли в моменты $t_1, \dots, t_{d(T)}$. Плотность вероятности этого события можно получить следующим образом. Вероятность того, что первый отказ произойдёт в интервале $[t_1; t_1 + dt_1)$, равна $\Lambda e^{-\Lambda t_1} dt_1$, условная вероятность того, что второй отказ произойдёт в интервале $[t_2; t_2 + dt_2)$ при условии, что первый отказ произошёл в интервале $[t_1; t_1 + dt_1)$, равна $\Lambda e^{-\Lambda(t_2 - t_1)} dt_2$ и т. д. Наконец, условная вероятность того, что $d(T)$ - отказ произошёл в интервале $[t_{d(T)}; t_{d(T)} + dt_{d(T)})$, а в интервале $[t_{d(T)} + dt_{d(T)}; T)$ других отказов не было при условии, что

отказы произошли в интервалах $[t_1; t_1 + dt_1), \dots, [t_{d(T)-1}; t_{d(T)-1} + dt_{d(T)-1})$, равна

$$\Lambda e^{-\Lambda(t_{d(T)} - t_{d(T)-1})} dt_{d(T)} \cdot e^{-\Lambda(T - t_{d(T)})}.$$

Вероятность события, что отказы произошли в интервалах $[t_1; t_1 + dt_1), \dots, [t_{d(T)}; t_{d(T)} + dt_{d(T)})$, равна произведению этих условных вероятностей

$$\Lambda e^{-\Lambda t_1} \Lambda e^{-\Lambda(t_2 - t_1)} \dots \Lambda e^{-\Lambda(t_{d(T)} - t_{d(T)-1})} e^{-\Lambda(T - t_{d(T)})} dt_1 \dots dt_{d(T)}.$$

Таким образом, плотность вероятностей наступления отказов в моменты $t_1, \dots, t_{d(T)}$ равна

$$p(A_d, t_1, \dots, t_{d(T)}) = \Lambda^{d(T)} e^{-\Lambda T}. \quad (7.1)$$

Вероятность того, что за время испытаний T не произойдет ни одного отказа, равна

$$p(A_0) = e^{-\Lambda T}. \quad (7.2)$$

Рассматривая (7.1) и (7.2) как функции правдоподобия, получаем уравнение максимального правдоподобия:

$$\frac{\partial L(A_d, t_1, \dots, t_{d(T)})}{\partial \Lambda} = \frac{\partial (d(T) \ln \Lambda - \Lambda T)}{\partial \Lambda} = \frac{d(T)}{\Lambda} - T,$$

решение которого имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \frac{d(T)}{T}.$$

Так как $\Lambda = \lambda T$, то оценкой параметра λ является

$$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{NT}. \quad (7.3)$$

Так как $P\{d(T) = d\} = \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T}$, то

$$M[\hat{\lambda}] = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{d}{NT} \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT} = \lambda \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(\lambda(N-1))^{d-1}}{(d-1)!} e^{-\lambda NT} = \lambda,$$

т. е. оценка (7.3) является несмещённой.

$$\begin{aligned} D[\hat{\Lambda}] &= M[\hat{\Lambda}^2] - (M[\hat{\Lambda}])^2 = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\frac{d}{T}\right)^2 \frac{(\Lambda)^2}{d!} e^{-\Lambda T} - \Lambda^2 = \\ &= \left(\Lambda^2 + \frac{\Lambda}{T}\right) - \Lambda^2 = \frac{\Lambda}{T}. \end{aligned}$$

$$D[\hat{\lambda}] = D\left[\frac{\hat{\Lambda}}{N}\right] = \frac{1}{N^2} D[\hat{\Lambda}] = \frac{\lambda N}{N^2 T} = \frac{\lambda}{NT}. \quad (7.4)$$

Можно показать, что эта оценка является эффективной. Заметим также, что из вида плотности (7.1) следует, что в случае плана $[N, B, T]$ достаточной статистикой является только число $d(T)$ отказов, происшедших за время испытаний, а сами моменты отказов $t_1, \dots, t_{d(T)}$ никакой дополнительной информации о параметре λ не содержат.

Пример 7.1. Испытания проводились по плану $[N = 100, B, T = 200]$. Отказы произошли в моменты $t_1 = 51$ ч, $t_2 = 78$ ч, $t_3 = 110$ ч, $t_4 = 135$ ч. Найти оценку параметра λ .

Решение. Общее число отказов $d(200) = 5$. По формуле (7.3) наводим, что

$$\hat{\lambda} = \frac{5}{100 \cdot 200} = 2.5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}.$$

7.1.2. План $[N, B, r]$

Для плана $[N, B, r]$, рассуждая аналогичным образом, получаем, что вероятность того, что отказы произойдут в интервалах $[t_1; t_1 + dt_1), \dots, [t_r; t_r + dt_r)$, равна

$$\Lambda e^{-\lambda t_1} dt_1 \Lambda e^{-\lambda(t_2 - t_1)} dt_2 \dots \Lambda e^{-\lambda(t_r - t_{r-1})} dt_r = \Lambda^r e^{-\lambda t_r} dt_1 \dots dt_r.$$

Отсюда следует, что плотность вероятностей наступления отказов в моменты $t_1, \dots, t_r$ равна

$$p(t_1, \dots, t_r, \lambda) = \Lambda^r e^{-\lambda t_r}.$$

Из (7.4) следует, что достаточной статистикой для оценки параметра λ является момент t_r наступления r -го отказа. Уравнение максимального правдоподобия имеет вид

$$\frac{\partial \ln p(t_1, \dots, t_r, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial (r \ln \Lambda - \lambda t_r)}{\partial \lambda} = 0,$$

откуда получаем оценку

$$\hat{\Lambda}_1 = \frac{r}{t_r}. \quad (7.5)$$

Заметим теперь, что $t_r = t_1 + (t_2 - t_1) + \dots + (t_r - t_{r-1})$ является суммой r интервалов между последовательными отказами. Выше было показано, что эти интервалы являются взаимно независимыми случайными с плотностями вероятностей, равными $\Lambda e^{-\lambda t}$. Поэтому плотность вероятностей t_r , равная свёртке r плотностей $p(t) = \Lambda e^{-\lambda t}$, имеет вид

$$p(t_r) = \frac{\Lambda^r t_r^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda t_r}. \quad (7.6)$$

Из (7.5) и (7.6) получаем:

$$\begin{aligned} M[\hat{\Lambda}_1] &= \int_0^\infty \frac{r}{t_r} \frac{\Lambda^r t_r^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda t_r} dt_r = \\ &= \frac{r\Lambda}{(r-1)!} \int_0^\infty \Lambda^{r-1} t_r^{r-2} e^{-\Lambda t_r} dt_r = \frac{r\Lambda}{r-1}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Следовательно, оценка $\hat{\Lambda}_1$, полученная методом максимального правдоподобия, является смещённой, а при $r = 1$ её математическое ожидание равно бесконечности. Смещение легко устранить, если рассмотреть оценку

$$\hat{\Lambda} = \frac{r-1}{t_r}, r > 1. \quad (7.8)$$

Из (7.7) и (7.6) следует, что $M[\hat{\Lambda}] = \Lambda$. Вспомнив, что $\Lambda = N\lambda$, получаем несмещённую оценку для λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\Lambda}}{N} = \frac{r-1}{Nt_r}.$$

Для дисперсий оценок (7.7), (7.8) имеют место формулы

$$\begin{aligned} D[\hat{\Lambda}] &= \int_0^\infty \frac{(r-1)^2}{t_r^2} \frac{\Lambda^r t_r^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda t_r} dt_r - \Lambda^2 = \frac{\Lambda^2}{r-2}; \\ D[\hat{\lambda}] &= D\left[\frac{\hat{\Lambda}}{N}\right] = \frac{D[\hat{\Lambda}]}{N^2} = \frac{(\lambda N)^2}{N^2(r-2)} = \frac{\lambda^2}{r-2}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Дисперсии оценок существуют только для значений $r > 2$.

Пример 7.2. Испытания проводились по плану $[N = 200, B, r = 10]$. Момент регистрации десятого отказа $t_{10} = 551$ ч.

Решение. Из формулы (7.8) находим оценку

$$\hat{\lambda} = \frac{9}{200 \cdot 551} = 8.17 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ч}}.$$

7.1.3. План $[N, B, (r, T)]$

При исследовании более общего плана $[N, B, (r, T)]$ испытания прекращаются либо в момент T и при этом наблюдается $d(T) < r$ отказов, либо в момент t_r появления r -го отказа, если $t_r < T$. В

первом случае плотность вероятности наступления отказов в моменты $t_1, \dots, t_{d(T)}$ записывается по формуле (7.1), а во втором случае плотность вероятности наступления отказов в моменты $t_1, \dots, t_r$ - по формуле (7.4). Используя метод максимального правдоподобия в виде, изложенном в конце предыдущего параграфа, получаем оценку для Λ :

$$\hat{\Lambda}_1 = \begin{cases} \frac{d(T)}{T}, & t_r > T, \\ \frac{r}{t_r}, & t_r \leq T. \end{cases}$$

По аналогии с только что разобранным случаем плана $[N, B, r]$ можем скорректировать смещение. Вводим оценку

$$\hat{\Lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{T}, & t_r > T, \\ \frac{r-1}{t_r}, & t_r \leq T, \end{cases} \quad (7.10)$$

которая является несмещённой. Действительно, используя формулу для условных математических ожиданий, получим:

$$\begin{aligned} M[\hat{\Lambda}] &= M[(\hat{\Lambda}|t_r > T)]P(t_r > T) + M[(\hat{\Lambda}|t_r \leq T)]P(t_r \leq T) = \\ &= \sum_{d=0}^{r-1} \frac{d}{T} P(d(T) = d) + \int_0^T \frac{r-1}{s} d_s P(t_r < s) = \\ &= \sum_{d=0}^{r-1} \frac{d}{T} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \int_0^T \frac{r-1}{s} \frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s} ds = \\ &= \Lambda \sum_{d=0}^{r-1} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \Lambda \sum_{d=r-1}^{\infty} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} = \Lambda. \end{aligned}$$

Аналогичным способом можно найти дисперсию этой оценки $\hat{\Lambda}$:

$$\begin{aligned} D[\hat{\Lambda}] &= M[\hat{\Lambda}^2] - (M[\hat{\Lambda}])^2 = \\ &= \frac{\Lambda}{T} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \frac{\Lambda^2}{r-2} \sum_{d=r-2}^{\infty} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T}. \end{aligned}$$

Для несмещённой оценки параметров $(\hat{\lambda} = \frac{\hat{\Lambda}}{N}, M[\hat{\lambda}] = \lambda)$ имеем:

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{NT}, & t_r > T, \\ \frac{r-1}{Nt_r}, & t_r \leq T. \end{cases}$$

$$D[\hat{\lambda}] = D\left[\frac{\hat{\Lambda}}{N}\right] = \frac{1}{N^2} D[\hat{\Lambda}] = \frac{\Lambda}{NT} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT} +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{r-2} \sum_{d=r-2}^{\infty} \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT}. \quad (7.11)$$

7.2. Планы типа Б

Рассмотрим теперь планы $[N, Б, T]$, $[N, Б, r]$, $[N, Б, (r, T)]$, в которых отказавшие элементы уже не заменяются новыми.

7.2.1. План $[N, Б, T]$

Выражение для плотности вероятностей того, что при испытаниях по плану $[N, Б, T]$ отказы произойдут в моменты $t_1, \dots, t_{d(T)}$, можно получить следующим образом. Плотность вероятностей того, что в эти моменты откажут элементы с номерами $i_1, \dots, i_{d(T)}$, равна в силу взаимной независимости моментов отказов произведению плотностей вероятностей для моментов отказов каждого из этих элементов, умноженных на вероятность того, что в интервале $[0; T)$ отказов у остальных $N - d(T)$ элементов не произойдёт, т. е. равна

$$\lambda e^{-\lambda t_1} \lambda e^{-\lambda t_2} \dots \lambda e^{-\lambda t_{d(T)}} \lambda e^{-\lambda(N-d(T))T}. \quad (7.12)$$

Событие, состоящее в том, что моменты отказов равны $t_1, \dots, t_{d(T)}$, может осуществиться $A_N^{d(T)} = N(N-1) \dots (N-d(T)+1)$ способами, так как из N чисел можно сделать $N(N-1) \dots (N-d(T)+1)$ различных выборок номеров $i_1, \dots, i_{d(T)}$. Умножая (7.11) на $A_N^{d(T)}$, получаем выражение для искомой плотности вероятностей:

$$p(t_1, \dots, t_{d(T)}, \lambda) = N(N-1) \dots (N-d(T)+1) \times$$

$$\times \lambda^{d(T)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{d(T)} t_i + (N-d(T))T)}.$$

Таким образом, в случае плана $[N, Б, T]$ достаточными статистиками будут: число $d(T)$ элементов, отказавших за время T , и сумма $S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + (N-d(T))T$ времён, в течение которых

проработал каждый элемент, т. е. суммарная наработка элементов за время проведения испытаний. Из (7.12) получаем, что

$$\ln p(t_1, \dots, t_{d(T)}, \lambda) = \ln N(N-1) \cdots (N-d(T)+1) + d(T) \ln \lambda - \lambda S_B(T).$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\partial \ln p(t_1, \dots, t_{d(T)}, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{d(T)}{\lambda} - S_B(T) = 0. \quad (7.13)$$

Таким образом, оценка максимального правдоподобия равна

$$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{S_B(T)}, S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + (N - d(T))T. \quad (7.14)$$

Эта оценка является смещённой. Заметим, что для сравнительно надёжных элементов при $\lambda T < 0.1$ плотность условного распределения момента отказа, происшедшего в интервале $[0; T)$, равна $\frac{\lambda e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}} \approx \frac{\lambda}{\lambda T} = \frac{1}{T}$, а среднее значение каждого t_i приближенно можно считать равным $\frac{T}{2}$. Отсюда для $d(T) > 10$, исходя из закона больших чисел, имеем $\sum_{i=1}^{d(T)} t_i = d(T) \left[\frac{1}{d(T)} \sum_{i=1}^{d(T)} t_i \right] \approx \frac{d(T)T}{2}$. Подставив это выражение в знаменатель формулы (7.14), получим:

$$\hat{\lambda}_1 \approx \frac{\frac{d(T)}{d(T)}}{\frac{d(T)T}{2} + (N - d(T))T} = \frac{d(T)}{\left(N - \frac{d(T)}{2}\right)T}.$$

Этой формулой часто пользуются на практике. Следует, однако, иметь в виду, что она применима при $\frac{d(T)}{N} \leq 0.1, d(T) \geq 10$. Если считать, что формула (7.14) слишком сложна, то для оценки λ также можно исходить из формулы оценки вероятности по частоте. Оценкой для вероятности $R(T) = e^{-\lambda T}$ безотказной работы элемента является отношение числа элементов $N - d(T)$, безотказно проработавших в течение времени T , к общему числу N элементов. Приравняв оценку к теоретическому значению вероятности, получим для нахождения оценки λ уравнение:

$$\frac{N - d(T)}{N} = e^{-\lambda T},$$

откуда

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{1}{T} \ln \frac{N}{N - d(T)}. \quad (7.15)$$

Этой формулой можно пользоваться для значений $0.2 < \frac{d(T)}{N} < 0.8$. Заметим, что смещение оценки (7.15) является бесконечным, так как с положительной вероятностью может получиться, что $d(T) = N$.

Пример 7.3. Испытания проводились по плану $[N = 100, B, T = 500]$. Отказы произошли в моменты $t_{(1)} = 31$ ч, $t_{(2)} = 49$ ч, $t_{(3)} = 90$ ч, $t_{(4)} = 135$ ч, $t_{(5)} = 161$ ч, $t_{(6)} = 249$ ч, $t_{(7)} = 323$ ч, $t_{(8)} = 353$ ч, $t_{(9)} = 282$ ч, $t_{(10)} = 436$ ч, $t_{(11)} = 477$ ч.

Решение. Общее число отказавших элементов $d(500) = 11$, суммарная наработка $S_B(500) = 31 + 49 + 90 + 135 + 161 + 249 + 323 + 353 + 282 + 436 + 477 + 89 \cdot 500 = 47147$ ч. По формуле (7.14) находим оценку для параметра λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{S_B(T)} = \frac{11}{47147} = 2.33 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}.$$

С помощью упрощённого варианта формулы (7.14) получаем оценку

$$\hat{\lambda} = \frac{11}{\left(100 - \frac{11}{2}\right) 500} = 2.328 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}.$$

7.2.2. План $[N, B, r]$

Для плана $[N, B, r]$ плотность вероятностей появления отказов в моменты $t_1, \dots, t_r$ получаем из рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы для плана $[N, B, T]$. Плотность вероятностей того, что в моменты $t_1, \dots, t_r$ откажут элементы с номерами $i_1, \dots, i_r, 1 \leq i_k \leq N, i_k \neq i_l, k \neq l$, а остальные $N - r$ элементов в интервале $[0; t_r)$ не дадут отказов, равна

$$\lambda e^{-\lambda t_1} \lambda e^{-\lambda t_2} \dots \lambda e^{-\lambda t_r} \lambda e^{-\lambda(N-r)t_r}.$$

Учитывая, что число возможных наборов по r различных цифр из N равно $N(N - 1) \dots (N - r + 1)$, получаем, что плотность вероятностей наступления r отказов в моменты $t_1, \dots, t_r$:

$$p(t_1, \dots, t_r, \lambda) = N(N - 1) \dots (N - r + 1) \times \times \lambda^r e^{-\lambda(\sum_{i=1}^r t_i + (N-r)t_r)}. \quad (7.16)$$

Из этой формулы следует, что достаточной статистикой является суммарная наработка всех испытываемых элементов

$$S_B(t_r) = \sum_{i=1}^r t_i + (N-r)t_r = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \dots + (N-r+1)(t_r - t_{r-1}). \quad (7.17)$$

Подставив новые переменные $s_1 = t_1$, $s_k = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{2, r}$, плотность (7.15), учитывая (7.16), получаем:

$$p(s_1, \dots, s_r, \lambda) = N\lambda e^{-\lambda N s_1} (N-1)\lambda e^{-\lambda(N-1)s_2} \dots \times (N-r+1)\lambda e^{-\lambda(N-r+1)s_r}. \quad (7.18)$$

При этом учитываем, что якобиан перехода от координат $t_1, \dots, t_r$ к координатам $s_1, \dots, s_r$ равен 1. Из (7.17) следует, что случайные величины $s_1 = t_1$, $s_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 2, \dots, r$ являются взаимно независимыми, при этом плотность s_k равна $(N-k+1)\lambda e^{-\lambda(N-k+1)s_k}$, соответственно плотность случайной величины $(N-k+1)s_k$ равна $\lambda e^{-\lambda s}$. Таким образом, из (7.17) следует, что s является суммой r взаимно независимых, показательно распределённых случайных величин. Отсюда получаем, что плотность распределения суммарной наработки $S_B(t_r)$ равна

$$p(s) = \lambda^r \frac{s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s}, s > 0.$$

Прологарифмировав плотность (7.15), находим:

$$\ln p(t_1, \dots, t_r, \lambda) = \ln(N \dots (N-r+1)) + r \ln \lambda - \lambda s,$$

откуда получаем уравнение максимального правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln p(t_1, \dots, t_r, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{r}{\lambda} - s = 0.$$

Оценка максимального правдоподобия имеет вид

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{r}{S_B(t_r)}. \quad (7.19)$$

Используя выражение (7.18) для плотности вероятностей суммарной наработки, находим, что

$$M[\hat{\lambda}_1] = \int_0^{\infty} \frac{r}{s} \lambda^r \frac{s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s} ds = \frac{r}{r-1} \lambda, r > 1.$$

Таким образом, оценка $\hat{\lambda}_1$ является смещённой. Это смещение можно устранить, если использовать оценку

$$\hat{\lambda} = \frac{r-1}{r} \hat{\lambda}_1 = \frac{r-1}{S_B(t_r)}.$$

Дисперсия этой оценки равна

$$D[\hat{\lambda}] = \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{r-1}{s^r}\right)^r \lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s} ds - \lambda^2 = \frac{r-1}{r-2} \lambda^2 - \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{r-2}. \quad (7.20)$$

Пример 7.4. Испытания проводились по плану $[N = 50, Б, r = 8]$. Моменты отказов равны $t_{(1)} = 91$ ч, $t_{(2)} = 145$ ч, $t_{(3)} = 221$ ч, $t_{(4)} = 285$ ч, $t_{(5)} = 317$ ч, $t_{(6)} = 328$ ч, $t_{(7)} = 411$ ч, $t_{(8)} = 496$ ч. Найти оценку параметра экспоненциального закона.

Решение. Значение суммарной наработки $S_B(t_{(8)}) = 91 + 145 + 221 + 285 + 317 + 328 + 411 + 496 + 496 \cdot (50 - 8) = 23126$ ч. По формуле (7.19) находим оценку для параметра λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{7}{23126} = 3.02 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}.$$

7.2.3. План $[N, Б, (r, T)]$

Если используется план $[N, Б, (r, T)]$, то испытания прекращаются либо в момент T , если $t_r > T$, либо в момент t_r , если $t_r \leq T$. Соответственно в первом случае плотность вероятностей наступления $d(T)$ отказов в моменты $t_1, \dots, t_{d(T)}$ записывается по формуле (7.12), а во втором, для моментов отказов $t_1, \dots, t_r$, — по формуле (7.15). Как и в случае плана $[N, Б, (r, T)]$, находим, что оценка максимального правдоподобия имеет вид

$$\hat{\lambda}_1 = \begin{cases} \frac{d(T)}{S_B(T)}, t_r > T, S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + (N - d(T))T, \\ \frac{r}{S_B(T)}, t_r \leq T, S_B(T) = \sum_{i=1}^r t_i + (N - r)t_r. \end{cases}$$

По аналогии с предыдущим случаем можем использовать улучшенную оценку для случая $t_r \leq T$. Окончательно получаем:

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{S_B(T)}, t_r > T, S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + (N - d(T))T, \\ \frac{r-1}{S_B(T)}, t_r \leq T, S_B(T) = \sum_{i=1}^r t_i + (N - r)t_r. \end{cases}$$

Эта оценка является смещённой.

7.2.4. План $[N, Б, (r, HS_0)]$

В заключение этого параграфа рассмотрим ещё один план проведения стендовых испытаний, который также находит практическое применение. Проводятся испытания N элементов без восстановления отказавших. Испытания прекращаются в тот момент, когда либо суммарная наработка испытываемых элементов станет равной заданному до начала испытаний числу S_0 , либо в момент отказа r -го элемента, если при этом суммарная наработка оказывается меньше S_0 . Такой план сокращённо будем обозначать через $[N, Б, (r, HS_0)]$. Если обозначить через $N(t)$ число элементов, оставшихся исправными к моменту t , то суммарная наработка $S(t)$ испытываемых элементов к моменту t равна $S_B(t) = \int_0^t N(s)ds$. Допустим, что отказы элементов произошли в моменты $t_1, \dots, t_{d(t)}$, тогда суммарная наработка к моменту времени t задается формулой

$$S_B(t) = \int_0^t N(s)ds = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \dots + \\ + (N - d(t))(t - t_{d(t)}),$$

$t_0 = 0$, если $d(t) = 0$. Испытания прекращаются в тот момент s , когда либо суммарная наработка

$$S_B(s) = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \dots + \\ + (N - d(s))(s - t_{d(s)}) = S_0, \quad (7.21)$$

(при этом $d(s) < r$), либо в момент t_r отказа r -го элемента

$$S_B(t_r) = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \dots + (N - r + 1)(t_r - t_{r-1}) < S_0.$$

Выше было показано, что при испытаниях N элементов без восстановления отказавших случайные величины $Nt_1, (N-1)(t_2 - t_1), \dots, (N-r+1)(t_r - t_{r-1})$ являются взаимно независимыми, одинаково распределёнными с плотностью $\lambda e^{-\lambda t}$. Следовательно, условия (7.21) означают, что наблюдаем пуассоновский поток

отказов с интенсивностью λ и прекращаем наблюдения либо в «момент» S_0 , либо в «момент» $S(t_r)$ наступления r -го отказа.

Но задачу оценки параметра Λ пуассоновского потока уже решили, разбирая случай плана $[N, B, (r, T)]$. Чтобы воспользоваться оценкой (7.9), в ней надо считать $t_r = S(t_r)$, $T = S_0$ и в формуле для дисперсии оценки (7.10) считать $\Lambda = \lambda$. Окончательно:

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(t_0)}{S_0}, & S(t_r) > S_0, S_B(t_0) = S_0, \\ \frac{r-1}{S_B(t_r)}, & S_B(t_r) < S_0. \end{cases} \quad (7.22)$$

$S_B(t)$ находится по формуле (7.20). Как уже было доказано, эта оценка несмещённая, её дисперсия в соответствии с формулой (7.10) равна

$$D[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda}{S_0} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\lambda S_0)^d}{d!} e^{-\lambda S_0} + \frac{\lambda^2}{r-2} \sum_{d=r-2}^{\infty} \frac{(\lambda S_0)^d}{d!} e^{-\lambda S_0}.$$

Как это следует из рассмотрения плана $[N, B, (r, T)]$, достаточными статистиками будут $d(t_0)$, если $S(t_r) > S_0$, и $S(t_r)$, если $S(t_r) < S_0$.

Пример 7.5. Испытания проводились по плану $[N = 100, B, (r = 5, HS = 10000)]$. Первый отказ наступил в момент $t_{(1)} = 34$ ч, значение суммарной наработки $S_B(t_{(1)}) = 3400$ ч. Второй отказ был зарегистрирован в момент $t_{(2)} = 75$ ч, значение суммарной наработки стало равным $S_B(t_{(2)}) = 7459$ ч. В интервале от $t_{(2)} = 75$ ч до $t_{(0)} = 100.71$ ч отказы не наблюдались. Найти оценку параметра экспоненциального закона.

Решение. В момент $t_{(0)} = 100.71$ ч значение суммарной наработки достигло заданного уровня 10000 ч. В соответствии с верхней частью формулы (7.22) находим

$$\hat{\lambda} = \frac{d(t_0)}{S_0} = \frac{2}{10000} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}.$$

7.3. Несмещённые оценки вероятности безотказной работы

Одним из наиболее важных показателей надёжности является вероятность безотказной работы в течение заданного времени T_3 . В

случае показательного закона эта вероятность $R(T_3) = e^{-\lambda T_3}$. Используя полученные выше формулы для оценок $\hat{\lambda}$ параметра λ , можно в качестве оценки для $R(T_3)$ рассматривать

$$\hat{R}(T_3) = e^{-\hat{\lambda} T_3}.$$

Можно показать, что эта оценка при увеличении числа N испытываемых элементов является состоятельной и асимптотически эффективной, если только $\hat{\lambda}$, - асимптотически эффективная оценка λ . Однако при конечных значениях N оценка, задаваемая формулой (7.22), является смещённой. Это смещение может быть существенным в практически важном случае, когда $R(T_3)$ близка к единице. Величина смещения зависит также от типа плана, в соответствии с которым проводятся испытания. Так же, как и для оценок параметра λ , можно поставить задачу построения несмещённых оценок для $R(T_3) = e^{-\lambda T_3}$. Ограничиваемся здесь разбором только двух типов планов $[N, B, T]$ и $[N, B, r]$. Основная идея построения несмещённых оценок с минимальными дисперсиями заключается в следующем. Сначала отыскивают несмещённую оценку для заданной функции от неизвестного параметра. Если эта несмещённая оценка - функция от достаточной статистики, и притом единственная, то она имеет наименьшую дисперсию.

Если же эта несмещённая оценка не является функцией от достаточной статистики, то в качестве новой несмещённой оценки рассматривается условное математическое ожидание от исходной оценки при условии, что фиксировано значение достаточной статистики.

Пусть испытания проводились по плану $[N, B, T]$. Достаточной статистикой является число $d(T)$ элементов, отказавших за время проведения испытаний, $d(T)$ имеет пуассоновское распределение с параметром λNT . Основное уравнение для несмещённой оценки $\varphi(d)$ для $R(T_3)$ имеет вид

$$\sum_{d(T)=0}^{\infty} \varphi(d) \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT} = e^{-\lambda T_3}. \quad (7.23)$$

Поделив обе части на $e^{-\lambda NT}$ и разложив $e^{\lambda(NT-T_3)}$ по степеням λ , получаем, что тождество (7.23) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\varphi(d) \frac{(\lambda NT)^d}{d!} = \frac{\lambda^d (NT - T_3)^d}{d!}.$$

Таким образом, из (7.23) получаем выражение для несмещённой оценки $R(T_3)$:

$$\hat{R}(T_3) = \varphi(d(T)) = \left(1 - \frac{T_3}{NT}\right)^{d(T)}. \quad (7.24)$$

Дисперсия оценки задаётся формулой

$$D[\hat{R}(T_3)] = e^{\lambda NT \left(\left(1 - \frac{T_3}{NT}\right)^2 - 1 \right)} - e^{-2\lambda T_3}.$$

Заметим, что несмещённая оценка для значений $T_3 > NT$ дает отрицательные значения при нечётном числе отказов и значения, большие единицы, при чётном числе отказов. Оценку (7.24) можно рекомендовать только для значений $T_3 < NT$.

Пусть испытания проводились в соответствии с планом $[N, B, r]$. Если $t_{(i)}, i = 0, 1, \dots, r$ - моменты отказов, то случайные величины $\tau_i = (N - i + 1)(t_{(i)} - t_{(i-1)}), i = 1, 2, \dots, r, t_{(0)} = 0$ взаимно независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda, P\{\tau_i > T_3\} = e^{-\lambda T_3} = R(T_3)$. Следовательно, в качестве несмещённой оценки для $R(T_3)$ можно взять отношение числа $d(r)$ случайных величин τ_i таких, что $\tau_i > T_3$, к общему числу отказов r . Оценка $\hat{R}_1(T_3) = \frac{d(r)}{r}$ является несмещённой. Однако она не есть функция от достаточной статистики $S_B(t_r)$. Взяв условное математическое ожидание $\hat{R}_1(T_3)$ относительно $S_B(t_r)$, получим выражение для улучшенной несмещённой оценки:

$$\hat{R}(T_3) = \begin{cases} \left(1 - \frac{T_3}{S_B(t_r)}\right)^{r-1}, & S_B(t_r) > T, \\ 0, & S_B(t_r) \leq T. \end{cases}$$

Учитывая, что плотность вероятности суммарной наработки $S_B(t_r)$ задаётся формулой (7.5), легко проверяем несмещённость оценки (7.24). Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}
M[\hat{R}(T_3)] &= \int_{T_3}^{\infty} \left(1 - \frac{T_3}{s}\right)^{r-1} \frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s} ds = \\
&= \sum_{v=0}^{r-1} C_{r-1}^v \int_{T_3}^{\infty} \left(-\frac{T_3}{s}\right)^v \frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s} ds = \\
&= \sum_{v=0}^{r-1} (-1)^v C_{r-1}^v \frac{T_3^v \lambda^{v+1} (r-v-1)!}{(r-1)!} \sum_{\mu=0}^{r-v-1} \frac{(\lambda T_3)^\mu}{\mu!} e^{-\lambda T_3} = \\
&= e^{-\lambda T_3} \sum_{l=0}^{r-1} (\lambda T_3)^l \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k}{k! (l-k)!} = e^{-\lambda T_3}.
\end{aligned}$$

8. Надежность программного обеспечения

Исследования в области программной надёжности находятся на начальном этапе своего развития. Целесообразно выделить две стороны программного обеспечения объекта: программную надёжность объекта - свойство объекта выполнять заданные функции, обусловленные качеством программного обеспечения; надёжность программного обеспечения – свойство программного обеспечения выполнять предписанные ему требования.

Программная надёжность изделия проявляется при совместной работе аппаратуры и программы. Она характеризует способность изделия выполнять заданные функции при условии, что программа будет находиться в том или другом состоянии.

Надёжность программного обеспечения характеризует качественное состояние программы. Её иногда называют правильностью (корректностью, надёжностью) программы.

Программная надёжность объекта - это то, что интересует потребителя. Для её обеспечения необходимо, чтобы программа была “правильной”, “корректной”, “надёжной”, т.е. чтобы она не содержала ошибок. Может оказаться, что некоторые из ошибок совсем не проявятся при работе объекта или, наоборот, при работе объекта обнаружатся дополнительные несовершенства (“ошибки”) программы. Однако необходимым условием надёжной работы объекта является “корректность” программ, т.е. отсутствие в них ошибок.

Программная надёжность становится особо актуальной, когда программы являются самостоятельным изделием. В этом случае они

изготавливаются, проверяются и подвергаются приёмосдаточным испытаниям так же, как обычные объекты. Положения о двух сторонах надёжности программного обеспечения полезно иметь в виду при исследовании надёжности программно управляемых объектов.

8.1. Сравнительные характеристики программных и аппаратурных отказов

Программные отказы изделия и аппаратурные отказы имеют много общего, но во многом существенно различаются. Общее между ними:

- 1) невыполнение объектом заданных функций;
- 2) времена до отказов и времена устранения отказов носят случайный характер;
- 3) методы обработки статистических данных об отказах одинаковы, а потому статистические оценки показателей аппаратурной и программной надёжности могут быть одинаковыми по своему названию: средняя наработка объекта на программный отказ, интенсивность программных отказов объекта и т.д.

Возможны и объединённые (комплексные) оценки: средняя наработка объекта на программный и аппаратурный отказ и т.п. Вместе с тем отказы программные существенно отличаются от отказов аппаратурных:

- 1) аппаратурный отказ зависит либо от времени, либо от объёма выполненной работы, а отказ программный - от той функции, которую выполняет изделие под управлением программы (точнее, от того, с какой вероятностью программа выйдет на такой участок, который содержит ошибку);
- 2) обнаружение и устранение аппаратурного отказа (заменой отказавшего элемента исправным) не означает, что такой же отказ не повторится при дальнейшей работе изделия, а обнаружение и устранение программного отказа (исправление программы) означает, что такой отказ в дальнейшем не повторится;
- 3) программный отказ, обнаруживаемый при автономной проверке программы, может переходить в разряд недействующих, если состояние аппаратуры делает её нечувствительной к данному виду программного отказа. Например, если в программе ошибочно не предусмотрена программная защита от аппаратурного сбоя, то это

программный отказ, но если при этом в аппаратуре не возникает сбоя, то отказ программный становится недействующим;

4) прогнозировать возникновение аппаратурных отказов сравнительно легко, а прогнозировать возникновение отдельных программных отказов трудно, а часто и невозможно. Для отдельных программных отказов трудно предвидеть время, когда они становятся действующими, а когда недействующими;

5) аппаратурные отказы целесообразно подразделять на внезапные и постепенные, т.е. отказы, различные по своей физической природе, законам распределения времени до отказа, методам борьбы за снижение их вероятности. Программные отказы нет смысла делить на внезапные и постепенные. Они возникают внезапно, как только программа переходит на такой участок, который содержит “ошибку”. В то же время они по природе своей не совпадают с внезапными аппаратурными отказами. Вероятность их возникновения не связана с продолжительностью работы изделия, а связана с условной вероятностью того, что программа содержит ошибку в данной части программы, и вероятностью того, что изделие будет работать под управлением этой части программы.

8.2. Проверка и испытания программного обеспечения

Испытания программ на надёжность и испытания изделий на надёжность их программного обеспечения - обязательные этапы при проверке надёжности систем. Испытания с целью проверки надёжности программ осуществляются с помощью специальных программ (тестирование) и специальных (имитационных) стендов. Проверяется при этом степень отлаженности программы и её соответствие заданным требованиям.

Испытания с целью проверки надёжности изделий, работающих под управлением программ, осуществляются при совместной работе программы и изделия. Проверяются при этом и степень отлаженности программы в соответствии с заданными требованиями, и корректность этих требований, и согласованность взаимодействий программы и аппаратуры.

Степень отлаженности программы может проверяться различными методами. Чем выше требование к достоверности проверки, тем более сложен метод проверки. Рассмотрим один из наиболее простых методов. В процессе проверки “корректности” программы

(с помощью наблюдений за работой либо изделия, либо имитирующего устройства, либо на специальном стенде с помощью тестов) фиксируются времена обнаружения ошибок в программе. Результаты проверки обрабатываются при следующих предположениях:

- 1) ошибки программы независимы. Каждый раз после обнаружения они устраняются и в дальнейшем не проявляются;
- 2) интенсивность ошибок уменьшается по мере их обнаружения и устранения ступенчато, как показано на рис. 8.1.

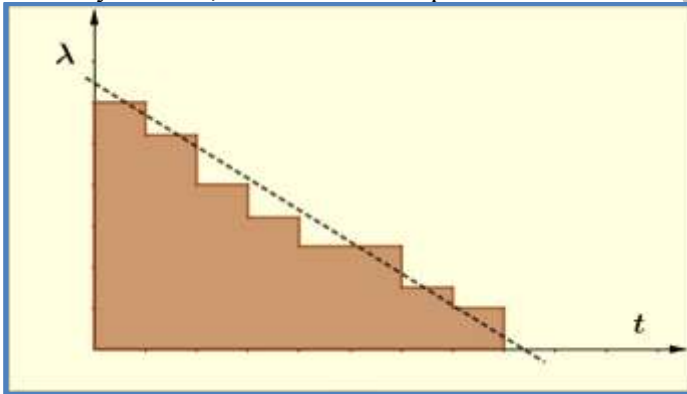


Рис. 8.1. Характерное изменение числа программных ошибок во времени

Статистическая интенсивность программных λ ошибок определяется так же, как интенсивность аппаратных отказов выражением:

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{\Delta n(t)}{\Delta t \cdot n(t)}, \quad (8.1)$$

где $n(t)$ - число идентичных программ, не отказавших к моменту времени t ; $\Delta n(t)$ - число отказавших идентичных программ на интервале $(t, t + \Delta t)$.

Выявление и устранение ошибок производится до тех пор, пока значение $\tilde{\lambda}(t_n)$ будет меньше заданного значения, которое задается с учётом требований к надёжности изделия. Ориентировочно можно исходить из того, что интенсивность программных ошибок (8.1), приводящих к отказу, на этапе отладочных испытаний должна быть не больше интенсивности аппаратных отказов.

Влияние программных ошибок на надёжность объекта должно непрерывно уменьшаться по мере освоения программ (разработка -

отладка - опытная эксплуатация - нормальная эксплуатация) так, чтобы на этапе нормальной эксплуатации объекта программная надёжность его была на уровне заданных требований.

8.3. Основные проблемы исследования надёжности программного обеспечения

В сложной программно управляемой технической системе любого типа можно выделить две основные, относительно независимые части.

1) Совокупность автономно, параллельно работающих технических схем и устройств - аппаратная часть.

2) Совокупность программ, ориентированных на решение данного комплекса задач, представляющих математическое обеспечение технической системы и образующих её программную часть (операционная система и рабочие программы пользователей).

При общем анализе характеристик технической системы (её надёжности) следует учитывать, что если аппаратная часть жестко задана, неизменна и её надёжность может быть обеспечена на требуемом уровне, то программная часть в каждом отдельном случае может иметь ряд модификаций, является достаточно гибкой, изменяемой частью технической системы и в обеспечении совокупной надёжности системы определяет наибольшее количество ошибок.

Исследователи считают, что в настоящее время около половины отказов сложных вычислительных систем обусловлено ошибками программ, а с ростом надёжности элементной базы число отказов, связанных с математическим обеспечением, возрастает до 90 % от общего числа отказов. К основным проблемам исследования надёжности программного обеспечения (ПО) относится:

1) разработка методов оценки и прогнозирования надёжности ПО на основе совокупности количественных показателей и характеристик, идентичных показателям аппаратурной надёжности;

2) определение факторов, влияющих на достижение заданного уровня надёжности ПО;

3) разработка методов, обеспечивающих достижение заданного уровня надёжности ПО;

4) совершенствование методов повышения надёжности ПО в процессе проектирования и эксплуатации.

Эффективный способ повышения надёжности ПО - использование методов структурного проектирования программ.

8.4. Критерии оценки надёжности программных изделий

Всё множество различных показателей надёжности программных систем можно разбить на две большие группы:

количественные показатели надёжности ПО;

качественные показатели надёжности ПО.

Остановимся подробно на использовании количественных показателей для оценки и прогнозирования надёжности ПО.

Наиболее часто в качестве таких показателей используют статистические критерии хорошо разработанной теории надёжности радиоэлектронной аппаратуры. Следует учитывать, что оценка надёжности ПО на основе статистической теории надёжности аппаратуры возможна в пределах некоторых ограничений, учитывающих специфику ПО как определённого вида продукта человеческого труда. Можно выделить следующие характеристики и количественные показатели надёжности ПО.

8.5. Безотказность

Говоря о безотказности ПО, характеризующей способность ПО выполнять заданные функции в заданных условиях эксплуатации технической системы, будем считать, что отказ программы — это результат проявления скрытой ошибки. Следует иметь в виду, что входные данные и данные, создаваемые программой, не являются элементами ПО, поскольку их надёжность связана с работой внешних устройств и аппаратной части системы. Только константы, вводимые программистом, считаются частью ПО. Для невозможности восстановления в ходе эксплуатации программ обобщённой характеристикой надёжности (безотказности) является вероятность безотказной работы $P(t)$, характеризующая вероятность того, что за время t отказа не произойдёт:

$$P(t) = P(\tau \geq t) = 1 - Q(t), \quad (8.2)$$

где τ - время работы ПО до отказа (τ - случайная величина); $Q(t)$ - вероятность отказа ПО. Из последнего выражения определяется функция интенсивности (опасности) отказов:

$$\lambda(t) = \frac{d \ln P(t)}{dt}. \quad (8.3)$$

Среднее время наработки до наступления отказа (среднее время безотказной работы) определяется как математическое ожидание временного интервала между двумя последовательными нарушениями работоспособности ПО:

$$m_{\tau} = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (8.4)$$

Для экспоненциального закона распределения отказов:

$$P(t) = e^{-\lambda t}; m_{\tau} = \frac{1}{\lambda}. \quad (8.5)$$

Поскольку программы имеют явно выраженные производственные циклы работы, то наработка программы может быть выражена либо через календарное время, либо через машинное время, либо через количество отработанных операторов, решённых задач и т.п.

Один из способов оценки m_{τ} - наблюдение за поведением программы в определённый временной период. Тогда величину среднего времени между отказами (сбоями) ПО можно определить так:

$$m_{\tau} = \frac{1}{\lambda} = \frac{H}{n - r}, \quad (8.6)$$

где H - общее количество часов успешного прогона программы, определяемое по формуле:

$$H = \sum_{i=1}^r T_i - \sum_{j=1}^n t_j, \quad (8.7)$$

где T_i - время непрерывного прогона в часах безошибочной работы ПО; n - общее количество прогонов ПО; r - количество прогонов ПО без ошибок; $l = n - r$ - количество прогонов с ошибками; t_j - время прогона в часах до проявления ошибки ПО.

Полагая количество ошибок постоянным, можно вычислить интенсивность отказов ПО, приведённую к одному часу работы $\lambda^{(l)}$, и среднее время между соседними отказами ПО.

$$\lambda^{(l)} = \frac{n - r}{H} = \frac{l}{H}, m^{(l)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{H}{l} \quad (8.8)$$

Классифицируя отказы программного обеспечения по видам отказов - аппаратные, программные, оператора и т.д., можно определить частные (взвешенные) интенсивности отказов по соответствующим видам ошибок - $\lambda_{\text{ап}}^{(l)}$, $\lambda_{\text{пр}}^{(l)}$, $\lambda_{\text{оп}}^{(l)}$ и т.д., а общая надёжность

определяется как сумма таких интенсивностей. Такой подход может значительно облегчить сбор статистических данных по соответствующим видам отказов на основе независимого анализа программных изделий различных типов.

В случае, если в ходе эксплуатации возможна корректировка программного обеспечения или восстановление программы после отказа, вызванного действием помех (сбоев) от внепрограммных источников, а время восстановления достаточно мало по сравнению с временем между отказами или сбоями, обобщающей характеристикой безотказности ПО является интенсивность потока отказов во времени $\omega(t)$

$$\omega(t) = \frac{dH(t)}{dt}, T_{\omega} = \frac{t}{H(t)}, \quad (8.9)$$

где $H(t)$ - среднее число отказов за время t ; T_{ω} - среднее время наработки между двумя отказами.

Для программ, время корректировки которых сравнимо с временем между отказами, обобщающей характеристикой безотказности является функция коэффициента готовности $k_r(t)$ в зависимости от времени. Показатель готовности характеризует вероятность застать систему в заданный момент времени в работоспособном состоянии.

8.6. Устойчивость

Устойчивость ПО определяет способность системы выполнять заданные функции в условиях действия помех (ошибок, сбоев, отказов), возникающих во внепрограммных источниках (техническое обеспечение, исходные данные). При оценке устойчивости ПО должны быть заданы параметры окружающей среды, по отношению к которой оценивается устойчивость программ.

Показатели устойчивости — это показатели безотказности, но с использованием условных вероятностей. Условием, при котором вычисляются вероятности, является отказ (сбой) в программе или аппаратуре.

Для невозстанавливаемых (некорректируемых) программ обобщённым показателем устойчивости служит условная вероятность безотказной работы:

$$P_y(t) = P(\tau \geq t) \cdot P(A),$$

где $P(A)$ - вероятность ошибки (сбоя) программы или отказа аппаратуры.

Безотказность и устойчивость - динамические характеристики, то есть они характеризуют надёжность ПО в процессе работы.

8.7. *Корректируемость*

Этот показатель надёжности ПО аналогичен показателю ремонтпригодности радиоэлектронной аппаратуры, характеризует приспособленность ПО к поиску и устранению ошибок и внесению в него изменений в ходе эксплуатации. Он используется для характеристики восстанавливаемых в ходе эксплуатации программ.

Показатели корректируемости: время корректировки T_k , вероятность корректировки программы за заданное время $P_k(t)$, коэффициент готовности k_r , параметр потока корректировок $\omega_k(t)$.

8.8. *Защищённость и долговечность*

Дополнительными характеристиками надёжности ПО являются: показатель защищённости от посторонних вмешательств в работу ПО и показатель долговечности, характеризующий свойства программ избегать морального старения при длительном использовании. Защищённость характеризуется вероятностью внесения искажений при постороннем вмешательстве, а долговечность – временем отказа ПО вследствие морального старения. В зависимости от условий применения ПО можно выделить три режима (типа) его работы.

1. Программа не корректируется, и любой отказ является полным, т.е. после отказа ПО не восстанавливается. Основные показатели надёжности для этого режима работы программ - безотказность, устойчивость и защищённость.

2. Программа не корректируется, однако после отказа ПО система продолжает функционировать нормально. Основные показатели надёжности - безотказность, устойчивость, защищённость и долговечность.

3. После каждого отказа ПО корректируется, отлаживается и только после этого снова сдаётся в эксплуатацию. Основные показатели надёжности - безотказность, устойчивость, корректируемость, защищённость, а также потери времени.

8.9. *Критерии надёжности программных комплексов*

Для оценки надёжности программ, как и при исследовании характеристик аппаратуры, как правило, приходится ограничиваться

интегральными показателями наработки на отказ и средним временем восстановления. Определение остальных показателей сопряжено с большими трудностями, которые обусловлены тем, что для определения показателей надёжности комплексов программ необходимы длительные эксперименты или сложные расчёты при определённых исходных данных. Оценка достоверности результатов и надёжности функционирования комплекса программ представляет собой сложную задачу из-за “эффекта размерности”. Естественными становятся статистический подход к анализу надёжности функционирования и статистическая оценка достоверности результатов. Качество отладки определяется интенсивностью (частотой) отказов и значениями ошибок в выходных результатах, полученных за счёт невыявленных ошибок в программах и искажений исходных данных. Интенсивность (частота) отказов в комплексе программ определяется как частота проявления ошибок в комплексе программ.

Точное определение полного количества ошибок в программе прямыми методами измерения невозможно. Имеются только косвенные пути статистической оценки их полного количества. Такие оценки базируются на построении математических моделей в предположении жёсткой корреляции между общим количеством и проявлениями ошибок в комплексе программ после его отладки в течение времени τ , т.е. между следующими параметрами:

суммарным количеством ошибок n_0 в комплексе программ;

количеством ошибок, выявляемых в единицу времени $\frac{dn}{dt}$ в процессе тестирования и отладки при постоянных усилиях на их проведение; интенсивностью отказов λ или числом искажений результатов на выходе комплекса программ вследствие невыявленных ошибок при нормальном функционировании системы в единицу времени.

На рис.8.2 показаны зависимости n_0 , $\frac{dn}{dt}$ и λ от времени отладки (масштабы по оси ординат не совпадают).

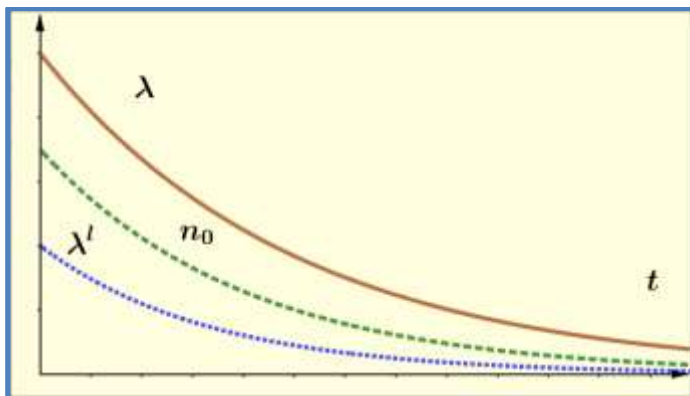


Рис. 8.2. Примерные изменения интенсивности отказов, оставшихся не исправленных ошибок и частной интенсивности отказов

8.10. Математические модели надежности программных комплексов

Математические модели позволяют оценивать характеристики ошибок в программах и прогнозировать надёжность программ при проектировании и эксплуатации. Модели имеют вероятностный характер, и достоверность прогнозов зависит от точности исходных данных и длительности прогнозирования по времени. Эти математические модели предназначены для оценки [5, 6]:

- 1) показателей надёжности комплексов программ в процессе отладки;
- 2) количества ошибок, оставшихся невыявленными;
- 3) времени, необходимого для обнаружения следующей ошибки в функционирующей программе;
- 4) времени, необходимого для выявления всех ошибок с заданной вероятностью.

Использование моделей позволяет эффективно и целеустремлённо проводить отладку и испытания комплексов программ, помогает принять рациональное решение о времени прекращения отладочных работ. В настоящее время предложен ряд математических моделей, основными из которых являются:

- 1) экспоненциальная модель изменения ошибок в зависимости от времени отладки;

- 2) модель, учитывающая дискретно понижающуюся частоту появления ошибок как линейную функцию времени тестирования и испытаний;
- 3) модель, базирующаяся на распределении Вейбулла;
- 4) модель, основанная на дискретном гипергеометрическом распределении.

При обосновании математических моделей выдвигаются некоторые гипотезы о характере проявления ошибок в программах.

8.11. Экспоненциальная модель

Основные предположения, на которых базируется первая экспоненциальная модель (модель Джелинского – Моранды) изменения ошибок в процессе отладки заключаются в следующем [6].

1. Любые ошибки в программе являются независимыми и проявляются в случайные моменты времени.
2. Интенсивность программных отказов на интервале времени между отказами программы является постоянной и пропорциональной числу ошибок, остающихся в программе.
3. Время работы между ошибками определяется средним временем выполнения команды на данной ЭВМ и средним числом команд, исполняемым между ошибками. Это означает, что интенсивность проявления ошибок при реальном функционировании программы зависит от среднего быстродействия ЭВМ.
4. Выбор отладочных тестов должен быть представительным и случайным, с тем чтобы исключить концентрацию не обнаруженных ошибок для некоторых реальных условий функционирования программы.
5. Ошибка, являющаяся причиной искажения результатов, фиксируется и исправляется после завершения тестирования либо вообще не обнаруживается.

Из этих предположений следует, что в условиях эксплуатации количество ошибок, проявляющихся в некотором интервале времени, распределено по закону Пуассона: длительность непрерывной работы между ошибками распределена экспоненциально.

Пользуясь этими положениями, построим модель надежности. Предположим, что в начале отладки программного комплекса при $t = 0$ в нём содержалось N_0 ошибок. В последовательные моменты времени работы в программе произошли ошибки, после которых

устранялась одна ошибка и программа вновь запускалась на отладку. Интенсивность первого отказа определяется выражением $\lambda_1(t) = k \cdot N_0$. После первого отказа и устранения ошибки, интенсивность второго отказа уменьшилась и стала равной величине $\lambda_2(t) = k \cdot (N_0 - 1)$ и так далее. Здесь k – некоторый коэффициент. В общем случае интенсивность i отказа равна

$$\lambda_i(t) = k \cdot (N_0 - (i - 1)).$$

Этой интенсивности отказов соответствуют функция надежности i -го отказа

$$P_i(t) = e^{-\int_0^t k \cdot (N_0 - (i-1)) d\tau} = e^{-k \cdot (N_0 - (i-1))t};$$

функция распределения i -го отказа

$$F_i(t) = 1 - P_i(t) = 1 - e^{-k \cdot (N_0 - (i-1))t}$$

и плотность распределения i -го отказа

$$f_i(t) = k(N_0 - (i - 1))e^{-k(N_0 - (i-1))t}.$$

Для $i = N_0 + 1$ получаем $F_{N_0} \equiv 1$ – абсолютно надежную программу. Нетрудно получить интерпретацию коэффициента k . Если $i = 1$, тогда $P_1(t) = e^{-kN_0t}$. Экспоненциальная модель надежности (см. с.10) приводит к выражению $T_0 = \frac{1}{kN_0}$ – среднему времени жизни полностью не отлаженной программы или $k = \frac{1}{N_0T_0}$.

Пользуясь предположением 5, получаем баланс изменения количества ошибок в программе:

$$\frac{dn}{dt} = k \cdot (N_0 - n). \quad (8.10)$$

Решение уравнения (8.10) имеет вид

$$n(t) = N_0(1 - e^{-kt}).$$

Количество оставшихся ошибок в комплексе программ

$$n_0(t) = N_0 - n(t) = N_0 e^{-kt}$$

пропорционально интенсивности обнаружения $\frac{dn}{dt}$ с точностью до коэффициента k . Время безотказной работы программ до отказа T или наработка на отказ, который рассматривается как обнаруживаемое искажение программ, данных или вычислительного процесса, нарушающее работоспособность, равно величине, обратной интенсивности обнаружения отказов (ошибок):

$$T = \frac{1}{\frac{dn}{dt}} = \frac{1}{kN_0} e^{kt}.$$

Если учесть, что до начала тестирования в комплексе программ содержалось N_0 ошибок и этому соответствовала наработка на отказ T_0 , то функцию наработки на отказ от длительности проверок можно представить в следующем виде:

$$T = T_0 e^{\frac{t}{N_0 T_0}}. \quad (8.11)$$

Если известны моменты обнаружения ошибок t_i и каждый раз в эти моменты обнаруживается и достоверно устраняется одна ошибка, то, зная плотности распределения

$$f_i(t_i) = k(N_0 - (i - 1))e^{-k(N_0 - (i - 1))t_i},$$

получаем функцию правдоподобия:

$$L(N_0, k) = k^n \prod_{i=1}^n (N_0 - (i - 1)) \exp\left(-k \sum_{i=1}^n (N_0 - (i - 1))t_i\right),$$

дифференцируя которую по параметрам N_0 и k , получаем уравнения правдоподобия для определения оценок начального числа ошибок N_0 и коэффициента пропорциональности k :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{N_0 - (i - 1)} = \frac{n \sum_{i=1}^n t_i}{N_0 \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n (i - 1)t_i}, \quad (8.12)$$

$$k = \frac{n}{N_0 \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n (i - 1)t_i}.$$

В результате можно рассчитать число оставшихся в программе ошибок и среднюю наработку на отказ $T = T_0 e^{\frac{t}{N_0 T_0}}$, т.е. получить оценку времени до обнаружения следующей ошибки.

В процессе отладки и испытаний программ для повышения наработки на отказ от T_1 до T_2 необходимо обнаружить и устранить Δn ошибок. Величина Δn определяется соотношением:

$$\Delta n = N_0 T_0 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right),$$

которое определяет время затрат Δt на проведение отладки, которая позволяют устранить Δn ошибок и соответственно повысить наработку на отказ от значения T_1 до T_2 и имеет вид:

$$\Delta t = \frac{N_0 T_0}{k} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

8.12. Модель дискретно понижающей частоты появления ошибок

Вторая модель построена на основе гипотезы о том, что частота проявления ошибок (интенсивность отказов) линейно зависит от времени испытания t_i между моментами обнаружения последовательных $(i - 1)$ -й и i -й ошибок

$$\lambda(t_i) = -k(N_0 - (i - 1))t_i,$$

где N_0 - начальное количество ошибок; k - коэффициент пропорциональности, обеспечивающий равенство единице площади под кривой вероятности обнаружения ошибок.

Для оценки наработки на отказ получается выражение, соответствующее распределению Релея:

$$P(t_i) = e^{-k \frac{(N_0 - (i-1))t_i^2}{2}},$$

где $P(t_i) = P(\tau \geq t_i)$. Отсюда плотность распределения времени наработки на отказ

$$f(t_i) = -\frac{dP(t_i)}{dt} = k(N_0 - (i - 1))t_i e^{-k \frac{(N_0 - (i-1))t_i^2}{2}}.$$

Используя функцию максимального правдоподобия, получим оценку для общего количества ошибок N_0 и коэффициента k :

$$N_0 = \left(\frac{2n}{k} + \sum_{i=1}^n (i - 1)t_i^2 \right) \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^2}, k = \left(\sum_{i=1}^n \frac{2}{N_0 - (i - 1)} \right) \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^2}.$$

8.13. Модель программной надежности Вейбулла

Особенностью третьей модели является учёт ступенчатого характера изменения надёжности при устранении очередной ошибки. В качестве основной функции рассматривается распределение времени наработки на отказ $P(t)$. Если ошибки не устраняются, то интенсивность отказов является постоянной, что приводит к экспоненциальной модели для распределения:

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Отсюда плотность распределения наработки на отказ τ определяется выражением:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

где $t > 0$, $\lambda > 0$ и $\frac{1}{\lambda}$ - среднее время наработки на отказ, т.е. $T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda}$.

Для аппроксимации изменения интенсивности от времени при обнаружении и устранении ошибок используется функция следующего вида:

$$\lambda(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}.$$

Если $0 < \beta < 1$, то интенсивность отказов снижается по мере отладки или в процессе эксплуатации. При таком виде функции $\lambda(t)$ плотность функции распределения наработки на отказ описывается двухпараметрическим распределением Вейбулла:

$$f(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} e^{-\lambda t^{\beta}}.$$

Распределение Вейбулла достаточно хорошо отражает реальные зависимости при расчёте функции наработки на отказ.

8.14. Проверка математических моделей

Обоснование адекватности, в основном первой и второй математических моделей, проверяется статистическими испытаниями. Контролировались и обрабатывались экспериментальные данные интенсивности обнаружения ошибок $\frac{dn}{dt}$ на фиксированном интервале времени, количества обнаруженных ошибок n или наработки на отказ τ в зависимости от времени функционирования программ на вычислительной системе. Характеристики, полученные расчётами с использованием математических моделей, сопоставлялись с полученными экспериментальными значениями и применялись для прогнозирования показателей с последующим анализом отклонений от экспериментальных данных.

Пример 8.1. В предположении, что справедлива экспоненциальная надёжность программы, найти оценки параметров модели, если известны моменты отказов (см. табл. 8.1).

Таблица 8.1

Моменты отказов программы

i	t_i , ч	i	t_i , ч	i	t_i , ч
1	22	8	160	14	644
2	34	9	165	15	742
3	49	10	191	16	744

Окончание табл. 8.1

4	67	11	301	17	898
5	90	12	443	18	995
6	99	13	534	19	1027
7	133				

Решение. Первая ошибка в программе была обнаружена через 22 часа после начала тестирования. Ошибка была исправлена. Программа повторно выставлена на тестирование, и вторая ошибка произошла через 34 часа. Ошибка вновь исправлена, программа вновь запущена. Всего было зарегистрировано 19 ошибок.

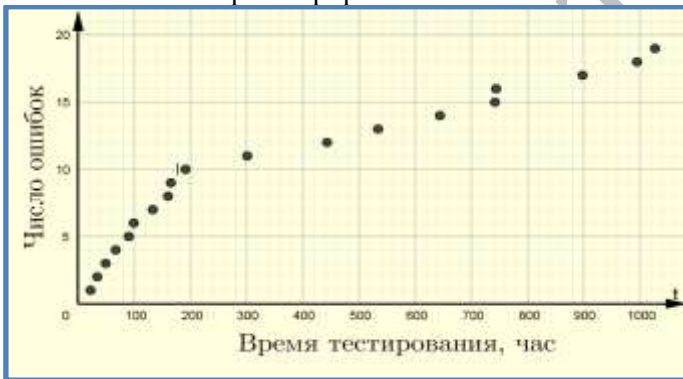


Рис. 8.3. Нарботка на отказ T_0 в зависимости от количества обнаруженных ошибок n (точки - экспериментальные данные; кривая соответствует первой модели)

Модель надёжности предполагает, что скорость изменения числа ошибок пропорциональна количеству оставшихся ошибок в программе в произвольный момент времени. Поэтому воспользуемся (8.10) для определения параметров модели N_0 – первоначального количества ошибок в модели и коэффициента пропорциональности k . Метод максимального правдоподобия приводит к необходимости последовательного решения нелинейных уравнений (8.12). Первоначально решается первое уравнение. Точечная оценка параметра N_0 – первоначального количества ошибок в программе равна $\hat{N} = 82$. Подстановка этой оценки во второе уравнение (8.12) позволит определить и оценку второго параметра $\hat{k} = 3.8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ч}}$.

Точечная оценка параметра T_0 – наработка на отказ при условии того, что программа содержит $\hat{N}_0 = 82$, равна $\hat{T}_0 = \frac{1}{\hat{k} \cdot \hat{N}_0} = 321.95$ ч.

Библиографический список

1. Теория вероятностей: учебник для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 2-е изд. - М.: Изд-во МГТУ, 2001.
2. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М., Тескин О.И. Математическая статистика: учебник для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 2-е изд., стереотип. - М.: Изд-во МГТУ, 2002.
3. ГОСТ Р 27.003-2011. Надежность в технике (ССНТ). Управление надежностью. Руководство по заданию технических требований к надежности.
4. ГОСТ Р ИСО/МЭК 9126-93. Оценка программной продукции. Характеристики качества и руководства по их применению. – М.: Изд-во стандартов, 2004. – 9 с.
5. Майерс Г. Надежность программного обеспечения / под ред. В.Ш. Кауфмана; пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 348 с.
6. Шишмарев В.Ю. Надежность технических систем: учебник для студ. высш. учеб. заведений / В.Ю. Шишмарев. — М.: Издательский центр «Академия», 2010. — 304 с.

И л ь и н Михаил Евгеньевич

Основы теории надежности

Редактор М.Е. Цветкова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 25.06.20. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,0.

Тираж 30 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.