

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА

$$\sin x = a$$

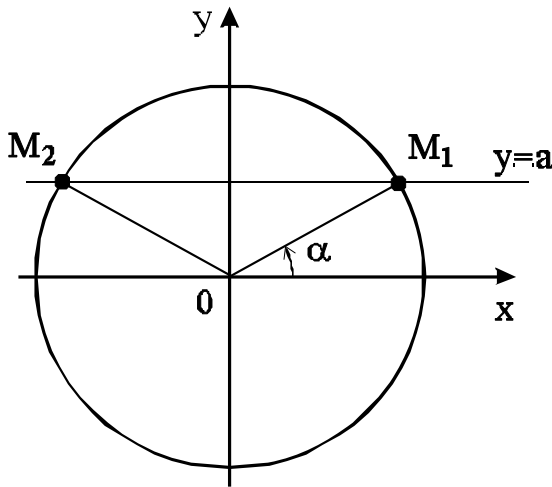


Рис. 14.1

Так как областью значений функции $y = \sin x$ является отрезок $[-1; 1]$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет решений при $|a| > 1$.

Пусть $|a| \leq 1$. Так как $\sin x$ - ордината точки единичной окружности для угла x , отсчитываемого от начального радиуса, то для решения уравнения $\sin x = a$ на окружности найдем точки пересечения прямой $y = a$ с окружностью. Если $|a| < 1$, то прямая пересекает окружность в двух точках M_1 и M_2 , которые симметричны относи-

тельно оси OY (рис.14.1). Числа $x_1 = \alpha$ и $x_2 = \pi - \alpha$ являются решениями уравнения $\sin x = a$. Так как $\sin x$ является периодической функцией с периодом 2π , то точкам M_1 и M_2 на числовой оси соответствует бесконечное множество решений, удаленных друг от друга на 2π : $x = \alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi - \alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для одного решения вводится специальное название – арксинус.

Определение. Арксинусом числа a ($|a| \leq 1$) называется такой угол α , принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Обозначение: $\alpha = \arcsin a$.

Таким образом, равенство $\alpha = \arcsin a$ равносильно двум условиям:

$$1) \sin \alpha = a \quad \text{и} \quad 2) -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

Теперь две серии решений уравнения $\sin x = a$ ($|a| \leq 1$) можно записать так:

$$\begin{aligned} x &= \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x &= \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Эти формулы можно объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При $k = 2n$ (четном k) получаем первую серию решений

$$x = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При $k = 2n + 1$ (нечетном k) получаем вторую серию решений

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $a = 1$, то уравнение $\sin x = 1$ имеет только одну серию решений

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $a = -1$, то уравнение $\sin x = -1$ имеет только одну серию решений

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В этом случае прямая $y = 1$ (или $y = -1$) касается окружности, и точки M_1 и M_2 совпадают.

Если $a = 0$, то решением уравнения $\sin x = 0$ будет множество точек $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\cos x = a$

Так как областью значений функции $\cos x$ является отрезок $[-1; 1]$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет решений при $|a| > 1$.

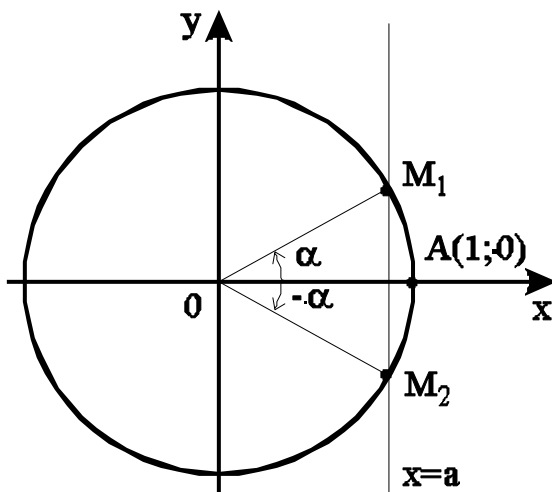


Рис. 15.1

Пусть $|a| \leq 1$. Так как $\cos x$ - абсцисса точки единичной окружности для угла x , отсчитываемого от начального радиуса, то для решения уравнения $\cos x = a$ найдем точки пересечения прямой $M_1 M_2$ с окружностью.

Если $|a| < 1$, то прямая $x = a$ пересекает окружность в двух точках M_1 и M_2 (рис.15.1), которые симметричны относительно оси ОХ. Числа $x_1 = \alpha$ и $x_2 = -\alpha$ являются решениями уравнения $\cos x = a$.

Так как $\cos x$ является периодической функцией с периодом 2π , то точкам M_1 и M_2 соответствуют на числовой оси бесконечное множество решений, отстоящих друг от друга на 2π :

$$x = \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Вместо этих двух формул обычно пользуются одной: $x = \pm \alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для одного решения уравнения $\cos x = a$ вводится специальное название – арккосинус.

Определение. Арккосинусом числа a ($|a| \leq 1$) называется такой угол α , принадлежащий отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Обозначение: $\alpha = \arccos a$.

Таким образом, равенство
условиям:

$\alpha = \arccos a$ равносильно двум

$$1) \cos \alpha = a \quad \text{и} \quad 2) 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Теперь решения уравнения $\cos x = a$ можно записать так:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $a = 1$, то уравнение $\cos x = 1$ имеет решения $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $a = -1$, то уравнение $\cos x = -1$ имеет решения $x = \pi + 2\pi n = \pi(2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

В этом случае прямая $x = 1$ или $x = -1$ касается окружности, и точки M_1 и M_2 совпадают.

Если $a = 0$, то решением уравнения $\cos x = 0$ находится по формуле:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\operatorname{tg} x = a$

Поскольку область значений $\operatorname{tg} x$ - вся числовая прямая, то уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решение при любом значении a .

Построим единичную окружность и проведем линию тангенсов (рис.16.1). Пусть $a > 0$. Отложим на линии тангенсов отрезок $AB = a$ в положительном направлении оси OY (в положительном, так как $a > 0$). Проведем через точку B и точку O - начало координат - прямую. Обозначим через α угол между OB и OA . Из прямоугольного треугольника OAB и определения тангенса угла следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{a}{1} = a. \quad \text{Таким образом, } x_1 = \alpha \text{ является решением уравне-}$$

ния $\operatorname{tg} x = a$. Решением этого уравнения будет и $x_2 = \pi + \alpha$, поскольку

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Для записи решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ вводят понятия арктангенса числа a .

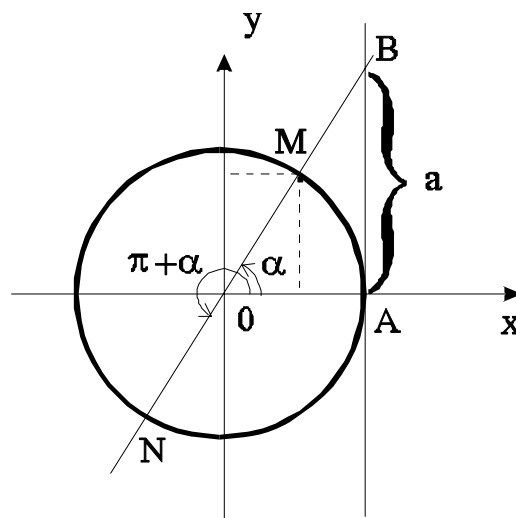


Рис. 16.1

Определение. Арктангенсом числа a называется такой угол α , принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

Обозначается этот угол $\operatorname{arctg} a$, т.е. $x = \operatorname{arctg} a$ и по определению

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} a) = a.$$

Используя введенное понятие арктангенса угла решения $x_1 = \alpha$ и $x_2 = \pi + \alpha$ уравнение $\operatorname{tg} x = a$ можно записать $x_1 = \operatorname{arctg} a$ и $x_2 = \operatorname{arctg} a + \pi$.

С учетом периодичности функции $\operatorname{tg} x$ получаем два множества решений (две серии решений) $x_1 = \operatorname{arctg} a + 2\pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg} a + \pi + 2\pi m$; $m, n \in \mathbb{Z}$, каждое из которых отвечает точкам M и N соответственно на единичной окружности (рис.16.1). Эти множества решений можно объединить в одну формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радио-техн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.