

Студенческая математическая олимпиада РГРТУ.

27 февраля 2021 года.

1. В параболу $y = x^2$ вписана окружность максимального радиуса, касающаяся параболы в точке $(0,0)$. Вторая окружность вписана в параболу и касается первой окружности, третья вписана в параболу и касается второй окружности и т.д. Найти радиус и центр 2021-ой окружности.

2. В матрице A_{2n} размером все элементы главной диагонали равны 5, все элементы побочной диагонали равны 4, а все остальные элементы равны 0. Вычислить $\det(A_{2n})$.

3. Определить параметр a так, чтобы выполнялось равенство:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 - ax}) = 1.$$

4. Найти x , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2020}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2021}$.

5. Вычислить интеграл: $\int_0^{2020} \sqrt{1 + \cos(2\pi x)} dx$.

6. Вычислить интеграл: $\int_{2020}^{2022} \frac{\sqrt{\ln(4042-x)}}{\sqrt{\ln(4042-x)} + \sqrt{\ln x}} dx$.

7. Решить дифференциальное уравнение: $\frac{dy}{dx} \frac{\cos t dt}{16 + 9 \sin^2 t} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} x$.

8. Динамика противостояния двух армий описывается системой:

$$\begin{cases} x' = ay, & a > 0, \\ y' = bx, & b > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, & x_0 > 0, \\ y(0) = y_0, & y_0 > 0, \end{cases}$$

$x(t)$, $y(t)$ – численность армий. При каких условиях на параметры a , b , x_0 , y_0 победит первая армия (т.е. численность второй армии $y(t)$ превратится в ноль при некотором $t > 0$).

9. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+2020}}{4n^2-1}$, где x – удовлетворяет уравнению $x^2 + x + 1 = 0$.

10. Известно, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

11. Колонна военнослужащих пешим порядком совершает марш от пункта А до пункта В с постоянной скоростью. Каждые 14 минут она встречает БМП, идущий ей навстречу от пункта В, и каждые 7 минут колонну обгоняет БМП, идущий от пункта А. Скорость движения колонны составляет $1/14$ скорости БМП, которая постоянна для всех машин на этом участке дороги. Каков временной интервал движения попутных машин через пункт А и встречных машин через пункт В?

12. Для выполнения задач по предназначению начальником войск РХБЗ защиты объединения было организовано три радиосети, которые работали в течение двух часов с момента развертывания пункта управления и до момента смены его района сосредоточения.

Первая радиосеть из каждой пятиминутки работала первую, вторую и третью минуты. Вторая радиосеть на каждом семиминутном интервале работала четвертую и пятую минуты, третья радиосеть на каждом временном интервале в девять минут работала третью и четвертую минуты. Сколько минут в течение этих двух часов первая и вторая радиосети работали одновременно, а третья была «вне зоны доступа»?

Студенческая математическая олимпиада РГРТУ.

27 февраля 2021 года.

1. В параболу $y = x^2$ вписана окружность максимального радиуса, касающаяся параболы в точке $(0,0)$. Вторая окружность вписана в параболу и касается первой окружности, третья вписана в параболу и касается второй окружности и т.д. Найти радиус и центр 2021-ой окружности.

2. В матрице A_{2n} размером все элементы главной диагонали равны 5, все элементы побочной диагонали равны 4, а все остальные элементы равны 0. Вычислить $\det(A_{2n})$.

3. Определить параметр a так, чтобы выполнялось равенство:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 - ax}) = 1.$$

4. Найти x , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2020}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2021}$.

5. Вычислить интеграл: $\int_0^{2020} \sqrt{1 + \cos(2\pi x)} dx$.

6. Вычислить интеграл: $\int_{2020}^{2022} \frac{\sqrt{\ln(4042-x)}}{\sqrt{\ln(4042-x)} + \sqrt{\ln x}} dx$.

7. Решить дифференциальное уравнение: $\frac{dy}{dx} \frac{\cos t dt}{16 + 9 \sin^2 t} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} x$.

8. Динамика противостояния двух армий описывается системой:

$$\begin{cases} x' = ay, & a > 0, \\ y' = bx, & b > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, & x_0 > 0, \\ y(0) = y_0, & y_0 > 0, \end{cases}$$

$x(t)$, $y(t)$ – численность армий. При каких условиях на параметры a , b , x_0 , y_0 победит первая армия (т.е. численность второй армии $y(t)$ превратится в ноль при некотором $t > 0$).

9. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+2020}}{4n^2-1}$, где x – удовлетворяет уравнению $x^2 + x + 1 = 0$.

10. Известно, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

11. Колонна военнослужащих пешим порядком совершает марш от пункта А до пункта В с постоянной скоростью. Каждые 14 минут она встречает БМП, идущий ей навстречу от пункта В, и каждые 7 минут колонну обгоняет БМП, идущий от пункта А. Скорость движения колонны составляет $1/14$ скорости БМП, которая постоянна для всех машин на этом участке дороги. Каков временной интервал движения попутных машин через пункт А и встречных машин через пункт В?

12. Для выполнения задач по предназначению начальником войск РХБЗ защиты объединения было организовано три радиосети, которые работали в течение двух часов с момента развертывания пункта управления и до момента смены его района сосредоточения.

Первая радиосеть из каждой пятиминутки работала первую, вторую и третью минуты. Вторая радиосеть на каждом семиминутном интервале работала четвертую и пятую минуты, третья радиосеть на каждом временном интервале в девять минут работала третью и четвертую минуты. Сколько минут в течение этих двух часов первая и вторая радиосети работали одновременно, а третья была «вне зоны доступа»?