

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 332.145

С.В. Перфильев, И.Н. Логинов, О.Ю. Горбова**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ПРИМЕНЕНИЯ
ДОЛГОСРОЧНЫХ И ВЕДОМСТВЕННЫХ ЦЕЛЕВЫХ ПРОГРАММ**

Определены два подхода по вопросу взаимодействия долгосрочных и ведомственных целевых программ. Сформулированы признаки, определяющие область их эффективного применения. Предложен алгоритм изменения статуса целевых программ: долгосрочных – в ведомственные, ведомственных – в долгосрочные.

Ключевые слова: долгосрочные целевые программы, ведомственные целевые программы, область эффективного применения, взаимодействие целевых программ.

Введение. В современной концепции «нового государственного управления», также именуемой в литературе как «новый государственный менеджмент» (New Public Management – NPM) [8], центральным системообразующим элементом является ориентация на достижение результата с помощью новых форм руководства обществом. Программно-целевой подход в государственном управлении осуществляется через формирование и реализацию целевых программ. В России в настоящее время Бюджетным кодексом определены два вида таких программ: долгосрочные (ДЦП) и ведомственные целевые программы (ВЦП).

Однако определения, которые дает Бюджетный кодекс, а также постановление Правительства РФ № 239 «Об утверждении Положения о разработке, утверждении и реализации ведомственных целевых программ» [1] не позволяют провести четкие границы между программами, а соответственно и сформулировать область их эффективного применения. Это, в свою очередь, порождает неопределенность в разграничении проблем и вопросов, решаемых с помощью ДЦП и ВЦП, что, в свою очередь, приводит к появлению различных трактовок и подходов к пониманию различий и условий применения того или иного вида программ [см., напр., 6, 7, 9, 5 и др.].

Целью настоящей публикации является попытка сформулировать основные различия между ведомственными целевыми программами и долгосрочными целевыми программами и тем

самым определить область их эффективного применения.

Теоретические исследования. В [6] в качестве принципиальных отличий целевых программ отмечаются следующие:

- уровень утверждения (ВЦП утверждаются ведомственными приказами, а ДЦП – нормативно-правовыми актами более высокого порядка);
- узкоотраслевая направленность (реализация ВЦП происходит в пределах полномочий одного ведомства, ДЦП – нескольких);
- подход к отражению расходных обязательств (ВЦП не может порождать новые расходные обязательства, ДЦП – может).

В [9] к перечисленным отличиям добавляют также такой критерий, как содержание программной деятельности и мероприятий. ДЦП должна включать крупные по объему и требующие длительных сроков реализации инвестиционные, научно-технические и (или) структурные проекты, ВЦП – объединять расходы на предоставление услуг, реализацию менее крупных проектов. Но при этом ДЦП рассматривается как способ получения дополнительных ресурсов под новые направления расходов. Для ВЦП, напротив, расходы представляют собой действующие обязательства субъектов бюджетного планирования, следовательно, ведомственные программы могут выступать лишь как инструмент оптимизации регулярной деятельности.

Исследователи Института реформирования общественных финансов в [7] отмечают, что

долгосрочные целевые программы являются инструментом экономической политики, а ведомственные - инструментом бюджетного управления (планирования, отчета, анализа) органов исполнительной власти соответствующего уровня.

В проекте Программы повышения эффективности бюджетных расходов [5] среди основных принципов разработки и реализации ДЦП отмечены:

- установление для ДЦП, как правило, измеримых результатов двух типов: конечных результатов, характеризующих удовлетворение потребностей внешних потребителей, и непосредственных, характеризующих объемы и качество оказания государственных услуг, прогнозируемых при заданных внешних условиях;

- планирование и использование бюджетных ассигнований на исполнение ДЦП в форме бюджетных ассигнований на исполнение ведомственных целевых программ, связанных с ДЦП и направленных на достижение непосредственных результатов деятельности соответствующего органа исполнительной власти;

- определение органа исполнительной власти, отвечающего за реализацию долгосрочной целевой программы (достижение конечных результатов), и органов, реализующих входящие в ее состав ведомственные целевые программы (достижение непосредственных результатов).

Анализ теоретических публикаций и применяемых нормативно-правовых актов [см., напр., 1, 3, 2, 4, 6 и др.] позволяет сделать вывод о том, что на сегодня имеются два основных подхода к видению долгосрочных и ведомственных целевых программ как основных инструментов экономической и бюджетной политики:

1) долгосрочные целевые программы и ведомственные целевые программы - два самостоятельных инструмента планирования;

2) ведомственные целевые программы - составные части долгосрочных целевых программ.

Основные различия в подходах к пониманию ВЦП и ДЦП приведены в таблицах 1, 2.

Таблица 1 - Различия в подходах по применению долгосрочных и ведомственных целевых программ

Сравнительный признак	Подход 1. ДЦП и ВЦП – самостоятельные документы
Взаимосвязь программ при утверждении	Отсутствует. ДЦП и ВЦП утверждаются независимо друг от друга

Продолжение таблицы 1

Уровень исполнения	ДЦП и ВЦП могут реализовываться как одним ведомством, так и несколькими
Планирование бюджетных ассигнований	Осуществляется отдельно для ДЦП и ВЦП
Необходимость координации реализации программ	Существует
Определение результатов	Конечные результаты (цели) ДЦП и ВЦП определяются раздельно
Проблема дублирования	Необходимы специальные механизмы по исключению дублирования
Иерархичность программ	Иерархии нет

Таблица 2 - Различия в подходах по применению долгосрочных и ведомственных целевых программ

Сравнительный признак	Подход 2. ВЦП – часть ДЦП
Взаимосвязь программ при утверждении	Существует. ВЦП утверждается в соответствии с целью ДЦП и в пределах общего объема ассигнований на ее достижение
Уровень исполнения	ДЦП реализуется несколькими ведомствами, ВЦП – только одним ведомством
Планирование бюджетных ассигнований	Планирование бюджетных ассигнований для ДЦП осуществляется в форме бюджетных ассигнований на исполнение ВЦП, входящих в состав ДЦП
Необходимость координации реализации программ	Отсутствует. ВЦП входят в состав одной ДЦП и реализуются главными распорядителями бюджетных средств
Определение результатов	ДЦП определяет конечные результаты, ВЦП - непосредственные результаты
Проблема дублирования	Дублирование невозможно
Иерархичность программ	Иерархия есть – ВЦП входят в состав ДЦП



Рисунок - Основания для изменения статуса целевых программ

Заключение. Анализ нормативно-правовой базы регионов и городов по поводу разработки и реализации целевых программ позволяет констатировать, что более распространен подход к пониманию ВЦП и ДЦП, основанный на соблюдении четкой иерархии программ, когда ДЦП находятся на более высоком уровне иерархии, а ВЦП – на более низком. Соответственно формирование и реализация долгосрочных программ должны предполагать участие в разработке

и исполнении программы нескольких субъектов (ведомств). Для ВЦП, напротив, важно, чтобы разработчиком и исполнителем по программе было одно ведомство. Ситуации, когда ДЦП исполняется в рамках одного ведомства, скорее всего, отражают подмену понятий. Если же реализация программы в рамках одного ведомства невозможна, то возникает необходимость разработки ДЦП.

Долгосрочные программы реализуются в основном в приоритетных направлениях развития области и связаны с инвестированием в них (стратегическое управление), а ведомственные направлены скорее на реализацию полномочий органов власти, т.е. тактическое управление.

На основании изложенного можно сформировать перечень условий и алгоритм укрупнения программ и перевода их из одного статуса в другой (см. рисунок).

Библиографический список

1. Постановление Правительства РФ от 19.04.2005 № 239 «Об утверждении Положения о разработке, утверждении и реализации ведомственных целевых программ».
2. Закон Тульской области 29.12.2006 № 787-ЗТО «Об областной целевой программе «Экология и природные ресурсы Тульской области на 2007 - 2011 годы».
3. Приказ управления здравоохранения Липецкой области от 31.12.2009г. № 881 «Об утверждении ведомственной целевой программы “Поддержание и развитие системы здравоохранения Липецкой области в 2009-2011 годах”».
4. Приказ Управления образования и науки Тамбовской области от 11.11.2009 № 3035 «Об утверждении ведомственной целевой программы “Повышение качества и доступности получения начального и среднего профессионального образования на территории Тамбовской области на 2009-2011 годы”».
5. Программа повышения эффективности бюджетных расходов. Проект от 19.02.2010 г. // www.minfin.ru
6. Вакова Е., Моисеев И. ВЦП в регионах // http://bujet.ru/article
7. Вышлова Л.В. Основные направления в области бюджетной политики на местном уровне. Ведомственные целевые программы // www.sfr.krd.ru
8. Groot T., Budding T. New public management's current issues and future prospects // Financial Accountability & Management. 24(1). February 2008. Pp. 1-13.
9. Карпова Д.П. Экономические аспекты формирования целевых программ в области охраны здоровья // http://bujet.ru/article.

УДК 621.384.8

А.В. Брыков, Б.И. Колотилин

ВЛИЯНИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ АМПЛИТУДЫ ПИТАЮЩЕГО ВЫСОКОЧАСТОТНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА РАЗРЕШАЮЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ГИПЕРБОЛОИДНОГО МАСС-СПЕКТРОМЕТРА ТИПА ТРЕХМЕРНОЙ ЛОВУШКИ

Проводится анализ влияния неустойчивости амплитуды питающего электрода анализатора гиперболоидного масс-спектрометра высокочастотного напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал» на теоретически максимально достижимую разрешающую способность. На основе результатов численного моделирования приводятся рекомендации, позволяющие правильно выбрать длительности импульсов данного питающего напряжения для получения наибольшего значения максимально достижимой разрешающей способности гиперболоидного масс-спектрометра типа трёхмерной ловушки при изменении амплитуды питающего высокочастотного напряжения в пределах 0.2%.

Ключевые слова: гиперболоидный масс-спектрометр типа трёхмерной ловушки, разрешающая способность, ВЧ напряжение, импульсный несимметричный «ЕС-сигнал».

Введение. Среди основных направлений развития гиперболоидной масс-спектрометрической аппаратуры существует направление, связанное с улучшением аналитических характеристик таких приборов за счёт изменения формы питающего напряжения, подаваемого на электродные системы масс-анализаторов. Эта методика развития аналитической аппаратуры позволяет улучшать аналитические характеристики приборов без увеличения требований к точности изготовления электродных систем.

В работе [1] авторами рассматривается одна из методик выбора длительностей импульсов несимметричного «ЕС-сигнала», используемого для питания электродов анализаторов гиперболоидного типа. В качестве параметра, с помощью которого реализовывалась данная методика, была выбрана скорость изменения разрешающей способности при изменении тангенса угла наклона рабочей прямой. Авторами были определены длительности импульсов питающего датчик высокочастотного (ВЧ) напряжения несимметричный «ЕС-сигнал» при минимизации выбранного параметра.

Целью данной работы является улучшение аналитических параметров гиперболоидных масс-спектрометров за счёт изменения формы питающего ВЧ напряжения, подаваемого на

электродные системы данного типа анализаторов.

В данной работе проводится анализ влияния неустойчивости амплитуды питающего электрода анализатора гиперболоидного масс-спектрометра (ГМС) ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал» на теоретически максимально достижимую разрешающую способность.

Параметры периода ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал». В работе [2] предлагалось использовать для питания электродов анализатора ГМС импульсное ВЧ напряжение специальной формы, в последствии названное «ЕС-сигнал».

Параметры периода этого ВЧ напряжения были определены и описаны в работе [1].

На рисунке 1 представлен один период ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал», подаваемого на электроды датчика. Параметры структуры его периода следующие

$$v_0 = \frac{\Delta_a}{\Delta_4}; \quad k = N\Delta_1 = N\Delta_3; \quad k = N\Delta_4, \quad (1)$$

где N – число частей, на которые разбивается период T_0 данного ВЧ напряжения; k, n – числа, определяющие относительную длительность фокусирующего и расфокусирующего импуль-

сов соответственно. Эти параметры связаны соотношением

$$N = 2k + n(1 + v_0), \quad (2)$$

позволяющим определить каждый из них по известным остальным.

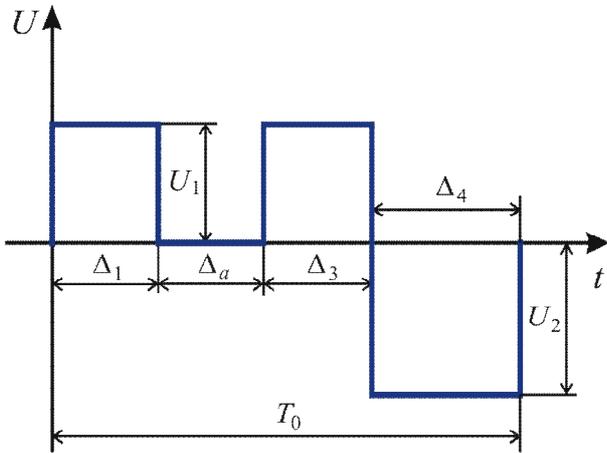


Рисунок 1 – Форма периода ВЧ напряжения несимметричный импульсный «ЕС-сигнал»

Δ_a – активная область периода «ЕС-сигнала»;

U_1 и U_2 – амплитуды фокусирующих и расфокусирующих импульсов ВЧ напряжения «ЕС-сигнал»; Δ_1, Δ_3 – длительности фокусирующих импульсов ВЧ напряжения;

Δ_4 – длительность расфокусирующего импульса ВЧ напряжения

Максимально достижимая теоретически разрешающая способность. Одним из основных параметров масс-спектрометра ГМС типа ТЛ при работе в традиционном режиме масс-селективного накопления вблизи верхней вершины первой зоны совмещенной диаграммы стабильности является теоретически максимально достижимая разрешающая способность. Без учета нелинейных искажений поля, нестабильности частоты и амплитуды питающего напряжения этот параметр обычно равен бесконечности. В реальных случаях этот параметр ограничен.

Рассмотрим влияние нестабильности амплитуды ВЧ напряжения на максимально достижимую разрешающую способность при использовании в качестве питающего электроды датчика ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал».

Так как тангенс угла наклона рабочей прямой на диаграмме стабильности выражается через импульсные координаты следующим образом:

$$\lambda = a_1/a_2, \quad (3)$$

и координаты диаграммы стабильности определяются следующим выражением:

$$a_i = \sqrt{\xi \kappa U_i T_0}, \quad (4)$$

где $\xi = e/m$ – удельный заряд частиц; $\kappa = 2/(3d_0^2)$ – геометрический фактор электродной системы анализатора; d_0 – минимальное расстояние от центра симметрии электродной системы до одного из электродов ГМС; U_i – амплитудное значение разности потенциалов на электродах анализатора при подаче фокусирующего (U_1) и расфокусирующего (U_2) импульса ВЧ напряжения.

Тогда тангенс угла наклона рабочей прямой может быть определен следующим образом:

$$\lambda = \frac{\sqrt{U_1}}{\sqrt{U_2}}. \quad (5)$$

Предположим, что разность потенциалов U_1 , соответствующая фокусирующему импульсу, изменяется в пределах от $-U_1K/2$ до $U_1K/2$. Данное предположение показано на рисунке 2. Тогда максимальный наклон рабочей прямой, при котором ещё не будет происходить выход λ за пределы первой зоны совмещенной диаграммы стабильности при такой нестабильности амплитуды ВЧ напряжения, будет иметь вид:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{1 - K}, \quad (6)$$

где λ_0 – тангенс угла наклона рабочей прямой, соответствующий верхней вершине первой зоны совмещенной диаграммы стабильности.

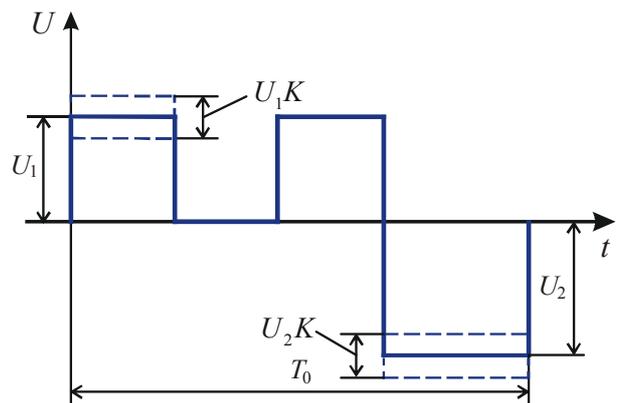


Рисунок 2 – Нестабильность амплитуды фокусирующего U_1K и расфокусирующего U_2K импульсов на периоде ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал»

Максимально достижимую теоретически разрешающую способность можно определить из выражения, полученного в работе [1]:

$$\rho = \frac{a_{20}}{2} \frac{\lambda^2 - W_3 \lambda + W_4}{W_2 (a_{10} - a_{20} \lambda)} \quad (7)$$

с учётом выражения (6).

Используя эту методику, была рассчитана максимально достижимая разрешающая способность при изменении параметров ВЧ напряжения «ЕС-сигнал» N и ν_0 .

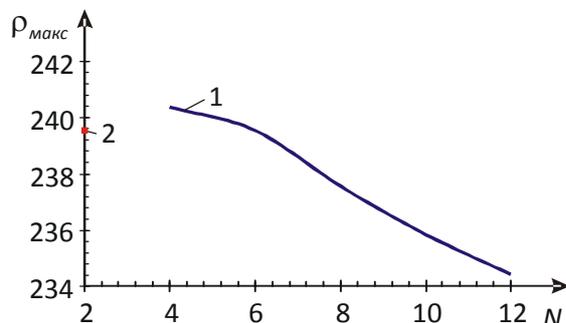


Рисунок 3 – Зависимость теоретически максимально достижимой разрешающей способности ρ_{\max} от параметра N при $K = 0.002$ и работе ГМС типа ТЛ вблизи верхней вершины первой зоны диаграммы стабильности: 1 – при использовании ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал» с $\nu_0 = k = 1$; 2 – в случае применения импульсного ВЧ напряжения типа «меандр»

На рисунках 3 и 4 приведены результаты проведенных расчетов при $K = 0.002$, что определяет нестабильность амплитуды питающего напряжения в пределах 0.2 %.

Увеличение N при $\nu_0 = k = 1$ приводит к незначительному уменьшению ρ_{\max} на 3-4 % при разрешающей способности, равной 240, что подтверждают сделанные нами выводы об уменьшении скорости изменения разрешающей способности при увеличении N . На этом же рисунке приводится значение теоретически максимально достижимой разрешающей способности для $K = 0.002$ при использовании импульсного ВЧ напряжения типа «меандр».

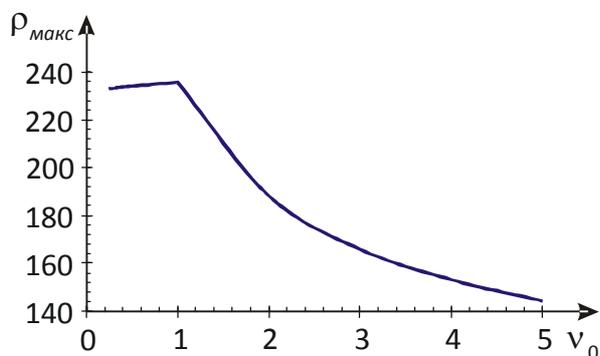


Рисунок 4 – Зависимость максимально достижимой разрешающей способности ρ_{\max} от параметра ν_0 при $K = 0.002$, работе ГМС типа ТЛ вблизи верхней вершины первой зоны совмещенной диаграммы стабильности и питании анализатора ВЧ напряжением импульсный несимметричный «ЕС-сигнал» с $N = 10$ и $k = 1$

Это значение равно величине ρ_{\max} в случае применения ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал» с $N = 6$ и $\nu_0 = k = 1$ (см. рисунок 3), т.е. по этому параметру их применение в качестве питающих электроды анализатора ГМС и работе последнего в традиционном режиме является идентичным.

Параметр ν_0 влияет сильнее. При изменении ν_0 от 1/4 до 1 максимально достижимая теоретически разрешающая способность остаётся практически постоянной (233 – 236). Но с увеличением этого параметра от 1 до 5 ρ_{\max} уменьшается на 40 %, то есть в нашем случае уменьшается до 150 (см. рисунок 4), что означает неприменимость использования ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал» с такими значениями параметров структуры периода.

Заключение. При работе ГМС в традиционном режиме вблизи верхней вершины первой зоны диаграммы стабильности при нестабильности амплитуды питающих электроды напряжений до 0.2 % теоретически максимально достижимая разрешающая способность будет наибольшей при использовании ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал» с $N = 4$ и $\nu_0 = k = 1$. Величина ρ_{\max} не будет превышать 240. При этом длительности всех четырех импульсов этого питающего ВЧ напряжения будут равны 1/4 T_0 .

Таким образом, выполнение равенства длительности активной области и расфокусирующего импульса, т.е. $\nu_0 = 1$ ($\Delta_a = \Delta_4$), является необходимым требованием, накладываемым на соотношение длительностей питающего ВЧ напряжения импульсный несимметричный «ЕС-сигнал», для получения наибольшей теоретически максимально достижимой разрешающей способности при нестабильности амплитуды питающего напряжения в 0.2 % и работе ГМС в традиционном режиме вблизи верхней вершины первой общей зоны диаграммы стабильности.

Библиографический список

1. Колотилин Б.И., Брыков А.В., Буробин М.А. Режимы работы гиперболического масса-спектрометра типа трехмерной ловушки при изменении длительностей импульсов питающего высокочастотного напряжения «ЕС-сигнал». / Вестник РГРТУ. №2 (выпуск 28). Рязань, 2009. - С. 78-82.

2. Шеретов Э.П. Новый вид сигнала для питания гиперболических масс-спектрометров. / Научное приборостроение: межвуз. сб. науч. трудов. Рязань, 1996. - С. 41 -52.

УДК 681.3.06

Ю.А. Меркулов, Н.И. Федотов

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ВЫБОРОЧНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ГОРОДСКИМ ТРАНСПОРТОМ НА БАЗЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА PTV VISION VISUM

Проведен анализ способов определения объема выборочной совокупности при построении матрицы корреспонденций населения. Предложены формулы для определения объема выборочной совокупности. Проведена оценка ошибок выборки на основе реальных данных по транспортной подвижности населения.

Ключевые слова: *корреспонденции населения, матрица корреспонденций, параметры выборочного наблюдения.*

Введение. В настоящее время в больших городах и крупных муниципальных образованиях для управления развитием транспортных систем применяются компьютерные информационные модели, созданные с использованием программных комплексов имитационного моделирования. Одним из наиболее часто применяемых программных комплексов является PTV Vision VISUM. Для его успешного функционирования необходим значительный объем исходной информации, главное место в котором занимает матрица корреспонденций населения. Для ее построения используются несколько методов, основанных на проведении опроса населения определенной территории на предмет выявления его корреспонденций. Опрос генеральной совокупности представляет собой дорогостоящее мероприятие, в силу чего обычно обследуется выборочная совокупность. В результате возникает задача оценки параметров выборочного наблюдения. Целью работы является выявление методов оценки параметров выборочного наблюдения, направленного на получение информации о корреспонденциях населения для использования в качестве исходной информации при построении модели городской транспортной системы в программном комплексе имитационного моделирования.

Теоретические исследования. Корреспонденции населения представляют собой объективно существующую потребность городского населения в перемещении из одной части города в другую [5]. Формой представления информации о корреспонденциях населения является матрица корреспонденций.

Матрица корреспонденций представляет со-

бой квадратную таблицу размерностью n строк и n столбцов, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, номера микрорайонов города, полученных в результате условного районирования городской территории. В строках располагаются номера районов выезда, в столбцах – номера районов прибытия. В ячейках данной матрицы содержатся числа, определяющие количество человек, перемещающихся из района i в район j . В диагональных элементах матрицы находятся данные о внутрирайонной корреспонденции (перемещении внутри микрорайона). Пример матрицы корреспонденций представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Пример матрицы корреспонденций

№ района прибытия	1	2	3
№ района отправления			
1	12	145	654
2	340	20	32
3	236	254	15

Методы обследования корреспонденций населения можно разделить на две группы: расчетные и анкетные. Расчетные методы позволяют определить общий объем перемещений людей без их конкретного распределения, в силу чего широкого применения не имеют.

Анкетные методы обследования корреспонденций делятся на анкетное обследование генеральной совокупности и анкетное обследование выборочной совокупности. Обследование генеральной совокупности возможно провести только совместно с крупными социологическими исследованиями, такими как перепись населения. Обследование выборочной совокупности можно разделить на опрос по месту

проживания, обследование сплошных баз данных. Обследование по месту проживания представляет собой анкетирование населения по месту жительства на предмет выявления его корреспонденций.

Обследование сплошных баз данных представляет собой обследование баз данных, содержащих информацию о месте проживания населения и месте его работы.

Сущность всех анкетных методов заключается в составлении анкеты, содержащей вопросы о пунктах назначения поездок, их времени, используемом виде транспорта, частоте совершаемых поездок, с последующим ее заполнением респондентами.

Наиболее распространенным и часто применяемым методом обследования корреспонденций населения является анкетирование по месту проживания. При проведении обследования корреспонденций данным методом необходимо определить параметры выборочного исследования: объем выборочной совокупности, точность полученных данных.

Для оценки точности собранной информации необходимо количественно оценить случайные ошибки выборки, представляющие собой расхождение между характеристиками обследуемой выборочной совокупности и характеристиками генеральной совокупности. Теоретическим основанием данной оценки являются предельные теоремы [4].

Различают среднюю (стандартную) и предельную ошибки выборки. Под средней (стандартной) ошибкой выборки понимают расхождение между средней величиной признака в выборочной совокупности и средней величиной признака в генеральной совокупности [3]. Предельной ошибкой выборочного наблюдения называется разность между средней величиной признака в генеральной совокупности и средней величиной признака, вычисленной по результатам выборочного наблюдения. Обследование корреспонденций населения предполагает бесповторную выборку, так как респондент проходит анкетирование однократно. В литературе известны следующие формулы для определения стандартной (1), (3) и предельной (2), (4) ошибок при бесповторной выборке для альтернативного признака

$$s = \sqrt{\frac{p(1-p)}{m} \left(1 - \frac{m}{M}\right)}, \quad (1)$$

где s – стандартная ошибка выборки; p – доля единиц, обладающих обследуемым значением признака; m – объем выборочной совокупности;

M – объем генеральной совокупности;

$$\Delta = t \sqrt{\frac{p(1-p)}{m} \left(1 - \frac{m}{M}\right)}, \quad (2)$$

где Δ – предельная ошибка выборки; t – показатель кратности квадратичного отклонения, определяемый в зависимости от избранной доверительной вероятности, и для количественного признака;

$$s = \sqrt{\frac{\sigma^2}{m} \left(1 - \frac{m}{M}\right)}, \quad (3)$$

где σ^2 – дисперсия генеральной совокупности;

$$\Delta = t * \sqrt{\frac{\sigma^2}{m} \left(1 - \frac{m}{M}\right)}. \quad (4)$$

Для определения объема выборочной совокупности (репрезентативной выборки) не разработано единых подходов. В источниках [1], [5] приводятся формулы, применение которых не представляется возможным в силу следующих причин.

1. Отсутствует четкое определение того, что является искомым признаком, в результате чего невозможно задать точность, с которой будет проводиться отбор единиц в выборочную совокупность.

2. Дисперсия признака является неизвестной величиной, для определения которой необходимо проводить дополнительные исследования.

3. В [5] используется формула для повторной выборки, что не соответствует условиям опроса.

Для решения первой, главной проблемы необходимо определить, что в данном случае будет являться искомым признаком (вариантой). В качестве искомого признака можно предложить долю людей, перемещающихся из i -го района города в j -й район города.

Так как ответы респондент дает в виде номеров района проживания и районов совершаемых поездок и при этом не совершает поездки в другие районы, то искомым признаком можно считать альтернативным. Таким образом, для оценки стандартной и предельной ошибок выборки следует использовать выражения (1), (2).

Для определения объема выборочной совокупности при исследовании, направленном на изучение альтернативного признака, можно принять за основу формулу [2]:

$$m = \frac{t^2 * p * (1-p) * M}{\Delta^2 * M + t^2 * p * (1-p)}. \quad (5)$$

В данном случае значение доли априори является неизвестным. В качестве оценки данной величины можно использовать значение доли, при котором объем выборочной совокупности будет максимальным. Данное значение p^* определяется из условия $\frac{\delta m}{\delta p} = 0$. Дифференцируя (5) по p , получаем:

$$\frac{t^2 * \Delta^2 * M^2 * (1 - 2p)}{(\Delta^2 * M + t^2 * p * (1 - p))} = 0. \quad (6)$$

В результате вычислений p^* равняется 0,5. Подставляя p^* в (5), имеем:

$$m = \frac{0.25t^2 * M}{\Delta^2 * M + 0.25t^2}. \quad (7)$$

Практическая апробация результатов. С использованием формулы (7) был определен объем репрезентативной выборки для микрорайонов, полученных при условном районировании территории города Рязани для уровня доверительной вероятности 95 % и предельной ошибки выборки 5 %. Минимальные, максимальные и средние значения численности населения района и размера выборочной совокупности приведены в таблице 2.

Таблица 2 - Значения численности населения и объема выборки по микрорайонам города Рязани

Показатели	Объем выборки		
	Минимальный	Максимальный	Средний
Численность населения (чел.)	426	19 143	5625
Объем выборки (чел.)	136	392	365
Объем выборки (%)	31,8	2	6,4

Данные таблицы 2 иллюстрируют получение небольшого, в процентном соотношении, объема репрезентативной выборки, что облегчает проведение обследования, снижает возможность возникновения преднамеренных ошибок на этапе регистрации.

По результатам проведенного обследования корреспонденций населения на территории города Рязани с использованием формул (1) и (2) были определены минимальные, максимальные и средние значения стандартной и предельной ошибок. Результаты вычислений представлены в таблице 3.

Данные таблицы 3 иллюстрируют получение

достаточно малых значений стандартной и предельной ошибок при использовании предлагаемой методики определения размера выборочной совокупности при исследовании, направленном на получение исходной информации для создания компьютерной модели транспортной системы, что свидетельствует о достаточно высокой точности получаемых результатов. Реальное значение средних стандартных и предельных ошибок не превосходит 1 %.

Таблица 3 - Значения ошибок, определенные по данным матрицы корреспонденций

Виды ошибок	Значения ошибок		
	Минимальное	Максимальное	Среднее
Стандартная	0,001505	0,001539	0,001522
Предельная	0,0029	0,03	0,01654

Заключение. В статье рассмотрены различные способы получения матрицы корреспонденций населения. Проанализированы способы оценки объема выборочной совокупности, выявлены их недостатки, предложены формулы для определения объема выборочной совокупности и ошибки репрезентативной выборки при исследованиях, направленных на получение исходной информации для моделирования транспортной системы на основе программного комплекса PTV Vision VISUM. Определены объемы выборочной совокупности для микрорайонов города Рязани.

Данная статья подготовлена в рамках выполнения Государственного контракта № П539 «Выполнение научно-исследовательских работ по теме «Создание технологии получения адекватной информационной модели транспортной инфраструктуры города на основе программного комплекса Visum/Vissim PTV Vision (на примере г. Рязани)».

Библиографический список

1. Письмо Государственного комитета РФ по статистике от 14 февраля 2002 года № ОР-09-23/292.
2. Гусаров В.М. Статистика. Учеб. пособие для вузов – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 – 436 с.
3. Годин А.М. Статистика: учебник – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^о», 2002 – 472 с.
4. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики: учебник для вузов / Под ред. Елисеевой И.И. – 4-е изд. Перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 480 с.
5. Перевозки пассажиров городским транспортом: справочное издание// Спирин И.В. – М.: Академкнига, 2006. - 416 с.

УДК 621.395.664

*С.Р. Габдулгазиев***ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИАГРАММ ВОРОНОГО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОГО ПОИСКА БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА В КОДОВОЙ КНИГЕ**

Рассмотрено решение задачи быстрого поиска ближайшего соседа в кодовой книге на заранее сформированной структуре данных. Представлен разработанный способ поиска ближайшего соседа уменьшающий вычислительную сложность в сравнении с известными более чем в 2 раза. Данный способ может быть использован при векторном квантовании, которое активно применяется в задачах распознавания образов, сжатии речи, изображений и других видов данных допускающих кодирование с потерями.

Ключевые слова: векторное квантование, быстрый поиск, кодовая книга.

Введение. Векторное квантование используется в задачах распознавания образов, сжатии речи, изображений и других видов данных, допускающих кодирование с потерями. Важной характеристикой векторного квантования является вычислительная сложность. Данная характеристика особенно важна в условиях постоянно растущего объема обрабатываемой информации, которые характерны для нашего времени. Низкая вычислительная сложность векторного квантования при прочих равных условиях обеспечит более быструю классификацию в задачах распознавания образов, возможность обработать больший объем данных за определенное время в задачах кодирования. Одной из важнейших характеристик предлагаемого способа считается его низкая вычислительная сложность, которая является функцией от размерности пространства.

Цель данной работы – создать метод поиска ближайшего соседа в приложении к процедуре векторного квантования.

Теоретические исследования. Векторное квантование состоит в следующем. Предположим, например, что $x(x_1, \dots, x_K)$ - K -мерный вектор-признаков. Операция векторного квантования вектору x ставит в соответствие некоторый другой вектор c_i . Вектором c_i называется кодовый вектор, который выбирается из конечного множества векторов $C = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$. Множество C называется кодовой книгой, а количество векторов в кодовой книге N называется её размером [1]. В многих работах [2, 3, 4, 5, 6] рассматривались проблемы поиска в векторной книге. В [3] представлен ряд методов поиска по критерию минимума среднеквадратической

ошибки. Это способы полного перебора, а также относительно быстрые алгоритмы поиска путем дихотомического разделения кодовой книги. Наименьшую вычислительную сложность имеют методы [4, 6], для поиска в которых используется диаграмма Вороного (ДВ) (рисунок 1). Процедура построения диаграммы Вороного на структуре данных подробно представлена в [5].

Метод, предложенный в [4], является наиболее эффективным по использованию вычислительных ресурсов, но также является наиболее требовательным к ресурсам памяти. Предложенный метод можно рассматривать как усовершенствование [4], результатом которого являются существенное снижение ресурсов памяти и уменьшение вычислительных затрат.

Способ основан на информации о проекциях многоугольников Вороного V_i (рисунок 1). Многоугольник Вороного V_i , связанный с вектором кодовой книги c_i , содержит все точки в пространстве R^K , наиболее близкие к c_i , чем к какому-либо другому кодовому вектору. Таким образом, если кодовый вектор x находится в многоугольнике V_i , то связанный кодовый вектор c_i будет ближайшим.

Проекция многоугольника V_i на координатную ось j образует интервал P_i^j с начальной и конечной точками $(P_{i,L}^j, P_{i,U}^j)$. В итоге такого представления получаем две гиперплоскости $g_j = P_{i,L}^j$ и $g_j = P_{i,U}^j$, нормальные к координатной оси j , где K проекций $(P_{i,L}^j, P_{i,U}^j)$

на оси $j=1 \dots K$ определяют $2K$ гиперплоскостей, которые ограничивают многоугольник Вороного V_i наименьшим гиперпрямоугольником $B_i = \{x : (P_{i,L}^j \leq x_j \leq P_{i,U}^j), j=1, \dots, K\}$. Для каждого многоугольника Вороного, связанного с кодовым вектором, можно построить такой гиперпрямоугольник, стороны которого будут параллельны осям координат.

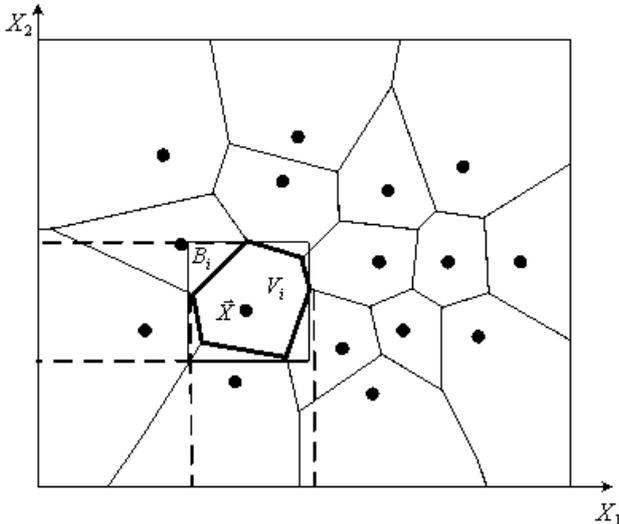


Рисунок 1 - Диаграмма Вороного для шестнадцати точек на плоскости, жирными линиями выделен многоугольник Вороного

Из предыдущего ясно, что $V_i \subseteq B_i$. Если $x \in V_i$, тогда $x \in B_i$. В случае если $x \in B_i$, соответствующий многоугольник Вороного V_i может также содержать x , и c_i может быть ближайшим к x . Гиперпрямоугольники могут пересекаться, и входной вектор может лежать сразу в нескольких прямоугольниках, и каждый соответствующий им кодовый вектор может рассматриваться как возможный ближайший вектор. Это приводит к появлению набора кодовых векторов-кандидатов, $C'(x) = \{c_i : x \in B_i\}$, каждый из которых может быть ближайшим. На этом наборе производится поиск полным перебором.

Предложенный метод поиска состоит из двух частей.

1. Предварительная обработка. Состоит из построения диаграммы Вороного на кодовой книге (рисунок 1) и построения структуры данных.

2. Поиск на сформированной структуре.

Рассмотрим подробно построение структуры данных. На первую из рассматриваемых осей строятся проекции всех N многоугольников Вороного V_i . Получим $N_1, N_1 = N$, перекрывающихся интервалов проекций, $P_i^1 = (P_{i,L}^1, P_{i,U}^1)$,

$i=1, \dots, N_1$, которые образуют $2N$ границ проекций $(y_1^1, y_2^1, \dots, y_{2N}^1)$ таких, что выполняется $(y_1^1 \leq y_2^1 \leq \dots \leq y_{2N}^1)$. Полученные таким образом границы разделяют рассматриваемую координатную ось на $(2N-1)$ последовательных интервалов $\{I^1(1), I^1(2), \dots, I^1(2N-1)\}$ в данном наборе $I^1(m) = \{(y_m^1, y_{m+1}^1)\}$. Каждому интервалу соответствует набор $S^1(m)$ индексов многоугольников Вороного, чьи интервалы проекций частично или полностью перекрываются с $I^1(m)$.

Далее для каждого интервала $I^1(m)$ $m=1 \dots (2N-1)$ на следующую рассматриваемую ось строятся только проекции многоугольников Вороного, чьи интервалы проекций частично или полностью перекрываются с $I^1(m)$, т.е. входящие в набор $S^1(m)$. Получим $N_2 < N$ перекрывающихся интервалов проекций $P_i^2 = (P_{i,L}^2, P_{i,U}^2)$, $i=1, \dots, N_2$. N_2 определяется количеством векторов, входящих в набор $S^1(m)$. В итоге получаются $2N_2$ границ проекций $(y_1^2, y_2^2, \dots, y_{2N_2}^2)$ таких, что $(y_1^2 \leq y_2^2 \leq \dots \leq y_{2N_2}^2)$. Эти границы разделяют рассматриваемую координатную ось на $(2N_2-1)$ последовательных интервалов $\{I^2(1), I^2(2), \dots, I^2(2N_2-1)\}$, где $I^2(m) = \{(y_m^2, y_{m+1}^2)\}$. Каждому интервалу соответствует набор $S^2(m)$ индексов многоугольников Вороного, чьи интервалы проекций частично или полностью перекрываются с $I^2(m)$ и входят в набор $S^1(m)$.

Процедура повторяется для каждого интервала $I^2(m)$, $m=1 \dots (2N_2-1)$, на следующую ось строятся только проекции многоугольников Вороного из набора $S^2(m)$. Так последовательно рассматриваются все K осей.

В результате получится структура в виде дерева (см. рисунок 2). Процедура поиска реализуется в виде переходов по веткам дерева. Например, необходимо определить ближайший кодовый вектор к входному вектору $x(x_1, \dots, x_K)$, последовательно для каждой компоненты вектора x определяется интервал, который содержит данную компоненту $x_j \in I^1(m)$, $I^1(m) = \{(y_m^1, y_{m+1}^1)\}$, т.е. компоненту вектора x_1 , $y_m^1 \leq x_1 \leq y_{m+1}^1$. На следующем этапе рассма-

тривается поддерево, порожденное узлом $I^1(m)$, таким образом, рассматривается каждая компонента входного вектора, на последнем этапе x_K определяет концевой узел, который определяет итоговый набор $C'(x)$.

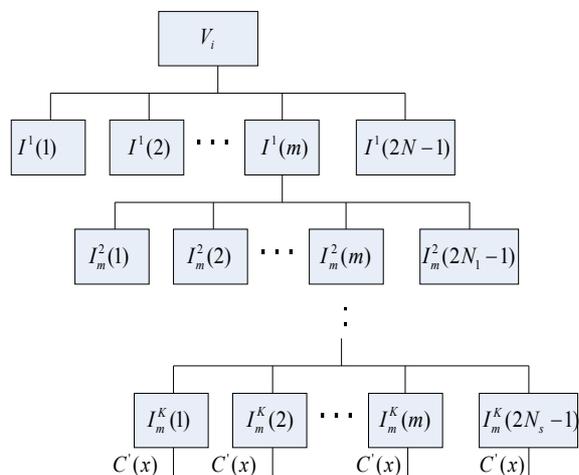


Рисунок 2 - Пример полученной структуры данных в виде дерева

Вычислительная сложность предложенного метода Z_n для поиска одного тестового вектора:

$$Z_n = \sum_{i=1}^K \log_2 2N_i + \delta \cdot S,$$

где N_i изменяется, $N_i = N \dots N_K$, $N \dots N_K$ – число векторов-претендентов, оставшихся не исключенными после рассмотрения i -й оси, S – конечное число в $C'(x)$ итоговом наборе векторов-кандидатов, а δ – количество операций для вычисления расстояния до кодового вектора. Для сравнения вычислительная сложность метода Z , предложенного в [4, 6], показана ниже:

$$Z = K \cdot \log_2 2 \cdot N + \delta \cdot C'(x).$$

Оценка использованной памяти M_n равна:

$$M_n = \prod_{i=1}^K (2N_i - 1),$$

для метода, предложенного в [4, 6]:

$$M = (2N - 1)^K.$$

Экспериментальные исследования. Для определения характеристик метода проведены исследования. Сгенерировано по 10 наборов кодовых векторов размерностью от 1 до 8 и количеством векторов 32, 64, 128, 256, 512, 1024. Для каждого набора определено число конечных векторов в зависимости от размера кодовой книги и количество необходимой памяти для хра-

нения полученной структуры данных. Исследования показали, что для значений $K \leq 6$ реализация метода требует приемлемого количества памяти для современных ЭВМ. Экспериментальные значения для конечного числа набора векторов S , оставшихся в результате исключения, представлены на рисунке 3.

По результатам эксперимента была проведена статистическая оценка точности. На доверительном интервале $\pm 5\%$ доверительная вероятность составляет 0.95.

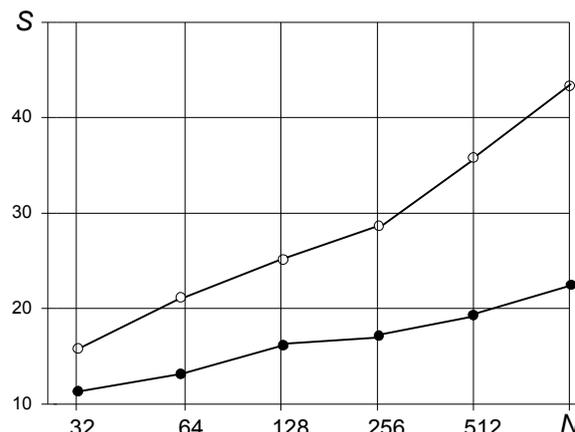


Рисунок 3 - Зависимость значения конечного числа S векторов в итоговом наборе от размера кодовой книги N

Для случая, когда пространство, на котором строится ДВ, дискретное и конечное, данная структура может быть представлена в виде конечного автомата. Тогда вычислительная сложность предложенного метода для поиска одного тестового вектора существенно уменьшается до

$$Z_n = d \cdot r + \delta \cdot S,$$

где r – одно считывание из таблицы переходов автомата.

Рассмотрим пример, показывающий наглядно эффективность предложенного метода по отношению к [4] для случая 32 векторов для четырехмерного пространства ($N = 32, K = 4$) по вычислительной сложности и использованию ресурсов памяти. По вычислительным ресурсам для метода, описанного в [4]:

$$\begin{aligned} Z &= d \cdot \log_2 2 \cdot N + \delta \cdot S = 4 \cdot 6 + \delta \cdot S = \\ &= 24 + \delta \cdot S, \end{aligned}$$

для предложенного способа:

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{i=1}^K \log_2 2N_i + \delta \cdot S = \\ &= \log_2 32 + \log_2 9.4 + \log_2 2.8 + \log_2 1.4 + \delta \cdot S = \\ &= 11 + \delta \cdot S. \end{aligned}$$

Получим выигрыш по вычислительной сложности:

$E_z = (Z / Z_n) = 2,18$, т.е. на кодирование одного входного вектора, вектором из кодовой книги, для разработанного метода требуется в среднем в 2,18 раза операций меньше, чем методом, описанным в [4].

По использованию ресурсов памяти

$$M = (2N - 1)^K \gamma = (2 \cdot 32 - 1)^4 \gamma = 15752961 \cdot \gamma.$$

Получим выигрыш по вычислительной сложности:

$$M_n = \prod_{i=1}^K (2N_i - 1) \gamma = \\ = (2 \cdot 32 - 1)(2 \cdot 9.4 - 1)(2 \cdot 2.8 - 1)(2 \cdot 1.4 - 1) \gamma = \\ = 9285 \gamma.$$

Получим выигрыш по использованию ресурсов памяти:

$$E_M = M / M_n = 15752961 \cdot \gamma / 9285 \gamma = 1696.$$

Выводы. Предложенный способ уменьшает вычислительную сложность алгоритма поиска требуемого вектора в кодовой книге в 2,18 раза.

Библиографический список

1. Аграновский, А.В. Теоретические аспекты алгоритмов обработки и классификации речевых сигналов / А.В. Аграновский, А.В. Леднов: М: изд-во «Радио и связь», 2004. – 164 с.
2. Препарата, Ф. Вычислительная геометрия: Введение / Ф. Препарата, М. Шеймос; пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
3. Макхоул, Дж. Векторное квантование при кодировании речи / Дж. Макхоул, С. Руко, Г. Гиш // ТИИЭР. – 1985. – Т.73. – № 11. – С. 19-61.
4. Cheng, D.Y. Fast search algorithms for vector quantization and pattern matching / D. Y. Cheng, A. Gersho, B. Ramamurthi, and Y. Shoham // Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Mar. 1984, vol. 1, Pp. 9.11.1–9.11.4.
5. Загоруйко, Н.Г. Семейство алгоритмов-локатор для быстрого поиска ближайшего аналога / Н.Г. Загоруйко, В.В. Дюбанов // Сибирский журнал индустриальной математики. Октябрь–декабрь, 2006. Том IX. № 4(28). – С. 64–74.
6. Ramasubramanian Fast Nearest-Neighbor Search Based on Voronoi Projections and Its Application to Vector Quantization Encoding // IEEE Transactions on speech and audio processing, vol. 7, no. 2, March 1999.

УДК 517.938

И.С. Потапова

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧЕТЫРЕХУРОВНЕВОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается управляемая линейная математическая модель переходного процесса четырехуровневой квантовой системы с переменными коэффициентами. Найдены необходимые и достаточные условия перехода системы из одного состояния в другое.

Ключевые слова: *четырёхуровневая квантовая система, полная управляемость, линейная система дифференциальных уравнений.*

Введение. В квантовых приборах усиление и генерирование колебаний достигается благодаря взаимодействию электромагнитного поля и вещества. В результате взаимодействия происходит преобразование внутренней избыточной энергии микрочастиц в энергию электромагнитного поля. Эта избыточная энергия приобретает микрочастицами от внешнего возбуждающего источника.

Для анализа процессов излучения и поглощения энергии в квантовых системах используют термодинамический подход, получивший название вероятностного метода. Хотя такой подход не раскрывает полной физической картины процесса, но позволяет создать достаточно

простую математическую модель этого физического явления и проанализировать механизмы возбуждения активной среды, определить условия, при которых возможна генерация, рассчитать энергетические характеристики и выбрать оптимальные параметры. На основании вероятностного подхода составляются кинетические уравнения, определяющие изменение количества частиц на энергетических уровнях.

В основном используется четырехуровневая квантовая система, математическая модель которой рассмотрена в работе [1].

Может возникнуть необходимость управления инверсией населенностей, процессом заселения энергетических уровней, селектив-

ностью заселения уровней активного центра для повышения КПД лазера, формированием поля излучения с заранее заданной структурой, то есть возникает необходимость управления процессом генерации. Следовательно, в систему кинетических уравнений необходимо ввести управляющие параметры.

Цель работы – исследовать управляемую математическую модель четырехуровневой квантовой системы, определить условия, при которых к некоторому моменту времени $t=T_0$ возможна заранее определенная заселенность энергетических уровней среды.

Основная часть. Для составления управляемой математической модели ограничимся двумя управляющими параметрами. Параметр $u_1(t)$ управляет внесенными в резонатор дополнительными потерями, параметр $u_2(t)$ – длиной резонатора (изменение длины резонатора влияет на световую мощность, генерируемую во всем объеме активной среды). Для упрощения задачи общее количество частиц N_0 считаем постоянным. С учетом высказанных соображений система кинетических уравнений четырехуровневой квантовой системы будет иметь следующую математическую форму

$$\begin{cases} \dot{N}_3 = p_{13}(t)(N_1 - N_3) - \frac{N_3}{\tau_{32}} + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t); \\ \dot{N}_2 = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{24}} + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t); \\ \dot{N}_4 = \frac{N_2}{\tau_{24}} - \frac{1}{\tau_{41}}(N_4 - N_1 \cdot \exp(-\frac{\hbar\omega_{41}}{kT})) + b_{31}u_1(t) + b_{32}u_2(t); \\ N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N_0; \end{cases} \quad (1)$$

в которой, рабочим является переход $2 \rightarrow 4$, переходы $3 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 1$ – безызлучательные, $p_{13}(t)$ – вероятность перехода $1 \rightarrow 3$ частицы под воздействием поля накачки за 1 секунду, функция, непрерывная на сегменте $[0, T_0]$; N_i – населенность i энергетического уровня, $\dot{N}_2, \dot{N}_3, \dot{N}_4$ – производные по времени от населенностей уровней (скорости изменения населенностей уровней), $t \in [0, T_0]$, при любых i, j , b_{ij} – постоянное число, τ_{ij} – время перехода между соответствующими уровнями; $\hbar\omega_{41}(t)$ – разность энергий состояний 1 и 4, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, \hbar – постоянная Планка.

Заменой переменных $x = colon(x_1, x_2, x_3) = colon(N_2, N_3, N_4)$ система (1) примет вид

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) + \varphi(t), \quad (2)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ имеют вид: $A(t) = (colon(-\frac{1}{\tau_{24}}, -p_{13}(t), \frac{1}{\tau_{24}} - \frac{1}{\tau_{41}} f(t)), colon(\frac{1}{\tau_{34}}, -2p_{13}(t), \frac{1}{\tau_{32}} - \frac{1}{\tau_{41}} f(t)), colon(0, -p_{13}(t), -\frac{1}{\tau_{41}} - \frac{1}{\tau_{41}} f(t))),$
 $B = (colon(b_{11}, b_{21}, b_{31}), colon(b_{12}, b_{22}, b_{32})); \varphi(t) = colon(0, p_{13}(t)N_0, \frac{1}{\tau_{41}} f(t)N_0),$
 $f(t) = \exp(-\frac{\hbar\omega_{41}(t)}{kT}).$ Множество допустимых управлений определим равенством

$$U = \{u(t) : u(t) = S(t)x + R(t)v\}, \quad (3)$$

где $S(t) - 2 \times 3$, $R(t) - 2 \times 3$ – непрерывные матрицы, $R(t) = (r_{ij}(t))_1^3$, $r_{ij}(t) = \sum_{\lambda=1}^k r_{ij}^{(\lambda)} \varphi_\lambda(t)$, $r_{ij}^{(\lambda)}$ – действительные числа, $\varphi_\lambda(t)$ – известные функции, определенные и кусочно-непрерывные на сегменте $[0, T_0]$, k – некоторое натуральное число, $v - 3$ -мерный постоянный вектор.

Тогда система (2) примет вид

$$\dot{x} = H(t)x + BR(t)v + \varphi(t), \quad (4)$$

где $H(t) = A(t) + BS(t)$.

Определение. Система (2) называется вполне управляемой на сегменте $[0, T_0]$ во множестве допустимых управлений U , если для любых векторов α и β существует управление $u(t) \in U$, при котором система (2) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0) = \alpha$, $x(T_0) = \beta$.

Поставим задачу: найти такой вектор v , при котором решение $x(t, \alpha, v)$ системы (4) удовлетворяет равенствам $x(0, \alpha, v) = \alpha$, $x(T_0, \alpha, v) = \beta$, где $\alpha = (N_2^\alpha, N_3^\alpha, N_4^\alpha)$, $\beta = (N_2^\beta, N_3^\beta, N_4^\beta)$, при любом $i \in \{2, 3, 4\}$ N_i^α – населенность уровня i при $t=0$, N_i^β – населенность уровня i при $t = T_0$.

Пусть $A(t)$ и $H(t)$ на сегменте $[0, T_0]$ определяются соответственно равенствами

$$A(t) = A_1 + A_2 p_{13}(t) + A_3 f(t),$$

$$H(t) = H_1 + H_2 p_{13}(t) + H_3 f(t),$$

где $A_1 = (colon(-\frac{1}{\tau_{24}}, 0, \frac{1}{\tau_{24}}), colon(\frac{1}{\tau_{34}}, 0, \frac{1}{\tau_{32}}),$

$$\text{colon}(0,0,-\frac{1}{\tau_{41}})), A_2 = (\text{colon}(0,-1,0), \text{colon}(0, -2,0), \text{colon}(0,-1,0)), A_3 = (\text{colon}(0,0,-\frac{1}{\tau_{41}}), \text{colon}(0,0,-\frac{1}{\tau_{41}}), \text{colon}(0,0,-\frac{1}{\tau_{41}})), H_1, H_2, H_3 -$$

постоянные диагональные матрицы.

Матрицу $S(t)$ будем искать в виде

$$S(t) = S_1 + S_2 p_{13}(t) + S_3 f(t), \quad (5)$$

в котором при любом $\mu \in \{1,2,3\}$ матрица $S_\mu -$ постоянная. Будем предполагать, что при любом $\mu \in \{1,2,3\}$ матрица S_μ удовлетворяет равенству $H_\mu = A_\mu + BS_\mu$. Тогда система (1) может быть преобразована в систему (4). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы при любом $\mu \in \{1,2,3\}$ существовала матрица S_μ , удовлетворяющая равенству $H_\mu = A_\mu + BS_\mu$ достаточно, чтобы в матрице B каждый минор второго порядка был не равен нулю.

Доказательство. Для определенности, положим $\mu = 1$. Получим уравнение $H_1 = A_1 + BS_1$, в котором матрица H_1 диагональная, $h_{ii}^{(1)} \neq 0$. Рассмотрим уравнения, в которые входят нулевые элементы первого столбца матрицы H_1 : $(\text{colon}(b_{21}, b_{31}), \text{colon}(b_{22}, b_{32})) \text{colon}(s_{11}^{(1)}, s_{21}^{(1)}) = \text{colon}(0,0) - \text{colon}(a_{21}^{(1)}, a_{31}^{(1)})$. Так как минор матрицы B , составленный из второй и третьей строк, не равен нулю, то можем найти $\text{colon}(s_{11}^{(1)}, s_{21}^{(1)})$. Так как все миноры второго порядка матрицы B не равны нулю, то аналогично могут быть найдены второй и третий столбцы матрицы S_1 . Из равенств $h^{(i)}_{ii} = a^{(i)}_{ii} + b_{i1}s^{(i)}_{1i} + b_{i2}s^{(i)}_{2i}$, где $i \in \{1,2,3\}$, определим диагональные элементы матрицы H_1 . Проводя аналогичные рассуждения при $\mu = 2$ и $\mu = 3$, находим матрицы H_2, H_3 . Теорема доказана.

Подставляя полученную матрицу S_μ в уравнения $H_\mu = A_\mu + BS_\mu$, определим матрицу H_μ . Непосредственным вычислением устанавливаем, что матрица $H(t)$ определится равенством

$$H(t) = H_1 + H_2 p_{13}(t) + H_3 f(t), \quad \text{в котором}$$

$$H_1 = \text{diag}(-\frac{1}{\tau_{24}} - \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{\tau_{24}(b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22})}, -\frac{b_{21}}{b_{11}\tau_{34}} -$$

$$-\frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}} \frac{b_{11}(b_{31}\tau_{32} - b_{11}\tau_{34})}{\tau_{32}\tau_{34}(b_{31}b_{12} - b_{32}b_{11})} +$$

$$+ \frac{b_{31}}{\tau_{34}(b_{31}b_{12} - b_{32}b_{11})} - \frac{b_{11}}{\tau_{32}(b_{31}b_{12} - b_{32}b_{11})}, -\frac{1}{\tau_{41}}),$$

$$H_2 = \text{diag}(\frac{b_{31}b_{12} - b_{32}b_{11}}{b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}}, -2, \frac{b_{31}b_{12} - b_{32}b_{11}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}),$$

$$H_3 = \text{diag}(\frac{-b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}}{\tau_{41}(b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22})}, \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{\tau_{41}(b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22})}, -\frac{1}{\tau_{41}}).$$

Поскольку матрица $H(t)$ – диагональная, то в явном виде можно найти фундаментальную матрицу $X(t)$ ($X(0) = E$) системы $\dot{x} = H(t)x$. Решение $x(t, \alpha, v)$ системы (4) определится равенством

$$x(t, \alpha, v) = X(t)\alpha + X(t) \int_0^t X^{-1}(\xi)[BR(\xi)v + \varphi(\xi)]d\xi. \quad (6)$$

Заметим, что

$$\int_0^{T_0} X^{-1}(t)BR(t)dt v = \gamma, \quad (7)$$

где $\gamma = X^{-1}(T_0)\beta - \alpha - \int_0^{T_0} X^{-1}(\xi)\varphi(\xi)d\xi$.

Теорема 2. Для того чтобы квантовая система (4) была вполне управляемой, то есть переходила из состояния α в состояние β , необходимо и достаточно, чтобы матрица $R(t)$ удовлетворяла неравенству $\det \int_0^{T_0} X^{-1}(t)BR(t)dt \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Так как система (4) вполне управляема во множестве допустимых управлений, определенных равенством (3), то по определению полной управляемости для любых векторов α и β существует управление $u(t) \in U$, при котором система (4) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0) = \alpha, x(T_0) = \beta$. При любых α и β справедливо равенство $\int_0^{T_0} X^{-1}(t)BR(t)dt v = \gamma$. Следовательно, матрица $R(t)$ удовлетворяет неравенству $\det \int_0^{T_0} X^{-1}(t)BR(t)dt \neq 0$.

Достаточность. Пусть матрица $R(t)$ такая, что верно неравенство $\det \int_0^{T_0} X^{-1}(t)BR(t)dt \neq 0$. Тогда для любых α и β из равенства (7) можем найти вектор v . Следовательно, по определению

полной управляемости система (4) вполне управляема. Теорема доказана.

Пусть $P = \int_0^{T_0} X^{-1}(t)B(t)R(t)dt$, $r - 6k$ -мерный вектор, определенный равенством $r = (r_1, r_2, \dots, r_{6k})$, в котором $r_1 = r_{11}^1$, $r_2 = r_{21}^1$, $r_3 = r_{31}^1$, $r_4 = r_{12}^1$, $r_5 = r_{22}^1$, $r_6 = r_{32}^1$, \dots , $r_{6k} = r_{32}^k$.

Непосредственным вычислением устанавливаем, что

$$\det P = \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in D} a_{(i_1, i_2, i_3)} r_{i_1} r_{i_2} r_{i_3},$$

где D – множество сочетаний из натуральных чисел $\overline{1, 6k}$ по 3.

Теорема 3. Для того чтобы квантовая система (4) перешла из состояния α в состояние β необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно сочетание $(i_1, i_2, i_3) \in D$, при котором $a_{(i_1, i_2, i_3)} \neq 0$.

Доказательство Необходимость. Так как система (4) вполне управляема во множестве допустимых управлений, определенных равенством (3), то по теореме 2 существует матрица $R(t)$ такая, что выполнено неравенство $\det P \neq 0$. Это значит, что существует сочетание $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in D$, удовлетворяющее неравенству $a_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} \neq 0$.

Достаточность. Пусть сочетание $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in D$ таково, что $a_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} \neq 0$. Тог-

да, положив $r_{i_1} = r_{i_2} = \dots = r_{i_n} = 1$, $r_j = 0$ при $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, получим матрицу $R^*(t)$, удовлетворяющую неравенству $\det \int_0^{T_0} X^{-1}(t)B(t)R^*(t)dt \neq 0$. Следовательно, по теореме 2 система (4) вполне управляема. Теорема доказана.

Отсюда следует, что при выполнении условий теорем 1, 2, 3 система (4) имеет решение, определенное равенством (6), в котором $R(\xi) = R^*(\xi)$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0, \alpha, u) = \alpha$, $x(T_0, \alpha, u) = \beta$.

Заключение. Методами качественной теории дифференциальных уравнений исследована математическая модель четырехуровневой квантовой системы.

Установлено посредством доказанных теорем 1, 2 и 3, что управление внесенными в резонатор потерями и его длиной можно осуществить таким образом, чтобы в заданный момент времени T_0 достичь наперед заданных населенностей энергетических уровней активной среды лазера.

Библиографический список

1. Тарасов Л.В. Лазеры: Действительность и надежность. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 176 с.