5980

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

# ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

## ЧАСТЬ 3

Методические указания к самостоятельной работе



Рязань 2021

УДК 517.98

Тематические тесты по математике. Ч. 3: методические указания к самостоятельной работе/ Рязан. гос. радиотехн. ун- т; сост.: Г.С. Лукьянова, Н.В. Елкина, Е.А. Сюсюкалова, С.В. Богатова. – Рязань, 2021. – 40 с.

Содержат методические указания к самостоятельной работе по математике, краткий теоретический справочник и примеры тестов то темам «Числовые и функциональные ряды», «Ряды Фурье», «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы», «Теория поля».

Предназначены для студентов всех направлений и специальностей, изучающих высшую математику.

Библиогр.: 4 назв.

*Числовые ряды, признаки сходимости, степенные ряды, область сходимости, разложение в ряд, признак Дирихле, двойные интегралы, тройные интегралы, криволинейные интегралы, поток, циркуляция*

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

## Предисловие

При обучении математике самостоятельная работа играет важную роль в ходе всего учебного процесса. Чтобы добиться хороших результатов, недостаточно записывать лекции или решать задачи на очных занятиях, нужна регулярная самостоятельная работа с изучаемым материалом.

Рекомендуем сочетать работу на занятиях с самостоятельным изучением дистанционного курса по математике, доступ к которому вы получили у преподавателя.

Свою самостоятельную работу целесообразно организовать следующим образом:

1) внимательно изучите материал лекций, выделите основные формулы, теоремы и типовые примеры;

2) запишите возникающие у вас вопросы и вопросы, которые преподаватель оставил на самостоятельное изучение;

3) найдите ответы на эти вопросы в рекомендованной преподавателем литературе, дистанционном курсе по математике или в интернет-источниках, запишите их в тетрадь;

4) изучите материалы практических занятий и выполните домашнюю работу, сравните свои решения с образцами, представленными в дистанционных практикумах;

5) выполните тренировочный тест по соответствующей теме из данных методических указаний. Тест считается зачтенным, если вы правильно решили не менее 7 заданий.

Данные методические указания содержат краткий теоретический справочник и примеры тестов то темам «Числовые и функциональные ряды», «Ряды Фурье», «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы», «Теория поля».

Если при выполнении теста нужно выбрать вариант ответа, то может быть один или несколько верных вариантов ответа.

## Числовые и функциональные ряды

**Числовой ряд** – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,\ a_n \in \mathbf{R}$.

**Частичная сумма** – $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ – конечный, то **ряд сходится**, $S$ – его **сумма**; иначе **ряд расходится**.

**Достаточный признак расходимости:** если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

### Знакоположительные ряды

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **знакоположительный**, если $\forall n \in \mathbf{N}\left(a_n > 0\right)$.

**Теоремы сравнения** для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$:

**1)** если $0 < a_n \leq b_n$, то из сходимости «большего» ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость «меньшего» ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

**2)** если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинаково.

| **Признак Даламбера** | **Радикальный признак Коши** |
|---|---|
| $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ | $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ |

Если $\ell > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится; если $0 < \ell < 1$, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если $\ell = 1$, то признак не применим.

**Интегральный признак Коши**: если существует непрерывная и убывающая на $[1;\infty)$ функция $f(x) > 0$, такая что $f(n) = a_n$, то несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ либо сходятся, либо расходятся одновременно.

**Знакочередующиеся и знакопеременные ряды**

**Знакочередующийся** – $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$.

**Признак Лейбница:** если $a_n \geq a_{n+1}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

**Приближенные вычисления:** $|S - S_n| = |R_n| \leq a_{n+1} < \varepsilon$.

**Знакопеременный** – $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}$, содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится абсолютно**; если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

**Функциональные и степенные ряды**

**Функциональный ряд** – $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$, $x \in X$, $X \subseteq \mathbf{R}$.

**Частичная сумма** – $S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$. Если $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0)$ – конечный, то **ряд сходится в точке** $x_0$.

**Область сходимости** – $X_0 = \left\{ x_0 : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \text{ сходится} \right\}$, $X_0 \subseteq X$.

**Признак Даламбера**

$$\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right|$$

**Радикальный признак Коши**

$$\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$$

Если $\ell(x) < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится (абсолютно).

**Степенной ряд** – $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $x_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$.

**Радиус сходимости:** $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, **интервал сходимости** – $(x_0 - R;\, x_0 + R)$. На границах интервала требуется дополнительное исследование.

**Ряд Тейлора** – $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

**Ряд Маклорена** – $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

**Степенные ряды для элементарных функций:**

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbf{R}$; $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, $x \in (-1;1]$;

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbf{R}$; $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbf{R}$;

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}, \quad x \in (-1;1).$$

**Тест 1**

**1.** Найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{12}{4n^2+12n+5}$.

**2.** Для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln^3\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$ на сходимость его достаточно сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{A}{n^s}$, где $A>0$ – некоторое число, при $s=\ \dots$ .

**3.** Если $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=k$, то числовой ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится при $k=\ \dots$ .

**1.** $-\dfrac{1}{3}$ **2.** $1$ **3.** $\dfrac{1}{2}$ **4.** $5$

**4.** Чему равен предел при применении признака Даламбера для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n!)^3}{(3n+1)!}$? (Ответ округлить до тысячных.)

**5.** Если к ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{13n+3}{11n+7}\right)^n$ применить радикальный признак Коши, то в пределе получим $\ell=\ \dots$ . Записать в ответе: $\ell+10$, если ряд сходится; $\ell+20$, если ряд расходится; $-1$, если ответить на вопрос о сходимости ряда с помощью данного признака нельзя. (Ответ округлить до тысячных.)

**6.** Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(n+2)}{5^n}$ с точностью $\varepsilon=0,01$.

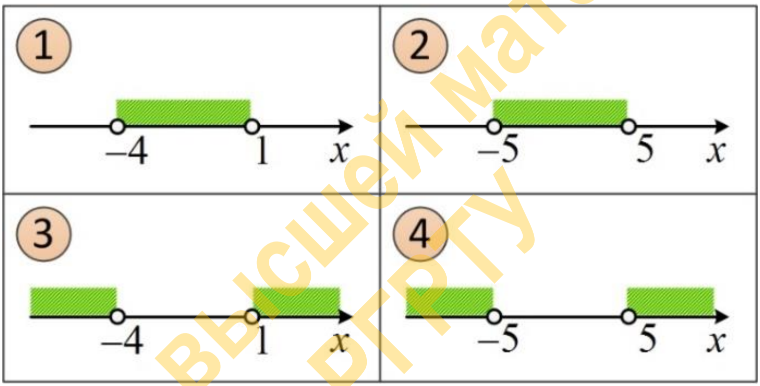
**1.** $\dfrac{295}{625}$ **2.** $\dfrac{11}{25}$ **3.** $\dfrac{294}{625}$ **4.** $\dfrac{12}{25}$

**7.** Исследовать на сходимость следующие ряды:

**1)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+4}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n+2)$;

**3)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n+7}$; **4)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

**8.** Указать по рисунку номер области сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n\left(x^2+3x+1\right)^n}{5^n}$.




**9.** Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^n}{\left(n^2+4\right)2^n}$.

10. Разложить функцию $y=e^{x+5}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

**1.** $e^{x+5}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$, где $x\in(-\infty,+\infty)$.

**2.** $e^{x+5}=e^5\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, где $x\in(-\infty,+\infty)$.

**3.** $e^{x+5} = e^6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$, где $x \in (-\infty, +\infty)$.

**4.** $e^{x+5} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+5)^n}{n!}$, где $x \in (-\infty, +\infty)$.

## Тест 2

**1.** Найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{10^n}$.

**2.** Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} n + 4}{\sqrt{n} + 1}$ на сходимость его достаточно сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A}{n^s}$, где $A > 0$ – некоторое число, при $s = \ldots$ .

**3.** Если $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$, то числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится при $k = \ldots$ .

**1.** $5$ **2.** $0,2$ **3.** $1$ **4.** $-0,5$

**4.** Чему равен предел при применении признака Даламбера для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+7)!}{n!(n+3)!}$? (Ответ округлить до тысячных.)

**5.** Если к ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+5}{9n+1}\right)^n$ применить радикальный признак Коши, то в пределе получим $\ell = \ldots$ . Записать в ответе: $\ell + 10$, если ряд сходится; $\ell + 20$, если ряд расходится; $-1$, если ответить на вопрос о сходимости ряда с помощью данного признака нельзя. (Ответ округлить до тысячных.)

**6.** Найти наименьшее $n$, для которого сумма ряда

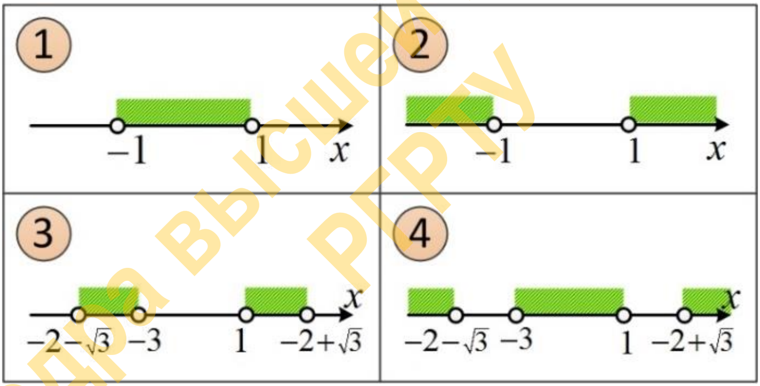
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n!}$ равна приближенно $S_n$ с погрешностью $\varepsilon = 0,01$ .

**7.** Исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{5^n + 1}$;   2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+3}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n^5}$;   4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^7}$.

**8.** Указать по рисунку номер области сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{(x^2 + 4x + 2)^n}$.




**9.** Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-6)^n}{(n+5) 7^n}$ .

**10.** Разложить функцию $y = \ln(5x+3)$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x + \frac{2}{5}\right)$.

**1.** $\ln(5x+3)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(5x+2)^n}{n}$, где $x\in(-1;1]$.

**2.** $\ln(5x+3)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}5^n\left(x+\dfrac{2}{5}\right)^n}{n}$, где $x\in\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{3}{5}\right]$.

**3.** $\ln(5x+3)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n!}$, где $x\in\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{3}{5}\right]$.

**4.** $\ln(5x+3)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}5^nx^n}{n}$, где $x\in(-1;1]$.

## Ряды Фурье

**Формальный ряд Фурье:**

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell},$$

где $x\in[a,b]$, $\ell=\dfrac{b-a}{2}$ – полупериод, $a_0=\dfrac{1}{\ell}\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx$,

$$a_n=\frac{1}{\ell}\cdot\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ b_n=\frac{1}{\ell}\cdot\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx.$$

**Признак Дирихле:** пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a;b]$, т.е. имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода;

2) $f(x)$ кусочно-монотонна на отрезке $[a;b]$.

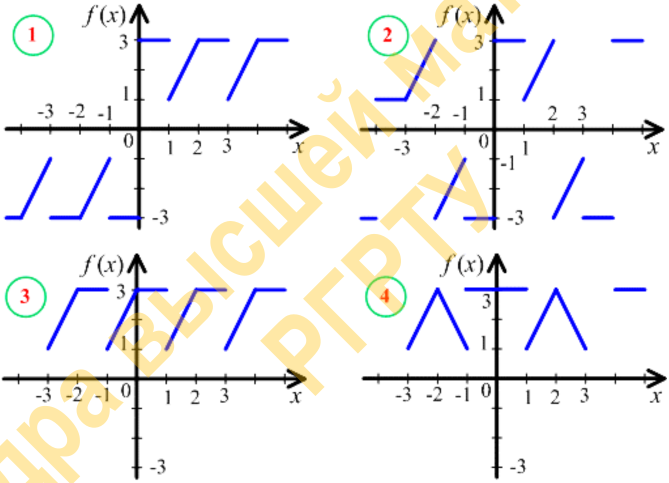
Тогда на отрезке $[a;b]$ формальный ряд Фурье функции $f(x)$ сходится, причем его сумма $S(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $S(x)=f(x)$, если $x$ – точка непрерывности функции $f(x)$;

2) $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, если $x$ – точка разрыва $f(x)$.

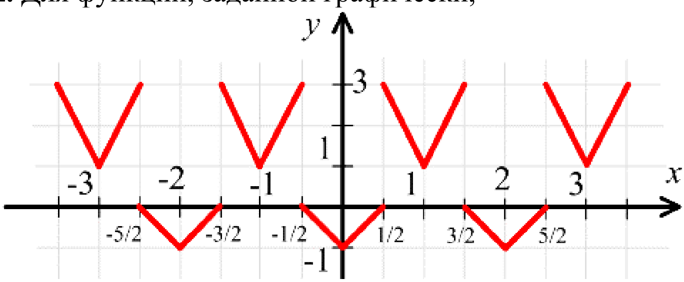
## Тест 1

**1.** Для заданной функции $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[0;1),\\ 2x-1, & x\in[1;2]\end{cases}$ указать нечетное периодическое продолжение и наименьший положительный период.




(В ответе укажите номер верного чертежа и период получившейся функции без пробелов и запятых, например 41.)

**2.** Для функции, заданной графически,



обозначим через $S(x)$ сумму ряда Фурье по косинусам, тогда определите значения $S\left(\frac{3}{4}\right)$, $2\cdot S\left(\frac{1}{2}\right)$, $-4\cdot S\left(-\frac{1}{2}\right)$. (В ответе приведите искомые значения в указанном порядке без пробелов и запятых, например 3-10.)

**3.** В разложении в ряд Фурье $2\pi$ -периодической функции $f(x)=3\sin 2x$ при $x\in[-\pi;\pi]$ коэффициент $\pi\cdot a_4$ равен ... .

**4.** При вычислении коэффициента $a_2$ разложения в ряд Фурье по косинусам функции $y=e^{\sqrt{x}}$ на отрезке $[1;3]$ используют формулу...:

**1)** $\int\limits_1^3 e^{\sqrt{x}}\cos\pi x dx$;

**2)** $\int\limits_1^3 e^{\sqrt{x}}\sin\pi x dx$;

**3)** $\frac{2}{3}\int\limits_1^3 e^{\sqrt{x}}\cos\frac{2\pi x}{3}dx$;

**4)** $\frac{2}{3}\int\limits_1^3 e^{\sqrt{x}}\sin\frac{2\pi x}{3}dx$;

**5)** $2\int\limits_1^3 e^{\sqrt{x}}\cos 2\pi x dx$;

**6)** $2\int\limits_1^3 e^{\sqrt{x}}\sin 2\pi x dx$.

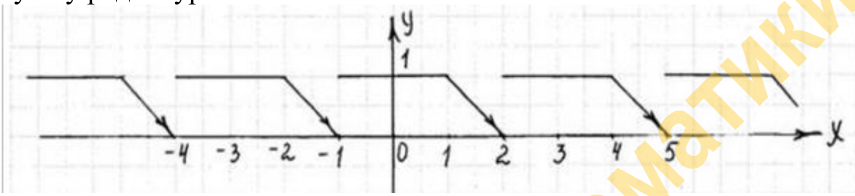
**5.** Для функции $f(x)=x$, $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$, был составлен ряд Фурье общего вида с суммой $S(x)$. Чему равно значение выражения $S\left(\frac{1}{4}\right)+S\left(\frac{1}{2}\right)$?

**6.** Для функции $f(x)=\frac{\pi-x}{4}$, $0\le x\le\pi$, найти коэффициент $a_3$ разложения в ряд Фурье по косинусам.

**7.** Для функции $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in[-\pi;0),\\ 0, & x\in[0;\pi]\end{cases}$ найти коэффициент $a_5$ разложения в ряд Фурье общего вида. (Выберите один вариант ответа.)

**1.** 0. **2.** $-\dfrac{1}{25\pi}$. **3.** $\dfrac{2}{25\pi}$. **4.** $\dfrac{-2}{25\pi}$.

**8.** Для функции, заданной графически, обозначим $S(x)$ - сумму ряда Фурье.




Найти значение выражения $S(1,5)+S(2)$.

**9.** Если для функции $f(x)=2-x^2$ известен ряд Фурье общего вида $\dfrac{2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{-4}{\pi^2 n^2}\cos\pi nx+\dfrac{4}{\pi n}\sin\pi nx\right)$ при $x\in[0;\,2]$, то его комплексная форма записи имеет вид ... . (Выберите один вариант ответа.)

**1.** $\dfrac{2}{3}+\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(\dfrac{-4}{\pi^2 n^2}\right)(1-i\pi n)e^{\pi nix}$.

**2.** $\dfrac{1}{3}+\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi^2 n^2}\right)(-1+i\pi n)e^{\pi nix}$.

**3.** $\dfrac{2}{3}+\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(\dfrac{-2}{\pi^2 n^2}\right)(1+i\pi n)e^{\pi nix}$.

**4.** $\dfrac{1}{3}+\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(\dfrac{4}{\pi^2 n^2}\right)(-1+i\pi n)e^{\pi nix}$.

**5.** $\dfrac{2}{3}+\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(\dfrac{-2i}{\pi^2 n^2}\right)(1+i\pi n)e^{\pi nix}$.

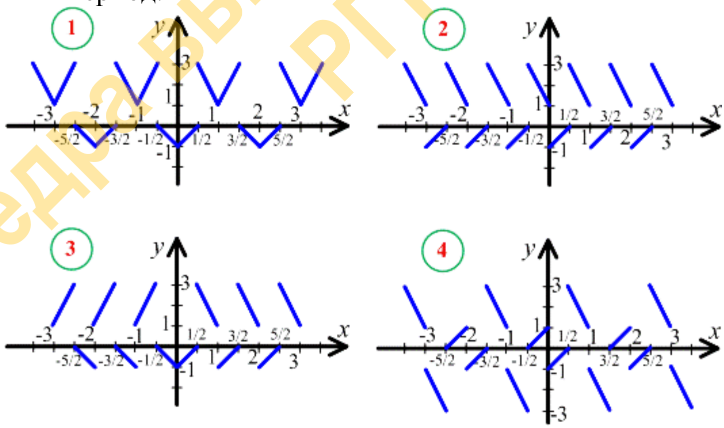
**10.** Зная, что $\Phi\left(e^{-|x|}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{1}{1+\omega^2}$, и применив теорему смещения $\Phi\left(e^{i\alpha x} f(x)\right)=F(\omega-\alpha)$, можно показать, что преобразование Фурье функции $g(x)=e^{-|x|-ix}$ есть…:

**1)** $G(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{1}{1+(\omega-1)^2}$; **2)** $G(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{1}{1+\omega^2-i^2}$;

**3)** $G(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{1}{1+\omega^2+i^2}$; **4)** $G(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{1}{1+(\omega+1)^2}$.

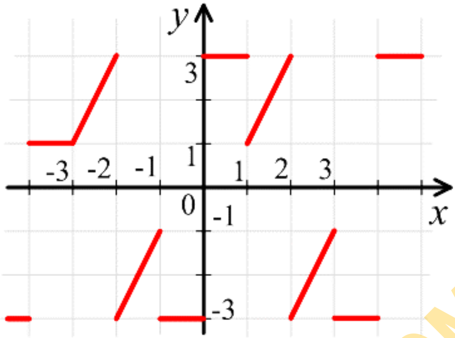
## Тест 2

**1.** Для заданной функции $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right),\\ 5-4x, & x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]\end{cases}$ указать четное периодическое продолжение и наименьший положительный период.




(В ответе укажите номер верного чертежа и период получившейся функции без пробелов и запятых, например 41.)

**2.** Для функции, заданной графически,




обозначим через $S(x)$ сумму ряда Фурье по синусам, тогда определите значения $S(-1)$, $S\left(\frac{3}{2}\right)$, $S(0)$. (В ответе приведите искомые значения в указанном порядке без пробелов и запятых, например 3-10.)

**3.** В разложении в ряд Фурье $2\pi$-периодической функции $f(x) = 3x^2 + 4$ при $x \in [-\pi; \pi]$ коэффициент $\pi \cdot b_2$ равен … .

**4.** При вычислении коэффициента $a_5$ разложения в ряд Фурье по косинусам функции $y = \sin^2 x$ на отрезке $[0; \pi]$ используют формулу …:

**1)** $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \cos 5x dx$;

**2)** $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \sin 5x dx$;

**3)** $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \cos 5x dx$;

**4)** $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \cos 5x dx$;

**5)** $\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \cos 5\pi x dx$;

**6)** $\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \cos 5\pi x dx$.

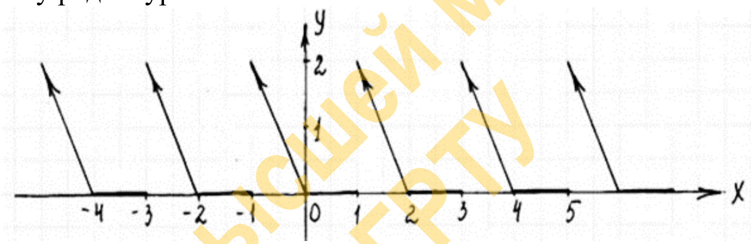
**5.** Для функции $f(x) = \pi - 2x$, $0 \le x \le \pi$ был составлен ряд Фурье по косинусам с суммой $S(x)$. Чему равно значение выражения $S(0) + S(\pi)$?

**6.** Для функции $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in[-\pi;0),\\ 0, & x\in[0;\pi]\end{cases}$ найти коэффициент $a_7$ разложения в ряд Фурье общего вида.

**7.** Для функции $y=\begin{cases}-1, & x\in[0;1),\\ 2, & x\in[1;2)\end{cases}$ найти коэффициент $b_9$ разложения в ряд Фурье общего вида. (Выберите один вариант ответа.)

**1.** $-\dfrac{2}{3\pi}$ **2.** $\dfrac{1}{3\pi}$ **3.** $\dfrac{2}{3\pi}$ **4.** 0

**8.** Для функции, заданной графически, обозначим $S(x)$ - сумму ряда Фурье.




Найти значение выражения $S(1,5)+S(1)$.

**9.** Если известен ряд Фурье общего вида $\dfrac{\pi^2}{3}-4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$ для функции $f(x)=x^2$ при $x\in[-\pi;\pi]$, то его комплексная форма записи имеет вид ...:

**1)** $\dfrac{\pi^2}{3}-4i\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}e^{nix}$ ; **2)** $\dfrac{\pi^2}{3}-4\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}e^{nix}$ ;

**3)** $\dfrac{\pi^2}{3}-2i\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}e^{nix}$ ; **4)** $\dfrac{\pi^2}{3}+2\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}e^{nix}$ ;

**5)** $\dfrac{\pi^2}{3}-2\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}e^{nix}$ .

**10.** Зная, что $\Phi\left(e^{-|x|}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{1}{1+\omega^2}$ , и применив теорему подобия $\Phi\left(f(\alpha x)\right)=\dfrac{1}{\alpha}\cdot F\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$, можно показать, что преобразование Фурье функции $g(x)=e^{-\left|\frac{x}{3}\right|}$ есть …:

**1)** $G(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{3}{1+9\omega^2}$ ;

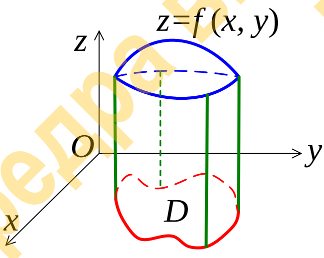
**2)** $G(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{3}{1+3\omega^2}$ ;

**3)** $G(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{1}{3+27\omega^2}$ ;

**4)** $G(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{3}{9+\omega^2}$ .

## Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

### Двойной интеграл (ДИ) – $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

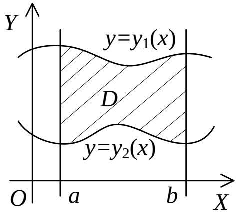



Для цилиндрического тела:

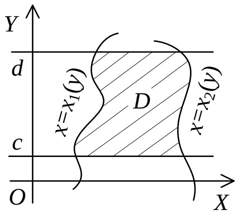
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=V_{цил.тело}\ .$$

Если $f(x,y)=1$, то площадь плоской области $S_D=\iint\limits_D dxdy$ .

Если $\mu(x,y)$ – плотность пластины $D$, то ее масса $m_D=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$ .




$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$




$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Если $D = D_1 \bigcup D_2$ и $D_1 \bigcap D_2 = \varnothing$ (область $D$ разбита на две части), то $\iint\limits_D fdxdy = \iint\limits_{D_1} fdxdy + \iint\limits_{D_2} fdxdy$.

При замене переменных в ДИ область $D$ переходит в область $D^*$, а функция $f(x,y)$ в функцию $f^*(u,v)$. Наиболее распространенными заменами являются следующие.

**1. Полярная система координат (ПСК):**

$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ где $r \ge 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $|J| = r$, при этом

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f^*(r,\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi.$$

В ПСК переходят, если область $D$ – круг или его часть. Полезно помнить, что $x^2 + y^2 = r^2$.

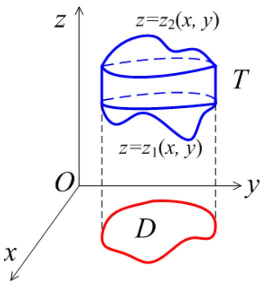
**2. Обобщенная ПСК (ОПСК):**

$\begin{cases} x = a\cdot r\cos\varphi, \\ y = b\cdot r\sin\varphi, \end{cases}$ где $r \ge 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $|J| = abr$, при этом

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f^*(r,\varphi)\cdot abr\cdot drd\varphi.$$

В ОПСК переходят, если область $D$ – эллипс или его часть. Полезно помнить, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$.

**Тройной интеграл (ТИ)** – $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$




Тело $T$:

$$\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y), \\ (x,y)\in D_{xy}. \end{cases}$$

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Если $\mu = f(x,y,z)$ – плотность тела $T$, то его масса – $m_T=\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$.

Если $\mu=1$, то объем тела – $V_T=\iiint\limits_T dxdydz$.

При замене переменных в ТИ тело $T$ переходит в тело $T^*$, а функция $f(x,y,z)$ в функцию $f^*(u,v,w)$. Наиболее распространенными заменами являются следующие.

**1. Цилиндрическая система координат (ЦСК)**:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases}$$ где $r\ge 0$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $|J|=r$, при этом

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{T^*} f^*(r,\varphi,z)\cdot r\cdot drd\varphi dz .$$

В ЦСК переходят, если тело $T$ ограничено цилиндром, параболоидом или конусом, при этом $x^2+y^2=r^2$.

**2. Сферическая система координат (ССК)**:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\cos\theta, \\ z = r\sin\theta, \end{cases} \text{где } r \geq 0,\ \varphi \in [0; 2\pi],\ \theta \in [0; \pi],$$

$$|J| = r^2 \sin\theta,$$

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T^*} f^*(r,\varphi,\theta)\cdot r^2\sin\theta\cdot drd\varphi d\theta.$$

В ССК переходят, если тело $T$ ограничено сферой или ее частью, при этом $x^2+y^2+z^2=r^2$.

**Криволинейный интеграл (КИ) 1 рода** – $\int\limits_L f(x,y)d\ell$.

Далее считаем, что $f(x,y)$ непрерывна на гладкой кривой $L$.

Если $\mu(x,y)$ – плотность линии $L$, то ее масса $m_L = \int\limits_L \mu(x,y)d\ell$, где $d\ell$ – дифференциал длины дуги. Если $\mu(x,y)=1$, то длина линии $L$ – это $\ell_L = \int\limits_L d\ell$.

Способ вычисления КИ 1 рода зависит от способа задания линии $L$.

**1.** Если линия $L$ задана в ДСК $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_a^b f(x, y(x))\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}dx.$$

**2.** Если линия $L$ задана параметрически:

$$L:\quad x = x(t),\ y = y(t),\ t\in[\alpha;\beta], \text{ то}$$

$$\int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\cdot\sqrt{(x'_t)+(y'_t)^2}dt.$$

**3.** Если линия $L$ задана в ПСК $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, то

$$\int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{\rho^2+\left(\rho'\right)^2}\,d\varphi.$$

**Криволинейный интеграл (КИ) 2 рода –** $\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$

Далее считаем, что функции $P$, $Q$ и $R$ непрерывны на гладкой кривой $L$.

Если задана сила $\bar{F}=\left(P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\right)$, то работа этой силы по перемещению материальной точки вдоль линии $L$ равна: $A=\int\limits_L \bar{F}\cdot d\bar{r}=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$.

Способ вычисления КИ 2 рода зависит от способа задания линии $L$.

**1.** Если линия на плоскости $L$ задана в ДСК $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\left(P\left(x,f(x)\right)+Q\left(x,f(x)\right)\cdot f'\right)dx.$$

**2.** Если линия $L$ в пространстве задана параметрически:

$L:\quad x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, то

$$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_\alpha^\beta\left(P^*(t)\cdot x'(t)+Q^*(t)\cdot y'(t)+R^*(t)\cdot z'(t)\right)dt.$$

Если плоская кривая $L$ замкнута и существуют непрерывные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то верна ***формула Грина***:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Если $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, то КИ 2 рода не зависит от пути интегрирования $L$, а зависит только от начальной $\left(x_0;y_0\right)$ и конечной

$(x_1;y_1)$ точек:

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

**Поверхностный интеграл (ПИ) 1 рода –** $\iint\limits_Q f(x,y,z)dq$

Если $\rho(x,y,z)$ – плотность поверхности $Q$, то ее масса $m_Q=\iint\limits_Q \rho(x,y,z)dq$, где $dq$ – дифференциал элемента площади. Если $\rho(x,y,z)=1$, то площадь поверхности $Q$: $S_Q=\iint\limits_Q dq$.

**1.** Если поверхность $Q$ задана в ДСК: $z=z(x,y)$, $(x;y)\in D_{xy}$, где $D_{xy}=np_{xOy}Q$, то:

$$\iint\limits_Q f(x,y,z)dq=\iint\limits_{D_{xy}} f\left(x,y,z(x,y)\right)\cdot\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy\,.$$

**2.** Если поверхность $Q$ задана в ДСК: $y=y(x,z)$, $(x;z)\in D_{xz}$, где $D_{xz}=np_{xOz}Q$, то:

$$\iint\limits_Q f(x,y,z)dq=\iint\limits_{D_{xz}} f\left(x,y(x,z),z\right)\cdot\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2+\left(y'_z\right)^2}\,dxdz\,.$$

**3.** Если поверхность $Q$ задана в ДСК: $x=x(y,z)$, $(y;z)\in D_{yz}$, где $D_{yz}=np_{yOz}Q$, то:

$$\iint\limits_Q f(x,y,z)dq=\iint\limits_{D_{yz}} f\left(x(y,z),y,z\right)\cdot\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+\left(x'_z\right)^2}\,dydz\,.$$

**Поверхностный интеграл (ПИ) 2 рода**

$$\iint\limits_Q P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy=$$

$$=\iint\limits_Q\left(P\cdot\cos\alpha+Q\cdot\cos\beta+R\cdot\cos\gamma\right)dq\,,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы углов между вектором нормали к поверхности $Q$ и координатными осями.

Для замкнутой поверхности верна ***формула Остроградского – Гаусса***:

$$\oiint\limits_{Q} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{T} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz .$$

Для замкнутой кривой $L$ верна ***формула Стокса***:

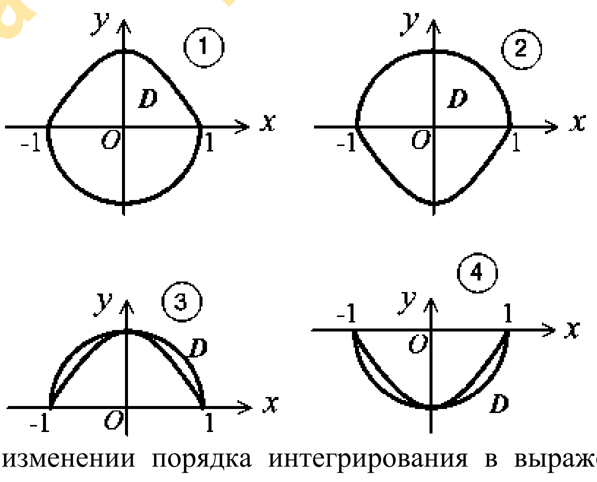
$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{Q} \left( R'_y - Q'_z \right) dydz + \left( P'_z - R'_x \right) dxdz + \left( Q'_x - P'_y \right) dxdy ,$$

где $Q$ – любая поверхность с границей $L$. Самый простой вид такой поверхности – область, лежащая в плоскости (плоская область).

## Тест 1

**1.** Для интеграла $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$ укажите номер области интегрирования.



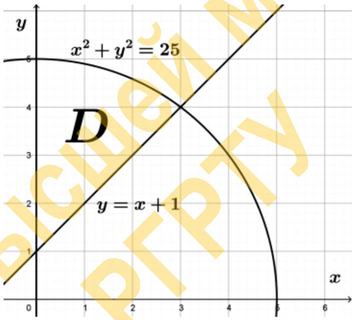

**2.** При изменении порядка интегрирования в выражении

$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$ получим интеграл вида:

**1)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2-x^2}}^{x} f(x,y)dy$; **2)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$;

**3)** $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$; **4)** $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{\sqrt{2-x^2}}^{x} f(x,y)dy$.

**3.** Если в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где область $D$ изображена на рисунке, расставить пределы интегрирования, то получим:




**1)** $\int\limits_1^4 dy \int\limits_0^{y-1} f(x,y)dx + \int\limits_4^5 dy \int\limits_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$;

**2)** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_1^5 f(x,y)dy$; **3)** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$;

**4)** $\int\limits_1^4 dy \int\limits_{y-1}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_4^5 dy \int\limits_{\sqrt{25-y^2}}^{0} f(x,y)dx$;

**5)** $\int\limits_{x+1}^{\sqrt{25-x^2}} dy \int\limits_0^3 f(x,y)dx$; **6)** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x+1}^{x^2+y^2} f(x,y)dy$.

**4.** Если в тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$, где область $T$ ограничена поверхностями $2x+3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, расставить границы интегрирования, то получим:

**1)** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^6 f(x,y,z)dz$;   **2)** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{2-\frac{2x}{3}}^{2} dy \int\limits_0^6 f(x,y,z)dy$;

**3)** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{3-\frac{3y}{2}}^{3} dx \int\limits_0^{6-2x-3y} f(x,y,z)dz$;

**4)** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2-\frac{2x}{3}} dy \int\limits_0^{6-2x-3y} f(x,y,z)dz$;

**5)** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{3-\frac{3y}{2}} dx \int\limits_0^{6-2x-3y} f(x,y,z)dz$;

**6)** $\int\limits_0^{6-2x-3y} dz \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2-\frac{2x}{3}} f(x,y,z)dy$.

**5.** Значение интеграла $\iiint\limits_V (3x+4y)dxdydz$, где $V: x=1$, $y=0$, $y=x$, $z=0$, $z=5\left(x^2+y^2\right)$, равно … .

**6.** Если в двойном интеграле $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$, где область

$$D:\ \ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ \ y \ge -\frac{x}{\sqrt{3}},\ \ y \le \sqrt{3}x,$$

перейти в ПСК (полярную систему координат), то получим интеграл вида:

**1)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{1}^{4} (\cos\varphi + \sin\varphi)\rho d\rho$; **2)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{1}^{2} \left(\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\rho^2}\right) d\rho$;

**3)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{1}^{2} \left(\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\rho}\right) d\rho$; **4)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{1}^{2} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\rho$;

**5)** $\int\limits_{1}^{2} d\rho \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi$; **6)** $\int\limits_{1}^{2} d\rho \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\rho}\right) d\varphi$.

**7.** Если при вычислении массы тела $T$, ограниченного поверхностями $6x \le x^2 + y^2 \le 10x$, $0 \le z \le \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, с плотностью $\mu = y$, перейти в ЦСК (цилиндрическую систему координат), то получим повторный интеграл вида:

**1)** $m = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{6\cos\varphi}^{10\cos\varphi} d\rho \int\limits_{0}^{\sqrt{36-\rho}} \rho^2 \sin\varphi dz$;

**2)** $m = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{6\sin\varphi}^{10\sin\varphi} d\rho \int\limits_{0}^{\sqrt{36-\rho^2}} \rho\cos\varphi dz$;

**3)** $m = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{6\cos\varphi}^{10\cos\varphi} d\rho \int\limits_{0}^{\sqrt{36-\rho^2}} \rho\sin\varphi dz$;

**4)** $m = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{6\cos\varphi}^{10\cos\varphi} d\rho \int\limits_{0}^{\sqrt{36-\rho^2}} \rho^2 \sin\varphi dz$.

**8.** Значение интеграла $\iint\limits_{D} (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dxdy$, где $D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$, равно … .

**9.** Криволинейный интеграл $\int\limits_{L} \frac{z^2}{x^2+y^2}\,d\ell$, где $L$ - первый виток винтовой линии $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2t$, преобразуется к определенному интегралу:

**1)** $\int\limits_{0}^{2\pi} 2\sqrt{2}t^2 dt$; **2)** $\int\limits_{0}^{2\pi} t^2 dt$; **3)** $\int\limits_{0}^{2\pi} t^2 \cdot 2\sqrt{1+t^2}\,dt$;

**4)** $\int\limits_{0}^{2\pi} t^2 \cdot 4\cos t \sin t\,dt$; **5)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 4t^2 \cdot \sqrt{1+t^2}\,dt$; **6)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4t^2}{\cos t + \sin t}\,dt$.

**10.** Если для поверхностного интеграла $\iint\limits_{\Omega} (y - x - z)\,dS$ поверхность $\Omega$ – часть плоскости $x + y + z = -2$, ограниченную координатными плоскостями, спроектировать на плоскость $Oxz$, то получим повторный интеграл вида:

**1)** $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-2-x}^{0} (2x+2z+2)dz$; **2)** $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{2+x} \sqrt{3}(-x-z-2)dz$;

**3)** $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-2-x}^{0} \sqrt{3}(-2x-2z-2)dz$; **4)** $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-2-x}^{0} (-2x-2z-2)dz$;

**5)** $\int\limits_{-2}^{0} dz \int\limits_{-2-z}^{0} \sqrt{3}(-2x-2z-2)dx$; **6)** $\int\limits_{-2}^{0} dz \int\limits_{-2-z}^{0} (-2x-2z-2)dx$.

**11.** Если к криволинейному интегралу $\oint\limits_{L} (3y^2 - x^2)dx + (x^2 + 2xy)dy$ по замкнутому контуру $L$, составленному из отрезков прямых $y = -3x$, $y = 0$, $x = -1$, применить формулу Грина, то получим повторный интеграл вида:

**1)** $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-3x}^{0} (2x+8y)dy$; **2)** $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{-3x} (2x-4y)dy$;

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{-3x} (2x-4y)dy$;

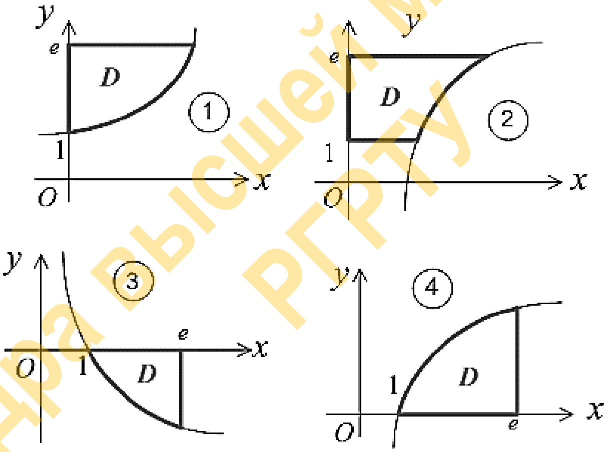
4) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{-1}^{-\frac{y}{3}} (2x-4y)dx$;

5) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{-1}^{-\frac{y}{3}} (2x+8y)dx$;

6) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{-\frac{y}{3}}^{-1} (2x+8y)dx$.

## Тест 2

**1.** Для интеграла $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy$ укажите номер области интегрирования.




**2.** При изменении порядка интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{(x-2)^2} f(x,y)dy$ получим:

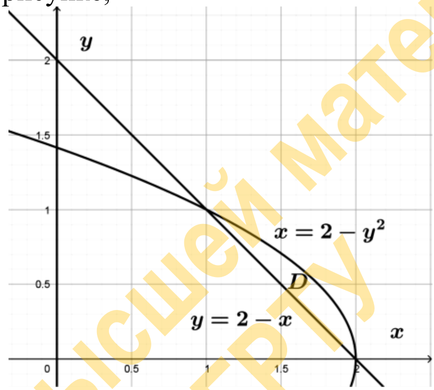
1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2+\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$;

2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} f(x,y)dx$;

**3)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} f(x,y)dx$;  **4)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} f(x,y)dx$;

**5)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{x^2}^{(x-2)^2} f(x,y)dx$;  **6)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{(x-2)^2}^{x^2} f(x,y)dx$.

**3.** Если в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где область $D$ изображена на рисунке,




расставить пределы интегрирования, то получим:

**1)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{2-y^2} f(x,y)dx$;  **2)** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$;

**3)** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\sqrt{2-x}}^{2-x} f(x,y)dy$;  **4)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y^2}^{2-y} f(x,y)dx$;

**5)** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy$;  **6)** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{2-y^2} f(x,y)dy$.

**4.** Если в тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$, где область $T$ ограничена поверхностями $x^2+y^2=4$, $y\le 0$, $z=9-y^2$, $z=0$, расставить границы интегрирования, то получим:

**1)** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{9-y^2}^0 f(x,y,z)dz$ ; **2)** $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^0 dy \int\limits_0^{9-y^2} f(x,y,z)dz$ ;

**3)** $\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_0^{9-y^2} f(x,y,z)dz$ ; **4)** $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{9-y^2}^0 f(x,y,z)dy$ ;

**5)** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{9-y^2}^0 f(x,y,z)dz$ ; **6)** $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^0 dy \int\limits_0^{9-y^2} f(x,y,z)dz$ .

**5.** Значение интеграла $\iiint\limits_V ydxdydz$, где $V: x=1, y=0,$ $y=15x, z=0, z=xy$, равно … .

**6.** Если в двойном интеграле $\iint\limits_D (3x+y)dxdy$, где область $D: x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, x\geq 0, y\geq\sqrt{3}x$, перейти в ПСК (полярную систему координат), то получим интеграл вида:

**1)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} (3\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)d\rho$ ;

**2)** $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} (3\cos\varphi+\sin\varphi)d\rho$ ;

**3)** $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} (3\rho^2\cos\varphi+\rho^2\sin\varphi)d\rho$ ;

**4)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} (3\rho^2\cos\varphi+\rho^2\sin\varphi)d\rho$ ;

**5)** $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \left(3\rho^2\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi\right)d\rho$;

**6)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \left(3\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi\right)d\rho$.

**7.** Если при вычислении объема тела $T$, ограниченного поверхностями $25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36$, $-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le 0$, $y \ge 0$, перейти в ССК (сферическую систему координат), то получим тройной интеграл вида:

**1)** $V = \int\limits_{25}^{36} d\rho \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \rho^2 \sin\theta d\theta$; **2)** $V = \int\limits_{5}^{6} d\rho \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \rho^2 \sin\theta d\theta$;

**3)** $V = \int\limits_{5}^{6} d\rho \int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \rho^2 \sin\theta d\theta$; **4)** $V = \int\limits_{5}^{6} d\rho \int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \rho^2 \sin\theta d\theta$;

**5)** $V = \int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{5}^{6} d\rho \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \rho^2 \sin\theta d\theta$; **6)** $V = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} d\theta \int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{5}^{6} \rho^2 \sin\theta d\rho$.

**8.** Значение выражения $60 \cdot \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} (y-x)dx$ равно … .

**9.** Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} xy^2 d\ell$, где $AB$ – часть дуги линии $y = x^3$ между точками $A(0;0)$ и $B(1;1)$, преобразуется к определенному интегралу:

**1)** $\int\limits_{0}^{1} x^5\sqrt{1+9x^4}dx$; **2)** $\int\limits_{0}^{1} x^7\sqrt{1+9x^4}dx$; **3)** $\int\limits_{0}^{1} x^5\sqrt{1+9x^2}dx$;

**4)** $\int\limits_0^1 x^7\sqrt{1+3x^2}\,dx$; **5)** $\int\limits_0^1 x^6\sqrt{1+3x^2}\,dx$; **6)** $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+3x^2}\,dx$.

**10.** Если для поверхностного интеграла $\iint\limits_{\Omega}(6x+3y-z)dS$ поверхность $\Omega$ – часть плоскости $x+3y+z=1$, лежащую в первом октанте, спроектировать на плоскость $Oyz$, то получим повторный интеграл вида:

**1)** $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} dy \int\limits_0^{1-3y} \sqrt{11}(6-15y-7z)dz$; **2)** $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} dy \int\limits_0^{1-3y} \sqrt{5}(6x+3y-z)dz$;

**3)** $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} dy \int\limits_0^{1} \sqrt{7}(1-2z)dz$; **4)** $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} dy \int\limits_0^{1} \sqrt{13}(6-21y+5z)dz$;

**5)** $\int\limits_0^{1} dz \int\limits_0^{\frac{1-z}{3}} \sqrt{11}(6-15y-7z)dy$; **6)** $\int\limits_0^{1} dz \int\limits_0^{\frac{1-z}{3}} \sqrt{11}(6x+3y-z)dy$.

**11.** Если к криволинейному интегралу $\oint\limits_L x^2ydx+(y^2+2x)dy$ по замкнутому контуру $L$, составленному из отрезков кривых $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x^2$, применить формулу Грина, то получим повторный интеграл вида:

**1)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{y^3} (2+x^2)dx$; **2)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{y^3} (2-x^2)dx$; **3)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} (2+x^2)dy$;

**4)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{x^2} (2-x^2)dy$; **5)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^3}^{\sqrt{y}} (2-x^2)dx$; **6)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} (2-x^2)dy$.

## Теория поля

### Скалярное поле

| | |
|---|---|
| $u = u(M) = u(x,y,z)$ | $u = u(x,y)$ плоское |
| Поверхности уровня $u(x,y,z) = C$ | Линии уровня $u(x,y) = C$ |

**Производная по направлению** вектора $\overline{\ell}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{\ell}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \cos\gamma,$$

где $\overline{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$, $\cos\alpha = \frac{\ell_1}{|\overline{\ell}|}$, $\cos\beta = \frac{\ell_2}{|\overline{\ell}|}$, $\cos\gamma = \frac{\ell_3}{|\overline{\ell}|}$.

**Градиент**: $\operatorname{grad} u = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \overline{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \overline{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \overline{k}$.

Производная по направлению: $\frac{\partial u}{\partial \overline{l}} = \left(\operatorname{grad} u, \overline{l}\right)$.

$$\max \frac{\partial u}{\partial \overline{l}} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

### Векторное поле

$$\overline{a} = \overline{a}(M) = P(x,y,z)\,\overline{i} + Q(x,y,z)\,\overline{j} + R(x,y,z)\,\overline{k}$$

**Векторные линии:** $\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$.

**Поток:**

$$\Pi_S(\overline{a}) = \iint_S (\overline{a}, \overline{n}^0)\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

Если $S$: $z = z(x,y)$, где $(x,y) \in D_{XY}$, то

$$\Pi_S(\overline{a}) = \pm \iint_{D_{XY}} (\overline{a}, \overline{n}^0)\Big|_{z=z(x,y)} \cdot \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}, \text{ где } \overline{n}^0 = \frac{\operatorname{grad} S}{|\operatorname{grad} S|}.$$

**Теорема Остроградского – Гаусса:**

$$\Pi_S(\bar{a}) = \oiint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \bar{a}\, dv,$$

где $\operatorname{div} \bar{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$, $S$ – граница $\Omega$.

**Циркуляция:**

$$Ц = \oint_L (\bar{a}, \bar{\tau}^0) d\ell = \oint_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \oint_L P dx + Q dy + R dz.$$

Если $L$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $t \in [\alpha; \beta]$, то

$$Ц = \int_\alpha^\beta \left( P^*(t) \cdot x' + Q^*(t) \cdot y' + R^*(t) \cdot z' \right) dt.$$

**Теорема Стокса:** $Ц = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{n}^0) dS$,

где $\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$, $L$ – граница $S$.

**Виды векторных полей**

**Соленоидальное:** $\operatorname{div} \bar{a} = 0$, $П_S(\bar{a}) = 0$, где поверхность $S$ замкнута.

**Потенциальное (безвихревое):** $\operatorname{rot} \bar{a} = \bar{0}$.

**1.** $\bar{a} = \operatorname{grad} \varphi$, $\varphi$ – потенциал, его можно найти по формуле

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z) dz + C.$$

**2.** $Ц = \oint_L (\bar{a}, d\bar{r}) = 0$.

**3.** $\int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r}) = +\varphi(x_B, y_B, z_B) - \varphi(x_A, y_A, z_A)$.

**Гармоническое:** $\operatorname{rot} \bar{a} = \bar{0}$, $\operatorname{div} \bar{a} = 0$, причем $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

## Тест 1

**1.** Градиент скалярного поля $u = \frac{x}{z} - \frac{z}{y}$ в точке $M_0(1;2;1)$ равен …:

**1)** $\frac{1}{4}\bar{i} + \frac{1}{4}\bar{j} + \bar{k}$ ;

**2)** $\frac{1}{4}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} - \frac{3}{4}\bar{k}$ ;

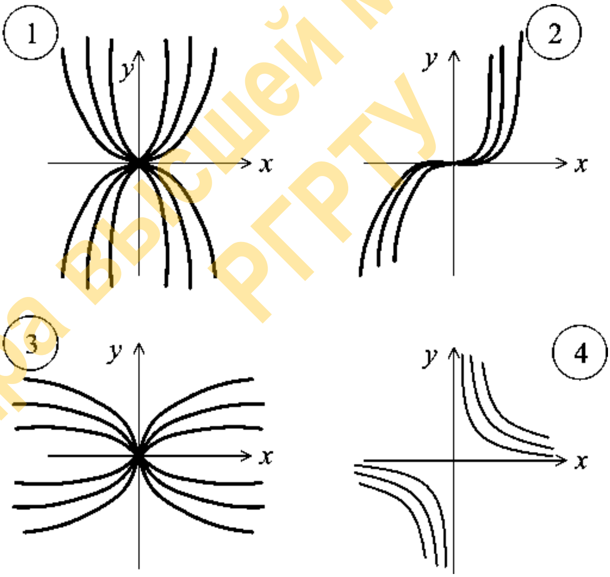
**3)** $\bar{i} + \frac{1}{4}\bar{j} - \frac{3}{2}\bar{k}$ ;

**4)** $\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} + \frac{3}{4}\bar{k}$ ;

**5)** $\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ;

**6)** $\bar{i} - \frac{1}{4}\bar{j} - \frac{3}{2}\bar{k}$ .

**2.** Линии уровня скалярного поля $u = \frac{y^2}{x}$ имеют вид … .




**3.** Для каждого векторного поля определить его вид:

$$\bar{a} = (xz + 2xy)\bar{i} - (yz + y^2)\bar{j} + (3xy + x^2)\bar{k} \ ;$$

$$\bar{b} = (z^2 - xy)\bar{i} + (y^3 + xyz)\bar{j} + (xyz + z^2)\bar{k} \ .$$

**4.** Поток $\Pi$ векторного поля $\bar{a} = 5z\bar{i} + z\bar{j} + (3y - 5x)\bar{k}$

через часть поверхности $\Omega$: $x^2+y^2+z^2=4$ $(y\ge 0)$ может быть сведен к вычислению двойного интеграла.

**1.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}} 4z\,dxdz$. **2.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{4-x^2-z^2}\,dxdz$.

**3.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}} \dfrac{4z}{\sqrt{4-x^2-z^2}}\,dxdz$. **4.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}} 4x\,dxdz$.

**5.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}} 2z\sqrt{4-x^2-z^2}\,dxdz$. **6.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}} \dfrac{2z}{\sqrt{4-x^2-z^2}}\,dxdz$.

**5.** Поток векторного поля $\bar{a}=(\frac{x}{2}+y)\bar{j}+z\bar{k}$ через часть плоскости $P$: $x+2y+2z=2$, лежащей в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью $Oz$), равен… .

**6.** Утроенный поток $\Pi$, вычисленный по формуле Остроградского – Гаусса, векторного поля
$\bar{a}=(3z^2+x)\bar{i}+(e^x-2y)\bar{j}+(2z-xy)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $\Omega$: $x+2y-z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ равен… .

**7.** Потенциал $\varphi$ для векторного поля
$\bar{a}=(2xy-z^2)\bar{i}+(x^2+2yz)\bar{j}+(y^2-2xz)\bar{k}$ равен:

**1)** $\varphi=2x^2y+2y^2z-xz^2+C$; **2)** $\varphi=x^2y+y^2z-2x^2z^2+C$;

**3)** $\varphi=x^2y^2+y^2z^2-x^2z^2+C$; **4)** $\varphi=x^2y+y^2z-xz^2+C$.

**8.** Если $C$ – это циркуляция поля $\bar{a}=z\bar{i}+y^2\bar{j}-x\bar{k}$ вдоль контура $L$: $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sin t \\ z=\sqrt{2}\cos t \end{cases}$, то число $\dfrac{C}{\pi}$ равно… .

**9.** Если $C$ – циркуляция, вычисленная по формуле Стокса, векторного поля $\bar{a}=x^3z\bar{i}+(3x+y^2)\bar{j}+yz^3\bar{k}$ по замкнутому контуру $L$: $x^2+y^2=(z+3)^2$, $z=-5$, то число $\dfrac{C}{\pi}$ равно… .

**10.** Для векторного поля $\overline{a} = xyz\overline{i} + (x^2 - y^2)\overline{j} + xz^2\overline{k}$ величина $\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\overline{a}\right)$ равна:

**1)** $2yz + 2xz - 2xy$; **2)** невозможно вычислить;

**3)** $2z\overline{i} + (z-2)\overline{j} + y\overline{k}$; **4)** $0$;

**5)** $(xy - z^2)\overline{j} + (2x - xz)\overline{k}$; **6)** $2z\overline{i} - (z-2)\overline{j} + y\overline{k}$.

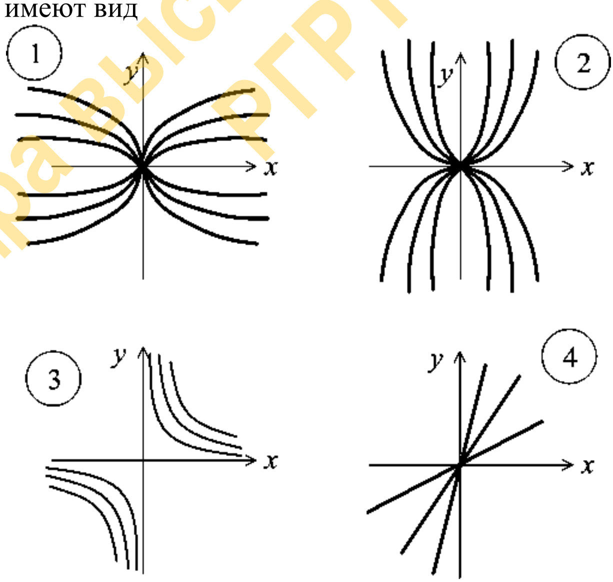
### Тест 2

**1.** Для скалярного поля $u = xe^y + ye^x - z^2$ производная в точке $M_0(3;0;2)$ по направлению к точке $M_1(4;1;3)$ равна …:

**1)** $\dfrac{e^3}{\sqrt{3}}$; **2)** $e^3$; **3)** $\sqrt{3}e^3$;

**4)** $(1;\ e^3 + 3;\ -4)$; **5)** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; **6)** 0.

**2.** Векторные линии векторного поля $\overline{a} = x\overline{i} + 2y\overline{j}$ в плоскости $z = 0$ имеют вид



**3.** Для каждого векторного поля определить его вид:

$$\bar{a}=(xyz-x^2)\bar{i}+(xz-xy)\bar{j}+(3yz-z^2)\bar{k};$$

$$\bar{b}=(yz+1)\bar{i}+(xz-2)\bar{j}+(xy+3)\bar{k}.$$

**4.** Поток $\Pi$ векторного поля $\bar{a}=x^2\bar{i}+xy\bar{j}-z^2\bar{k}$ через часть поверхности $\Omega$: $y=x^2+z^2$, вырезанную плоскостью $y=25$, может быть сведен к вычислению двойного интеграла.

**1.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}} xzdxdz$. **2.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}}(2z^3-x^3+xz^2)dxdz$.

**3.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}}(x^3+z^3)dxdz$. **4.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}}(2z^2-x^2)dxdz$.

**5.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}}(x^3-xz^2-2z^3)dxdz$. **6.** $\Pi=\iint\limits_{D_{xz}}(2x^3-xy-2z^3)dxdz$.

**5.** Поток векторного поля $\bar{a}=-x\bar{i}+(7-y)\bar{j}-z\bar{k}$ через часть плоскости $P$: $3x+2y+z-6=0$, лежащей в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью $Oz$), равен… .

**6.** Если $\Pi$ – поток, вычисленный по формуле Остроградского – Гаусса, поля $\bar{a}=(\cos y-6x)\bar{i}-(e^x+z)\bar{j}+(3z-2y)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2+y^2+z^2=4,\ \ x\ge 0, z\ge 0$, то число $\dfrac{\Pi}{\pi}$ равно … .

**7.** Потенциал $\varphi$ для поля $\bar{a}=z\bar{i}+3y^2z^2\bar{j}+(x+2y^3z)\bar{k}$ может быть вычислен по формуле …:

**1)** $\varphi=\int\limits_0^x 0\cdot dx+\int\limits_0^y 3y^2dy+\int\limits_0^z(0+0)dz+C$;

**2)** $\varphi=\int\limits_0^x 0\cdot dx+\int\limits_0^y 0\cdot dy+\int\limits_0^z\left(x+2y^3z\right)dz+C$;

**3)** $\varphi=\int\limits_0^x zdx+\int\limits_0^y 3y^2z^2dy+\int\limits_0^z\left(x+2y^3z\right)dz+C$;

**4)** $\varphi = \int_0^x z dx + \int_0^y 0 \cdot dy + \int_0^z \left(0 + 2y^3 z\right) dz + C$.

**8.** Если $C$ – это циркуляция векторного поля $\overline{a} = (y-z)\overline{i} + (z-x)\overline{j} + (x-y)\overline{k}$ вдоль контура

$L: \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \\ z = 1-\cos t \end{cases}$, то число $\dfrac{C}{\pi}$ равно… .

**9.** Если $C$ – циркуляция, вычисленная по формуле Стокса, векторного поля $\overline{a} = 2x^2 z\overline{i} + 3xy\overline{j} + (3x-y)\overline{k}$ по замкнутому контуру $L:\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 5,\ x = 1$, то число $\dfrac{C}{\pi}$ равно… .

**10.** Для векторного поля $\overline{a} = -x^2 y^3 \overline{i} + \overline{j} + z\overline{k}$ величина $\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\overline{a}\right)$ равна …:

**1)** $-2y^3\overline{i} - 6xy^2\overline{j}$; **2)** $-2y^2(3x+y)$; **3)** $0$;

**4)** невозможно вычислить; **5)** $-2x\overline{i} - 3y^2\overline{j} + \overline{k}$.



## ОТВЕТЫ

### Числовые и функциональные ряды

#### Тест 1

**1.** $1,6$. **2.** $3$. **3.** 4. **4.** $0,037$. **5.** $21,182$.
**6.** $4$. **7.** Сходится абсолютно, расходится, расходится, сходится условно. **8.** $1$. **9.** $2$. **10.** 3.

#### Тест 2

**1.** $-4,75$. **2.** $0,5$. **3.** 2. **4.** $4$. **5.** $10,222$.
**6.** $7$. **7.** Сходится абсолютно, сходится условно, расходится, расходится. **8.** $4$. **9.** $7$. **10.** 2.

## Ряды Фурье

### Тест 1

**1.** 24. **2.** 23-6. **3.** 0. **4.** 1. **5.** 0,25.
**6.** 0,035. **7.** 4. **8.** 1. **9.** 3. **10.** 4.

### Тест 2

**1.** 12. **2.** -220. **3.** 0. **4.** 3. **5.** 0.
**6.** 0,013. **7.** 1. **8.** 2. **9.** 5. **10.** 1.

## Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

### Тест 1

**1.** 1. **2.** 2. **3.** 1; 3. **4.** 4; 5. **5.** 7. **6.** 4; 5.
**7.** 4. **8.** 1. **9.** 1. **10.** 3; 5. **11.** 2;4.

### Тест 2

**1.** 4. **2.** 3. **3.** 1; 2. **4.** 2; 3. **5.** 225. **6.** 3.
**7.** 4; 5; 6. **8.** -1. **9.** 2. **10.** 1; 5. **11.** 5; 6.

## Теория поля

### Тест 1

**1.** 3. **2.** 3. **3.** $\bar{a}$ соленоидальное, $\bar{b}$ произвольное.
**4.** 1. **5.** 1. **6.** 16. **7.** 4. **8.** 0. **9.** 12. **10.** 3.

### Тест 2

**1.** 1. **2.** 2. **3.** $\bar{a}$ произвольное, $\bar{b}$ гармоническое.
**4.** 2. **5.** 24. **6.** -8. **7.** 2. **8.** -40. **9.** -2. **10.** 1.

## Библиографический список

1. Бухенский, К.В. Опорные конспекты по высшей математике: учеб. пособие. Ч.3 / К. В. Бухенский, Н. В. Елкина, Г. С. Лукьянова. Рязань: РГРТУ, 2011.
2. Власова Е.А. Ряды. М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
3. Гаврилов В.Р., Иванова Б.Б., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элемент теории поля. М.: МГТУ, 2001.
4. Ильин М.Е. Ряды Фурье: учеб. пособие. Рязань: РГРТУ, 2011.

## ОГЛАВЛЕНИЕ



Тематические тесты по математике. Часть 3

Составители: Лукьянова Галина Сергеевна
Елкина Наталья Викторовна
Сюсюкалова Елена Александровна
Богатова Светлана Викторовна

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 28.05.21. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,5.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.