ТИПОВОЙ РАСЧЕТ
«Векторная алгебра. Аналитическая геометрия»

Задание 1:

а) показать, что векторы $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе;

б) проверить коллинеарность векторов $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$.

1.1. а) $\bar{x}=(1,1,1)$, $\bar{p}=(3,0,-1)$, $\bar{q}=(2,2,2)$, $\bar{r}=(1,0,1)$;

б) $\bar{a}=(3,5,7)$, $\bar{b}=(1,2,1)$, $\bar{c}_1=\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{c}_2=2\bar{a}-\bar{b}$.

1.2. а) $\bar{x}=(2,1,1)$, $\bar{p}=(0,3,-1)$, $\bar{q}=(-2,1,2)$, $\bar{r}=(-1,0,-1)$;

б) $\bar{a}=(2,3,4)$, $\bar{b}=(3,4,4)$, $\bar{c}_1=\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{c}_2=2\bar{a}+2\bar{b}$.

1.3. а) $\bar{x}=(-1,1,-1)$, $\bar{p}=(-1,0,3)$, $\bar{q}=(2,-2,-2)$, $\bar{r}=(0,1,1)$;

б) $\bar{a}=(-6,3,3)$, $\bar{b}=(2,-2,-2)$, $\bar{c}_1=3\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}+\bar{b}$.

1.4. а) $\bar{x}=(2,3,1)$, $\bar{p}=(3,1,2)$, $\bar{q}=(1,3,2)$, $\bar{r}=(2,1,3)$;

б) $\bar{a}=(3,1,1)$, $\bar{b}=(5,0,3)$, $\bar{c}_1=\bar{a}-2\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}+2\bar{b}$.

1.5. а) $\bar{x}=(2,0,5)$, $\bar{p}=(1,1,1)$, $\bar{q}=(-2,0,3)$, $\bar{r}=(0,1,-1)$;

б) $\bar{a}=(3,2,1)$, $\bar{b}=(-5,4,0)$, $\bar{c}_1=3\bar{a}-3\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}-\bar{b}$.

1.6. а) $\bar{x}=(5,0,2)$, $\bar{p}=(1,3,5)$, $\bar{q}=(3,0,-2)$, $\bar{r}=(1,-1,0)$;

б) $\bar{a}=(3,2,1)$, $\bar{b}=(-5,4,0)$, $\bar{c}_1=\bar{a}+2\bar{b}$, $\bar{c}_2=2\bar{a}+\bar{b}$.

1.7. а) $\bar{x}=(0,5,2)$, $\bar{p}=(5,3,1)$, $\bar{q}=(0,3,-2)$, $\bar{r}=(-1,1,0)$;

б) $\bar{a}=(3,7,5)$, $\bar{b}=(1,3,5)$, $\bar{c}_1=4\bar{a}-3\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}+3\bar{b}$.

1.8. а) $\bar{x}=(2,0,5)$, $\bar{p}=(3,1,5)$, $\bar{q}=(-2,3,0)$, $\bar{r}=(0,1,-1)$;

б) $\bar{a}=(0,3,2)$, $\bar{b}=(1,-2,1)$, $\bar{c}_1=5\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}+5\bar{b}$.

1.9. а) $\bar{x}=(3,2,1)$, $\bar{p}=(1,3,2)$, $\bar{q}=(2,3,7)$, $\bar{r}=(3,1,2)$;

б) $\bar{a}=(1,2,3)$, $\bar{b}=(2,3,1)$, $\bar{c}_1=3\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}+3\bar{b}$.

1.10. а) $\overline{x}=(1,-1,1)$, $\overline{p}=(0,3,2)$, $\overline{q}=(-1,3,7)$, $\overline{r}=(-3,1,2)$;

б) $\overline{a}=(2,3,5)$, $\overline{b}=(-1,3,8)$, $\overline{c}_1=5\overline{a}+5\overline{b}$, $\overline{c}_2=-\overline{a}-\overline{b}$.

1.11. а) $\overline{x}=(0,1,2)$, $\overline{p}=(2,3,0)$, $\overline{q}=(2,7,2)$, $\overline{r}=(-3,0,2)$;

б) $\overline{a}=(8,3,1)$, $\overline{b}=(2,6,1)$, $\overline{c}_1=\overline{a}+4\overline{b}$, $\overline{c}_2=4\overline{a}-\overline{b}$.

1.12. а) $\overline{x}=(2,1,0)$, $\overline{p}=(0,3,2)$, $\overline{q}=(-1,3,-1)$, $\overline{r}=(-2,-2,2)$;

б) $\overline{a}=(6,1,2)$, $\overline{b}=(-1,0,1)$, $\overline{c}_1=5\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{c}_2=5\overline{a}-\overline{b}$.

1.13. а) $\overline{x}=(1,0,2)$, $\overline{p}=(3,2,0)$, $\overline{q}=(1,-3,1)$, $\overline{r}=(2,2,-2)$;

б) $\overline{a}=(-2,-1,-2)$, $\overline{b}=(2,3,8)$, $\overline{c}_1=3\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{c}_2=\overline{a}+3\overline{b}$.

1.14. а) $\overline{x}=(1,4,1)$, $\overline{p}=(3,2,5)$, $\overline{q}=(0,3,1)$, $\overline{r}=(1,2,2)$;

б) $\overline{a}=(3,1,3)$, $\overline{b}=(2,1,2)$, $\overline{c}_1=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{c}_2=\overline{a}+4\overline{b}$.

1.15. а) $\overline{x}=(-1,4,-1)$, $\overline{p}=(-1,2,5)$, $\overline{q}=(1,1,1)$, $\overline{r}=(2,2,1)$;

б) $\overline{a}=(1,7,2)$, $\overline{b}=(3,0,5)$, $\overline{c}_1=\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c}_2=\overline{a}-2\overline{b}$.

1.16. а) $\overline{x}=(3,0,2)$, $\overline{p}=(-1,2,-1)$, $\overline{q}=(2,1,1)$, $\overline{r}=(1,1,3)$;

б) $\overline{a}=(2,7,1)$, $\overline{b}=(5,0,3)$, $\overline{c}_1=\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c}_2=-\overline{a}-2\overline{b}$.

1.17. а) $\overline{x}=(7,3,1)$, $\overline{p}=(1,1,1)$, $\overline{q}=(-2,1,2)$, $\overline{r}=(3,1,1)$;

б) $\overline{a}=(7,1,2)$, $\overline{b}=(0,3,5)$, $\overline{c}_1=3\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{c}_2=\overline{a}-3\overline{b}$.

1.18. а) $\overline{x}=(1,7,3)$, $\overline{p}=(0,1,1)$, $\overline{q}=(1,-2,-1)$, $\overline{r}=(1,3,1)$;

б) $\overline{a}=(7,2,1)$, $\overline{b}=(0,5,3)$, $\overline{c}_1=\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{c}_2=\overline{a}+\overline{b}$.

1.19. а) $\overline{x}=(3,1,7)$, $\overline{p}=(1,0,1)$, $\overline{q}=(1,1,1)$, $\overline{r}=(-1,2,1)$;

б) $\overline{a}=(3,5,4)$, $\overline{b}=(5,2,0)$, $\overline{c}_1=\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{c}_2=-4\overline{a}+4\overline{b}$.

1.20. а) $\overline{x}=(1,3,1)$, $\overline{p}=(2,1,3)$, $\overline{q}=(3,2,5)$, $\overline{r}=(3,0,2)$;

б) $\overline{a}=(5,3,4)$, $\overline{b}=(2,3,0)$, $\overline{c}_1=\overline{a}-4\overline{b}$, $\overline{c}_2=\overline{a}-3\overline{b}$.

1.21. а) $\bar{x}=(1{,}0{,}1)$, $\bar{p}=(-2{,}1{,}2)$, $\bar{q}=(3{,}1{,}3)$, $\bar{r}=(2{,}5{,}1)$;

б) $\bar{a}=(4{,}3{,}5)$, $\bar{b}=(0{,}2{,}3)$, $\bar{c}_1=4\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}+4\bar{b}$.

1.22. а) $\bar{x}=(2{,}1{,}2)$, $\bar{p}=(3{,}1{,}1)$, $\bar{q}=(2{,}3{,}5)$, $\bar{r}=(5{,}3{,}2)$;

б) $\bar{a}=(4{,}5{,}3)$, $\bar{b}=(3{,}0{,}2)$, $\bar{c}_1=\bar{a}-4\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}+\bar{b}$.

1.23. а) $\bar{x}=(2{,}2{,}1)$, $\bar{p}=(1{,}1{,}3)$, $\bar{q}=(5{,}3{,}2)$, $\bar{r}=(2{,}3{,}5)$;

б) $\bar{a}=(2{,}2{,}2)$, $\bar{b}=(1{,}2{,}0)$, $\bar{c}_1=\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}-3\bar{b}$.

1.24. а) $\bar{x}=(1{,}2{,}2)$, $\bar{p}=(1{,}3{,}1)$, $\bar{q}=(3{,}2{,}5)$, $\bar{r}=(5{,}1{,}3)$;

б) $\bar{a}=(1{,}7{,}2)$, $\bar{b}=(2{,}7{,}1)$, $\bar{c}_1=3\bar{a}+3\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}-\bar{b}$.

1.25. а) $\bar{x}=(2{,}3{,}4)$, $\bar{p}=(1{,}4{,}4)$, $\bar{q}=(2{,}3{,}2)$, $\bar{r}=(1{,}3{,}5)$;

б) $\bar{a}=(7{,}1{,}2)$, $\bar{b}=(1{,}7{,}2)$, $\bar{c}_1=3\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{c}_2=-6\bar{a}+2\bar{b}$.

1.26. а) $\bar{x}=(1{,}4{,}3)$, $\bar{p}=(4{,}1{,}4)$, $\bar{q}=(2{,}3{,}3)$, $\bar{r}=(5{,}3{,}1)$;

б) $\bar{a}=(2{,}7{,}1)$, $\bar{b}=(7{,}1{,}2)$, $\bar{c}_1=\bar{a}-3\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}+5\bar{b}$.

1.27. а) $\bar{x}=(3{,}1{,}4)$, $\bar{p}=(4{,}4{,}1)$, $\bar{q}=(3{,}3{,}2)$, $\bar{r}=(3{,}1{,}5)$;

б) $\bar{a}=(1{,}0{,}3)$, $\bar{b}=(1{,}1{,}1)$, $\bar{c}_1=5\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}-\bar{b}$.

1.28. а) $\bar{x}=(4{,}1{,}3)$, $\bar{p}=(1{,}4{,}4)$, $\bar{q}=(1{,}3{,}3)$, $\bar{r}=(5{,}1{,}3)$;

б) $\bar{a}=(1{,}3{,}1)$, $\bar{b}=(2{,}2{,}3)$, $\bar{c}_1=\bar{a}+5\bar{b}$, $\bar{c}_2=\bar{a}-5\bar{b}$.

1.29. а) $\bar{x}=(5{,}-5{,}0)$, $\bar{p}=(1{,}1{,}1)$, $\bar{q}=(2{,}1{,}2)$, $\bar{r}=(3{,}0{,}1)$;

б) $\bar{a}=(3{,}2{,}5)$, $\bar{b}=(5{,}1{,}1)$, $\bar{c}_1=2\bar{a}+2\bar{b}$, $\bar{c}_2=7\bar{a}-\bar{b}$.

1.30. а) $\bar{x}=(-5{,}0{,}5)$, $\bar{p}=(1{,}2{,}3)$, $\bar{q}=(2{,}1{,}2)$, $\bar{r}=(3{,}5{,}4)$;

б) $\bar{a}=(1{,}1{,}1)$, $\bar{b}=(3{,}7{,}1)$, $\bar{c}_1=\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{c}_2=-\bar{a}-\bar{b}$.

Задание 2.

2.1. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$, образующий с ортом $\bar{j}$ острый угол и имеющий длину $|\bar{x}| = 15$.

2.2. Найти вектор $\bar{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\bar{x}| = 2\sqrt{3}$.

2.3. Найти вектор $\bar{x}$, образующий с ортом $\bar{j}$ угол $60°$, с ортом $\bar{k}$ – угол $120°$, если $|\bar{x}| = 5\sqrt{2}$.

2.4. Найти вектор $\bar{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\bar{a} = 7\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, если $|\bar{x}| = 5\sqrt{6}$.

2.5. Из одной и той же точки проведены векторы $\bar{a} = (-3;0;4)$ и $\bar{b} = (5;-2;-14)$. Найти единичный вектор, который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2.6. Даны модуль $|\bar{a}| = 5$ и углы $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$. Вычислить проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси и орт вектора $\bar{a}$.

2.7. Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (1;5;-15)$. Найти вектор, коллинеарный вектору $\bar{a}$, направленный в противоположную сторону и длиннее вектора $\bar{a}$ в три раза.

2.8. Вектор $\bar{x}$ составляет с осями OY и OZ соответственно углы $\beta = 60°$, $\gamma = 135°$. Какой угол он составляет с осью OX? Найти координаты вектора $\bar{x}$, если модуль $|\bar{x}| = 3$.

2.9. Вектор $\bar{a}$ составляет с координатными осями OX и OZ углы $\alpha = 60°$, $\gamma = 135°$. Вычислить его координаты, если $|\bar{a}| = 2$. Найти орт вектора $\bar{a}$.

2.10. Даны $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{19}$. Найти $|\bar{a} - \bar{b}|$.

2.11. Даны $|\bar{a}|=11$, $|\bar{b}|=23$, $|\bar{a}-\bar{b}|=30$. Найти $|\bar{a}+\bar{b}|$.

2.12. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 60°, причем $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=7$. Определить $|\bar{a}+\bar{b}|$, $|\bar{a}-\bar{b}|$.

2.13. Проверить коллинеарность векторов $\bar{a}=(6;-2;4)$ и $\bar{b}=(-12;4;-8)$. Какой из них длиннее другого, во сколько раз, как они направлены?

2.14. Определить, при каких значениях α и β векторы $\bar{a}=2\bar{i}+\beta\bar{k}-3\bar{j}$ и $\bar{b}=\alpha\bar{i}+12\bar{j}+8\bar{k}$ коллинеарны.

2.15. Проверить, что точки $A(1;1;1)$, $B(5;-4;8)$, $C(3;2;1)$, $D(-5;12;-13)$ являются вершинами трапеции.

2.16. Определить $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$ векторов $\bar{a}=(3;-1;3)$, $\bar{b}=(3;2;4)$.

2.17. Найти проекции вектора $\bar{a}$ на оси координат, если $\bar{a}=\overline{AB}+3\overline{CD}$, $A(0;0;1)$, $B(2;2;1)$, $C(4;3;5)$, $D(3;6;3)$.

2.18. Даны радиусы-векторы вершин треугольника ABC: $\bar{r}_A=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{r}_B=3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{r}_C=\bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}$. Показать, что треугольник ABC равносторонний.

2.19. Вычислить модуль вектора

$$\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}-\frac{1}{5}\left(4\bar{i}+8\bar{j}+3\bar{k}\right)$$ и найти его направляющие косинусы.

2.20. Даны точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(3;-4;6)$. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{M_1M_2}$.

2.21. Дан вектор $\bar{a}=4\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$. Найти вектор $\bar{b}$, если $|\bar{b}|=|\bar{a}|$, $b_y=a_y$, $b_x=0$, и найти направляющие косинусы вектора $\bar{b}$.

2.22. Радиус-вектор точки M составляет с осью OY угол $60°$, а с осью OZ – угол $45°$, его длина $|\bar{r}|=8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.

2.23. Дан вектор $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$. Найти его проекцию на ось, составляющую с осями координат равные острые углы.

2.24. Вектор $\bar{a}$ задан координатами своих концов A и B: $A(2;1;-4)$, $B(1;3;2)$. Найти проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси и его направляющие косинусы.

2.25. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, образующий с ортом $\bar{k}$ тупой угол и имеющий длину $|\bar{x}| = 45$.

2.26. Радиус-вектор точки M составляет с осью OX угол $45°$, с осью OY – $60°$, его длина $|\bar{r}| = 8$. Найти координаты вектора $\overline{OM}$, зная, что третья координата точки M отрицательна.

2.27. Даны векторы $\bar{a} = (2;\,2)$ и $\bar{b} = (2;\,-4)$. Найти косинус угла между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$, удовлетворяющими системе уравнений $\bar{x} + 3\bar{y} = \bar{a}$, $\bar{x} - 3\bar{y} = \bar{b}$.

2.28. Даны $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$, $|\bar{a} + \bar{b}| = 24$. Найти $|\bar{a} - \bar{b}|$.

2.29. Найти вектор $\bar{a}$, образующий с ортом $\bar{j}$ угол $60°$, с ортом $\bar{i}$ – $120°$, если $|\bar{a}| = 3$.

2.30. Найти вектор $\bar{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\bar{a} = (2;-3;6)$ и $\bar{b} = (-1;2;-2)$, если $|\bar{x}| = 3\sqrt{42}$.

Задание 3.

Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Найти: а) косинус угла между ребрами AB и AD; б) проекцию вектора $\overline{AC}$ на вектор $\overline{AD}$; в) площадь грани ABC; г) объем пирамиды ABCD.

3.1.	$A(4;0;0)$,	$B(-2;1;2)$,	$C(1;3;2)$,	$D(3;2;7)$.
3.2.	$A(-2;1;2)$,	$B(4;0;0)$,	$C(3;2;7)$,	$D(1;3;2)$.
3.3.	$A(1;3;2)$,	$B(3;2;7)$,	$C(4;0;0)$,	$D(-2;1;2)$.
3.4.	$A(3;2;7)$,	$B(1;3;2)$,	$C(-2;1;2)$,	$D(4;0;0)$.

3.5. $A(3;1;-2)$, $B(1;-2;1)$, $C(-2;1;0)$, $D(2;2;5)$.

3.6. $A(1;-2;1)$, $B(3;1;-2)$, $C(2;2;5)$, $D(-2;1;0)$.

3.7. $A(-2;1;0)$, $B(2;2;5)$, $C(3;1;2)$, $D(1;-2;1)$.

3.8. $A(2;2;5)$, $B(-2;1;0)$, $C(1;-2;1)$, $D(3;1;2)$.

3.9. $A(1;-1;6)$, $B(4;5;-2)$, $C(-1;3;0)$, $D(6;1;5)$.

3.10. $A(6;1;5)$, $B(-1;3;0)$, $C(4;5;-2)$, $D(1;-1;6)$.

3.11. $A(-5;-1;8)$, $B(2;3;1)$, $C(4;1;-2)$, $D(6;3;7)$.

3.12. $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$, $D(2;2;2)$.

3.13. $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$, $D(3;2;4)$.

3.14. $A(1;1;2)$, $B(2;3;-1)$, $C(2;-2;4)$, $D(-1;1;3)$.

3.15. $A(2;-3;5)$, $B(0;2;1)$, $C(-2;-2;3)$, $D(2;3;4)$.

3.16. $A(1;-3;-4)$, $B(-1;0;2)$, $C(2;-4;-6)$, $D(1;1;1)$.

3.17. $A(2;1;-2)$, $B(3;3;3)$, $C(1;1;2)$, $D(-1;-2;-3)$.

3.18. $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$, $D(3;4;-3)$.

3.19. $A(0;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(2;1;0)$, $D(0;0;6)$.

3.20. $A(0;0;0)$, $B(4;1;1)$, $C(1;1;0)$, $D(0;0;8)$.

3.21. $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;5;3)$.

3.22. $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$, $D(2;3;1)$.

3.23. $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

3.24. $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$.

3.25. $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$, $D(0;8;0)$.

3.26. $A(4;0;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(1;3;2)$, $D(3;2;5)$.

3.27. $A(-2;1;3)$, $B(4;1;1)$, $C(1;3;2)$, $D(3;2;6)$.

3.28. $A(1;3;5)$, $B(3;2;4)$, $C(4;1;1)$, $D(-2;1;2)$.

3.29. $A(3;1;5)$, $B(1;3;2)$, $C(-2;0;2)$, $D(3;5;3)$.

3.30. $A(6;5;4)$, $B(1;1;1)$, $C(1;0;3)$, $D(5;6;4)$.

Задание 4.

4.1. $|\bar{a}_1| = 2$, $|\bar{a}_2| = 5$, $\angle(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить $(\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2)^2$.

4.2. $|\bar{a}_1| = 2$, $|\bar{a}_2| = 5$, $\angle(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить $(2\bar{a}_1 + \bar{a}_2)(\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2)$.

4.3. $|\bar{a}_1| = 2$, $|\bar{a}_2| = 5$, $\angle(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)^2$.

4.4. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - \bar{q}$, если $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, $\angle(\bar{p}, \bar{q}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

4.5. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\bar{c}$ образует с ними углы, равные $\dfrac{\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 1$, найти $(2\bar{a} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{a})$.

4.6. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\bar{c}$ образует с ними углы, равные $\dfrac{\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 1$, найти $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})^2$.

4.7. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\dfrac{\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 4$, найти длину вектора $\bar{c} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$.

4.8. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ расположены в одной плоскости, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 2$, векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ составляют с вектором $\bar{a}$ углы в 60°. Определить угол α между векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$ и длину вектора $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

4.9. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ попарно взаимно перпендикулярны, а длины их соответственно равны $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 6$. Найти длину вектора $\bar{s} = \bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}$.

4.10. Вычислить скалярное произведение векторов $(\bar{a}, \bar{b})$, если $\bar{a} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$ и $\bar{b} = \bar{p} + 4\bar{q}$, где $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – единичные векторы, $\angle(\bar{p}, \bar{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.

4.11. Найти числовое значение скаляра $3|\bar{m}| - 2(\bar{m}, \bar{n}) + 4\bar{n}^2$, если $|\bar{m}| = \dfrac{1}{3}$, $|\bar{n}| = 6$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = \dfrac{\pi}{3}$.

4.12. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 5\bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}$, если известно, что $|\bar{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\bar{q}| = 3$, $\angle(\bar{p}, \bar{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.

4.13. К одной и той же точке приложены две силы: $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, действующие под углом $120°$, причем $|\bar{P}| = 7$, $|\bar{Q}| = 4$. Найти величину равнодействующей силы $\bar{R}$.

4.14. Зная, что $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении коэффициента α векторы $\bar{p} = \alpha\bar{a} + 15\bar{b}$, $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$ будут перпендикулярными.

4.15. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\overline{AD} = \bar{m} - 3\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 5$, $|\bar{n}| = 3$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

4.16. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{4}$. Зная, что $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$, вычислить угол между векторами $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$.

4.17. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ попарно образуют углы, каждый из которых равен $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 3$, определить модуль вектора $\bar{S} = \bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}$.

4.18. Найти координаты вектора $\bar{x}$, коллинеарного вектору $\bar{a} = (5;3;2)$ и удовлетворяющего условию $(\bar{a}, \bar{x}) = 19$.

4.19. Даны два вектора $\bar{a} = (1;1;5)$ и $\bar{b} = (1;2;-5)$. Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям $(\bar{a}, \bar{x}) = -2$, $(\bar{b}, \bar{x}) = -3$, $(2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k})\bar{x} = -4$.

4.20. Найти угол между диагоналями параллелограмма $2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ и $4\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$, если $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ – единичные векторы и $\angle(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \frac{2\pi}{3}$.

4.21. Найти скалярное произведение векторов $3\bar{a} - 2\bar{b}$ и $5\bar{a} - 6\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 6$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

4.22. Найти скалярное произведение векторов $2\bar{a} + 3\bar{b} + 4\bar{c}$ и $5\bar{a} + 6\bar{b} + 7\bar{c}$, если $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 3$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \angle(\bar{a}, \bar{c}) = \angle(\bar{b}, \bar{c}) = \frac{\pi}{3}$.

4.23. Найти единичный вектор, перпендикулярный к векторам $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

4.24. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = 6\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$. Найти вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и удовлетворяющий условию $\bar{x}(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) = 1$.

4.25. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно, что $(2\bar{a}-\bar{b})^2+(\bar{a}-3\bar{b})^2=45$, $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$.

4.26. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют попарно друг с другом углы $90°$. Зная длины этих векторов $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$, $|\bar{c}|=5$, определить модуль вектора $\bar{s}=2\bar{a}+5\bar{c}-3\bar{b}$.

4.27. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{2}$. Зная, что $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=5$, вычислить $\text{пр}_{\bar{q}}(\bar{p}+\bar{q})$, если $\bar{p}=5\bar{a}-5\bar{b}$, $\bar{q}=5\bar{a}+5\bar{b}$.

4.28. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют угол $\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=7$, вычислить $(7\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}+7\bar{b})$.

4.29. Вычислить $(\bar{m}+3\bar{n}+3\bar{p})^2$, если $|\bar{m}|=|\bar{n}|=|\bar{p}|=2$, $\angle(\bar{n},\bar{p})=\frac{\pi}{2}$, $\angle(\bar{m},\bar{n})=\angle(\bar{m},\bar{p})=\frac{\pi}{6}$.

4.30. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=2\bar{p}-11\bar{q}$, $\bar{b}=\bar{p}+\bar{q}$, если $|\bar{p}|=|\bar{q}|=2$, $\angle(\bar{p},\bar{q})=\frac{\pi}{3}$.

Задание 5.

5.1. $|\bar{a}_1|=4$, $|\bar{a}_2|=3$, $\angle(\bar{a}_1,\bar{a}_2)=\frac{\pi}{6}$. Вычислить $|[\bar{a}_1+\bar{a}_2,2\bar{a}_1+\bar{a}_2]|$.

5.2. Найти синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=2\bar{p}-11\bar{q}$, $\bar{b}=\bar{p}+\bar{q}$, если $|\bar{p}|=|\bar{q}|=2$, $\angle(\bar{p},\bar{q})=\frac{\pi}{3}$, используя векторное произведение векторов.

5.3. $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 5$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} - 2\bar{b}$ и $3\bar{a} + 2\bar{b}$.

5.4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} + \bar{q}$, где $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – единичные векторы, $\angle(\bar{p}, \bar{q}) = \dfrac{\pi}{3}$.

5.5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\overline{AD} = \bar{m} - 3\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 5$, $|\bar{n}| = 3$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = \dfrac{\pi}{3}$.

5.6. Вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a} = (1;2;3)$, $\bar{b} = (-1;2;3)$, образует тупой угол с осью OZ. Зная, что $|\bar{x}| = \sqrt{13}$, найти его координаты.

5.7. Сила $\bar{F} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ приложена к точке $A(3;3;3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(2;2;5)$.

5.8. Даны три силы: $\bar{F}_1 = (1;-2;-5)$, $\bar{F}_2 = (-2;2;2)$, $\bar{F}_3 = (0;2;3)$, приложенные к точке $A(0;1;2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $O(1;1;1)$.

5.9. Найти координаты вектора $\bar{x}$, если известно, что он перпендикулярен к векторам $\bar{a}_1 = (2;-1;2)$, $\bar{a}_2 = (1;1;1)$, образует с ортом $\bar{i}$ острый угол и $|\bar{x}| = \sqrt{2}$.

5.10. Найти координаты вектора $\bar{x}$, если он перпендикулярен к векторам $\bar{a}_1 = (5;7;1)$, $\bar{a}_2 = (1;2;5)$, а также удовлетворяет условию $\bar{x}(\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}) = 3$.

5.11. Зная разложение векторов $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ по трем некомпланарным векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, проверить, будут ли $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ компланарны, и в случае утвердительного ответа дать линейную зависимость, их связывающую, если $\bar{l} = 2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$, $\bar{m} = 2\bar{b} - \bar{c} - \bar{a}$, $\bar{n} = 2\bar{c} - \bar{a} - \bar{b}$.

5.12. Показать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

5.13. Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 2$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $3\bar{a} - \bar{b}$, $3\bar{a} + \bar{b}$.

5.14. Найти синус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A(1;3;5)$, $B(7;0;2)$, $C(1;3;2)$, используя векторное произведение векторов.

5.15. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\dfrac{\pi}{2}$. Зная, что $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 3$, вычислить $\left|\left[(5\bar{a} - 2\bar{b}), (7\bar{a} - \bar{b})\right]\right|$.

5.16. В треугольнике с вершинами $A(3;5;6)$, $B(6;1;0)$, $C(3;7;8)$ найти длину высоты AM.

5.17. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\dfrac{\pi}{6}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $7\bar{a} - 3\bar{b}$ и $3\bar{a} - 7\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 1$.

5.18. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 6\bar{m} - 3\bar{n}$ и $\bar{b} = \bar{m} + 11\bar{n}$, если $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 5$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

5.19. Вычислить синус угла между векторами $\bar{a} = (3;4;5)$ и $\bar{b} = (2;2;2)$, используя векторное произведение векторов.

5.20. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 6\bar{m} - 3\bar{n}$ и $\bar{b} = 3\bar{m} - 6\bar{n}$, где $\bar{m}, \bar{n}$ – единичные векторы, образующие угол $\dfrac{\pi}{6}$.

5.21. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 7$, вычислить $\left|\left[\left(11\bar{a} - \bar{b}\right), \left(5\bar{a} + \bar{b}\right)\right]\right|$.

5.22. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра ABCD, известно, что она лежит на оси OZ. Объем тетраэдра $v = 3$ куб.ед. и $A(1;2;3)$, $B(0;1;3)$, $C(2;1;3)$.

5.23. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{p} - 11\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 11\bar{q}$, если $|\bar{p}| = |\bar{q}| = 2$, $\angle(\bar{p}, \bar{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.

5.24. Даны сила $\bar{F} = (3;4;-2)$ и точка ее приложения $A(2;-1;3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

5.25. В треугольнике с вершинами $A(1;3;1)$, $B(2;7;0)$, $C(3;-1;-1)$ найти длину высоты BD.

5.26. Сила $\bar{F} = \bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$ приложена к точке $A(3;3;3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(1;1;1)$.

5.27. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $3\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2$, $3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$, где $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ – единичные векторы и $\angle(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \dfrac{\pi}{4}$.

5.28. Найти координаты вектора $\bar{x}$, если известно, что он перпендикулярен к векторам $\bar{a}_1 = (4;2;3)$ и $\bar{a}_2 = (1;1;1)$, образует тупой угол с ортом $\bar{j}$ и $|\bar{x}| = 13$.

5.29. Найти координаты вектора $\bar{x}$, если он перпендикулярен к векторам $\bar{a}_1 = (2;-5;6)$ и $\bar{a}_2 = (-1;-3;-7)$ и удовлетворяет условию $\bar{x}\left(3\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}\right) = 13$.

5.30. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют левую тройку, $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $|\bar{c}| = 2$, $\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right) = 60°$, $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$. Найти $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Задание 6.

6.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, точку $A(1;-2;3)$ и перпендикулярной к плоскости $x-y-2z-4=0$.

6.2. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось OY перпендикулярно к плоскости $3x-4y+5z-12=0$.

6.3. Через точку $M(-5;16;12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось OX, другая – ось OY. Найти уравнения этих плоскостей и вычислить угол между этими плоскостями.

6.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_1(2;3;-1)$ и $M_2(1;5;3)$ перпендикулярно к плоскости $3x-y+2z+15=0$.

6.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $B(3;4;-2)$ и отсекающей на оси OX и OZ отрезки, соответственно равные $a=2$, $c=5$.

6.6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;-4)$, $B(-1;3;-2)$, отсекающей на осях OX и OY равные отрезки.

6.7. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x+y+z-1=0$ и отстоящей от нее на расстояние $\sqrt{3}$.

6.8. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось OZ и составляющей с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z=0$ угол $\frac{\pi}{3}$.

6.9. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось OX и составляющей с плоскостью $y=x$ угол $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

6.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;-3;5)$ и перпендикулярной к двум плоскостям $2x+y-2z+1=0$, $x+y+z-5=0$.

6.11. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;1)$ параллельно векторам $\bar{a}(-3;2;-1)$ и $\bar{b}(1;2;3)$.

6.12. Найти расстояние от точки $M(3;2;5)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(0;1;-1)$, $M_2(-1;1;3)$, $M_3(2;3;7)$.

6.13. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(1;1;1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

6.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(3;2;1)$ параллельно вектору $\bar{a}(3;2;1)$.

6.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;0;3)$ перпендикулярно к двум плоскостям $7x+z-1=0$, $x=0$.

6.16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;1;1)$ перпендикулярно к двум плоскостям $x+3y-z+5=0$ и $z=0$.

6.17. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось OZ и точку $M_1(1;2;1)$.

6.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $N(1;2;3)$ параллельно плоскости XOY.

6.19. При каком значении параметра α плоскости $3x+y+\alpha z-8=0$ и $2x-y+2z+5=0$ перпендикулярны?

6.20. При каких значениях α и β плоскости $x+\alpha y-2z+5=0$ и $\beta x-6y+4z+8=0$ параллельны?

6.21. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x+3y-5z-8=0$ и $4x+3y-5z+12=0$.

6.22. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось OX и составляющей угол 60° с плоскостью $y = x$.

6.23. Найти расстояние точки $A(1;2;3)$ от плоскости, отсекающей на осях координат отрезки $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

6.24. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям $2x - y + 5z - 3 = 0$, $x + 3y - z - 7 = 0$.

6.25. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$ и $M_2(0;2;1)$ параллельно вектору $\bar{a}(2;0;1)$.

6.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$ и перпендикулярной к плоскости $-x + y - 1 = 0$.

6.27. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четыре точки $A(3;1;0)$, $B(0;7;2)$, $C(-1;0;-5)$, $D(4;1;5)$. В случае утвердительного ответа найти уравнение данной плоскости.

6.28. Найти угол между плоскостью $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ и плоскостью YOZ.

6.29. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четыре точки $A(1;-1;1)$, $B(0;2;4)$, $C(1;3;3)$ и $D(4;0;-3)$. В случае утвердительного ответа найти уравнение данной плоскости.

6.30. Составить уравнение плоскости, проходящей от начала координат на расстоянии 6 единиц и отсекающей на осях координат отрезки, связанные соотношением $a : b : c = 1 : 3 : 2$.

Задание 7.

7.1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;3;0)$ и параллельной прямой $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

7.2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;3;2)$ и перпендикулярной к оси OX.

7.3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $B(3;0;2)$ и перпендикулярной к оси OZ.

7.4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $C(1;2;4)$ и перпендикулярной к оси OY.

7.5. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $B(3;-2;1)$ и образует с осями координат углы, соответственно равные $45°$, $120°$, $60°$.

7.6. Установить, лежат ли три данные точки $A(1;2;3)$, $B(10;8;4)$, $C(3;0;2)$ на одной прямой.

7.7. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x-2y-z+8=0, \\ x+2y-2z+1=0 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x=-3t+1, \\ y=6t-2, \\ z=2t+4. \end{cases}$$

7.8. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x+2y+3z-13=0, \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$ привести к каноническому виду.

7.9. Найти косинус угла между прямыми $\begin{cases} x-y+3=0, \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ и

$$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+2}{4}.$$

7.10. Доказать перпендикулярность прямых

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1} \text{ и } \begin{cases} x+y=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$$

7.11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;3;2)$ параллельно прямой $\begin{cases} x-y-z=1, \\ x+y+2z=2. \end{cases}$

7.12. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-3}$,

$$\begin{cases} x-y+2z=0, \\ x+2y+z+3=0. \end{cases}$$

7.13. Доказать перпендикулярность прямых $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{3}$ и

$$\begin{cases} x+3y+3z+1=0, \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$$

7.14. Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости XOZ, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$.

7.15. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x-3y+2=0, \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$ привести к каноническому виду.

7.16. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y+11}{2}=\frac{z+6}{1}$ пересекаются. Найти точку пересечения.

7.17. Доказать, что прямые $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ параллельны.

7.18. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;2;-3)$ и перпендикулярной к прямой $\begin{cases} x=2, \\ y-z=1. \end{cases}$

7.19. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;7;-1)$ и образующей с осями OY и OZ углы $120°$ и $45°$.

7.20. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $A(-1;3;4)$ и образующей с осями OX и OZ углы $120°$ и $60°$.

7.21. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(3;0;-2)$, $B(1;2;-4)$ и $C(0;7;-2)$. Найти уравнения сторон AD и CD.

7.22. В плоскости YOZ найти прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную к прямой $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ x + 2z = -2. \end{cases}$

7.23. При каких значениях коэффициентов A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z}{3}$? Найти орт вектора нормали плоскости.

7.24. При каком значении коэффициента A плоскость $Ax + 3y + 5z + 1 = 0$ будет параллельна прямой $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{1}$? Найти орт вектора нормали плоскости.

7.25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2;3;0)$ и через прямую $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 + t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$

7.26. Доказать, что прямые $\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 2, \\ z = -4t + 6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = t + 5, \\ y = -4t - 1, \\ z = t - 4 \end{cases}$ пересекаются. Найти точку их пересечения.

7.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ и $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$.

7.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x = t + 5, \\ y = -t + 1, \\ z = 2t \end{cases}$ и точку $M(1;3;2)$.

7.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;0)$, $M_2(3;0;-1)$ параллельно прямой $\frac{x}{5} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{3}$.

7.30. Даны точки $A(1;1;1)$, $B(2;3;3)$ и $C(3;3;2)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Задание 8.

8.1. Через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 1 = 0$ и $x - 5y - z + 2 = 0$ провести плоскость, проходящую через точку $A(1;1;1)$.

8.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2;3;0)$ и через прямую $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 + t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$

8.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой пересечения плоскости $x - 2y + 4z - 3 = 0$ с плоскостью OXZ.

8.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$ параллельно прямой $x = y = z$.

8.5. Найти координаты точки пересечения прямой $\begin{cases} y = -2x + 9, \\ z = 9x - 43 \end{cases}$ и плоскости $3x - 4y + 7z - 33 = 0$.

8.6. Проверить, что прямые $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$, $\frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}$ пересекаются, и написать уравнение плоскости, проходящей через них.

8.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x+y-3z+1=0$ с прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$, $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{6}$.

8.8. Через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x+4y-3z+7=0$.

8.9. Написать уравнение к плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ и параллельной прямой $\frac{x+5}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$.

8.10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;1;1)$ параллельно плоскости $-2x+y-z+1=0$, и найти расстояние между этими плоскостями.

8.11. Написать уравнение проекции прямой $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$ на координатную плоскость OXZ.

8.12. Убедиться, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$, $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

8.13. Доказать, что прямые $\begin{cases} 2x+2y+z-1=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ и $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z-9}{4}$ параллельны, и найти расстояние между ними.

8.14. Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $2x-y+5z-3=0$, $2x-10y+4z-2=0$.

8.15. Найти расстояние между прямыми $\begin{cases} x=3t+2, \\ y=-t+4, \\ z=2t+1 \end{cases}$ и $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$.

8.16. Найти проекцию точки $A(2;1;0)$ на плоскость $y+z+2=0$.

8.17. Показать, что прямые $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ и $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$ пересекаются, и найти точку их пересечения.

8.18. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$ и $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$.

8.19. Составить уравнение проекции прямой $\begin{cases} x=3+5t, \\ y=-1+t, \\ z=4+t \end{cases}$ на плоскость $2x-2y+3z-5=0$.

8.20. Через точку $A(1;2;3)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $5x-2y+5z-10=0$ и образующую с плоскостью $x-4y-8z+12=0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

8.21. Найти расстояние от точки $P(2;-1;3)$ до прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}$.

8.22. Показать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ лежит в плоскости $2x+y-z=0$.

8.23. Найти угол между прямой $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=-t+5, \\ z=2t \end{cases}$ и плоскостью $x+y+z+5=0$.

8.24. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;0;2)$ перпендикулярно к плоскости $4x+7y+3z=0$, найти точку их пересечения.

8.25. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{1}$ и точку $M(1;7;3)$.

8.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;3;3)$, $M_2(1;1;1)$ параллельно прямой $\begin{cases} x=t+3, \\ y=-2t+4, \\ z=t-1. \end{cases}$

8.27. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{-1}$ и плоскости $x-y+3=0$ и угол между ними.

8.28. Доказать перпендикулярность прямых $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{3}$,

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x-y-z+5=0. \end{cases}$$

8.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases} x=t+3, \\ y=2t+1, \\ z=3t-3 \end{cases}$ и $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$.

8.30. Через прямую $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{4}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x+y-z+15=0$.

Задание 9.

9.1. Найти точку M_1, симметричную точке $M(1;0;1)$ относительно плоскости $4x+6y+4z-25=0$.

9.2. Найти проекцию точки $A(2;3;4)$ на прямую $x=y=z$.

9.3. Найти точку B, симметричную точке $C(-1;2;0)$ относительно плоскости $4x-5y-z-7=0$.

9.4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(0;2;1)$ и образующей равные углы с векторами $\bar{a}=(1;2;2)$, $\bar{b}=(0;3;0)$, $\bar{c}=(0;0;3)$.

9.5. Найти уравнение проекции прямой $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ на плоскость $2x+3y-z-5=0$.

9.6. Найти точку A, симметричную точке $B(2;-1;1)$ относительно прямой $\dfrac{x-4{,}5}{1}=\dfrac{y+3}{-0{,}5}=\dfrac{z-2}{1}$.

9.7. Найти проекцию точки $M(0;-3;-2)$ на прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$.

9.8. Найти проекцию точки $A(-1;0;-1)$ на плоскость $2x+6y-2z+11=0$.

9.9. Найти точку A, симметричную точке $B(1;2;3)$ относительно прямой $\begin{cases} x=0{,}5, \\ y=-t-1{,}5, \\ z=t+1{,}5. \end{cases}$

9.10. Найти проекцию точки $A(1;1;1)$ на прямую $\begin{cases} x=t+2, \\ y=-2t-1{,}5, \\ z=t+1. \end{cases}$

9.11. Найти расстояние от точки $A(1;3;5)$ до прямой $\begin{cases} 2x+y+z-1=0, \\ 3x+y+2z-3=0. \end{cases}$

9.12. Найти точку A, симметричную точке $B(2;1;0)$ относительно прямой $\begin{cases} x=2, \\ y+z+2=0. \end{cases}$

9.13. Найти точку, симметричную точке $A(4;3;10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

9.14. Найти проекцию точки $A(0;2;1)$ на прямую $\begin{cases} x=2t+1{,}5, \\ y=-t, \\ z=t+2. \end{cases}$

9.15. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$, $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

9.16. Найти точку A, симметричную точке $B(3;-3;1)$ относительно прямой $\begin{cases} x = 5t + 6, \\ y = 4t + 3{,}5, \\ z = -0{,}5. \end{cases}$

9.17. Найти проекцию точки $A(0;2;1)$ на прямую $\begin{cases} x + 2y - 1{,}5 = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$

9.18. Найти точку, симметричную точке $A(2;7;1)$ относительно плоскости $x - 4y + z + 7 = 0$.

9.19. Написать уравнение проекции прямой $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ на координатную плоскость OXY.

9.20. Провести через точку пересечения плоскости $x + y + z - 1 = 0$ с прямой $\begin{cases} y = 1, \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

9.21. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ параллельно прямой $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{1}$.

9.22. Найти расстояние от точки $M(3;2;5)$ до прямой $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-5}{-1}$.

9.23. Составить канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(2;3;1)$ на прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

9.24. Найти проекцию прямой $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{2}$ на плоскость $x - y + 3z + 8 = 0$.

9.25. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-2;0)$ перпендикулярно к прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ и расположенной в плоскости XOY.

9.26. Доказать, что прямые $\begin{cases} x+y-z+4=0, \\ 2x-3y-z-5=0 \end{cases}$ и $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ пересекаются, и найти их точку пересечения.

9.27. Найти расстояние между двумя прямыми $\begin{cases} x=3t+2, \\ y=t+1, \\ z=1 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x=t+3, \\ y=-t+5, \\ z=2t+3. \end{cases}$$

9.28. Найти расстояние от точки $A(2;1;1)$ до прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$.

9.29. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-3;5)$ и точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ с плоскостью $3x-y+2z-5=0$.

9.30. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;-2;3)$ и параллельной прямым $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-5}{6}$ и $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-8}$.

Задание 10.

Заданы координаты вершин некоторого треугольника ABC.
Найти: а) уравнение стороны BC;

б) уравнение высоты, проведенной из точки A;

в) уравнение медианы, проведенной из точки C;

г) уравнение биссектрисы внутреннего угла B.

10.1.	$A(1;4)$,	$B(7;-4)$,	$C(3;-7)$.
10.2.	$A(2;1)$,	$B(-7;13)$,	$C(-1;21)$.
10.3.	$A(3;3)$,	$B(10;-21)$,	$C(-2;-5)$.
10.4.	$A(4;1)$,	$B(-4;-5)$,	$C(-20;-7)$.
10.5.	$A(5;0)$,	$B(1;-3)$,	$C(-6;21)$.
10.6.	$A(3;1)$,	$B(15;17)$,	$C(6;29)$.
10.7.	$A(4;2)$,	$B(12;4)$,	$C(8;1)$.
10.8.	$A(2;5)$,	$B(9;-19)$,	$C(21;-3)$.
10.9.	$A(0;3)$,	$B(4;6)$,	$C(-8;22)$.
10.10.	$A(1;2)$,	$B(7;10)$,	$C(31;17)$.
10.11.	$A(1;4)$,	$B(17;16)$,	$C(5;32)$.
10.12.	$A(2;1)$,	$B(14;-8)$,	$C(22;-2)$.
10.13.	$A(3;3)$,	$B(9;11)$,	$C(5;14)$.
10.14.	$A(4;-1)$,	$B(-12;11)$,	$C(12;18)$.
10.15.	$A(5;0)$,	$B(8;4)$,	$C(16;-2)$.
10.16.	$A(3;1)$,	$B(15;17)$,	$C(6;29)$.
10.17.	$A(4;2)$,	$B(13;-10)$,	$C(19;-2)$.
10.18.	$A(2;1)$,	$B(9;-23)$,	$C(13;-20)$.
10.19.	$A(0;2)$,	$B(-16;-10)$,	$C(-24;-4)$.
10.20.	$A(1;3)$,	$B(-3;0)$,	$C(5;-6)$.
10.21.	$A(0;0)$,	$B(7;24)$,	$C(13;32)$.
10.22.	$A(1;1)$,	$B(13;17)$,	$C(9;20)$.
10.23.	$A(-1;-1)$,	$B(11;-10)$,	$C(23;6)$.

10.24. $A(1;3)$, $B(7;11)$, $C(19;2)$.

10.25. $A(2;4)$, $B(6;7)$, $C(-18;14)$.

10.26. $A(4;0)$, $B(1;4)$, $C(13;20)$.

10.27. $A(3;-1)$, $B(10;-25)$, $C(1;-13)$.

10.28. $A(2;3)$, $B(14;-13)$, $C(26;-4)$.

10.29. $A(1;2)$, $B(7;10)$, $C(31;3)$.

10.30. $A(1;1)$, $B(-3;4)$, $C(13;16)$.

Задание 11.

С помощью выделения полного квадрата привести заданное уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой, найти ее полуоси, эксцентриситет, координаты вершин и фокусов, уравнения директрис и асимптот (если они имеются). Сделать чертеж.

11.1. $5x^2+20x+2y^2+4y+12=0$.

11.2. $2x^2-4x-y^2-4y-6=0$.

11.3. $4x^2+24x+4y^2-8y+39=0$.

11.4. $18x-3x^2+4y^2+16y-14=0$.

11.5. $3y-4x-2x^2-7=0$.

11.6. $12x-2x^2+3y^2+24y+38=0$.

11.7. $7x^2-28x+3y^2+18y+34=0$.

11.8. $4x^2-24x-3y^2+12y+22=0$.

11.9. $3x-4y-2y^2-3=0$.

11.10. $3x^2-12x+3y^2+6y+10=0$.

11.11. $2y^2-16x-4x^2-4y-15=0$.

11.12. $3x^2-24x+2y^2+8y+44=0$.

11.13. $2x^2+24x-5y^2+30y+17=0$.

11.14. $3x^2-30x-4y+82=0$.

11.15. $6x^2+12x-3y^2-24y-24=0$.

11.16. $4x^2+8x+3y^2-30y+67=0$.

11.17. $4y^2-30x-3x^2+16y-35=0$.

11.18. $2x^2+20x+2y^2-12y+61=0$.

11.19. $3x^2+6x-4y^2-16y-21=0$.

11.20. $-3y^2-12y-5x-10=0$.

11.21. $12x-2x^2+5y^2+40y+52=0$.

11.22. $5x^2-30x+5y^2+20y+53=0$.

11.23. $4x^2-16x+5y+8=0$.

11.24. $4x^2+8x-5y^2+30y-26=0$.

11.25. $2x^2-12x+5y^2-40y+78=0$.

11.26. $5x^2-20x-3y^2+24y-38=0$.

11.27. $5y^2-10y+4x+8=0$.

11.28. $5y^2-24x-4x^2-10y-16=0$.

11.29. $6x^2+12x+2y^2-12y+15=0$.

11.30. $5x^2-20x-6y^2+24y+16=0$.

Задание 12.

Определить тип кривой второго порядка, составить ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат.

12.1. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.

12.2. $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$.

12.3. $x^2-12xy-4y^2+12x+8y+5=0$.

12.4. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

12.5. $x^2+xy+y^2+x+2y-2=0$.

12.6. $9x^2+24xy+16y^2+50x-100y+25=0$.

12.7. $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$.

12.8. $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$.

12.9. $x^2+4xy+4y^2+8x+6y+2=0$.

12.10. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

12.11. $x^2-2xy+y^2-x-2y+3=0$.

12.12. $2x^2-4xy+5y^2+8x-2y+9=0$.

12.13. $12xy+5y^2-12x-22y-19=0$.

12.14. $x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0$.

12.15. $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$.

12.16. $6xy-8y^2+12x-26y-11=0$.

12.17. $3x^2-4xy-2x+4y-5=0$.

12.18. $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$.

12.19. $2x^2+3xy-2y^2+x+5y-2=0$.

12.20. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.

12.21. $x^2-2xy+y^2-6x-2y+9=0$.

12.22. $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$.

12.23. $6xy-8y^2+12x-26y-11=0$.

12.24. $x^2-4xy+4y^2-2x-6y+2=0$.

12.25. $7x^2-24xy-38x+24y+175=0$.

12.26. $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$.

12.27. $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$.

12.28. $x^2-4xy+4y^2-5x+6=0$.

12.29. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$.

12.30. $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$.

Задание 13.

Семейство поверхностей задано уравнением, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ ($\lambda<0$, $\lambda=0$, $\lambda>0$). Построить полученные поверхности.

13.1. $\lambda x^2+y^2+z^2=4$.

13.2. $x^2+y^2-z^2=5\lambda$.

13.3. $x^2+\lambda y^2=3\lambda z$.

13.4. $\lambda x^2+y^2+z^2=\lambda$.

13.5. $x^2+\lambda\left(y^2+z^2\right)=2$.

13.6. $\lambda x^2+y^2=4z$.

13.7. $x^2-y^2-z^2=4\lambda$.

13.8. $x^2+3y^2=\lambda z$.

13.9. $x^2-\lambda y^2+z^2=2$.

13.10. $x^2+y^2-\lambda z^2=3$.

13.11. $\lambda\left(x^2+y^2\right)=-z$.

13.12. $x^2+\lambda\left(y^2-z^2\right)=3\lambda$.

13.13. $x^2+y^2=3\lambda z$.

13.14. $x^2-y^2=2\lambda$.

13.15. $\lambda x^2-y^2+z^2=\lambda$.

13.16. $y^2+z^2=-\lambda x$.

13.17. $-x^2+\lambda\left(y^2+z^2\right)=2\lambda$.

13.18. $z^2-\lambda x^2-y^2=\lambda$.

13.19. $2x=\lambda y^2-z^2$.

13.20. $y^2+\lambda\left(x^2+z^2\right)=\lambda$.

13.21. $3y^2=\lambda\left(x^2+z^2\right)$.

13.22. $4y=-\lambda x^2+z^2$.

13.23. $x^2+2\lambda y^2-z^2=2$.

13.24. $y^2-\lambda z^2=3\lambda$.

13.25. $2y=\lambda x^2+z^2$.

13.26. $z^2+\lambda\left(x^2+y^2\right)=\lambda$.

13.27. $x^2-2\lambda z=\lambda y^2$.

13.28. $x^2-y^2+\lambda z^2=2\lambda$.

13.29. $\lambda y^2+z^2=3x$.

13.30. $\lambda x^2-3y^2=\lambda z^2$.

Задание 14:

а) построить по точкам в полярной системе координат кривые $(r\geq 0)$;

б) перейдя к полярной системе координат, построить кривые.

14.1. а) $r = 3\sin 2\varphi$; б) $4\left(x^2 + y^2 - x\right)^2 = 9\left(x^2 + y^2\right)$.

14.2. а) $r = e^{2\varphi}$; б) $\left(x^2 + y^2 - 4y\right)^2 = 25\left(x^2 + y^2\right)$.

14.3. а) $r = 2\sin\varphi + 2$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 + 6xy = 0$.

14.4. а) $r^2 = 2\sin 2\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2 - 3y\right)^2 = 9\left(x^2 + y^2\right)$.

14.5. а) $r = \frac{1}{2}\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2 + 2x\right)^2 = 25\left(x^2 + y^2\right)$.

14.6. а) $r = \frac{4}{\varphi}$; б) $\left(x^2 + y^2 + \sqrt{3}x\right)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$.

14.7. а) $r = 4 - \cos\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 8\left(x^2 - y^2\right) = 0$.

14.8. а) $r = \sqrt{3}\sin\varphi + 2$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 + 2\left(x^2 - y^2\right) = 0$.

14.9. а) $r = 3\sin^3\frac{\varphi}{3}$; б) $\left(x^2 + y^2 + \sqrt{2}y\right)^2 = 9\left(x^2 + y^2\right)$.

14.10. а) $r = 3\cos\frac{\varphi}{2}$; б) $x^2 + y^2 = -2x$.

14.11. а) $r = \sqrt{3}\cos 3\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2 - \sqrt{2}x\right)^2 = 2\left(x^2 + y^2\right)$.

14.12. а) $r = 4\sin 4\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2 - y\right)^2 = 3\left(x^2 + y^2\right)$.

14.13. а) $r = \sin 3\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 4xy = 0$.

14.14. а) $r = 2\cos\varphi + 5$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\left(x^2 - y^2\right) = 0$.

14.15. а) $r^2 = 4\cos 2\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2 + 2y\right)^2 = 9\left(x^2 + y^2\right)$.

14.16. а) $r = 4\sin\frac{\varphi}{3}$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 6\left(x^2 - y^2\right) = 0$.

14.17. а) $r = 4 - 4\cos\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy$.

14.18. а) $r = 3 - 2\sin\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 + 8\left(x^2 - y^2\right) = 0$.

14.19. а) $r = e^{\frac{\varphi}{4}}$; б) $x^2 + y^2 = 8y$.

14.20. а) $r = 3\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$; б) $\left(x^2+y^2\right)^2 + 4xy = 0$.

14.21. а) $r = \dfrac{8}{3\varphi}$; б) $\left(x^2+y^2-x\right)^2 = x^2+y^2$.

14.22. а) $r = \dfrac{1}{2}e^{\frac{\varphi}{3}}$; б) $x^2+y^2 = -4y$.

14.23. а) $r^2 = -3\cos 2\varphi$; б) $\left(x^2+y^2+\sqrt{3}y\right)^2 = 16\left(x^2+y^2\right)$.

14.24. а) $r = 2\cos\varphi + 3$; б) $\left(x^2+y^2\right)^2 + 10\left(x^2-y^2\right) = 0$.

14.25. а) $r = \dfrac{3}{\varphi}$; б) $\left(x^2+y^2-2x\right)^2 = 9\left(x^2+y^2\right)$.

14.26. а) $r = \dfrac{1}{3}\varphi$; б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 6xy$.

14.27. а) $r = -2\cos 2\varphi$; б) $\left(x^2+y^2+\sqrt{3}y\right)^2 = 3\left(x^2+y^2\right)$.

14.28. а) $r = 3+3\cos 2\varphi$; б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4xy$.

14.29. а) $r = 3\cos 4\varphi$; б) $\left(x^2+y^2-\sqrt{3}x\right)^2 = 16\left(x^2+y^2\right)$.

14.30. а) $r = 4\cos 2\varphi$; б) $\left(x^2+y^2+x\right)^2 = 16\left(x^2+y^2\right)$.