1. Неопределенный интеграл

Простейшие приёмы интегрирования

1. $\int \left(f(x) \pm g\left(x\right) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2. $\int kf\left(x\right)dx = k\int f\left(x\right)dx$

3. $\int f\left(ax+b\right)dx = \dfrac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C$

Таблица интегралов

$$\int adx = ax + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int x^\lambda dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \left(a>0\right)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \operatorname{tg} xdx = -\ln\left|\cos x\right| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} xdx = \ln\left|\sin x\right| + C$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{sh} xdx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{th} xdx = \ln\left|\operatorname{ch} x\right| + C$$

$$\int \operatorname{cth} xdx = \ln\left|\operatorname{sh} x\right| + C$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{ch} xdx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln\left|x\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

Примеры:

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

■ $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x} + C = \sqrt{x} + C$.◄

2. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}dx$.

■ $\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}dx = \int\left(x^{-\frac{5}{2}} - e^x + x^{-1}\right)dx = -\frac{2}{3x^{\frac{3}{2}}} - e^x + \ln|x| + C$.◄

3. Найти интеграл $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$

■ $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} + x - x^{\frac{1}{2}} + 1\right)dx =$

$= \int\left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right)dx = x^{\frac{1}{2}} + x + C = \sqrt{x} + x + C$.◄

Основные приёмы интегрирования

1. Замена переменных в неопределенном интеграле

Если

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

то тогда

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + c.$$

Пусть требуется найти интеграл

$$\int f(x)dx$$

Выбирая в качестве новой переменной функцию $t = \omega(x)$, такую что подынтегральное выражение представляется в виде

$$f(x)dx = g(\omega(x))\omega'(x)dx$$

Цель данного приема состоит к переходу более удобной для интегрирования функции $g(t)$.

Примеры:

1.1. Найти интеграл $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

■ Вводя $t = e^x + 1$, получаем $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$.

Тогда

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(e^x+1) + C. \blacktriangleleft$$

1.2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

■ Вводя $t = e^x$, получаем $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$.

Тогда

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dt}{t(t+t^{-1})} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C. \blacktriangleleft$$

1.3. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$

■ Применим подстановку: $t = \arcsin x$; $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Первоначальный интеграл примет вид:

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}} = \int t^{-3}dt = -\frac{1}{2}t^{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(\arcsin x)^2} + C. \blacktriangleleft$$

2. Интегрирование по частям

Этот прием представляет сведение данного интеграла $\int u(x)dv(x)$ к интегралу $\int v(x)du(x)$ с помощью формулы

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Этот прием ведет к цели, если $\int v(x)du(x)$ находится легче, чем $\int u(x)dv(x)$.

Это правило хотя и имеет более ограниченную область применения по сравнению с заменой переменной, существует целый класс функций, который интегрируется именно с помощью этого метода. Сюда можно отнести:

$$\int x^m \sin bx dx \qquad \int x^m \cos bx dx \quad \int x^m \ln x dx$$

где m - целое положительное число. Применение метода интегрирования по частям предусматривает последовательное понижение степени x до нулевой.

Примеры:

2.1. Найти интеграл $\int (2x-5)\cos 4x dx$.

■ Применим формулу интегрирования по частям, обозначив

$$u = 2x-5,\ dv = \cos 4x dx,\ du = 2dx,\ v = \frac{\sin 4x}{4}.$$

Тогда

$$\int (2x-5)\cos 4x dx = \frac{2x-5}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\int \sin 4x dx + C = \frac{2x-5}{4}\sin 4x + \frac{1}{8}\cos 4x + C \blacktriangleleft$$

2.2. Найти интеграл: $\int x \ln^2 x dx$

■ Применяя дважды интегрирование по частям

В первый раз, обозначим: $u = \ln^2 x$, $dv = xdx$, $du = \frac{2\ln x}{x}dx$, $v = \frac{x^2}{2}$, получим

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \int x \ln x dx,$$

а во второй раз: $u = \ln x$, $dv = xdx$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$, получаем:

$$\int x\ln^2 xdx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln xdx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^4}{2} + C \blacktriangleleft$$

2.3. Найти интеграл: $\int \operatorname{arctg} xdx$

■ Обозначая $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$ и применив в ходе вычисления замену $t = 1 + x^2$, получим

$$\int \operatorname{arctg} xdx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C \blacktriangleleft$$

2.4. Найти интеграл: $\int x^2 \ln xdx$

■ Применим метод интегрирования по частям:

$$\int x^2\ln xdx = \left| \begin{matrix} u = \ln|x|; & dv = x^2; \\ du = \frac{dx}{x}; & v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| = \frac{x^3}{3}\ln|x| - \int \frac{x^3dx}{3x} = \frac{x^3}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\int x^2dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln|x| - \frac{x^3}{9} + C. \blacktriangleleft$$

2.5. Найти интегралы: $I_1 = \int e^{ax}\sin bxdx$ и $I_2 = \int e^{ax}\cos bxdx$.

■ Применим метод интегрирования по частям:

$$I_1 = \left| \begin{matrix} u = \sin bx, & dv = e^{ax}dx \\ du = b\cos bx, & v = \frac{1}{a}e^{ax} + c \end{matrix} \right| = \frac{\sin bx}{a}e^{ax} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bxdx;$$

$$I_2 = \left| \begin{matrix} u = \cos bx, & dv = e^{ax}dx \\ du = -\sin x, & v = \frac{1}{a}e^{ax} + c \end{matrix} \right| = \frac{\cos bx}{a}e^{ax} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

Таким образом, получается система линейных уравнений относительно неизвестных I_1 и I_2:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\sin bx}{a} e^{ax} - \dfrac{b}{a} I_2 \\ I_2 = \dfrac{\cos bx}{a} e^{ax} + \dfrac{b}{a} I_1 \end{cases},$$

разрешая которую, получаем

$$I_1 = \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

$$I_2 = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C . \blacktriangleleft$$

3. Интегрирование простых дробей

К простым дробям относятся

$$\text{(I)}\ \frac{A}{x-a};\quad \text{(II)}\ \frac{A}{(x-a)^k};\quad \text{(III)}\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad \text{(IV)}\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где A, M, N, a, p, q - действительные числа, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, т.е.

$$q - \frac{p^2}{4} > 0$$

Интегрирование (I) и (II) не представляет трудностей:

$$\int \frac{A}{x-a} = A \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$$

Для интегрирования дроби (III) применим метод замены переменной. Выделяя сначала из знаменателя полный квадрат

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right)$$

и прибегнув к подстановке

$$t = x + \frac{p}{2}$$

и обозначив

$$a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$$

получаем

$$dx = dt \qquad x^2 + px + q = t^2 + a^2 \qquad Mx + N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right)$$

а сам интеграл

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right)}{t^2 + a^2} dt = M \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d\left(t^2 + a^2\right)}{t^2 + a^2} + \frac{1}{a}\left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} = \frac{M}{2} \ln\left|t^2 + a^2\right| + \frac{1}{a}\left(N - \frac{Mp}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

Возвращаясь обратно к переменной x, окончательно получаем:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln\left(x^2 + px + q\right) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

Для случая (IV) подстановка $t = x + \frac{p}{2}$ приводит

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{M}{2} \int \frac{2t}{\left(t^2 + a^2\right)^k} dt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}$$

Первый интеграл вычисляется подстановкой $t^2 + a^2 = u$, $2tdt = du$:

$$\int \frac{2t}{\left(t^2 + a^2\right)^k} dt = \int \frac{du}{u^k} = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{u^{k-1}} + C = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} + C$$

Второй интеграл вычисляется с помощью рекуррентной формулы

$$J_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^k} + \frac{2k-1}{2k} \frac{1}{a^2} J_k,$$

где

$$J_k = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^k}$$

Приведенное рекуррентное соотношение позволяет найти искомый интеграл для любого натурального индекса k.

Так как при $k = 1$

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a},$$

то,

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \quad \text{и т.д.}$$

Примеры:

3.1. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{\left(x + 5\right)^4}$

■ Интеграл относится ко II типу. Здесь $k = 4$. Применив формулу:

$$\int \frac{A}{\left(x - a\right)^k} dx = -\frac{1}{k - 1}\frac{1}{\left(x - a\right)^{k-1}} + C,$$

получим:

$$\int \frac{dx}{\left(x + 5\right)^4} = -\frac{1}{3\left(x + 5\right)^3} + C. \blacktriangleleft$$

3.2. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$

■ Интеграл относится к IV типу. Здесь $k = 2$.

В знаменателе дроби исходного интеграла выделим неполный квадрат. Тогда:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} = \int \frac{dx}{\left(\left(x^2 + \frac{2x}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1\right)^2} = \int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2} = \int \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^2}.$$

Применим рекуррентную формулу:

$$J_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^k} + \frac{2k - 1}{2k}\frac{1}{a^2}J_k.$$

При $k=1$ $\quad I_1=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{\sqrt{3}}$;

При $k=2$ $\quad I_2=\dfrac{1}{\frac{6}{4}}\cdot\dfrac{t}{t^2+\frac{3}{4}}+\dfrac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}\operatorname{arctg}\dfrac{2t}{\sqrt{3}}=\dfrac{t}{\frac{3}{2}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}+\dfrac{8}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t}{\sqrt{3}}=$

$$=\frac{2t}{3\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}.$$

Тогда первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\int\frac{dx}{\left(\left(x^2+\frac{2x}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1\right)^2}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}=\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}=$$

$$=\frac{2t}{3\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{2x+1}{3\left(x^2+x+1\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C. ◄$$

3.3. Найти интеграл: $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^3}$

■ Воспользовавшись примером 3.2., выделив неполный квадрат в знаменателе подынтегральной дроби и произведя замену, получим:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^3}.$$

Интеграл относится к (IV) типу. Здесь $k=3$.

Применив рекуррентную формулу:

$$I_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{1}{a^2}I_k,$$

получим:

$$I_3=\frac{1}{2\cdot 3\cdot \frac{3}{4}}\cdot\frac{t}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}+\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}I_2=\frac{2t}{9\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}+\frac{4}{6}I_2=\frac{2t}{9\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}+\frac{2}{3}I_2=$$

$$=\left|t=x+\frac{1}{2}\right|=\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{9\left(t^2+x+1\right)^2}+\frac{2}{3}\left(\frac{2x+1}{3\left(x^2+x+1\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{2x+1}{9\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{4x+2}{9\left(x^2+x+1\right)}+\frac{8}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.◄$$

3.4. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}$

■ Здесь $k=3$. Применяя рекуррентную формулу

$$I_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{1}{a^2}I_k,$$

получим:

При $k=1$ $\quad I_1=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$;

При $k=2$ $\quad I_2=\frac{1}{2\cdot 2^2}\cdot\frac{x}{x^2+2^2}+\frac{1}{2\cdot 2^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

Тогда искомый интеграл при $k=3$ будет равен:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^2}\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{x}{8\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{x}{24\left(x^2+4\right)^2}+\frac{5}{24}\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)+C\ ◄$$

3.5. Найти интеграл: $\int\frac{2x+3}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx$

■ Преобразуем подынтегральное выражение.

$$I=\int\frac{2x+3}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx=\int\frac{(2x+2)+1}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx=\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx+\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2}=$$

$$=\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx+\int\frac{dx}{\left(\left(x^2+2x+1\right)+4\right)}=\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx+\int\frac{dx}{\left(\left(x+1\right)^2+4\right)^2}.$$

Сделаем в первом интеграле замену $t=x^2+2x+5$, во втором $t=x+1$. Воспользовавшись примером 3.4., получим

$$I_1=\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{x^2+2x+5}+C,$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(\left(x+1\right)^2+4\right)^2}=\int\frac{dx}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{x}{8\left(t^2+4\right)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$$

$$=\frac{x+1}{8\left(x^2+2x+5\right)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Окончательно,

$$\int\frac{2x+3}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx=-\frac{1}{x^2+2x+5}+\frac{x+1}{8\left(x^2+2x+5\right)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.\blacktriangleleft$$

4. Интегрирование рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (дробью) называется выражение вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m, не имеющие общих корней, т.е.

$$\frac{P_n(x)}{Q_p(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_px^p}$$

Дробь называется правильной если $p>n$; неправильной в противном случае. Каждую неправильную дробь можно привести к правильной путем исключения целой части, интегрирование которой не представляет сложностей.

В курсе высшей алгебры доказывается теорема, о том, что любая правильная дробь может быть представлена в виде конечного числа простых дробей.

Если $a,b,c,...,m$ — корни уравнения $Q_p(x)=0$, а $\alpha,\beta,\gamma,...,\mu$ — их соответствующие кратности, так что

$$Q_p(x)=\left(x-a\right)^{\alpha}\left(x-b\right)^{\beta}...\left(x-m\right)^{\mu}$$

$$\alpha+\beta+\gamma+...+\mu=p$$

то дробь представляется в виде

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_p\left(x\right)}=\frac{A_{\alpha}}{\left(x-a\right)^{\alpha}}+\frac{A_{\alpha-1}}{\left(x-a\right)^{\alpha-1}}+...+\frac{A_1}{x-a}+$$

$$+\frac{B_{\beta}}{\left(x-b\right)^{\beta}}+\frac{B_{\beta-1}}{\left(x-b\right)^{\beta-1}}+...+\frac{B_1}{x-b}+...+$$

$$+\frac{M_{\mu}}{\left(x-m\right)^{\mu}}+\frac{M_{\mu-1}}{\left(x-m\right)^{\mu-1}}+...+\frac{M_1}{x-m}+$$

где числители отдельных дробей определяются из системы линейных уравнений после приведения к общему знаменателю и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях с $P_n\left(x\right)$ (метод неопределенных коэффициентов).

Если $a,b,c,...,m$ — простые корни уравнения $Q_p(x)=0$, т.е. $\alpha=\beta=\gamma=...=\mu=1$, то

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_p\left(x\right)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{M}{x-m}$$

Если некоторые корни уравнения $Q_p(x)=0$ мнимы, то, соединяя вместе элементарные дроби, соответствующие сопряженным корням, можно после некоторых преобразований соответствующие пары дробей представить в виде действительных дробей вида

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+...+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

и методом неопределенных коэффициентов найти неизвестные M_i и N_i

Таким образом, интегрирование правильной рациональной дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ приводится к интегралам вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

рассмотренных в предыдущем п.3.

Примеры:

4.1. Найти интеграл: $\displaystyle\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx$.

■ 1. В подынтегральном выражении

$$\frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)} = \frac{x^3-5x^2+5x+23}{x^3-5x^2-x+5}$$

максимальная степень при переменной в числителе равна максимальной степени при переменной в знаменателе. Поэтому подынтегральная дробь – неправильная. Выполняя деление $x^3-5x^2+5x+23$ на x^3-5x^2-x+5, получаем

$$\begin{array}{r|l}
x^3-5x^2+5x+23 & \underline{x^3-5x^2-x+5} \\
\underline{x^3-5x^2-x+5} & 1 \\
6x+18 &
\end{array}$$

следовательно,

$$\frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)} = 1 + \frac{6x+18}{(x-1)(x+1)(x-5)}.$$

2. Так как подынтегральная функция — правильная рациональная дробь, а корни её знаменателя являются вещественными и простыми (их кратность равна единице), то

$$\frac{6x+18}{(x-1)(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-5},$$

откуда

$$\grave{A}(x+1)(x-5) + B(x-1)(x-5) + C(x-1)(x+1) = 6x+18.$$

Сравнивая коэффициенты при x^2, $x^1 = x$, x^0 (свободные члены) в тождестве, получаем систему

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=0 \\ x^1 & -4A-6B=6 \\ x^0 & -5A+5B-C=18 \end{array}$$

решение которой $A=-3$, $B=1$, $C=2$.

Тогда,

$$\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx = \int\left(1+\frac{6x+18}{(x-1)(x+1)(x-5)}\right)dx =$$

$$= \int\left(1-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-5}\right)dx = x-3\ln|x-1|+\ln|x+1|+2\ln|x-5|+C =$$

$$= x+\ln\frac{(x+1)(x-5)^2}{(x-1)^3}+C. \blacktriangleleft$$

4.2. Найти интеграл: $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx$

■ Так как подынтегральная функция — правильная рациональная дробь, а корни её знаменателя являются вещественными, то представляя в виде суммы простых дробей

$$\frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x+2)^3}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2},$$

откуда

$$A(x+2)^3+B(x-2)+C(x-2)(x+2)+D(x-2)(x+2)^2 = x^3+6x^2+4x+24. ()$$

Сравнивая коэффициенты при x^3, x^2, $x^1 = x$, x^0 (свободные члены) в тождестве, получаем систему

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+D=1 \\ x^2 & 6A+C+2D=6 \\ x^1 & 12A+B-4D=4 \\ x^0 & 8A-2B-4C-8D=24 \end{array}$$

решение которой $A=1, B=-8, C=0,\ D=0$.

Тогда

$$\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx = \int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{8}{(x+2)^3}\right)dx = \ln|x-2| + \frac{4}{(x+2)^2}+C\,.◄$$

4.3. Найти интеграл: $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$

■ Подынтегральная функция — правильная дробь и представляя её в виде суммы простых дробей

$$\frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

откуда

$$(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+1) = 4x^2+3x+4\,,$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему

$$\begin{array}{c||l} x^3 & A+C=0 \\ x^2 & A+B+D=4 \\ x^1 & 1A+B+c=3 \\ x^0 & B+D=4 \end{array}$$

решение которой $A=0, B=3, C=0,\ D=1$.

Тогда

$$\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx = \int\left(\frac{3}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$=3\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{1}{(x+0.75)^2+0.75}dx = 3\operatorname{arctg} x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}\right)+C \quad ◄$$

4.4. Найти интеграл: $\int\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx$

■ Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет различные действительные корни.

Представим её в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Откуда: $x^2+1=A\left(x^2-1\right)+Bx\left(x+1\right)+Cx\left(x-1\right)$;

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=0 \\ -A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=2 \\ C=2 \\ A=-1 \end{cases}$$

Первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{2}{x+1}dx=-\ln|x|+2\int\frac{d\left(x+1\right)}{x+1}=-\ln|x|+2\ln|x-1|+$$

$$+2\ln|x+1|=C.\blacktriangleleft$$

5. Интегрирование иррациональных функций

5.1. Интегралы вида

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s,\ldots\right]dx$$

где $r,s,\ldots\in\mathbb{Q}$ — рациональные числа, приводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$$

где m общий знаменатель дробей $r,s,\ldots$.

Примеры.

5.1.1. Найти интеграл: $\int\frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}dx$

■ Положим $\sqrt{x}=t$, тогда $\frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt$, т. е. $dx=2tdt$;

$$\int\frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}dx=\int\frac{t+1}{t^4-t}2tdt=2\int\frac{t+1}{t^3-1}dt.$$

Представляя рациональную функцию $\dfrac{t+1}{t^3-1}$ как сумму простsх дробей, получим:

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{2}{3}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt = \frac{4}{3}\ln|t-1| - \frac{2}{3}\ln\left|t^2+t+1\right| + C =$$

$$= \frac{2}{3}\ln\frac{t^2-2t+1}{t^2+t+1} + C = \frac{2}{3}\ln\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + C. \blacktriangleleft$$

5.1.2. Найти интеграл: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

■ Положим $\sqrt[4]{x} = t$, тогда $\dfrac{x^{-\frac{3}{4}}}{4}dx = dt$, т. е. $dx = 4t^3dt$. Первоначальный интеграл примет вид:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = 4\int \frac{t^3dt}{t^2+t} = 4\int \frac{t^2dt}{t+1} = 4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = 4\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C. \blacktriangleleft$$

5.1.3. Найти интеграл: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

■ Подынтегральную функцию преобразуем к виду:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \frac{1}{(x+2)^2}\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}\ .$$

Полагая $\dfrac{x+2}{x-1} = t$, имеем:

$$x = \frac{2+t^4}{t^4-1} = t^4, \quad x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1}, \quad dx = \frac{-12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt,$$

тогда:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \int \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}\frac{dx}{(x+2)^2} = \int t^3\frac{\left(t^4-1\right)^2}{9t^8}\frac{\left(-12t^3\right)}{\left(t^4-1\right)^2}dt =$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C \blacktriangleleft$$

5.2. Интегралы вида

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

(интегралы от биномиальных дифференциалов), где a,b — действительные числа, а m,n,p — рациональные, выражаются в элементарных функциях только в следующих случаях:

(а) когда p — целое число; тогда этот интеграл рационализируется подстановкой $t=\sqrt[\lambda]{x}$, где λ - наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

(б) когда $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число, то подстановкой $z=x^n$ этот интеграл преобразуется к виду

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{1}{n}\int\left(a+bz\right)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz$$

В этом случае рационализация подынтегрального выражения осуществляется подстановкой

$$t=\sqrt[\nu]{a+bz}=\sqrt[\nu]{a+bx^n}\ ,$$

где ν - знаменатель дроби p.

(в) когда $\dfrac{m+1}{n}+p$ — целое число, то при помощи той же подстановки $z=x^n$ данный интеграл приводится к

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{1}{n}\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{\frac{m+1}{n}+p-1}dz$$

Здесь мы будем использовать подстановку

$$t=\sqrt[\nu]{az+b}=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}\ .$$

Примеры:

5.2.1. Найти интеграл: $\int\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$.

■ В подынтегральном выражении $m=\dfrac{1}{2}$; $\quad n=\dfrac{1}{3}$; $\quad p=4$ – целое число.

Здесь случай (а). Применим подстановку:

$t=\sqrt[6]{x} \;\Rightarrow x=t^6$; $dx=6t^5dt$. Тогда $\sqrt{x}=t^3$; $\sqrt[3]{x}=t^2$. Здесь 6 – наименьшее общее кратное чисел 2 и 3.

Первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4dx=6\int t^8\left(1+t^2\right)^4dt=6\int t^8\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)^2dt=$$

$$=6\int t^8\left(1+2t^2+t^4\right)\left(1+2t^2+t^4\right)dt=6\int t^8\left(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8\right)dt=$$

$$=6\int\left(t^8+4t^{10}+6t^{12}+4t^{14}+t^{16}\right)dt=\frac{6t^9}{9}+\frac{24t^{11}}{11}+\frac{36t^{13}}{13}+\frac{24t^{15}}{15}+\frac{6t^{17}}{17}+C\,.$$

И, наконец, переходя к первоначальной переменной x, получим:

$$\int\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{24}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{36}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{6}{17}x^{\frac{17}{6}}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+\frac{36}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+\frac{8}{5}\sqrt{x^5}+\frac{6}{17}\sqrt[6]{x^{17}}+C=$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{8}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}=C\,.◄$$

5.2.2. Найти интеграл: $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}$.

■ Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}=x^{-1}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-3}.$$

Тогда первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}=\int x^{-1}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-3}dx\,.$$

$m=-1;\quad n=\dfrac{1}{3};\quad p=-3$ - целое число. Имеем место случай (а). Применим подстановку: $t=\sqrt[3]{x}$; т. е. $t=x^{\frac{1}{3}}$, получим: $dt=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$. Откуда

$$dx=3x^{\frac{2}{3}}dt;\qquad x^{\frac{2}{3}}=t^2.$$

Следовательно, $dx=3t^2dt$.

С учётом подстановки первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}=\int x^{-1}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-3}dx=\int t^{-3}(1+t)^{-3}3t^2dt=3\int\frac{dt}{t\left(1+t\right)^3}$$

Знаменатель подынтегральной дроби имеет действительные корни.

Разложим подынтегральную функцию: $\dfrac{1}{t\left(1+t\right)^3}$ на сумму простых дробей:

$$\frac{1}{t\left(1+t\right)^3}=\frac{A}{\left(1+t\right)^3}+\frac{B}{\left(1+t\right)^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{t}.$$

Приведём к общему знаменателю и приравняем числители обеих частей уравнения:

$$1=At+Bt+Bt^2+Ct+2Ct^2+Ct^3+D+3Dt+3Dt^2+Dt^3;$$

Сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях t:

$$1=t^3\left(C+D\right)+t^2\left(B+2C+3D\right)+t\left(A+B+C+3D\right)+D;$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}C+D=0\\B+2C+3D=0\\A+B+C+3D=0\\D=1\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}A=-1\\B=-1\\C=-1\\D=1\end{cases}$$

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}=\int x^{-1}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-3}dx=\int t^{-3}(1+t)^{-3}3t^2dt=3\int\frac{dt}{t\left(1+t\right)^3}=$$

$$-3\int\frac{dt}{(1+t)^3}-3\int\frac{dt}{(1+t)^2}-3\int\frac{dt}{1+t}+3\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{-3(1+t)^{-2}}{-2}-\frac{3(1+t)^{-1}}{-1}-3\ln|1+t|+3\ln|t|+C=\frac{3}{2\left(1+t^2\right)}+\frac{3}{1+t}+\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|^3+C=$$

$$=\frac{3}{2\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}+\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+C. ◄$$

5.2.3. Найти интеграл: $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

■ Преобразуем подынтегральную функцию: $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}$.

В интеграле $m=-\frac{1}{2}$; $n=\frac{1}{4}$; $\frac{m+1}{n}=\left(-\frac{1}{2}+1\right):\frac{1}{4}=2$ - целое число.

Имеем случай (б). Применим подстановку Чебышева $t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}}$ или $t=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Тогда $t^3=1+x^{\frac{1}{4}}$; $x^{\frac{1}{4}}=t^3-1$; $x=\left(t^3-1\right)^4$; $dx=4\left(t^3-1\right)^3 3t^2=12t^2\left(t^3-1\right)^3 dt$;

$x^{\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2=\left(t^3-1\right)^2$.

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\frac{12t^3\left(t^3-1\right)^3}{\left(t^3-1\right)^2}dt=\int 12t^3\left(t^3-1\right)dt=$$

$$=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=\frac{12t^7}{7}-\frac{12t^4}{4}+C=\frac{12}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}+C=$$

$$=\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^4}+C=$$

$$=\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}-3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C\,.◄$$

5.2.4. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

■ Перепишем подынтегральное выражение в виде:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=x^0\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{4}}.$$

При $p=-1/4$, $m=0$, $n=4$ и $\frac{m+1}{n}+p=0$. Очевидно, имеет место случай (в).

Так как $a=b=1$, то полагая $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$, получаем $t^4=1+x^{-4}$, откуда

$$x=\frac{1}{\sqrt[4]{t^4-1}}\qquad dx=-\frac{t^3dt}{\left(t^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}\qquad \sqrt[4]{1+x^4}=\frac{t}{\sqrt[4]{t^4-1}}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x+1}}=-\int\frac{t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}}{t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}}dt=\int\frac{t^2}{1-t^4}dt=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t+C=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C\,.◄$$

5.2.5. Найти интеграл: $\int\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[25]{x^{24}}}dx$

■ Перепишем подынтегральное выражение в виде:

$$\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[25]{x^{24}}}=x^{-\frac{49}{25}}\left(1+x^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

При $p=1/5$, $m=-49/25$, $n=4/5$ и $\frac{m+1}{n}+p=-1$. Очевидно, имеет место случай (в). Так как $a=b=1$, то полагая $t=\sqrt[5]{1+x^{-\frac{4}{5}}}$, получаем $t^5=1+x^{-\frac{4}{5}}$, откуда

$$x=\frac{1}{\left(t^5-1\right)^{\frac{5}{4}}};\qquad dx=-\frac{25t^4}{4\left(t^5-1\right)^{\frac{9}{4}}}dt\qquad \sqrt[5]{1+x^{\frac{4}{5}}}=\frac{t}{\sqrt[5]{t^5-1}}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[25]{x^{11}}}dx=\int\left(t^5-1\right)^{\frac{49}{20}}\left(1+\frac{1}{t^5-1}\right)^{\frac{1}{5}}\frac{-25t^4}{4\left(t^5-1\right)^{\frac{9}{4}}}dt=$$

$$=-\frac{25}{4}\int t^5dt=-\frac{25}{24}t^6+C=-\frac{25}{24}\sqrt[5]{\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}+1\right)^6}+C\ ◄$$

5.2.6. Найти интеграл: $\int\frac{x^3dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$

■ Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{x^3}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}=x^3\left(4-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

В интеграле $m=3$; $n=2$; $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$- целое число. Имеем случай (б).

Применим подстановку Чебышева: $t=\sqrt{4-x^2}$ или $t=\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $t^2=4-x^2$; $xdx=-tdt$;

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\int\frac{x^3dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}=\int x^3\left(4-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx=\int\left(4-t^2\right)\left(t^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-tdt\right)=-\int\left(4-t^2\right)t^{-3}tdt=$$

$$=\int t^{-2}\left(t^2-4\right)dt=\int\left(1-\frac{4}{t^2}\right)dt=t+\frac{4}{t}+C=\frac{t^2+4}{t}+C.$$

Перейдём к первоначальной переменной x:

Так как $t=\sqrt{4-x^2}$, то

$$\int\frac{x^3dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}=\int x^3\left(4-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx=\int\left(4-t^2\right)\left(t^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-tdt\right)=-\int\left(4-t^2\right)t^{-3}tdt=$$

$$=\int t^{-2}\left(t^2-4\right)dt=\int\left(1-\frac{4}{t^2}\right)dt=t+\frac{4}{t}+C=\frac{t^2+4}{t}+C=\frac{4-x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}+C=$$

$$=\frac{8-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+C\,.\blacktriangleleft$$

5.2.7. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

■ Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}dx\,.$$

В интеграле $m=-1;\quad n=5;\quad p=-\frac{1}{3};\ \frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{5}=0$ - целое число. Имеем случай (б). Положим $t=\sqrt[3]{1+x^5}$ или $t^3=1+x^5$. Дифференцируя последнее равенство, получаем: $3t^2dt=5x^4dx$. Откуда: $x^4dx=\frac{3}{5}t^2dt$. С учётом замены первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}dx=\int\frac{x^5\cdot x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}}{x^5}dx=\int\frac{\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}x^4}{x^5}dx=$$

$$=\frac{3}{5}\int\frac{t^2dt\cdot t^{-1}}{t^3-1}=\frac{3}{5}\int\frac{tdt}{t^3-1}.$$

Подынтегральная функция $\frac{t}{t^3-1}$ - рациональная дробь. Разложим знаменатель дроби на множители: $t^3-1=\left(t-1\right)\left(t^2+t+1\right)$.

Так как один корень знаменателя – действительный, а другой не является действительным, представим подынтегральную дробь в виде суммы простых дробей:

$$\frac{t}{t^3-1}=\frac{t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt-C}{t^2+t+1}.$$

Приведём к общему знаменателю и приравняем числители обеих частей уравнения:

$$t=A\left(t^2+t+1\right)-\left(Bt+C\right)(t-1);$$

$t=At^2+At+A-Bt^2-Ct+Bt+C$;

Сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях t:

$t=t^2(A-B)+t(A-C+B)+(A+C).$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$t^2: \quad A-B=0,$

$t: \quad A-C+B=1,$

$t^0: \quad A+C=0.$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A-B=0 \\ A-C+B=1 \\ A+C=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=\dfrac{1}{3} \\ C=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}dx=\int\frac{\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}x^4}{x^5}dx=\frac{3}{5}\int\frac{t^2dt\cdot t^{-1}}{t^3-1}=\frac{3}{5}\int\frac{tdt}{t^3-1}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{t+1}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{5}\left(\ln|t+1|-\int\frac{t-1}{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt\right).$$

Введём новую переменную $t+\dfrac{1}{2}=z$, $dt=dz$.

Тогда интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}dx=\int\frac{\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}x^4}{x^5}dx=\frac{3}{5}\int\frac{t^2dt\cdot t^{-1}}{t^3-1}=\frac{3}{5}\int\frac{tdt}{t^3-1}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{t+1}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{5}\left(\ln|t+1|-\int\frac{t-1}{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln|t-1|-\int\frac{z-\frac{3}{2}}{z^2+\frac{3}{4}}dz\right)=\frac{1}{5}\left(\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln\left(z^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+c=\frac{1}{5}\ln\left|\sqrt[3]{1+x^5}-1\right|-$$

$$-\frac{1}{10}\ln\left(\sqrt[3]{\left(1+x^5\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^5}+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}+C\,.\blacktriangleleft$$

5.3. Рационализация подынтегрального выражения в интегралах вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

достигается с помощью, по крайней мере, одной из следующих трех подстановок, называемых подстановками Эйлера

(а) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\pm\sqrt{a}x$ при $a>0$;

(б) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt\pm\sqrt{c}$ при $c>0$;

(в) $\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=a\left(x-x_1\right)$ при условии, что корни x_1 и x_2 уравнения $ax^2+bx+c=0$ действительны.

Следует иметь в виду, что подстановки (а) – (в) часто приводят к громоздким вычислениям. Поэтому обычно применяют другие способы.

Заметим, что подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+R_2(x),$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ - рациональные дроби. Записывая $R_1(x)$ в виде суммы многочлена $P_n(x)$ и суммы простых дробей, сведем интеграл к линейной комбинации интегралов следующих трех типов:

(а) $$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$$

(б) $$\int\frac{dx}{(x-a)^r\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad r\in\mathbb{N};$$

(в) $$\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad k\in\mathbb{N},\quad p^2-4q<0.$$

При нахождении интеграла (а), где $P_n(x)$ — многочлен степени n, удобно использовать формулу

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

В этой формуле $Q(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, λ — некоторое число. Дифференцируя тождество и умножая затем обе части получаемого соотношения на $2\sqrt{ax^2+bx+c}$, находим

$$2P_n(x)=2Q'(x)\left(ax^2+bx+c\right)+Q(x)(2ax+b)+2\lambda.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, вычислим коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число λ. Интеграл в правой части сводится к табличному с помощью линейной подстановки.

Рассмотрим случай (б). Подстановкой $(x-a)=\frac{1}{t}$ этот интеграл сводится к интегралу (а).

Рассмотрим интеграл (в). Пусть существует число ω такое, что для всех $x\in\mathbb{R}$ выполняется равенство $ax^2+bx+c=\omega\left(x^2+px+q\right)$, т.е. $b=ap$, $c=aq$, то интеграл (в) можно представить в виде линейной комбинации интегралов

$$I_1=\int\frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^{k+1/2}} \quad \text{и} \quad I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{k+1/2}}.$$

Интеграл I_1 сводится к табличному, а интеграл I_2 подстановкой Абеля

$$u=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'=\frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$$

сводится к интегралу от многочлена.

Если $b\neq ap$, то используется подстановка

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1},$$

где числа α и β подбираются такими, чтобы коэффициенты при t в квадратных трехчленах подынтегральной функции обратились в нуль. При этом интеграл (в) примет вид

$$\int\frac{P(t)dt}{\left(t^2+\lambda\right)\sqrt{\mu t^2+\nu}}, \qquad ()$$

где $P(t)$ — многочлен степени $2k-1$, $\lambda>0$.

Если $b=ap$, но $c\neq aq$, то можно применить подстановку $x=t-\dfrac{p}{2}$.

Чтобы найти интеграл, разложим правильную рациональную дробь на простые дроби и представим интеграл в виде линейной комбинации интегралов вида

$$I_1=\int\frac{tdt}{\left(t^2+\lambda\right)^m\sqrt{\mu t^2+\nu}} \quad \text{и} \quad I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+\lambda\right)^m\sqrt{\mu t^2+\nu}}.$$

Интеграл I_1 вычисляется с помощью подстановки $u^2=\mu t^2+\nu$, а интеграл I_2 — с помощью подстановки Абеля $y=\dfrac{\mu t}{\sqrt{\mu t^2+\nu}}$.

Примеры:

5.3.1. Найти интеграл: $\int \frac{\left(x^3-2\right)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

■ Данный интеграл относится к случаю (а).

Полагаем

$$\int \frac{\left(x^3-2\right)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Продифференцируем это тождество. Получим:

$$\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = (2ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{\left(ax^2+bx+c\right)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

Откуда получаем:

$$2\left(x^3-2\right) = (4ax+2b)\left(x^2+x+1\right) + \left(ax^2+bx+c\right)(2x+1) + 2\lambda$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов a, b, c, λ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 = 4a + 2a, \\ 0 = 4a + 2b + a + 2b, \\ 0 = 4a + 2b + b + 2c, \\ -4 = 2b + c + 2\lambda, \end{cases}$$

Откуда: $a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{1}{3},\ c = -\frac{1}{24},\ \lambda = -\frac{25}{16}.$

Следовательно,

$$\int \frac{\left(x^3-2\right)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{25}{16}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + C. \blacktriangleleft$$

5.3.2. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

■ Данный интеграл относится к случаю (б). Введём подстановку $(x-a) = \frac{1}{t}$.

Тогда интеграл приводится к виду, рассмотренному в предыдущей задаче.

Положим $x = \frac{1}{t}$, тогда $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ и для $t > 0$ имеем:

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{t^3dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\int\frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}dt=-\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+$$

$$+\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+C=-\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+C,\ t=\frac{1}{x}.◄$$

5.3.3. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+x+2\right)^5}}$

■ Данный интеграл относится к случаю (в).

Полагаем

$$t=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}},$$

Тогда:

$$4t^2\left(x^2+x+2\right)=4x^2+4x+1=4\left(x^2+x+2\right)-7,$$

Откуда:

$$x^2+x+2=\frac{-7}{4t^2-4}.$$

Дифференцируя равенство $t\sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{1}{2}$, получим:

$$dt\sqrt{x^2+x+2}+\frac{(2x+1)tdx}{2\sqrt{x^2+x+2}}=dx,$$

Откуда:

$$dt\sqrt{x^2+x+2}+t^2dx=dx.$$

Итак,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

Поэтому:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+x+2\right)^{\frac{5}{2}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}\frac{1}{\left(x^2+x+2\right)^2}=\int\frac{dt}{1-t^2}\frac{\left(4t^2-4\right)^2}{49}=$$

$$=\frac{16}{49}\int\left(1-t^2\right)dt=\frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{16}{49}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{24}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right)+C.◄$$

5.3.4. Найти интеграл $\int\frac{11x-13}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

■Данный интеграл относится к (в), причём $x^2-x+1\neq\omega\left(x^2+1\right)$. Положим $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$. Подберём числа α и β так, чтобы коэффициенты при t в квадратных трехчленах подынтегральной функции обратились в нуль. Так как

$$x^2-x+1=\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2-\frac{\alpha t+\beta}{t+1}+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha t\beta+\beta^2-(\alpha t+\beta)(t+1)+t^2+2t+1}{(t+1)^2},$$

$$x^2+1=\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha t\beta+\beta^2+t^2+2t+1}{(t+1)^2},$$

то, приравнивая к нулю коэффициенты при t в числителях этих дробей, получаем систему

$$\begin{cases}2\alpha\beta-\alpha-\beta=0\\2\alpha\beta+2=0\end{cases}$$

решение которой $\alpha=1$, $\beta=-1$.

Следовательно, искомая замена $x=\frac{t-1}{t+1}$. Тогда имеем

$$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2},\qquad x^2+1=\frac{2t^2+2}{(t+1)^2},$$

числитель преобразуется как

$$11x-13=11\frac{t-1}{t+1}-13=\frac{-2t-24}{t+1},\qquad dx=\frac{2dt}{(t+1)^2},$$

а сам интеграл

$$\int\frac{11x-13}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx=-2\sqrt{2}\int\frac{(t+2)\,dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{t^2+1}}=-2\sqrt{2}\left(I_1+2I_2\right),$$

где

$$I_1 = \int \frac{tdt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{t^2+1}} \qquad \text{и} \qquad I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{t^2+1}}.$$

Интеграл I_1 вычисляется при помощи замены $z = \sqrt{t^2+1}$. Тогда, $dz = \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}$, $t^2+3 = z^2+2$. То есть, вычисление интеграла I_1 сводится к табличному

$$I_1 = \int \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t^2+1}{2}} + c.$$

Для вычисления I_2 сделаем подстановку $z = \left(\sqrt{t^2+1}\right)' = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ или $z\sqrt{t^2+1} = t$.

Дифференцируя, получаем

$$\sqrt{t^2+1}dz + z\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} = dt,$$

а с учётом подстановки

$$\sqrt{t^2+1}dz + z^2dt = dt \qquad \text{или} \qquad \frac{dz}{1-z^2} = \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Кроме того, из $z\sqrt{t^2+1} = t$ следует $t^2+3 = \frac{3-2z^2}{1-z^2}$. Таким образом, вычисление I_2 сводится к табличному

$$I_2 = \int \frac{dz}{3-2z^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+z\sqrt{2}}{\sqrt{3}-z\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right| + c.$$

Объединяя вычисления, окончательно получаем

$$\int \frac{11x-13}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx = -2\sqrt{2}\left(I_1+2I_2\right) =$$

$$= -2\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t^2+1}{2}} - 4\sqrt{3} \ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right| + c, \text{ где } t = \frac{x+1}{1-x}. \blacktriangleleft$$

6. Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

могут быть всегда приведены к интегралам от рациональных функций при помощи подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

При этом функции подынтегрального выражения выражаются через новые переменные

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Если при этом подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ удовлетворяет соотношению

$$R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$$

то выгодно применить подстановку $t = \cos x$. Например, с помощью этой подстановки интеграл

$$\int R(\sin^{\nu} x, \cos^{\mu} x)\,dx$$

где ν — нечетное число, а μ — четное, с соответствующей заменой

$$\sin x dx = (t^2 - 1)\,dt$$

приводится к интегралу от рациональной функции.

Если эта функция удовлетворяет соотношению

$$R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$$

то выгодно применить подстановку $t = \sin x$. Например, с помощью этой подстановки интеграл

$$\int R(\sin^{\nu} x, \cos^{\mu} x)\,dx$$

где ν — четное число, а μ — нечетное, с соответствующей заменой

$$\cos x dx = (1 - t^2)\,dt$$

приводится к интегралу от рациональной функции.

Если эта функция удовлетворяет соотношению

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$$

то выгодно применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$. Например, с помощью этой подстановки интеграл

$$\int R\left(\sin^{\nu} x, \cos^{\mu} x, \sin x \cos x\right) dx$$

где ν, μ — четные числа, с соответствующей заменой

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2};\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2};\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

приводится к интегралу от рациональной функции.

Примеры:

6.1. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

■ Подынтегральная функция является нечётной относительно синуса и косинуса. Применим подстановку: $tg\frac{x}{2} = t$, тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Первоначальный интеграл примет вид:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C. \blacktriangleleft$$

6.2. Найти интеграл: $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x}$.

■ Подынтегральная функция нечётная относительно косинуса. Интеграл рационализируется с помощью подстановки: $t - \sin x;\quad dt = \cos x dx;\quad \cos^2 x = 1 - t^2$.

Тогда первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{\left(1-t^2\right)^3 dt}{t^4}=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-3\cdot\int\frac{dt}{t^2}+3\cdot\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=$$

$$=\left|t=\sin x\right|=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c\,.◄$$

6.3. Найти интеграл: $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx$.

■ Подынтегральная функция нечётная относительно синуса. Рационализируется с помощью подстановки:

$$t=\cos x;\qquad \sin x=\sqrt{1-t^2};\qquad dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

С учётом замены первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx=\int\frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{t-3}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{t^2-1}{t-3}dt\,.$$

Выделяя целую часть в подынтегральном выражении, получим:

$$\int\frac{t^2-1}{t-3}dt=\int\left(t+1\right)dt+8\int\frac{dt}{t-3}=\frac{t^2}{2}+3t+8\ln\left|t-3\right|+C=$$

$$=\frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x-8\ln\left(3-\cos x\right)+C\,.◄$$

6.4. Найти интеграл: $\int\frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x}$

■ Подынтегральная функция нечётная относительно косинуса. Рационализируется интеграл с помощью подстановки:

$$\sin x=t;\quad dt=cosxdx;\quad cos^2x=1-\sin^2 x=1-t^2\,.$$

Исходный интеграл примет вид:

$$\int\frac{cos^7xdx}{\sin^4 x}=\int\frac{\left(1-t^2\right)^3}{t^4}dt=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+$$

$$+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=-\frac{1}{\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c\,.◄$$

6.5. Найти интеграл: $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^2 x + 4\sin x \cdot cosx}$

■ Подынтегральная функция чётная относительно синуса и косинуса. Применим подстановку:

$$\mathrm{ctgx} = \mathrm{t}; \quad x = \mathrm{arcctgt}; \quad dx = -\frac{1}{1+\mathrm{t}^2}; \quad 1 + \mathrm{ctg}^2\mathrm{x} = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 x};$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\mathrm{x}}}; \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{1+t^2-1}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

С учётом подстановки первоначальный интеграл примет вид:

$$\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x} = -\int \left(\frac{t^2}{\left(\ 1+t^2 \ \right)^2} \right) dt / \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} \right) =$$

$$= -\int \left(\frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} \right) / \left(\frac{1+4t}{1+t^2} \right) = -\int \frac{t^2 \left(1+t^2\right) dt}{\left(1+t^2\right)^2 \left(1+4t\right)} = -\int \frac{t^2 dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+4t\right)}.$$

Подынтегральная функция $\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1+4t\right)}$ – рациональная дробь.

Разложим её на сумму простых дробей:

$$\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1+4t\right)} = \frac{A}{1+4t} + \frac{Bt+C}{1+t^2}.$$

$$t^2 = A + At^2 + Bt + 4Bt^2 + C + 4Ct;$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями при t:

$$t^2 = t^2\left(A+4B\right) + \left(B+4C\right)t + \left(A+C\right).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t.

$$t^2: \quad A + 4B = 1;$$

$$t: \quad B + 4C = 0;$$

$$t^0: \quad A + C = 0.$$

Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A+4B=1 \\ B+4C=0 \\ A+C=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\dfrac{1}{17} \\ B=\dfrac{4}{17} \\ C=-\dfrac{1}{17} \end{cases}$$

Тогда первоначальный интеграл примет вид:

$$\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}=-\int\left(\frac{t^2}{\left(\ 1+t^2\ \right)^2}\right)dt\Big/\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{4t}{\sqrt{1+t^2}}\right)=$$

$$=-\int\left(\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}\right)\Big/\left(\frac{1+4t}{1+t^2}\right)=-\int\frac{t^2\left(1+t^2\right)dt}{\left(1+t^2\right)^2\left(1+4t\right)}=-\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+4t\right)}=-\frac{1}{17}\int\frac{dt}{1+4t}-$$

$$-\int\frac{4/17t-1/17}{1+t^2}dt=-\frac{1}{17}\int\frac{dt}{1+4t}-\frac{1}{17}\int\frac{tdt}{1+t^2}+\frac{1}{17}\int\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{1}{17}\int\frac{dt}{1+4t}-$$

$$-\frac{1}{34}\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}+\frac{1}{17}\int\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{1}{68}\ln\left|1+4t\right|-\frac{1}{34}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{17}\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=\left|t=\operatorname{ctg} x\right|=-\frac{1}{68}\ln\left|\frac{\sin x+4\cos x}{\sin x}\right|-\frac{1}{34}\ln\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)+\frac{1}{17}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} x\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{68}\ln\left|\sin x+4\cos x\right|+\frac{1}{68}\ln\left|\sin x\right|-\frac{1}{34}\ln\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)-\frac{1}{17}x+C=$$

$$=-\frac{1}{68}\ln\left|\sin x+4\cos x\right|+\frac{1}{68}\ln\left|\sin x\right|-\frac{1}{34}\ln\left|\sin^{-2} x\right|-\frac{1}{17}x+C=$$

$$=-\frac{1}{68}\ln\left|\sin x+4\cos x\right|+\frac{1}{68}\ln\left|\sin x\right|+\frac{1}{17}\ln\left|\sin x\right|-\frac{1}{17}x+C=$$

$$=-\frac{1}{68}\ln\left|\sin x+4\cos x\right|+\frac{5}{68}\ln\left|\sin x-\frac{1}{17}x\right|+C\,.\blacktriangleleft$$

6.6. Найти интеграл: $\displaystyle\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$

■ Подынтегральная функция чётная относительно синуса и косинуса.

Введём новую переменную:

$$t=\operatorname{tg}x;\qquad \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\qquad cosx=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}};\qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

С учётом подстановки первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=\int\frac{1/\left(1+t^2\right)}{4-3\left(1/\left(1+t^2\right)\right)+5t/\left(1+t^2\right)}dt=$$

$$=\int\frac{1/\left(1+t^2\right)}{\left(4-4t^2-3+5t\right)/\left(1+t^2\right)}dt=\int\frac{1+t^2}{\left(1+t^2\right)\cdot\left(4t^2+5t+1\right)}dt=\int\frac{dt}{4t^2+5t+1}$$

Выделим в знаменателе дроби неполный квадрат:

$$4t^2+5t+1=4\left(t^2+\frac{5}{4}t+\frac{1}{4}\right)=4\cdot\left(\left(t^2+2\cdot\frac{5}{8}t+\frac{25}{64}\right)-\frac{25}{64}+\frac{1}{4}\right)=4\left(t+\frac{5}{8}\right)^2-\frac{25}{16}+1=$$

$$=4\left(t+\frac{5}{8}\right)^2-\frac{9}{16}.$$

Введём новую переменную:

$$z=t+\frac{5}{8};\qquad dt=dz.$$

Подставив в знаменатель дроби исходного интеграла неполный квадрат и новую переменную, получим:

$$\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=\int\frac{1/\left(1+t^2\right)}{4-3\left(1/\left(1+t^2\right)\right)+5t/\left(1+t^2\right)}dt=\int\frac{1/\left(1+t^2\right)}{\left(4+4t^2-3+5t\right)/\left(1+t^2\right)}dt=$$

$$=\int\frac{1+t^2}{\left(1+t^2\right)\cdot\left(4t^2+5t+1\right)}dt=\int\frac{dt}{4t^2+5t+1}=\int\frac{dz}{4z^2-\frac{9}{16}}=-\int\frac{dz}{\frac{9}{16}-4z^2}=$$

$$=-\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\frac{3}{4}+z}{\frac{3}{4}-z}\right|+C=-\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\frac{3}{4}+t+\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}-t-\frac{5}{8}}\right|+C=-\frac{2}{3}\ln\left|\frac{11+8t}{1-8t}\right|+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\ln\left|\frac{11+8\operatorname{tg}x}{1-8\operatorname{tg}x}\right|+C.\blacktriangleleft$$

6.7. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{\cos x}$

■ Подынтегральная функция - нечётная относительно косинуса. Применим подстановку:

$$t=\sin x; \quad x=\arcsin t; \quad dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \quad \cos x=\sqrt{1-t^2}.$$

С учётом введения новой переменной исходный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\cdot\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}+C=$$

$$=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}+C\,.$$ ◄

6.8. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}$

■ Подынтегральная функция - нечётная относительно косинуса и синуса.

Преобразуем её следующим образом:

$$\int\frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\left(3+2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x\right)\cos^2 x}.$$

Введём новую переменную:

$$\operatorname{tg}x=t; \quad \frac{dx}{\cos^2 x}=dt; \quad t=\operatorname{arctg}x\,.$$

С учётом этой замены первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\left(3+2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x\right)\cos^2 x}=\int\frac{dt}{t^2+2t+3}-\int\frac{dt}{(t+1)^2+2}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2t+3}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{2}}+C\,.$$ ◄

6.9. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg}x}$

■ Подынтегральная функция - нечётная относительно косинуса и тангенса.

Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2};\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2t\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}=\frac{2t}{1-t};\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

С учётом подстановки первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg}x}=\int\left(\left(\frac{2}{1+t^2}\right)/\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}\right)\right)dt=$$

$$=\int\left(\left(\frac{2}{1+t^2}\right)/\left(\frac{2t\left(1-t^2\right)+2t\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}\right)\right)dt=$$

$$=\int\frac{\left(1-t^2\right)dt}{t}=\int\frac{dt}{t}-\int tdt=\ln|t|-\frac{t^2}{2}+C=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}+C.\blacktriangleleft$$

<u>7. Интегрирование выражений, содержащих гиперболические функции</u>

Интегралы вида

$$\int R\left(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x\right)dx$$

могут быть всегда приведены к интегралам от рациональных функций при помощи подстановки

$$t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$$

При этом функции подынтегрального выражения выражаются через новые переменные

$$\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2};\ \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2};\ dx=\frac{2dt}{1-t^2}$$

Примеры:

7.1. Найти интеграл: $\int \mathrm{sh}^2 x dx$

■ Применим формулу:

$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\, 2x - 1}{2}.$$

Тогда первоначальный интеграл примет вид:

$$\int \mathrm{sh}^2 x dx = \int \frac{\mathrm{ch}\, 2x - 1}{2} dx = \frac{1}{2} \int \mathrm{ch}\, 2x dx - \frac{1}{2} \int dx = \frac{\mathrm{ch}^2 x}{4} - \frac{x}{2} + C. ◄$$

7.2. Найти интеграл: $\int \frac{\mathrm{ch}\, x}{2 + 3\,\mathrm{sh}\, x} dx$

■ Применим замену: $t = 3\,\mathrm{sh}\, x$; $dt = 3\,\mathrm{ch}\, x dx$; $\mathrm{chx}\, dx = \frac{dt}{3}$.

$$\int \frac{\mathrm{ch}\, x}{2 + 3\,\mathrm{sh}\, x} dx = \int \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|2 + 3\,\mathrm{sh}\, x| + C. ◄$$

7.3. Найти интеграл: $\int \mathrm{sh}^3 x dx$

■ Для решения применим формулу: $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$; $\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x - 1$. Тогда:

$$\int \mathrm{sh}^3 x dx = \int \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{sh}\, x dx = \int \left(\mathrm{ch}^2 - 1\right) \mathrm{sh}\, x dx.$$

Введём новую переменную:

$$t = \mathrm{ch}\, x; \quad dt = \mathrm{sh}\, x dx.$$

Тогда первоначальный интеграл примет вид:

$$\int \mathrm{sh}^3 x dx = \int \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{sh}\, x dx = \int \left(\mathrm{ch}^2 - 1\right) \mathrm{sh}\, x dx = \int \left(t^2 - 1\right) dx =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + C. ◄$$

7.4. Найти интеграл: $\int e^x \,\mathrm{sh} x dx$

■ Так как $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, то Первоначальный интеграл примет вид:

$$\int e^x \operatorname{sh} x dx = \int \frac{e^x\left(e^x - e^{-x}\right)dx}{2} = \frac{1}{2}\int\left(e^{2x}-1\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - x\right) + C = \frac{e^{2x}-2x}{4} + C. \blacktriangleleft$$

7.5. Найти интеграл: $\int x \operatorname{sh} x dx$

■ Применим метод интегрирования по частям:

$$\int u du = uv - \int v du; \quad u = x; \quad du = dx; \quad dv = \operatorname{sh} x dx; \quad v = \operatorname{ch} x.$$

Тогда:

$$\int x \operatorname{sh} x dx = x \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C. \blacktriangleleft$$

7.6. Найти интеграл: $\int \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 3x dx$

■ Так как $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, то первоначальный интеграл примет вид:

$$\int \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 3x dx = \int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \cdot \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)\left(e^{3x} + e^{-3x}\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(e^{2x+3x} + e^{-2x+3x} + e^{2x-3x} + e^{-2x-3x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(e^{5x} - e^x + e^{-x} - e^{-5x}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{5x}}{5} - e^x - e^{-x} + \frac{e^{-5x}}{5}\right) + c =$$

$$. = \frac{1}{10} \cdot \frac{e^{5x} + e^{-5x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x + e^x}{2} = \frac{\operatorname{ch} 5x}{10} - \frac{\operatorname{ch} x}{2} + C. \blacktriangleleft$$

В заключение отметим, что интегралы от трансцендентных функций часто не выражаются через элементарные функции. К таким интегралам относятся:

$\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона;

$\int \sin x^2 dx$ и $\int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм;

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус;

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус.