4325

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Методические указания

Рязань 2010

УДК 519.17

Элементы теории графов: методические указания / Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: А.И. Сюсюкалов, Е.А. Сюсюкалова. Рязань, 2010. 32 с.

Содержат теоретический материал и задачи для практических занятий по разделу «Графы» курса «Дискретная математика».

Предназначены для студентов всех специальностей, изучающих дискретную математику.

Ил. 18. Библиогр.: 7 назв.

Графы, циклы, цепи, деревья, эйлеровы, планарные, ориентированные графы

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой доц., канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский, зам. зав. кафедрой ст. преподаватель Н.В. Елкина)

Элементы теории графов

Составители: С ю с ю к а л о в Андрей Иванович
С ю с ю к а л о в а Елена Александровна

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 28.05.10. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,0.
Тираж 100 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1.1. Определения и свойства

Термин «граф» впервые появился в книге венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г., хотя начальные задачи теории графов восходят ещё к Л. Эйлеру.

Первые задачи теории графов были связаны с решением математических развлекательных задач и головоломок, например:

– задача о кёнигсбергских мостах (задача Эйлера), развитие которой привело к циклу задач об обходах графов;

– задачи о перевозках, решение которых привело к созданию эффективных методов решения транспортных задач и др.

В настоящее время с помощью графов можно успешно моделировать и решать разнообразные прикладные задачи.

Определение 1.1. *Графом* называется совокупность двух конечных множеств: V – вершин, E – рёбер, оба конца которых принадлежат множеству V .

Обозначение: $G = G\langle V, E\rangle = \langle V, E\rangle$, где $V \neq \varnothing$, $E = \{(v_i, v_j), v_i \in V\}$, $e = (v_i, v_j)$ – ребро, соединяющее v_i и v_j $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$.

Определение 1.2. Вершины, не принадлежащие ни одному ребру, называются *изолированными.*

Определение 1.3. Ребро $e = (v_i, v_i)$ называется *петлей* для вершины v_i.

Определение 1.4. Если пара (v_i, v_j) встречается в семействе E несколько раз, то ребро $e = (v_i, v_j)$ называется *кратным ребром.*

Определение 1.5. Вершины называются *смежными*, если они соединены рёбрами.

Определение 1.6. Говорят, что вершина v и ребро e *инцидентны*, если ребро e содержит вершину v.

Определение 1.7. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются *смежными*.

Определение 1.8. *Степенью* вершины v называется количество рёбер, инцидентных данной вершине.

Обозначается: $\deg(v) = d(v)$.

Определение.1.9. Вершина называется *чётной (нечётной)*, если её степень – чётное (нечётное) число.

Определение 1.10. Граф без петель называется *мультиграфом*, граф без кратных рёбер и петель называется просто *графом*, граф, в котором есть петли, называется *псевдографом.*

В дальнейшем мы будем использовать геометрическое представление графа. Вершины графа изображаются в виде точек на плоскости. Если две вершины смежные, то соответствующую пару точек соединяют дугой-ребром. Например, на рис.1 изображен граф Q, заданный множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и множеством рёбер $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

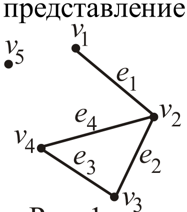

Рис. 1

Теорема 1.1. *В любом графе* $\sum\limits_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$ *, где* p *– число вершин, а* q *– число рёбер.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычисляя сумму всех степеней, мы получаем, что каждое ребро считается дважды, так как оно инцидентно двум вершинам (петли также считаются дважды). Поэтому общая сумма будет равна удвоенному числу рёбер.

Следствие. В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В противном случае сумма степеней вершин графа нечётна.

Теорема 1.2. *Во всяком графе с* n *вершинами* $n \geq 2$ *(без кратных рёбер и петель) найдутся, по меньшей мере, две вершины с одинаковыми степенями.*

Доказательство. Пусть вершины с разными степенями. Степень вершины может быть равна $k = \overline{0, n-1}$. Пусть есть вершина v_i, $\deg v_i = 0$, тогда найдётся вершина v_j, $\deg v_j = n-1$. Но v_j должна быть соединена с остальными, в том числе с v_i (противоречие). Поэтому найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

Определение 1.11. Граф называется *полным*, если каждые две различные вершины соединены одним и только одним ребром.

Теорема 1.3. *В полном графе с* n *вершинами* $\frac{n(n-1)}{2}$ *рёбер.*

Доказательство. Каждой вершине инцидентно $(n-1)$ ребро, но в произведении $n(n-1)$ каждое ребро учтено дважды, поэтому число рёбер равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Определение 1.12. *Путём* в графе $G = \langle V, E \rangle$ называется любая последовательность вида

$$v_0, (v_0, v_1), v_1, (v_1, v_2), v_2, \ldots, (v_{n-1}, v_n), v_n . \qquad (1)$$

Число n называется длиной пути.

Определение 1.13. *Цепью* называется путь, в котором нет повторяющихся рёбер.

Определение 1.14. *Простой цепью* называется путь без повторения вершин.

Теорема 1.4. *Если существует путь из вершины* v *в вершину* u $(v \neq u)$, *то из рёбер этого пути можно построить* $(v-u)$*– цепь.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует путь: $v = v_0$, $e_1,\ldots,e_\ell$, $v_\ell = u$. Рассмотрим все пути из v в u, состоящие из рёбер, входящих в этот путь. Среди них выберем самый короткий: $v = v_0$, $e'_1, v'_1, \ldots, v'_{k-1}, e'_k, v'_k = u$. Покажем, что $v'_i \neq v'_j \left(i \neq j\right)$. Пусть $v'_i = v'_j$, тогда путь $v = v_0, e'_1, \ldots, v'_i, e'_{j+1}, v'_{j+1}, \ldots, v'_k = u$ имеет длину $k - \left(j - i\right) < k$. Противоречие с предположением о минимальности пути.

Определение 1.15. Путь (1) называется *замкнутым*, если $v_0 = v_n$.

Определение 1.16. Замкнутая цепь называется *циклом*.

Определение 1.17. Простая замкнутая цепь называется *простым циклом* ($v_0 = v_n$ и вершины не повторяются).

Теорема 1.5. *Если существует замкнутый простой путь, то из его рёбер можно составить цикл.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы аналогично доказательству теоремы 1.4.

Замечание к теореме 1.5. Требование простоты пути в теореме 1.5 существенно: рассмотрим путь v_0, e, v_1, e, v_0. Из ребра e цикл построить нельзя.

Теорема 1.6. *Пусть* $G = \left\langle V, E\right\rangle$ *– граф, все вершины которого имеют чётную степень. Тогда для любого ребра существует замкнутый простой путь, содержащий это ребро.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное ребро $e_1 = \left(v_0, v_1\right)$. По предположению теоремы $\deg\left(v_1\right)$ – чётное число. Тогда существует ребро $e_2 = \left(v_1, v_2\right)$, отличное от e_1. В силу чётности $\deg\left(v_2\right)$ найдётся ребро $e_3 = \left(v_2, v_3\right)$ и т.д. Так как множество вершин V конечно и каждый раз берётся новое неиспользованное ребро, инцидентное v_i, то в конце концов снова придём в вершину v_0.

Определение 1.18. Две вершины называются *связными*, если существует путь, соединяющий их.

Определение 1.19. Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно по рёбрам перейти к любой другой. В противном случае граф называется *несвязным*.

Определение 1.20. Две вершины графа *принадлежат одной компоненте*, если от одной из них до другой можно перейти по рёбрам графа.

Каждая компонента является связным графом.

Определение 1.21. Граф, вершины которого можно разбить на два множества (две доли) таким образом, что каждое ребро будет соединять вершины из разных множеств, называется *двудольным*.

Очевидно, что графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 2, являются двудольными. (Вершины одной доли помечены I, второй – II.) На первый взгляд, граф G_3 на этом же рисунке не является двудольным. Однако его вершины можно разбить нужным образом (см. рис. 3), поэтому он также двудольный. А вот требуемое разбиение вершин графа G_4 не существует, и этот граф двудольным не будет.

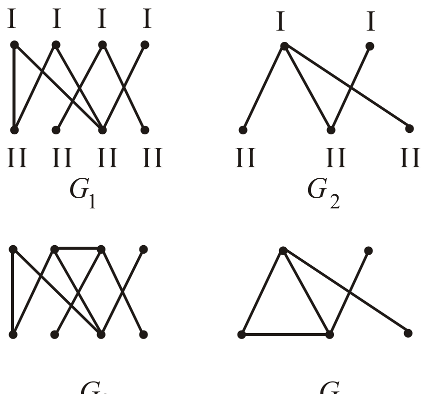

Рис. 2

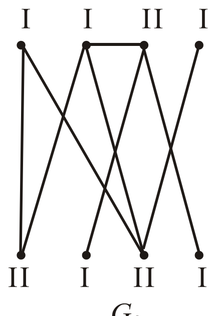

Рис. 3

Теорема 1.7 (Кёнига). *Для того, чтобы граф был двудольным, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечётной длины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть G – двудольный граф, C – один из его циклов длины k. Пройдём все рёбра этого цикла в той последовательности, в какой они в нём расположены, начиная с некоторой вершины v. Так как концы каждого ребра лежат в разных долях, то k – чётное число.

Достаточность без доказательства.

Определение 1.22. Двудольный граф, у которого каждая вершина одной доли соединена ребром с каждой вершиной другой доли, называется *полным двудольным графом*.

Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин, обозначается $K_{p,q}$. На рис. 4 изображены некоторые полные двудольные графы. Граф $K_{1,p}$ называется *звездой*.

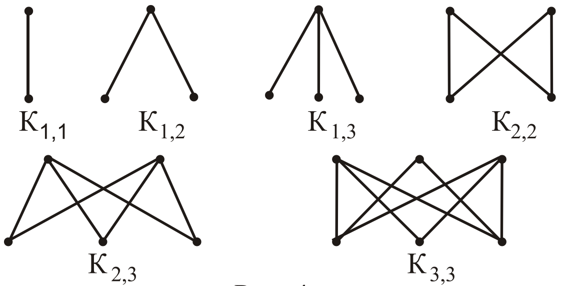

Рис. 4

Полный двудольный граф $K_{p,q}$ имеет $p \cdot q$ рёбер.

Теорема 1.8 *(о сумме степеней вершин двудольного графа). Суммы степеней вершин долей двудольного графа равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_k$ – вершины одной доли, а $u_1, u_2, \dots, u_p$ – вершины другой доли. Тогда из одной доли выходит $d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_k)$ рёбер, а из другой – $d(u_1) + d(u_2) + \dots + d(u_p)$ рёбер. Равенство сумм следует из того, что это одни и те же рёбра. Теорема доказана.

Граф G, имеющий n вершин и m рёбер, представляется матрицей размером $n \times m$, называемой *матрицей инцидентности*. Строки матрицы соответствуют вершинам, а столбцы –

рёбрам. Если v_i, v_k – смежные вершины, то столбец (v_i, v_k) содержит 1 в строках v_i, v_k. Остальные элементы матрицы равны нулю.

Граф G, имеющий n вершин, представляется матрицей размером $n \times n$, называемой *матрицей смежности.* Её строки и столбцы соответствуют вершинам. Элемент матрицы, стоящий на пересечении строки v_i и столбца v_j, равен 1, если существует ребро (v_i, v_j). Остальные элементы матрицы равны нулю.

Определение 1.23. Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называются *изоморфными*, если между ними существует взаимно-однозначное отображение φ: $G_1 \to G_2 (V_1 \to V_2, E_1 \to E_2)$, которое сохраняет соответствие между рёбрами графов, т.е. для любого ребра $e = (v, u)$ графа G_1 верно $e' = \varphi(e) = (\varphi(v), \varphi(u))$, где e' – ребро G_2.

Таким образом, изоморфные графы различаются только обозначениями. К сожалению, установить изоморфизм достаточно трудно, что показывает следующий пример. На рис. 5 изображены два изоморфных графа. Одно из возможных изоморфных отображений:

$$v_1 \to u_3,\ v_2 \to u_5,\ v_3 \to u_6,\ v_4 \to u_7,\ v_5 \to u_2,$$
$$v_6 \to u_1,\ v_7 \to u_4,\ v_8 \to u_9,\ v_9 \to u_8,\ v_{10} \to u_{10}.$$

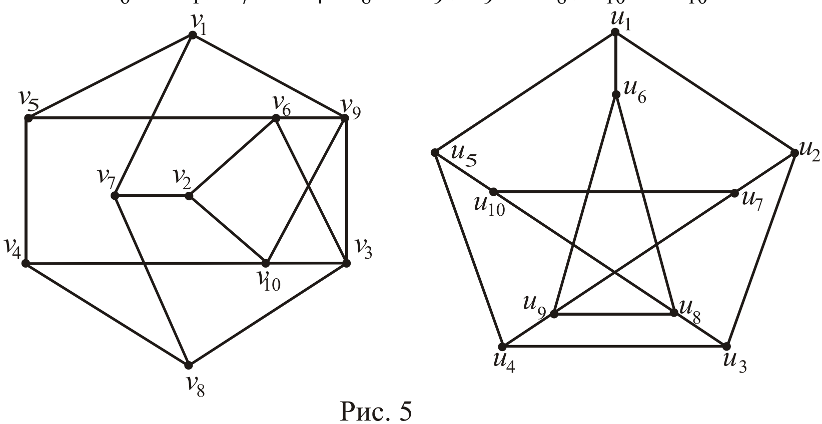

Рис. 5

1.2. Задачи

1. В городе 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с пятью другими?

2. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

3. В турнире принимает участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?

4. В школе 953 ученика. Одни из них знакомы, другие не знакомы друг с другом. Доказать, что хотя бы у одного из них число знакомых среди учеников этой школы чётно.

5. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

6. В стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города), т.е. граф дорог связен.

7. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{(n-1)}{2}$, связен.

8. На конференции присутствует 50 учёных, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

9. В некоторой группе людей у каждого есть один враг и один друг. [Если A – друг (враг) B, то B – друг (враг) A]. Докажите, что этих людей можно разбить на две компании так, что в каждой компании не будет ни врагов, ни друзей.

10. В теннисном турнире каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных». Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. «Синие» выиграли в четыре раза больше встреч, чем «красные». Сколько человек в каждой из команд?

11. В двух делегациях вместе 22 человека. При встрече члены одной делегации обменялись рукопожатиями с членами другой делегации. Всего было сделано 121 рукопожатие. Докажите, что в делегациях одинаковое число членов.

12. Каждый из учеников 9 «а» класса дружит ровно с тремя учениками 9 «б» класса, а каждый ученик 9 «б» класса дружит ровно с тремя учениками 9 «а» класса. Докажите, что число учеников в этих классах одинаково.

13. Можно ли так нарисовать 5 горизонтальных и 4 вертикальных отрезка, чтобы каждый горизонтальный отрезок пересекался ровно с тремя вертикальными, а каждый вертикальный ровно с тремя горизонтальными?

2. ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

2.1. Определения и свойства

Определение. Если граф имеет цикл, содержащий все рёбра, то он называется *эйлеровым графом*, а цикл называется *эйлеровым циклом*.

Теорема 2.1. *Для того чтобы граф G был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был: 1) связен; 2) все его степени вершин были чётными.*

Доказательство. *Необходимость.* Связность следует из определения эйлерова цикла, поэтому условие 1 необходимо. Когда эйлеров цикл проходит через вершину, он должен войти в неё по одному ребру и выйти по другому, поэтому условие 2 также необходимо.

Достаточность. Пусть условия 1 и 2 выполнены. Начнём цепь P в вершине v_0 и будем продолжать её через разные рёбра, пока этот процесс не закончится в v_0, в силу конечности графа G и того, что v_0 и другие вершины имеют чётную степень. Если P содержит не все рёбра G, то удалим из G цепь P, состоящую из рёбер этого цикла.

Графы G и P имеют вершины с чётными степенями, поэтому оставшийся граф $\overline{P}$ (после удаления из G цепи P) также имеет чётные вершины.

Так как G связен, то в P найдётся вершина v^*, инцидентная рёбрам из $\overline{P}$. Из v^* можно построить новую цепь P' из рёбер $\overline{P}$. Такая цепь может закончиться только в v^*. Из P и P' составим новый цикл $P_1 = P\left(v_0, v^*\right) \cup P' \cup P\left(v^*, v_0\right)$ (рис. 6).

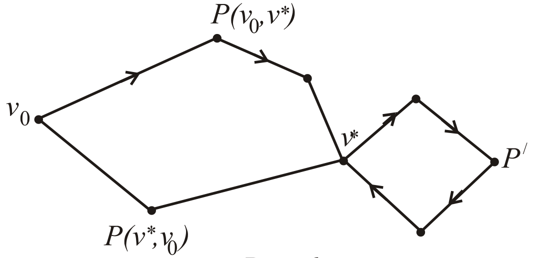

Рис. 6

Если цикл P_1 не является эйлеровым, то это построение повторяется. В силу конечности графа этот процесс завершится построением эйлерова цикла. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Для того чтобы в связном графе G имелась цепь $P\left(v_0, v^*\right)$, содержащая все его рёбра по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы v_0, v^* были единственными вершинами нечётной степени.*

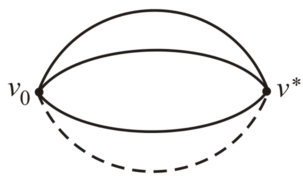

Рис. 7

Для доказательства достаточно добавить к графу G новое ребро $\left(v_0, v^*\right)$, и все его вершины станут чётными. Новый граф обладает эйлеровым циклом P. После удаления $\left(v_0, v^*\right)$ получим цепь $P\left(v_0, v^*\right)$ (рис. 7).

Следствие. Если в графе больше двух нечётных вершин, то его правильный обход (без повторения рёбер) невозможен.

Теорема 2.3. *В связном графе с $2k$ нечётными вершинами имеется семейство из k цепей, которые в совокупности содержат все рёбра графа по одному разу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$, $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{2k}$. Добавим k рёбер (v_1, v_{k+1}), (v_2, v_{k+2}), …, (v_k, v_{2k}), тогда в новом графе найдётся эйлеров цикл P. При удалении рёбер (v_i, v_{k+i}) $\left(i = \overline{1, k}\right)$ граф распадётся на k цепей, содержащих все рёбра.

Теорема 2.4. *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда его рёбра можно разбить на непересекающиеся простые циклы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть G – эйлеров граф. Начнём проходить эйлеров цикл графа, начиная с любой вершины v_1, до тех пор, пока не попадём в вершину w, в которой уже были (см. рис. 8).

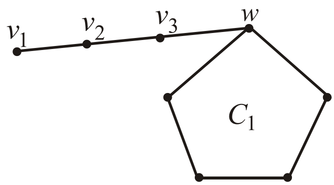

Рис. 8

Часть эйлерова цикла от вершины w до вершины w образует простой цикл C_1.

Удалим из графа G рёбра цикла C_1. В полученном графе G_2 все вершины имеют чётную степень, следовательно, все его компоненты будут эйлеровыми графами. Так же как и ранее, выделим в G_2 цикл C_2. Указанный процесс будем продолжать, пока не разобьём все рёбра графа на простые циклы.

Достаточность. Пусть рёбра графа разбиты на простые циклы. Объединим их в эйлеров цикл, как это делали при доказательстве достаточности в теореме 2.1. Теорема доказана.

2.2. Задачи

1. Схема мостов города Кёнигсберга изображена на рис. 9. Можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

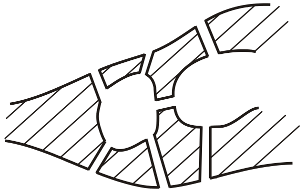

Рис. 9

2. Можно ли нарисовать граф, изображённый а) на рисунке 10, а; б) на рисунке 10, б, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

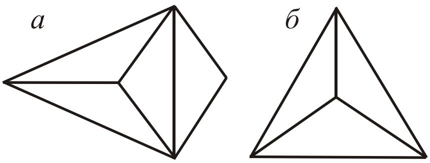

Рис. 10

3. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (рис. 11) так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

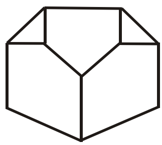

Рис. 11

4. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? б) Какое наименьшее число раз придётся ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?

5. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

6. Можно ли, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной линии дважды, нарисовать: а) квадрат с диагоналями; б) правильный пятиугольник с диагоналями?

7. Турист обошёл 6 улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую по одному разу. Могло ли так быть, если а) улицы могут оканчиваться тупиком; б) конец каждой улицы – перекрёсток?

8. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (не распадающуюся на части) фигуру. Доказать, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

3. ДЕРЕВЬЯ

3.1. Определения и свойства

Определение 3.1. *Деревом* называется связный граф без циклов.

Таким образом, в дереве невозможно, передвигаясь по различным рёбрам, вернуться в исходную вершину.

Определение 3.2. *Висячей вершиной* называется вершина, из которой *выходит ровно одно ребро*.

Наглядное представление для дерева можно получить с помощью следующей конструкции (см. рис. 12). Из вершины v_0 проведём рёбра в соседние вершины v_1, v_2, v_3, из них проведём рёбра к их «соседям» v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10} и т.д. Исходная вершина v_0 называется корнем. Отметим, что каждая вершина может быть корнем.

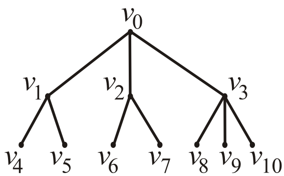

Рис. 12

Теорема 3.1. *Граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной цепью, является деревом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Граф связен. Пусть в нём есть цикл, тогда любые две вершины цикла соединены по крайней мере двумя путями. Противоречие.

Теорема 3.2. *В дереве любые две вершины соединены ровно одной цепью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть найдутся две вершины, соединённые двумя разными путями; а) если эти пути не имеют общих рёбер, то из них получим цикл; б) если пути имеют общие рёбра, то выберем первую вершину v_0, в которой пути расходятся. За вершиной v_0 на первом пути выберем вершину v_1, принадлежащую второму пути, тогда участки первого и второго путей между v_0 и v_1 образуют цикл. Противоречие.

Таким образом, можно дать другое определение дерева.

Определение 3.3. *Дерево* – граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной цепью.

Лемма. *В любом дереве есть висячая вершина.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную вершину v_0 и пойдём по любому ребру из неё в другую вершину v_1. Если выходящих рёбер из новой вершины v_1 нет, то остаёмся в ней, а в противном случае идём по любому другому ребру дальше. Так как граф конечен и в нём нет циклов, то процесс закончится только в висячей вершине.

Теорема 3.3. *При удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть концы удалённого ребра в новом графе соединены цепью. Тогда эта цепь и удалённое ребро образуют цикл.

Теорема 3.4. *В дереве число вершин на одну больше числа рёбер.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в графе G n вершин. Предположим v_1 – висячая вершина, удалим её и выходящее из неё ребро. После этого опять останется дерево, так как циклов нет. Пусть v_2 – висячая вершина, которую также удалим и т.д. Проделав эту операцию $(n-1)$ раз, получим граф, состоящий из одной вершины.

Теорема 3.5. *Связный граф* G, *у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является деревом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного. Пусть G не является деревом, т.е. имеет циклы. Удалив несколько рёбер, можно получить дерево. Тогда число рёбер E и число вершин V удовлетворяют неравенству $V-E>1$. Получили противоречие с теоремой 3.4.

З а д а ч а. Какое наименьшее число рёбер надо удалить из связного графа G, чтобы он оставался связным и в нём не было ни одного цикла?

Решение. Пусть мы удалим ребро графа G n-го порядка $e=(v_0, v_1)$, принадлежащее циклу. Граф останется связным, так как от v_0 к v_1 можно пройти по оставшейся части цикла. Удалим рёбра у оставшихся циклов. Получим в результате дерево G_1. Дерево содержит n вершин и $(n-1)$ ребро. Пусть N – число рёбер графа G, тогда придётся удалить $\gamma = N-n+1$ рёбер. Это число называется *циклическим порядком графа* G.

3.2. Задачи

1. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нём есть цикл.

2. а) В стране n городов и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

б) n точек соединены отрезками так, что любые две точки связывает ровно одна цепочка отрезков. Докажите, что общее число отрезков равно $n-1$.

3. Волейбольная сетка – прямоугольник 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать, чтобы сетка не распалась?

4. В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый другой?

5. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перелётов; б) 196 перелётов.

6. Квадрат 8×8 выложили из спичек. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы с любого поля можно было пройти на любое другое, не перепрыгивая через спички?

4. ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

4.1. Определения и свойства

Определение 4.1. Граф называется *планарным* или *плоским*, если его можно изобразить на плоскости так, что никакие его два ребра (за исключением рёбер, выходящих из общей вершины) не имеют общих точек.

Граф, изображенный на рис. 13, а, – плоский, а на рис. 13, б – неплоский (см. теорему 4.3).

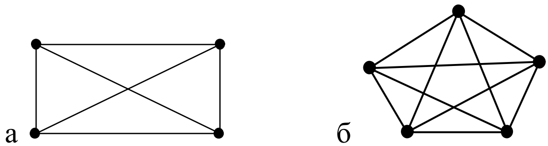

Рис. 13

Определение 4.2. Области, ограниченные ребрами графа, называются *гранями*.

Число граней обозначим через F, число вершин V, а ребер E.

Теорема 4.1 (Эйлера). *Для планарного связного графа имеет место равенство*

$$V - E + F = 2 \text{ (формула Эйлера).}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть граф G содержит циклы. Будем удалять ребра, сохраняя связность графа, пока не получим дерево. При этом число вершин V не меняется, а количество ребер уменьшается на одну единицу. Число граней также уменьшается на одну единицу. То есть $(V - E + F)$ не меняется. А для дерева $V - E = 1$ и $F = 1$, поэтому $V - E + F = 2$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Для любого плоского графа* $2E \geq 3F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для i-й грани есть E_i ребер, тогда $\sum_{i=1}^{F} E_i = 2E$, так как каждое ребро учитывается дважды, но у каждой грани не менее трех сторон, поэтому $E_i \geq 3$ и $2E = \sum_{i=1}^{F} E_i \geq \sum_{i=1}^{F} 3 = 3F$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Для плоского связного графа справедливо неравенство* $E \le 3V - 6$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Эйлера $V - E + F = 2$, но по теореме 4.2 $\frac{2}{3}E \ge F$ и $V - E + \frac{2}{3}E \ge 2$, следовательно, $V - \frac{1}{3}E \ge 2$, отсюда $E \le 3V - 6$.

4.2. Задачи

1. В стране 7 озер, соединенных между собой 10 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

2. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

3. Докажите, что граф, имеющий 5 вершин, каждая из которых соединена ребром с любой другой, не является плоским.

4. а) Каждые две из 6 ЭВМ соединены проводом. Можно ли все эти провода раскрасить в пять цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходили пять проводов разного цвета?

б) Каждые две из 15 ЭВМ соединены проводом. Можно ли все эти провода раскрасить в один из 14 цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходили 14 проводов разного цвета?

5. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

6. Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

7. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, - не плоский.

8. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо «красный», либо «синий» граф не является плоским.

5. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

5.1. Определения и свойства

Определение 5.1. *Ориентированный граф* G, или *орграф*, состоит из конечного непустого множества V и множества E упорядоченных пар элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами орграфа*, элементы множества E – *дугами орграфа*.

Определение 5.2. Если $x = (u, v)$ – дуга, то вершины u и v называются ее *концевыми вершинами*, причем u называется *началом дуги*, а v – *концом дуги*.

Определение 5.3. Дуга с совпадающими началом и концом называется *петлей*. Можно рассматривать орграфы с несколькими дугами, имеющими общее начало и общий конец. Такие дуги называются *параллельными*.

На рисунке дуга изображается направленной линией, идущей от начала дуги к концу. Например, если $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, где $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (3, 1)$, $e_3 = (3, 1)$, $e_4 = (3, 2)$, $e_5 = (2, 4)$, $e_6 = (4, 2)$, $e_7 = (3, 4)$, $e_8 = (4, 4)$, то орграф можно изобразить, как на рис.14. В этом орграфе e_2 и e_3 – параллельные дуги, а e_8 – петля.

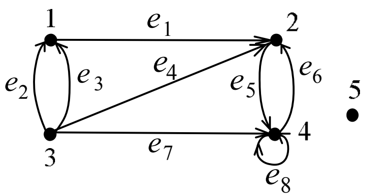

Рис.14

Определение 5.4. Вершины орграфа называются *смежными*, если они являются концевыми вершинами некоторой дуги. В противном случае вершины называются *несмежными*.

Определение 5.5. *Маршрутом* $L = (e_1, e_2, ..., e_p)$ в орграфе называется такая последовательность его дуг, в которой начало каждой последующей дуги совпадает с концом предыдущей. Маршрут можно также задавать порядком прохождения его вершин. Начало первой дуги маршрута называется его *начальной вершиной*, а конец последней дуги – *конечной вершиной*.

Определение 5.6. Маршрут, у которого все дуги разные, называется *цепью*. Цепь, содержащая каждую свою вершину ровно один раз, называется *путем*.

Определение 5.7. *Длиной маршрута* называется число дуг, входящих в маршрут.

Определение 5.8. *Расстоянием* $d(u,v)$ между вершинами u и v называется наименьшая длина маршрута, начальной вершиной которого является вершина u, а конечной – вершина v.

Определение 5.9. *Полустепенью исхода* вершины v называется число дуг, выходящих из вершины v. Обозначается $d^+(v)$. *Полустепенью захода* $d^-(v)$ вершины v называется число дуг, входящих в вершину v.

Теорема 5.1. *Сумма полустепеней захода вершин орграфа равна сумме их полустепеней исхода и равна числу дуг орграфа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку каждая дуга выходит из одной вершины и входит в одну, то теорема верна.

Определение 5.10. Цепь называется *циклом*, если ее начальная и конечная вершины совпадают. Цикл орграфа, все вершины которого различные, называется *контуром*.

Определение 5.11. Вершина орграфа v называется *достижимой* из вершины u, если существует маршрут, в котором вершина u является начальной, а вершина v – конечной.

Определение 5.12. Орграф называется *сильносвязным* (*сильным*), если для любых вершин u и v вершина u достижима из вершины v, а вершина v достижима из вершины u.

Определение 5.13. Орграф называется *односторонним*, если для любых вершин по крайней мере одна достижима из другой.

Теорема 5.2. *Граф является односторонним тогда и только тогда, когда в нем есть маршрут, содержащий все вершины орграфа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Рассмотрим маршрут в орграфе $L = (v_1, v_2, ..., v_k)$, содержащий наибольшее число вершин. Так как для любых трех вершин орграфа хотя бы из одной достижимы две другие, то $k \geq 3$. Если маршрут содержит все вершины орграфа, то теорема верна.

Пусть существует вершина u, не входящая в L. Если вершина v_1 достижима из вершины u, то в орграфе существует маршрут, содержащий больше вершин, чем маршрут L, что противоречит выбору L (рис. 15). То же произойдет, если вершина u достижима из вершины v_k. Предположим, что это не выполняется.

Рассмотрим две соседние в маршруте L вершины x и y. Если из одной из них (например, из вершины x) достижима вершина u, а вторая (вершина y) достижима из u, то в орграфе есть маршрут $L_1 = (v_1, ..., x, ..., u, ..., y, ..., v_k)$, содержащий большее число вершин, чем L (рис. 16).

Пусть это не выполняется. Тогда в орграфе снова существует маршрут $L_2 = (v_1, ..., u, ..., v_2, ..., v_k)$ или $L_3 = (v_1, ..., v_{k-1}, ... u, ..., v_k)$ с большим числом вершин, чем L (рис. 17).

Достаточность очевидна. Теорема доказана.

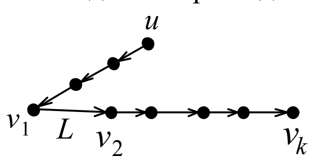

Рис.15

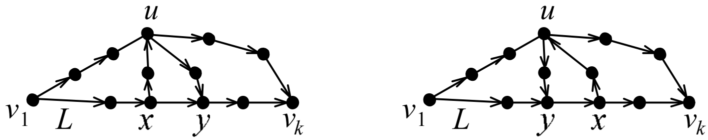

Рис. 16

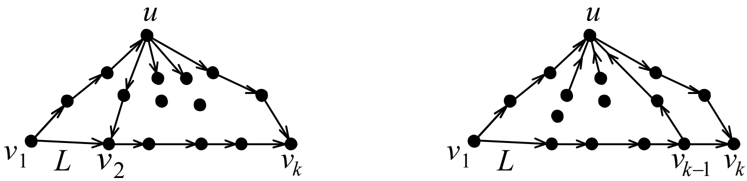

Рис. 17

Определение 5.14. Цикл, содержащий каждую дугу орграфа, называется *эйлеровым циклом*.

Определение 5.15. Орграф называется *связным*, если от любой его вершины до любой другой можно перейти по дугам без учета их ориентации.

Определение 5.16. Связный орграф называется *эйлеровым орграфом*, если в нем есть эйлеров цикл.

Теорема 5.3. *Связный орграф является эйлеровым тогда и только тогда, когда для каждой его вершины v выполняется равенство $d^{+}(v) = d^{-}(v)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема доказывается точно так же, как теорема 2.1.

Теорема 5.4. *Связный орграф G эйлеров тогда и только тогда, когда G является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть G – эйлеров орграф. Рассмотрим его любую вершину u_1. Выйдем из вершины u_1 по некоторой дуге (u_1, u_2). Это возможно сделать, так как орграф G связный. Поскольку $d^{+}(u_2) = d^{-}(u_2)$, то из вершины u_2 можно выйти по дуге (u_2, u_3). Орграф G имеет конечное число вершин, поэтому в конце концов мы попадем в некоторую вершину w, в которой были раньше. Часть цепи, которая начинается и оканчивается в вершине w, является контуром C_1. Удалим дуги контура C_1 из орграфа G. В получившемся орграфе G_1 полустепени вершин, принадлежавших C_1, уменьшились на единицу, полустепени остальных вершин не изменились. Следовательно, для любой вершины v орграфа G будет выполняться равенство $d^+(v)=d^-(v)$. Поэтому в орграфе G_1 можно выделить контур C_2 и т.д.

Достаточность доказывается путем объединения контуров в эйлеров цикл (теорема 2.4). Теорема доказана.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – вершины, а $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – рёбра ориентированного графа G.

Определение 5.17. Матрица (a_{ij}) размером $(m \times n)$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } e_j \quad \text{выходит из } v_i, \\ -1, \text{ если } e_j \quad \text{заходит в } v_i, \\ 0, \text{ если } e_j \quad \text{не инцидентна } v_i, \end{cases}$$

называется *матрицей инцидентности* для рёбер ориентированного графа G.

5.2. Задачи

1. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

2. Докажите, что на ребрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

3. В некотором государстве каждый город соединен с каждым дорогой. Король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

4. В связном графе степени всех вершин четны. Докажите, что на ребрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой;

б) для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны.

5. На ребрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой.

6. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.

7. В одном государстве 100 городов и каждый соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

8. В стране 101 город. Города соединены дорогами с односторонним движением так, что два города соединены не более чем одной дорогой. Из любого города выходит ровно 50 дорог, и в любой город входит ровно 50 дорог. Докажите, что из любого города в любой другой можно попасть, проехав не более двух дорог.

9. В классе 30 человек. Каждому нравятся ровно k учеников из класса. При каком минимальном k можно утверждать, что обязательно найдутся два человека, которые нравятся друг другу?

10. В волейбольном турнире проведено несколько матчей, после чего у каждой команды оказалась хотя бы одна победа. Докажите, что из сыгранных матчей можно выбрать несколько так, что если учитывать только эти матчи, то у каждой команды, принимающей участие в них, будет ровно одна победа и одно поражение.

11. В одном приморском курортном городе улицы настолько узкие, что в городе установлено одностороннее транспортное движение. Тем не менее, из каждой точки города можно проехать в любую другую. Докажите, что можно предложить такой маршрут патрулирования для полицейской машины, который начинается и оканчивается в одном и том же месте и проходит через каждый участок улиц между двумя перекрестками по крайней мере один раз.

12. В городе после установления одностороннего движения оказалось, что число улиц, по которым можно въехать на каждый перекресток, равно числу улиц, по которым можно из него выехать. Докажите, что можно предложить такой маршрут патрулирования, который начинается и оканчивается в одном месте и проходит через каждый участок улиц между двумя перекрестками ровно один раз.

13. На плоскости отмечено конечное число точек. Некоторые пары точек являются началами и концами векторов, причем число векторов, входящих в любую точку, равно числу векторов, выходящих из нее. Найдите сумму векторов.

ОТВЕТЫ

Решения и указания к решению задач

1. 1. Пусть это возможно. Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра – соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которых равна 5. Для подсчета количества ребер в этом графе сначала сложим степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчете каждое ребро учтено дважды (так как соединяет две вершины). Поэтому число ребер графа должно быть равно $15 \cdot \frac{5}{2}$. Но это число не целое. Значит, такого графа не существует и соединить телефоны невозможно. **2.** Общее число дорог равно $100 \cdot \frac{4}{2} = 200$. **3.** Нет. Не существует графа с 15 нечетными (степени 7) вершинами. **4.** В графе с 953 вершинами должно быть четное число нечетных вершин, поэтому у нечетного числа из них число знакомых – четно. **5.** Нет. Рассмотрим граф, вершины которого – данные отрезки, а ребро соединяет 2 вершины, когда 2 отрезка пересекаются. **6.** Рассмотрим два города, и пусть они не соединены путем. Так как каждый соединен не менее чем с 7 другими, при этом города различны (если 2 совпадают, то есть путь, соединяющий исходные города), то мы указали не менее 16 городов. **7.** Аналогично задаче 1.6. **8.** Рассмотреть двух незнакомых ученых и их знакомых. **9.** Для решения задачи построим граф знакомств G, в котором вершины будут соединены зеленым ребром, если соответствующие им люди дружат, и красным – если враждуют. Из каждой вершины графа выходит ровно по одному зеленому и красному ребру, поэтому степень каждой вершины равна двум. Следовательно, каждая компонента графа G является циклом. Так как в этом цикле зеленые и красные ребра чередуются, то он содержит чётное число ребер. Из теоремы Кенига следует, что построенный граф знакомств является двудольным. Разбиение его вершин на доли A и B определит разбиение группы людей на две компании. **10.** Пусть в командах «синих» и «красных» по n игроков. Поставим в соответствие каждому игроку вершину графа и соединим ребрами вершины, соответствующие проведенным играм. Так как каждая пара игроков разных команд играла между собой, то получится полный двудольный граф $K_{n,n}$. Этот граф имеет n^2 ребер. Если встречу между двумя игроками выиграл «синий» игрок, то соответствующее ребро окрасим синим цветом, если «красный» - то красным. Обозначим через x число красных ребер, тогда синих будет $4x$. Всех ребер в графе n^2. Поэтому $4x + x = n^2$, $5x = n^2$. Отсюда $n = 5$. В каждой команде было по пять игроков. **11.** Рассмотрим двудольный граф, в котором вершины обозначают членов делегаций и две вершины будут соединены ребром, если соответствующие им люди обменялись рукопожатием. Пусть в делегациях p и q членов ($p + q = 22$). Рассмотрим полный двудольный граф $K_{p,q}$, который имеет $p \cdot q$ ребер. Поскольку $q = 22 - p$, то число ребер в графе $K_{p,q}$ является функцией от p и равно $f(p)=p(22-p)=-p^2+22p$. Функция $f(p)$ имеет максимум при $p=11$, и этот максимум как раз равен 121. Поэтому в делегациях по 11 человек, и все члены разных делегаций обменялись рукопожатиями. **12.** Пусть 9 «а» классу соответствует доля A графа G, в которой будет m вершин, а 9 «б» - доля B, в которой будет n вершин. Число ребер, выходящих из вершин доли A, равно $3m$, а из вершин доли B – $3n$. Из теоремы 1.8 следует, что $3m=3n$, отсюда $n=m$ и число учеников в классах одинаково. **13.** Построим граф, в котором вершины обозначают отрезки и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им отрезки пересекаются. Поскольку горизонтальные отрезки пересекаются только с вертикальными, а вертикальные – только с горизонтальными, то построенный граф будет двудольным. Сумма степеней вершин, соответствующих горизонтальным отрезкам, равна 15, а сумма степеней вершин, соответствующих вертикальным отрезкам, равна 16. Однако по теореме 1.8 эти суммы должны быть равны. Следовательно, заданный рисунок невозможен.

2. 1. Нельзя. У соответствующего графа есть четыре нечетных вершины. **2.** а) Можно; б) нельзя. Рисуя граф, в каждую вершину, за исключением начальной и конечной, мы войдем столько же раз, сколько выйдем из нее. Поэтому степени всех вершин должны быть четными. **3.** Нет, нельзя. **4.** а) Если это возможно, то ясно, что проволока идет по ребрам куба без наложения, то есть мы как бы нарисовали каркас куба, не отрывая карандаша от бумаги. Но это невозможно, так как у куба восемь нечетных вершин. б) Поскольку нечетных вершин восемь, то таких кусков нужно не менее четырех. **5.** Доказательство можно провести индукцией по n. Для доказательства индукционного перехода выберем две нечетные вершины, соединим их путем и временно удалим все его ребра. Граф распадётся на компоненты связности. Присоединим теперь к удаленному пути компоненты связности, которые, очевидно, не содержат нечетных вершин. **6.** а) Нельзя; б) можно. **7.** а) Да. Например, все улицы прямые и выходят из одной точки; б) да. Например, 3 улицы образуют правильный треугольник и еще 3 улицы соединяют центр треугольника с его вершинами. **8.** Граф связен, степени его вершин четны.

3. 1. Рассмотрим произвольную компоненту связности этого графа. Она не является деревом, так как в ней нет висячей вершины. Значит, в ней есть цикл. **2.** Из условия граф страны – дерево. У него есть висячая вершина. Удалим ее и выходящее из нее ребро. Оставшийся граф также дерево. У него есть висячая вершина, которую также удалим и так далее. Проделав эту операцию $n-1$ раз, получим граф, состоящий из одной вершины. Так как удалялось по одному ребру, то вначале их было $n-1$. **3.** Будем рассматривать волейбольную сетку как граф, вершинами которого являются узлы сетки, а ребрами – веревочки. В этом графе нужно удалить как можно больше ребер так, чтобы он остался связным. Заметим, что пока в графе есть цикл, возможно удаление любого ребра этого цикла. Связный граф, не имеющий циклов, является деревом. Поэтому, только получив дерево, мы не сможем убрать ни одного ребра. Изначально в графе было $601\cdot 50+600\cdot 51=60650$ ребер и $51\cdot 601=30651$ вершин, то есть дерево будет иметь 30650 ребер. Таким образом, разрезать можно $60650-30650=30000$ веревочек. **4.** $30\cdot\dfrac{29}{2}-29=406$. **5.** а), б) Рассмотреть «максимальное» дерево и выбрать путь, соединяющий две висячие вершины. **6.** 63. Поставим внутри каждого квадратика 1×1 точку и, убирая спичку, соединим соответствующие точки. Тогда мы получим связный граф, а минимальное число ребер у связного графа в том случае, когда граф – дерево. Так как вершин 64, то число ребер не меньше 63.

4. 1. 4. **2.** Пусть отмеченные точки и вершины квадрата – вершины, а соединяющие их отрезки и стороны квадрата – ребра плоского графа. Для каждого куска, на которые граф разбивает плоскость, посчитаем число ограничивающих ребер и все полученные числа сложим. Поскольку каждое ребро разделяет два куска, то в итоге получим удвоенное число ребер. Так как все куски, кроме внешнего, – треугольники, а внешний кусок ограничен 4 ребрами, то получаем $3(F-1)+4=2E$, то есть $E=\dfrac{3(F-1)}{2}+2$. Заметим, что число вершин графа равно 24 и подставим количества вершин ребер в формулу Эйлера $24-\left(\dfrac{3(F-1)}{2}+2\right)+F=2$. Отсюда $F=43$. Итак, число треугольников 42. **3.** Для этого графа не выполнено неравенство $E \le 3V-6$. **4.** а) Можно. Расположим 6 точек (ЭВМ) в вершинах правильного шестиугольника. Его стороны закрасим через одну цветами 1 и 2, а диагонали – цветами 3, 4, 5 (одним цветом закрасим две параллельные малые диагонали и перпендикулярную к ним большую). б) Нельзя, так как число проводов каждого цвета должно быть равным $15/2$. **5.** Нельзя. Если бы такой граф был плоским, то, так как каждый кусок должен быть ограничен по меньшей мере 4 ребрами, получим $E \ge 2F$. В задаче $E=9$, поэтому $F \le 4$. А из формулы Эйлера имеем $F=2-6+9=5$. **6.** Предположим противное. Тогда $2E \ge 6V$, то есть $E \ge 3V$, что противоречит неравенству. **7.** Не выполняется неравенство $3V-6 \ge E$. **8.** Пусть оба эти графа – плоские. Тогда у них вместе не более чем $(3\cdot 11-6)+(3\cdot 11-6)=54$ ребра. Однако в полном графе с 11 вершинами 55 ребер. Противоречие.

5. 1. Пусть в столицу входит a дорог. Тогда общее число «входящих» дорог равно $21\cdot 100+a$, а общее количество «выходящих» дорог не больше $20\cdot 100+(100-a)$. Поэтому $21\cdot 100+a \le 20\cdot 100+(100-a)$, то есть $2a \le 0$. Таким образом, $a=0$. **2.** Рассмотрим сначала вершины, соединенные с любой фиксированной вершиной A, затем – новые вершины, соединенные с ними и так далее. При этом ребра, соединяющие добавляемые вершины с уже рассмотренными, ориентируем в направлении к новым вершинам. **3.** *Указание.* Занумеруем города и направим от городов с меньшими номерами к городам с большими номерами. **4.** Рассмотрим эйлеров цикл, проходящий по всем ребрам графа, и ориентируем все ребра в соответствии с порядком прохождения цикла. **5.** Докажите, что существует замкнутый путь вдоль стрелок, проходящий по каждому ребру ровно один раз. **6.** Индукция по числу городов. База очевидна. Для доказательства индукционного перехода удалим сначала один из городов. В силу индукционного предположения есть город A с требуемым свойством. Вспомним теперь про удаленный город. Если в него ведет хотя бы одна дорога, то город A - искомый. В противном случае сам удаленный город удовлетворяет требуемому свойству. **7.** База – для трех городов. Для доказательства индукционного перехода удалите город, имеющий и входящие, и выходящие дороги. **8.** Зададим схему дорог в стране ориентированным графом. Рассмотрим две произвольные такие вершины u и v, что в орграфе нет дуги (u,v). Покажем, что расстояние между двумя любыми вершинами орграфа не более двух. Пусть из вершины u выходят дуги (u,u_1), $(u,u_2),\ldots,$ (u,u_{50}), а в вершину v входят дуги (v_1,v), $(v_2,v),\ldots,$ (v_{50},v). Среди вершин u_i и v_j должна существовать общая вершина w, так как в противном случае в орграфе окажется не менее 102 вершин. Маршрут (u,w,v) в орграфе определяет нужный маршрут проезда городов. **9.** Опишем симпатии школьников ориентированным графом. Если полустепень исхода k каждой вершины равна 15, то орграф содержит $30\cdot 15=450$ дуг. В то же время в орграфе $30\cdot\dfrac{29}{2}=435$ пар вершин. Поэтому хотя бы одна пара должна быть соединена двумя противоположно направленными дугами. Школьники, соответствующие этим вершинам, испытывают взаимные симпатии. **10.** Опишем проходящее соревнование ориентированным графом. В этом графе вершина v_i обозначает команду V_i и дуга (v_i,v_j) существует тогда и только тогда, когда команда V_i выиграла у команды V_j.

Покажем, что в построенном орграфе существует контур. Выберем любую вершину v_i орграфа. Поскольку из нее выходит хотя бы одна дуга, перейдем по этой дуге в соседнюю вершину v_2. Аналогично из v_2 перейдем в v_3 и так далее. Поскольку число вершин в орграфе конечно, то в конце концов мы попадем в вершину, в которой были ранее. Полученный контур определяет необходимые встречи команд. **11.** Рассмотрим ориентированный граф G, задающий движение по улицам города. Из условия следует, что орграф G – сильный. Построим маршрут, который начинается и оканчивается в одной и той же вершине и содержит все дуги орграфа. Рассмотрим две произвольные вершины u_1 и v_1. В орграфе существует маршрут, соединяющий вершины u_1 и v_1, и маршрут, соединяющий вершины v_1 и u_1. Объединим эти маршруты в один маршрут L_1. Он будет начинаться и оканчиваться в вершине u_1. Если этот маршрут будет содержать все дуги орграфа, то он будет искомым. Предположим, что в орграфе остались дуги, не вошедшие в маршрут L_1. Рассмотрим дугу (u_2, v_2), причем u_2 принадлежит L_1, а v_2 не принадлежит L_1. В орграфе существует маршрут, соединяющий вершины v_2 и u_2. Вместе с дугой (u_2, v_2) он будет образовывать маршрут L_2, который начинается и оканчивается в вершине v_2. Объединим маршруты L_1 и L_2 в один маршрут L (см. рис. 18).

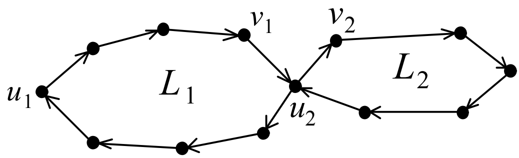

Рис.18

Если маршрут L не содержит все дуги орграфа G, то увеличим его с помощью некоторого маршрута L_3, и так до тех пор, пока не получим нужный маршрут. Этот маршрут и будет соответствовать маршруту патрулирования. **12.** Рассмотрим орграф G, задающий движение в городе. Из условия задачи следует, что для вершин графа G выполняется равенство $d^{+}(v) = d^{-}(v)$. Следовательно, граф G эйлеров, и эйлеров цикл определит нужный маршрут патрулирования. **13.** Точки плоскости вместе с векторами образуют орграф G. Возможно, орграф G, задающий векторы в задаче, не является связным. Применим теорему 5.4 к каждой связной части орграфа, получим разбиение векторов на контуры. Сумма векторов, принадлежащих одному контуру, равна нулю. Следовательно, сумма всех векторов равна нулевому вектору.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Березина Л. Ю.* Графы и их применение. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.

2. *Мельников О. И.* Теория графов в занимательных задачах. М.: Книжный дом «Либроком», 2008.

3. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980.

4. *Поздняков С.Н., Рыбин С. В.* Дискретная математика. М.: Издательский центр «Академия», 2008.

5. *Алексеев В. Б., Поспелов А. Д.* Дискретная математика. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2002.

6. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974.

7. *Краснов М. Л., Киселев А. И.,* Макаренко Г. И. Вся высшая математика. Т. 7. М.: КомКнига, 2006.