Часть 2. Определенный интеграл

1. Формула Ньютона – Лейбница

Для вычисления определенного интеграла основной является теорема Ньютона – Лейбница: если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $F(x)$ первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Примеры:

1.1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x dx$

■ $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{cosec}^2 x dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + ctg\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{-\sqrt{3}+3}{3}$.◄

1.2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

■ Применим табличный интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.◄$$

1.3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

■ $\int\limits_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int\limits_1^e \left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left(x + 2\ln x - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^e = e + 2\ln e - \frac{1}{e} - 1 - 2\ln 1 + 1 =$

$$= e + 2 - \frac{1}{e} = \frac{e^2+2e-1}{e}.◄$$

1.4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin^8 x dx$

■ Применяя соотношения между тригонометрическими функциями, получаем
$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^8 x dx = \frac{1}{2^4}\int\limits_0^{2\pi} \left(1-\cos 2x\right)^4 dx = \frac{1}{2^4}\int\limits_0^{2\pi} \left(1-4\cos 2x+6\cos^2 2x-4\cos^3 2x+\cos^4 2x\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2^4}\int\limits_0^{2\pi}\left(1-4\cos 2x+3\left(1+\cos 4x\right)-4\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2x+\frac{1}{8}\left(3+4\cos 4x+\cos 8x\right)\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{35}{8}x-2\sin 2x+\frac{7}{8}\sin 4x-2\left(\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+\frac{1}{64}\sin 8x\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{35}{64}\pi$$ ◄

2. Замена переменного в определенном интеграле

Формула
$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left[g\left(t\right)\right]g'\left(t\right)dt$$
справедлива при следующих условиях:

1. Функция $f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$;
2. Отрезок $\left[a,b\right]$ является множеством значений функции $x=g\left(t\right)$, определенной на отрезке $\left[\alpha,\beta\right]$;
3. $g\left(\alpha\right)=a$; $g\left(\beta\right)=b$.

Примеры:

2.1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

■ Применим метод интегрирования замены переменной. Пусть $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x}=dt$. Найдём новые пределы интегрирования. Если $a=1$, то $\alpha=\ln 1=0$; если $b=e$, то $\beta=\ln e=1$. С учётом замены, получаем:
$$\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int\limits_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$ ◄

2.2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}dx$.

■ Применим метод интегрирования замены переменной. Пусть $\sqrt{x^2-1}=t$. Тогда $x^2-1=t^2$, $dt=\dfrac{2xdx}{2\sqrt{x^2-1}}$, $x^3dx=\dfrac{xdx}{t}$. Найдём новые пределы интегрирования. Если $a=1$, то $\alpha=0$; если $b=3$, то $\beta=2\sqrt{2}$.

Тогда интеграл примет вид:

$$\int\limits_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}dx=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\left(t^2+1\right)t^2dt=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\left(t^4+t^2\right)dt=\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^{2\sqrt{2}}+\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{2\sqrt{2}}=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^5}{5}+\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^3}{3}=$$

$$=\frac{464\sqrt{2}}{15}.◄$$

2.3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

■ Применим метод интегрирования замены переменной. Пусть $x=\sin t$, тогда $dx=\cos tdt$. Найдём новые пределы интегрирования. Найдём новые пределы интегрирования. Если $a=0$, то $\alpha=0$; если $b=1$, то $\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

С учётом введения новой переменной первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\cos t}{2}dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=$$

$$=\left.\frac{t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+1.◄$$

2.4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\ln 2}\dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

■ Применим метод интегрирования замены переменной. Пусть $\sqrt{e^x-1}=t$, тогда $e^x=t^2+1$, $e^xdx=2tdt$. Найдём новые пределы интегрирования. Если $a=0$, то $\alpha=0$; если $b=\ln 2$, то $\beta=1$.

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\int_0^1\frac{2t^2dt}{t^2+4}=2\int_0^1\frac{\left(t^2+4\right)-4}{t^2+4}dt=2\int_0^1 dt-8\int_0^1\frac{dt}{t^2+4}=2t\Big|_0^1-\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Big|_0^1=$$

$$=2-4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.◄$$

2.5. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

■ Сделаем замену переменных $t=x^2$. Тогда $x=\sqrt{t}$, $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$. При этой замене пределы интегрирования не изменятся. Тогда получим

$$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(t+0.5\right)}{\sqrt{\left(t+0.5\right)^2+0.75}}=\frac{1}{2}\ln\left|t+0.5+\sqrt{\left(t+0.5\right)^2+0.75}\right|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(1.5+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1.5\right)◄$$

2.6. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\left(1+\sin x\right)^2}dx$

■ Применим универсальную тригонометрическую подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, тогда $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, а пределами интегрирования будут $\alpha=0$ и $\beta=1$. Получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\left(1+\sin x\right)^2}dx=\int_0^1\frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}=\int_0^1\frac{4t}{\left(1+2t+t^2\right)^2}dt=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{4}{\left(t+1\right)^3}-\frac{4}{\left(t+1\right)^4}\right)dt=\left(\frac{-2}{\left(t+1\right)^2}+\frac{4}{3\left(t+1\right)^3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}◄$$

2.7. Вычислить определенный интеграл: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}\frac{\left(4\operatorname{tg}x-5\right)dx}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}$

■ Применим тригонометрическую подстановку $t=\operatorname{tg}x$. Тогда $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$, пределы интегрирования $\alpha=1$ и $\beta=2$. Тогда

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}\frac{\left(4\operatorname{tg}x-5\right)dx}{4\cos^2x-\sin 2x+1}=\int\limits_1^2\frac{\left(4t-5\right)\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{4}{1+t^2}-\dfrac{2t}{1+t^2}+1}=$$

$$\int\limits_1^2\frac{4t-5}{t^2-2t+5}dt=\int\limits_1^2\left(2\frac{2t-2}{t^2-2t+5}-\frac{1}{\left(t-1\right)^2+4}\right)dt=\left(2\ln\left|t^2-2t+5\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=2\ln\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.◄$$

3. Формула интегрирования по частям

Если каждая из функций $u\left(x\right)$ и $v\left(x\right)$ имеет на отрезке $\left[a,b\right]$ непрерывную производную, то справедлива следующая формула

$$\int\limits_a^b u\left(x\right)dv\left(x\right)=u\left(x\right)v\left(x\right)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\left(x\right)du\left(x\right).$$

Примеры:

3.1. Вычислить определенный интеграл: $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx$.

■ Так как подынтегральная функция чётная, то исходный интеграл примет вид:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx.$$

Применим метод интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Пусть $u=\cos x$; $dv=e^x$; тогда $du=-\sin xdx$; $v=e^x$.

Тогда первоначальный интеграл примет вид:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = 2e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx.$$

Применим ещё раз метод интегрирования по частям:

Пусть $u = \sin x;\quad dv = e^x$; тогда $du = \cos x dx;\quad v = e^x$. Получаем:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = 2e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx =$$

$$-2e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = -2 + 2e^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$$

Получили равенство:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = -2 + 2e^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$$

Тогда:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = 2\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right).$$

Откуда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}. \blacktriangleleft$$

3.2. Вычислить определенный интеграл: $\int_1^2 (x+1)\ln|x| dx$.

■ Применим метод интегрирования по частям. Пусть $u = \ln|x|;\quad dv = x+1$.

Тогда $du = \dfrac{1}{x};\quad v = \dfrac{x^2}{2} + x$.

Первоначальный интеграл примет вид:

$$\int_1^2 (x+1)\ln|x| dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln|x|\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + 1\right)dx =$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln|x|\Big|_1^2-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2-x\Big|_1^2=4\ln 2-0-1+\frac{1}{4}-2+1=\ln 2^4-\frac{7}{4}=\ln 16-\frac{7}{4}.◄$$

3.3. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

■ Применим метод интегрирования по частям. Пусть

$$u=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}};\qquad dv=dx.$$

Тогда

$$du=\frac{1+x-x}{2\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}\sqrt{\frac{x}{1+x}}(1+x)^2}dx=\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)},\qquad\qquad v=x.$$

Первоначальный интеграл примет вид:

$$\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}dx=$$

$$=-3\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}-\int\limits_0^1\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}d\sqrt{x}=\frac{3\pi}{4}-\int\limits_0^1\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+1-1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{3\pi}{4}-\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\right)d\left(\sqrt{x}\right)=\frac{3\pi}{4}-\left(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{4}-1+\operatorname{arctg}1=$$

$$=\frac{3\pi}{4}-1+\frac{\pi}{4}=\pi-1.◄$$

3.4. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^1 e^{-2x}(4x-3)dx$

■ Применим метод интегрирования по частям. Пусть

$$u=4x-3;\qquad dv=e^{-2x}.$$

Тогда

$$du=4dx\qquad\qquad v=-\frac{1}{2}e^{-2x}dx.$$

Получим:

$$\int_0^1 e^{-2x}(4x-3)\,dx=-\frac{1}{2}(4x-3)e^{-2x}\Big|_0^1+4\int_0^1 e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}(4x-3)e^{-2x}\Big|_0^1-e^{-2x}=$$

$$=-\frac{1}{2e^2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{e^2}+1=-\frac{3}{2e^2}-\frac{1}{2}=\frac{-3-e^2}{2e^2}.\blacktriangleleft$$

3.5. Вычислить определенный интеграл: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1-\cos x}dx$

■ Подынтегральная функция нечётная относительно синуса и косинуса. Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t;\qquad x=2\operatorname{arctg}t;\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Пределы интегрирования:

$$a=\frac{\pi}{6};\qquad \alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12};\qquad b=\frac{\pi}{2};\qquad \beta=1.$$

С учётом подстановки первоначальный интеграл примет вид:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1-\cos x}dx=\int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\frac{2\operatorname{arctg}t+2t/\left(1+t^2\right)}{1+\left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right)}\frac{2dt}{1+t^2}=2\int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\operatorname{arctg}t\,dt+2\int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\frac{tdt}{1+t^2}.$$

Теперь применим метод интегрирования по частям.

Пусть

$$u=\operatorname{arctg}t;\qquad dv=dt.$$

Тогда

$$du=\frac{dt}{1+t^2};\qquad v=t.$$

Получим:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1-\cos x}dx=\int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\frac{2\operatorname{arctg}t+2t/\left(1+t^2\right)}{1+\left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right)}\frac{2dt}{1+t^2}=2\int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\operatorname{arctg}t\,dt+2\int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\frac{tdt}{1+t^2}=$$

$$=2t\operatorname{arctg}t\Big|_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}-2\int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\frac{tdt}{1+t^2}+2\int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\frac{tdt}{1+t^2}=$$

$$=2\operatorname{arctg}1-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right)-2\cdot\frac{\pi}{4}-2\cdot\frac{\pi}{12}\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}\left(3-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right).◀$$

4. Среднее значение функции

Пусть $f(x)$ интегрируема и ограничена на $[a,b]$ и $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ — соответственно, верхняя и нижняя грани $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда, существует такое число μ, что: $m\le\mu\le M$ и $\int\limits_a^b f(x)dx=\mu(b-a)$.

Число

$$\mu=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)}$$

называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Примеры:

4.1. Вычислить среднее значение функции $y=\sqrt{x}+x^2$ на отрезке $[0,4]$.

■ По формуле среднего значения функции на интервале, получаем

$$\mu=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)}=\frac{\int\limits_0^4\left(\sqrt{x}+x^2\right)dx}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x^{2/3}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=\frac{20}{3}.◀$$

4.2. Вычислить среднее значение функции $y=\sin^2 x$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

■ По формуле среднего значения функции на интервале, получаем

$$\mu=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)}=\frac{4\int\limits_0^4\sin^2 xdx}{\pi}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin x\cos x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{\pi-2}{2\pi}.◀$$

4.3. Вычислить среднее значение функции $y=\frac{x}{e^x-1}$ на отрезке $[1,2]$.

■ По формуле среднего значения функции на интервале, получаем

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = \int_1^2 \frac{x}{e^x - 1}dx = \left(\ln\left(e^x - 1\right)\right)\Big|_1^2 = \ln\left(\frac{e^2 - 1}{e - 1}\right). ◄$$

5. Несобственные интегралы

<u>Интегралы с бесконечными пределами</u>

Если $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,+\infty)$, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

называется несобственным интегралом от $f(x)$. Если предел существует и конечен, интеграл называется сходящимся, если нет, то расходящимся. Если $f(x) \sim \frac{A}{x^\alpha}$ при $x \to +\infty$, то при $\alpha > 1$ интеграл сходится, при $\alpha \le 1$ интеграл расходится.

Отметим важные примеры несобственных интегралов:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ - интеграл Пуассона,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$ - интеграл Дирихле,

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$ - Бета-функция (эйлеров интеграл 1 рода),

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$ - Гамма-функция (эйлеров интеграл 2 рода).

Примеры:

5.1. Вычислить интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5}$

■ Найдём $\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^5} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x^4}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b^4} + 1\right) = 1$.

Предел существует и конечен. Значит, интеграл сходится. ◄

5.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \operatorname{tg} x dx$

■ Найдём $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b \operatorname{tg} x = -\lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln\cos x\Big|_0^b\right) = -\lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln\cos b - \ln 1\right) = -\lim\limits_{b\to\infty}\ln\cos b$.

Предел не существует. Несобственный интеграл расходится. ◄

5.3. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+16}$.

■ Подынтегральная функция чётная, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+16} = 2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+16}.$$

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+16} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+16} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\Big|_0^b = \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{4} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Получили $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+16} = \frac{\pi}{4}$. Интеграл сходится. ◄

5.3 Доказать расходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

■ Так как при $x>1$, $\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} > \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} > 0$, то вычисляя интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{b\to+\infty} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_1^b = 3\lim_{b\to+\infty}\left(b^{\frac{1}{3}} - 3\right) = +\infty.$$

Этот интеграл расходится. Следовательно, по признаку сравнения исходный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ тоже расходится. ◄

<u>Интегралы от функций с бесконечными разрывами</u>

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ и неограниченна в любой окрестности точки b, то интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$$

называется несобственным интегралом от $f(x)$. Если предел существует и конечен, интеграл называется сходящимся, если нет, то расходящимся. Если $f(x) \sim \dfrac{A}{(x-b)^{\alpha}}$ при $x \to b$, то при $\alpha < 1$ интеграл сходится, при $\alpha \ge 1$ интеграл расходится.

Примеры:

5.4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^2 \dfrac{dx}{x-1}$.

■ Так как подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ терпит разрыв в точке $x = 1$, то получим:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{a\to 1}\int_a^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{a\to 1}\ln|x-1|\Big\|_a^2 = \lim_{a\to 1}\left(\ln 1 - \ln|a-1|\right) = \lim_{a\to 1}\ln\frac{1}{|a-1|} = \infty$$

Конечного предела не существует, значит, интеграл расходится. ◄

5.5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-3}^{1} \dfrac{dx}{x+3}$

■ Так как подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ терпит разрыв в точке $x = -3$, то получим:

$$\lim_{a\to -3}\int_a^1 \frac{dx}{x+3} = \lim_{a\to -3}\ln|x+3|\Big\|_a^1 = \lim_{a\to -3}\left(\ln 4 - \ln|a+3|\right) = \lim_{a\to -3}\ln\frac{4}{|a+3|} = \infty .$$

Конечный предел равен бесконечности. Значит, интеграл расходится. ◄

5.6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \ln x dx$

■ Так как подынтегральная функция $f(x) = \ln x$ терпит разрыв в точке $x = 0$, получим:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \ln x dx .$$

Применим интегрирование по частям. Пусть $u = \ln x;\quad dv = dx;$ Тогда

$$du = \frac{dx}{x};\qquad v = x .$$

И первоначальный интеграл примет вид:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \ln x dx = \lim_{a\to 0}\left(x\ln x\Big|_a^1 - \int_a^1 dx\right) = -1 .$$

Предел конечен. Поэтому интеграл сходится. ◄

5.7. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$

■ Имеем $\lim\limits_{a\to -\infty}\int_a^0 \frac{xdx}{x^2+1} = \lim\limits_{a\to -\infty}\frac{1}{2}\int_a^0 \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to -\infty}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_a^0 = -\infty .$

Предел бесконечен. Следовательно, интеграл расходится. ◄

6. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

6.1. Вычисление площади криволинейной трапеции

Площадь плоской области D стандартной относительно оси Ox, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ такими, что для любых $a \le x \le b$ выполнено $f_1(x) \le y \le f_2(x)$

(т.е. $D = \left\{(x,y): a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\right\}$) вычисляется

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right] dx .$$

Аналогично площадь плоской области стандартной относительно оси Oy, ограниченной прямыми $y = c$ и $y = d$ и кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ такими, что для любых $c \le y \le d$ выполнено $g_1(y) \le x \le g_2(y)$

(т.е. $D = \left\{(x,y): c \le y \le d, g_1(y) \le x \le g_2(y)\right\}$) вычисляется

$$S=\int_c^d\left[g_2(y)-g_1(y)\right]dy.$$

Если область D ограничена непрерывной замкнутой кривой, заданной параметрически

$$\Gamma: x=x(t), y=y(t), t\in[T_0,T_1], x(T_0)=x(T_1), y(T_0)=y(T_1),$$

то её площадь можно вычислить по одной из трёх формул

$$S=-\int_{T_0}^{T_1}y(t)x'(t)dt,$$

$$S=\int_{T_0}^{T_1}x(t)y'(t)dt,$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_1}\left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt.$$

Какую из них удобнее применять, зависит от конкретного вида функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$.

Площадь области D:

$$D=\left\{(r,\varphi):\varphi_0\le\varphi\le\varphi_1, 0\le r\le r(\varphi)\right\},$$

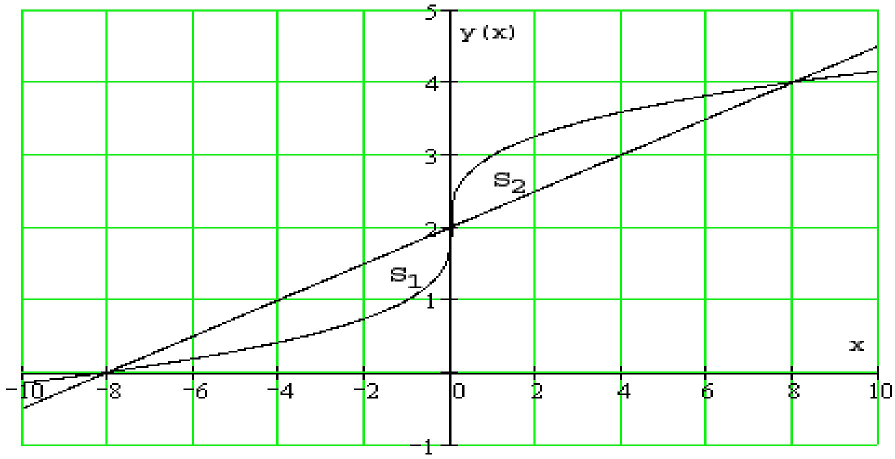
называемой криволинейным сектором, ограниченной графиком $r(\varphi)$ и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы φ_0 и φ_1 имеет площадь

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[r(\varphi)\right]^2d\varphi.$$

Примеры:

6.1.1. Вычислить площадь области, ограниченной линиями: $x=(y-2)^3$ и $x=4y-8$.

■ Изобразим фигуру в декартовой системе координат:



Из условия симметрии фигуры относительно точки с координатами $(0 \quad 2)$, площади S_1 и S_2 равны. Так как данная область является стандартной как относительно оси Ox так и относительно оси Oy, то ее площадь можно вычислить одним из двух способов.

1) Выразим зависимости в явном виде:

$$x=(y-2)^3 \Leftrightarrow y=\sqrt[3]{x}+2 \qquad \text{и} \qquad x=4y-8 \Leftrightarrow y=\frac{x}{4}+2,$$

а стандартная относительно оси Ox область

$$D=\left\{(x,y): 0\le x\le 8, \frac{x}{4}+2\le y\le \sqrt[3]{x}+2\right\}.$$

Тогда получаем

$$S=2\int_0^8\left[\left(\sqrt[3]{x}+2\right)-\left(\frac{x}{4}+2\right)\right]dx=2\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_0^8=8.$$

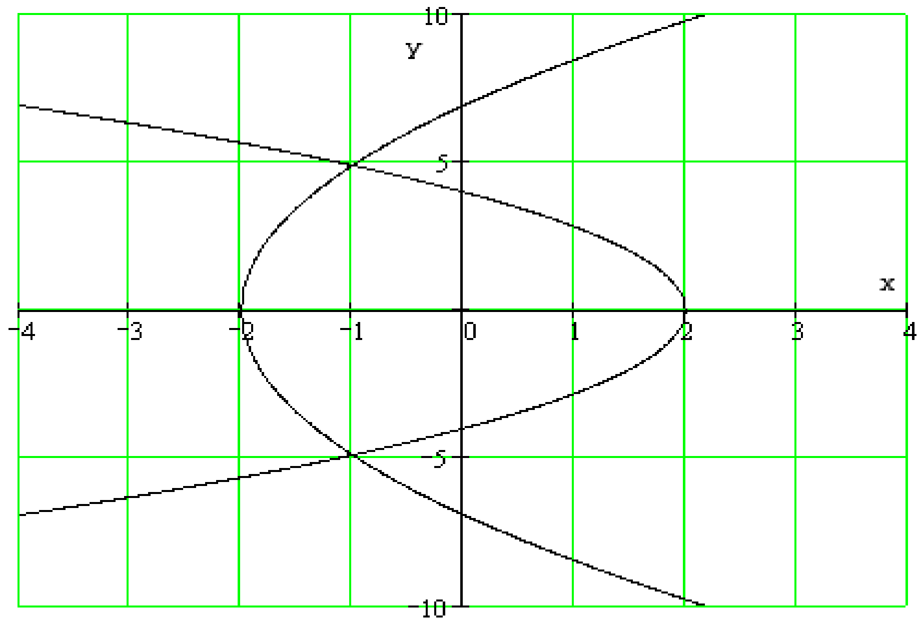
2) Заметим, что для вычисления площади можно было воспользоваться исходным видом зависимостей:

$$D=\left\{(x,y): 2\le y\le 4, (y-2)^3\le x\le 4y-8\right\}$$

$$S=2\int_2^4\left[(4y-8)-(y-2)^3\right]dy=2\left(2y^2-8y-\frac{1}{4}(y-2)^4\right)\Bigg|_2^4=8. ◄$$

6.1.2. Вычислить площадь области, ограниченной параболами $y^2+8x=16$ и $y^2-24x=48$.

■ Изобразим фигуру в декартовой системе координат



Очевидно, область симметрична относительно оси Ox, кроме того, она не является стандартной относительно оси Ox и стандартной относительно оси Oy, а ее площадь можно вычислить одним из двух способов.

1) Данная область не является стандартной относительно оси Ox. Её можно разбить на две стандартные относительно оси Ox области:

$$D_1 = \left\{(x,y): -2 \le x \le -1, -\sqrt{48+24x} \le y \le \sqrt{48+24x}\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y): -1 \le x \le 2, -\sqrt{16-8x} \le y \le \sqrt{16+8x}\right\}.$$

Из симметрии областей D_1 и D_2 относительно оси Ox следует, что

$$S = 2\left\{\int_{-2}^{-1} \sqrt{48+24x}dx + \int_{-1}^{2} \sqrt{16-8x}dx\right\} =$$

$$= 2\left\{\frac{1}{36}(48+24x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{-1}{12}(16-8x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{2}\right\} = \frac{32\sqrt{6}}{3}.$$

2) Относительно оси Oy данная область является стандартной:

$$D = \left\{(x,y): -\sqrt{24} \le y \le \sqrt{24}, \frac{y^2-48}{24} \le x \le \frac{16-y^2}{8}\right\}.$$

Снова, используя симметрию области, получаем

$$S = 2\int_0^{\sqrt{24}} \left(\frac{16-y^2}{8} - \frac{y^2-48}{24}\right)dy = 2\int_0^{\sqrt{24}} \left(4 - \frac{y^2}{6}\right)dy = 2\left(4y - \frac{y^3}{18}\right)\Big|_0^{\sqrt{24}} = \frac{32\sqrt{6}}{3}. ◄$$

6.1.3. Вычислить площадь эллипса, заданного уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($x=a\cos t$, $y=b\sin t$).

■ Искомую площадь можно вычислить, используя как явное представление линии, так и параметрическое.

1) Выразив уравнение в явном виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

получим, применив подстановку $x=a\cos t$, $dx=-a\sin t dt$, приходим к

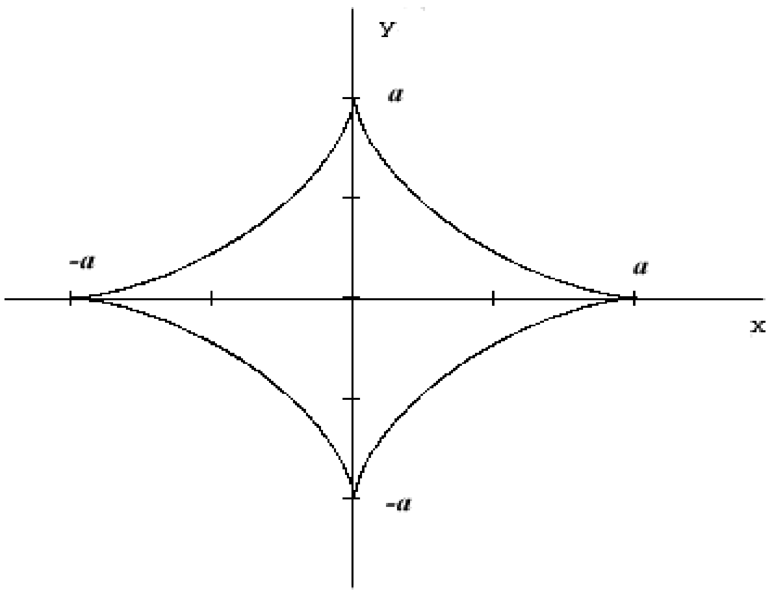
$$S=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=-4\frac{b}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\sin t dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=\pi ab.$$

2) С другой стороны, используя параметрическое представление $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ при изменении параметра t в пределах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$, получаем:

$$S=-\int_{T_0}^{T_1}y(t)x'(t)dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=\pi ab.$$ ◄

6.1.4. Вычислить площадь астроиды, заданной уравнением $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ($x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$)

■ Изобразим кривую в декартовых координатах:



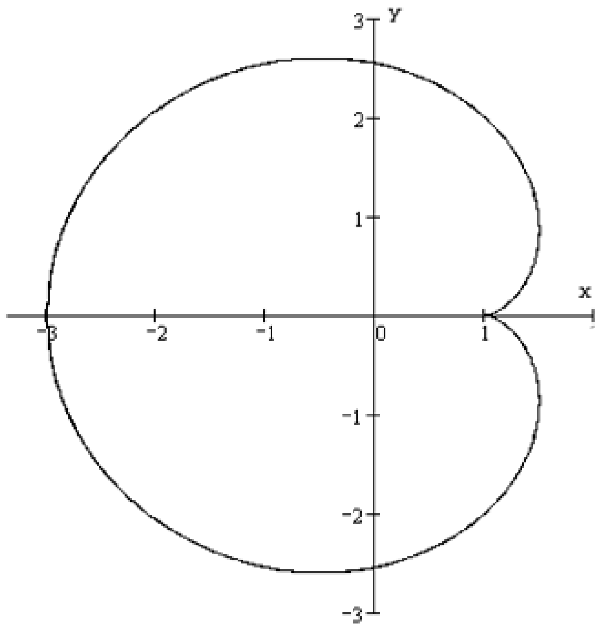
Используя параметрическое представление $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ при изменении параметра t в пределах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$, получаем:

$$S = \frac{1}{2}\left\{4\int_{T_0}^{T_1}\left[x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\right]dt\right\} = 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t\right]dt =$$

$$= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^2 t\sin^2 t\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\right]dt = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt = \frac{3}{8}\pi a^2. \blacktriangleleft$$

6.1.5. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x(t) = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y(t) = 2a\sin t - a\sin 2t$.

■ Изобразим кривую в декартовых координатах:



Так как кардиоида симметрична относительно оси Ox, то, используя параметрическое представление, будем менять параметр t в пределах от 0 до π. Так как

$$x'(t) = 2a\sin t(2\cos t - 1) \qquad \text{и} \qquad y'(t) = 2a(\cos t - \cos 2t),$$

получаем по любой из трех формул

$$S = -\int_{T_0}^{T_1} y(t)x'(t)dt = -8a^2\int_0^{\pi}\sin^2 t(2\cos t - 1)(1 - \cos t)dt =$$

$$=-8a^2\int_0^\pi \sin^2 t\left(3\cos t-2\cos^2 t-1\right)dt=-8a^2\left\{3\int_0^\pi \sin^2 t\cos t dt-2\int_0^\pi \sin^2 t\cos^2 t dt-\int_0^\pi \sin^2 t dt\right\}=$$

$$=-8a^2\left\{3\int_0^\pi \sin^2 t d\left(\sin t\right)-\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 2t dt-\int_0^\pi \sin^2 t dt\right\}=$$

$$=-8a^2\left\{\sin^3 t\Big|_0^\pi-\frac{1}{4}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^\pi-\frac{1}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^\pi\right\}=6\pi a^2,$$

$$S=\int_{T_0}^{T_1} x(t)y'(t)dt=4a^2\int_0^\pi\left(\cos t-\cos 2t\right)\left(2\cos t-\cos 2t\right)dt=$$

$$=4a^2\int_0^\pi\left(2\cos^2 2t-3\cos t\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt=$$

$$=4a^2\int_0^\pi\left(2\cos^2 2t-3\cos t+6\cos t\sin^2 t+\cos^2 2t\right)dt=,$$

$$=4a^2\left\{\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^\pi-3\sin t\Big|_0^\pi+\sin^3 t\Big|_0^\pi+\frac{1}{2}\left(t+\sin 4t\right)\Big|_0^\pi\right\}=6\pi a^2$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_1}\left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt=6\pi a^2.$$

Отметим, что площадь кардиоиды задаваемой уравнением в полярных координатах

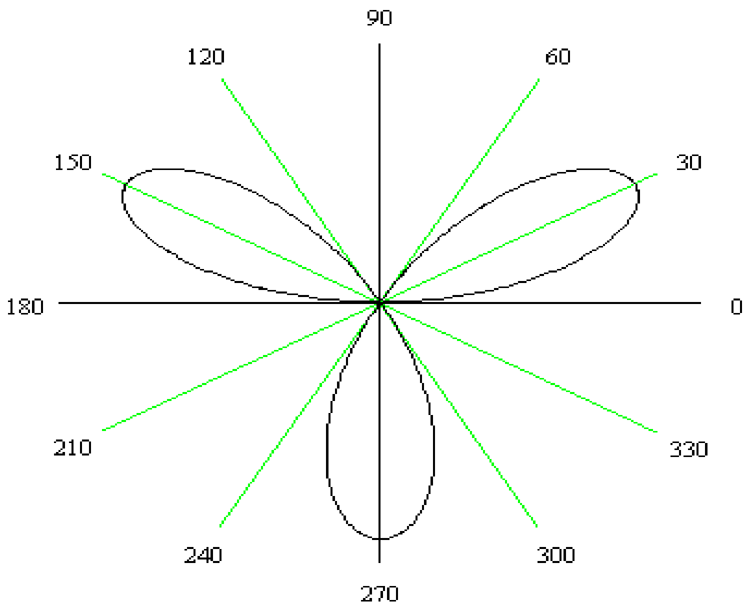
$$r(\varphi)=a\left(1+\cos\varphi\right)$$

равна

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[r(\varphi)\right]^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[r(\varphi)\right]^2 d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2. ◄$$

6.1.6. Найти площадь области, ограниченной кривой $r=\sin 3\varphi$.

■ Кривая образует три симметричные петли, каждая из которых ограничивает криволинейный сектор. Изобразим ее в полярных координатах.



Рассмотрим сектор, лежащий в первой четверти:

$$D_1 = \{(r,\varphi): 0 \le \varphi \le \pi/3, 0 \le r \le \sin 3\varphi\}.$$

Площадь его, очевидно, равна 1/3 площади всей области, ограниченной данной кривой. Следовательно,

$$S = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3} \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/3} (1-\cos 6\varphi)\, d\varphi = \frac{3}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

6.2. Вычисление объема вращения

Пусть $D = \{(x,y): a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ - стандартная относительно оси Ox область. Если ось Ox не пересекает область D, то объем тела, образованное вращением области D вокруг оси Ox равна

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx,$$

если ось Oy не пересекает область D, то объем тела, образованное вращением области D вокруг оси Oy равна

$$V_{Oy} = 2\pi\int_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx.$$

Если область D ограничена непрерывной замкнутой кривой, заданной параметрически

$$\Gamma: x = x(t), y = y(t), t \in [T_0, T_1], x(T_0) = x(T_1), y(T_0) = y(T_1),$$

причем при изменении t от T_0 до T_1 кривая Γ проходится так, что область D остается слева. Если область D не пересекается с соответствующей осью координат и функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T_1]$, то

$$V_{Ox} = -\pi \int_{T_0}^{T_1} y^2(t) x'(t) dt = 2\pi \int_{T_0}^{T_1} x(t) |y(t)| y'(t) dt,$$

$$V_{Oy} = -2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t) y(t)| x'(t) dt = \pi \int_{T_0}^{T_1} x^2(t) y'(t) dt.$$

Примеры:

6.2.1. Вычислить объём тела, полученного вращением параболы $y = x^2$ вокруг осей Ox и Oy, ограниченного прямыми $x = 1$ и $x = 2$.

■ Так как $a = 1$, $b = 2$, $y = f(x) = x^2$, то объем тела, полученного вращением параболы вокруг Ox

$$V_{Ox} = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{31\pi}{5},$$

вокруг Oy

$$V_{Oy} = 2\pi \int_1^2 x^3 dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{15\pi}{2}. \blacktriangleleft$$

6.2.2. Вычислить объем удлиненного и укороченного эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг осей абсцисс (удлиненный эллипсоид) и ординат (укороченный эллипсоид).

■ Используем параметрическое параметрическое представление эллипса

$$x = a\cos t, \ y = b\sin t.$$

Вычисляя производные $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$. Тогда, при изменении t от 0 до π, получаем для удлиненного эллипса

$$V_{Ox} = -\pi\int_0^{\pi} y^2(t)\,x'(t)\,dt = \pi ab^2\int_0^{\pi}\sin^3 t dt = \pi ab^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2 t\right)\sin t dt =$$

$$= -\pi ab^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t = -\pi ab^2\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4\pi ab^2}{3},$$

а для укороченного

$$V_{Oy} = \pi\int_0^{\pi} x^2(t)\,y'(t)\,dt = \pi a^2 b\int_0^{\pi}\cos^3 t dt = \frac{4\pi a^2 b}{3}.$$

Обратим внимание, что в случае шара $a = b = R$, его объем равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. ◄

6.2.3. Вычислить объем тела, образованного вращением астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси абсцисс.

■ Используя параметрическое представление $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ при изменении параметра t в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получаем:

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad y' = 3a\cos t\sin^2 t,$$

а объем тела равен

$$V_{Ox} = 2\pi\int_0^{\pi/2} x^2(t)\,y'(t)\,dt = 6\pi a^3\int_0^{\pi/2}\cos^7 t\sin^2 dt = \frac{32\pi a^3}{105}. \blacktriangleleft$$

6.3. Вычисление длины дуги кривой.

Если плоская кривая Γ задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \; t_0 \le t \le t_1,$$

причем $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то она имеет длину, вычисляемую по следующей формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt.$$

Если плоская кривая Γ – график непрерывно дифференцируемой функции $y = f\left(x\right)$ и $x_0 \le x \le x_1$, то длина этой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'\left(x\right) \right]^2}\, dx.$$

В полярных координатах

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\rho'\left(\varphi\right) \right]^2 + \left[\rho\left(\varphi\right) \right]^2}\, d\varphi.$$

Пусть задана дуга кривой $\Gamma : \left\{ x\left(t\right), y\left(t\right), t \in \left[T_0, T_1\right] \right\}$ и функции $x\left(t\right), y\left(t\right)$ непрерывно дифференцируемы на $t \in \left[T_0, T_1\right]$, то дифференциал функции длины дуги $l\left(t\right)$ называется дифференциалом дуги и вычисляется по одной из формул:

$$dl = \sqrt{\left[x'\left(t\right) \right]^2 + \left[y'\left(t\right) \right]^2}\, dt,$$

$$dl = \sqrt{1 + \left[f'\left(x\right) \right]^2}\, dx,$$

$$dl = \sqrt{\left[\rho'\left(\varphi\right) \right]^2 + \left[\rho\left(\varphi\right) \right]^2}\, d\varphi.$$

Примеры:

6.3.1. Вычислить длину линии $y = \ln x$ от $a = \sqrt{3}$ до $b = \sqrt{8}$.

■ Так как $y' = \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$, то искомая длина равна

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\, dx.$$

Положим $t = \sqrt{x^2 + 1}$, отсюда $x = \sqrt{t^2 - 1}$, $dx = \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2 - 1}}$. Новые пределы интегрирования: $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Тогда:

$$l = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\, dx = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2 - 1}\, dt = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = t\Big|_2^3 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \Bigg|_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$ ◄

6.3.2. Вычислить длину астроиды, заданной уравнением $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ($x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$).

■ Используя параметрическое представление при изменении параметра t в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (первая четверть) и находя производные

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t \qquad \text{и} \qquad y'(t) = 3a\cos t\sin^2 t,$$

Получаем

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t}dt =$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t dt = 6a. \blacktriangleleft$$

6.3.3. Вычислить длину кардиоиды, заданной уравнением $r(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$.

■ Так как $r'(\varphi) = -a\sin\varphi$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\rho'(\varphi)\right]^2 + \left[\rho(\varphi)\right]^2}d\varphi = 2\int_0^\pi \sqrt{\left[-a\sin\varphi\right]^2 + \left[a(1+\cos\varphi)\right]^2}d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a. \blacktriangleleft$$

6.4. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть задана кривая $\Gamma:\{x(t), y(t), t\in[T_0, T_1]\}$, и прямая τ, являющаяся осью вращения. Тогда площадь поверхности S полученная вращением Γ вокруг оси τ вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_{T_0}^{T_1} \rho(t)dl,$$

где $\rho(t)$ - расстояние от точки $M(x(t), y(t))$, лежащей на кривой Γ, до оси вращения τ, а dl - дифференциал дуги Γ.

То есть если поверхность:

а) получается при вращении кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вокруг оси Ox, то в качестве параметра вводится переменная x, $\rho(t) = f(x)$, $dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$ и искомая площадь равна

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

б) получается при вращении параметрически заданной кривой $x = x(t), y = y(t)$ вокруг оси Ox, то $\rho(t) = y(t)$, $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$, а её площадь равна

$$S = 2\pi\int_{T_0}^{T_1} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

в) получается при вращении кривой заданной в полярных координатах $r = r(\varphi)$ вокруг полярной оси, то $\rho(t) = y(\varphi)$, $dl = \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + [\rho(\varphi)]^2}d\varphi$, площадь находится по формуле

$$S = 2\pi\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} y(\varphi)\sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + [\rho(\varphi)]^2}d\varphi.$$

Примеры:

6.4.1. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением астроиды, заданной уравнениями $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг оси абсцисс.

■ Так как

$$\Gamma : \left\{ x(t) = a\cos^3 t, y(t) = a\sin^3 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

$$\rho(t) = y(t) = a\sin^3 t,$$

$$dl = 3a\sin t\cos t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}dt = 3a\sin t\cos t dt$$

то площадь поверхности, получаемой при вращении астроиды равна

$$S = 2\pi\int_{T_0}^{T_1}\rho(t)dl = 6\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t dt = \frac{12\pi a^2}{5} ◄$$

6.4.2. Вычислить площадь поверхности получаемой вращением цепной линии $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ (такая поверхность называется катеноидом) вокруг оси абсцисс и ограниченного двумя плоскостями $x = 0$ и $x = a$, перпендикулярными оси абсцисс.

■ Напомним, что

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

Тогда площадь поверхности катеноида будет равна

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_0^\alpha \operatorname{ch} x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}dx = 2\pi\int_0^\alpha \operatorname{ch}^2 xdx =$$

$$= 2\pi a^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sh}2x}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi a^2}{4}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right).◄$$

6.4.3. Найти площадь поверхности вращения удлиненного и укороченного эллипсоида (см. задачу **6.2.2.**).

■ Используем параметрическое параметрическое представление эллипса

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

Вычисляя производные $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$. Тогда, при изменении t от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$, получаем для удлиненного эллипсоида

$$S = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}dt = 4\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt =$$

$$= 4\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{\left(b^2 - a^2\right)\cos^2 t + a^2}dt$$

Обозначая $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ - эксцентриситет эллипса, получаем:

$$S = 4\pi ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt = \frac{4\pi ab}{\varepsilon}\int_{0}^{\varepsilon} \sin t\sqrt{1-z^2}\,dz =$$

$$= \frac{4\pi ab}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2} + \frac{\arcsin\varepsilon}{2}\right) = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon .$$

Аналогично, для укороченного эллипсоида

$$S = 4\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,dt = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \blacktriangleleft$$

1. Найти неопределённый интеграл

1. $\int (4+3x)e^{2x}dx$

2. $\int (5-2x)e^{x/3}dx$

3. $\int (1-5x)e^{-3x}dx$

4. $\int (3-4x)e^{3x}dx$

5. $\int (1-2x)e^{-x}dx$

6. $\int (1+3x)e^{-2x/7}dx$

7. $\int (4+3x)e^{3x}dx$

8. $\int (11+x)e^{5x}dx$

9. $\int (5+2x)e^{-5x}dx$

10. $\int (5-x)e^{-x}dx$

11. $\int (4-7x)e^{-4x}dx$

12. $\int \left(x-\frac{1}{3}\right)e^{-8x}dx$

13. $\int (2x-1)e^{6x}dx$

14. $\int (4+x)e^{-2x/7}dx$

15. $\int (6x+11)e^{9x}dx$

16. $\int (13+x)e^{-5x/3}dx$

17. $\int (10-x)e^{-2x/3}dx$

18. $\int (7+5x)e^{x}dx$

19. $\int (3x-13)e^{x/4}dx$

20. $\int (8+x)e^{-2x+1}dx$

21. $\int (8x-5)e^{6x}dx$

22. $\int (5+2x)e^{-x/2}dx$

23. $\int (3-4x)e^{-2x/5}dx$

24. $\int (5x+12)e^{-6x}dx$

25. $\int (x+2)e^{-x}dx$

26. $\int (4+x)e^{-3x/2}dx$

27. $\int (8+x)e^{3x/4}dx$

28. $\int (3-4x)e^{5x}dx$

29. $\int (3+4x)e^{-2x}dx$

30. $\int (5+9x)e^{-x/4}dx$

2. Найти неопределённый интеграл

1. $\int(4+3x)\cos 2xdx$
2. $\int(5-2x)\sin 3xdx$
3. $\int(1-5x)\sin 8xdx$
4. $\int(3-4x)\sin 3xdx$
5. $\int(1-2x)\cos 6xdx$
6. $\int(1+3x)\sin 5xdx$
7. $\int(4+3x)\cos 4xdx$
8. $\int(11+x)\cos 2xdx$
9. $\int(5+2x)\cos 2xdx$
10. $\int(5-x)\cos 6xdx$
11. $\int(4-7x)\sin 2xdx$
12. $\int(x-3)\cos 8xdx$
13. $\int(2x-1)\cos 3xdx$
14. $\int(4+x)\sin 3xdx$
15. $\int(6x+11)\sin 5xdx$
16. $\int(13+x)\cos xdx$
17. $\int(10-x)\cos 2xdx$
18. $\int(7+5x)\sin 6xdx$
19. $\int(3x-13)\sin 4xdx$
20. $\int(8+x)\cos 4xdx$
21. $\int(8x-5)\cos 5xdx$
22. $\int(5+2x)\sin 5xdx$
23. $\int(3-4x)\sin 4xdx$
24. $\int(5x+12)\cos 3xdx$
25. $\int(x+2)\sin 3xdx$
26. $\int(4+x)\sin 3xdx$
27. $\int(8+x)\sin 3xdx$
28. $\int(3-4x)\sin 2xdx$
29. $\int(3+4x)\sin xdx$
30. $\int(5+9x)\cos 6xdx$

3. Найти неопределённый интеграл

1. $\int(4+3x)\ln 2x dx$

2. $\int(5-2x)\ln 3x dx$

3. $\int(1-5x)\ln 6x dx$

4. $\int(3-4x)\ln 2x dx$

5. $\int(1-2x)\ln 4x dx$

6. $\int(1+3x)\ln 4x dx$

7. $\int(4+3x)\ln 3x dx$

8. $\int(11+x)\ln x dx$

9. $\int(5+2x)\ln 4x dx$

10. $\int(5-x)\ln 3x dx$

11. $\int(4-7x)\ln x dx$

12. $\int\left(x-\frac{2}{3}\right)\ln 7x dx$

13. $\int(2x-1)\ln 4x dx$

14. $\int(4+x)\ln x dx$

15. $\int(6x+11)\ln 6x dx$

16. $\int(13+x)\ln 13x dx$

17. $\int(10-x)\ln x dx$

18. $\int(7+5x)\ln 3x dx$

19. $\int(3x-13)\ln 3x dx$

20. $\int(8+x)\ln 2x dx$

21. $\int(8x-5)\ln 2x dx$

22. $\int(5+2x)\ln 5x dx$

23. $\int(3-4x)\ln 4x dx$

24. $\int(5x+12)\ln 2x dx$

25. $\int(x+2)\ln 3x dx$

26. $\int(4+x)\ln 4x dx$

27. $\int(8+x)\ln 2x dx$

28. $\int(3-4x)\ln 4x dx$

29. $\int(3+4x)\ln 3x dx$

30. $\int(5+9x)\ln 2x dx$

4. Найти неопределённый интеграл

5. Найти неопределённый интеграл

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}$

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{6-x}}$

3. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$

4. $\int \frac{4dx}{x\sqrt{5x+3}}$

5. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6+x}}$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{7-2x}}$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x-8}}$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{7x-2}}$

9. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{5x+11}}$

10. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{5x+11}}$

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{13x+9}}$

12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-11}}$

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{18-6x}}$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{6x+13}}$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{7x-2}}$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{-5x-21}}$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{-3x+3}}$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{14x+10}}$

19. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{4-x}}$

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{8-3x}}$

21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{17-5x}}$

23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{11x-7}}$

24. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{3/4x-1}}$

25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{6x-13}}$

26. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{4x-1}}$

27. $\int \frac{dx}{5x\sqrt{9x-2}}$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+11}}$

29. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x-1}}$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{14x+2}}$

6. Найти неопределённый интеграл

1. $\int \frac{\sin x dx}{3\sin x+1}$

2. $\int \frac{\cos x dx}{5+\cos x}$

3. $\int \frac{\sin 3x dx}{6+\cos x}$

4. $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin x}$

5. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin x+4}$

6. $\int \frac{\sin 2x dx}{5+\sin 2x}$

7. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin 3x-8}$

8. $\int \frac{\sin x dx}{5-\cos 3x}$

9. $\int \frac{2\sin x dx}{3\sin x+1}$

10. $\int \frac{\sin 2x dx}{3\sin x-9}$

11. $\int \frac{1+\sin 2x dx}{3+\sin x}$

12. $\int \frac{1+\sin x dx}{4-\sin 2x}$

13. $\int \frac{\cos x dx}{8+\sin x}$

14. $\int \frac{\sin 2x dx}{8+\cos 2x}$

15. $\int \frac{\sin x dx}{4-4\sin x}$

16. $\int \frac{2\sin x dx}{3+4\cos x}$

17. $\int \frac{4\sin x dx}{2-6\sin x}$

18. $\int \frac{6\cos x dx}{9+\sin x}$

19. $\int \frac{\sin 2x dx}{7-2\sin x}$

20. $\int \frac{7\sin x dx}{8-2\sin x}$

21. $\int \frac{4\sin x dx}{3\sin x-5}$

22. $\int \frac{\sin 2x dx}{12+4\sin x}$

23. $\int \frac{2\cos x dx}{5-\sin x}$

24. $\int \frac{\cos x dx}{9-4\sin x}$

25. $\int \frac{\sin x dx}{6+\cos 2x}$

26. $\int \frac{2\sin x dx}{8+11\sin x}$

27. $\int \frac{8\sin x dx}{12+\sin x}$

28. $\int \frac{5\sin x dx}{13+\sin 6x}$

29. $\int \frac{\cos x dx}{3+\cos x}$

30. $\int \frac{\sin x dx}{3+\sin x}$

7. Найти неопределённый интеграл

1. $\int \frac{x^3-2}{x^2-1}dx$

2. $\int \frac{2x^3+1}{x^2-12}dx$

3. $\int \frac{x^3+4}{x^2-5}dx$

4. $\int \frac{x^3-1}{x^2+1}dx$

5. $\int \frac{x^3-5}{2x^2-2}dx$

6. $\int \frac{x^3-8}{x^2-4}dx$

7. $\int \frac{x^3-12}{2x^2+1}dx$

8. $\int \frac{3x^3-7}{x^2+2}dx$

9. $\int \frac{x^3-2}{x^2-7}dx$

10. $\int \frac{2x^3-1}{3x^2-1}dx$

11. $\int \frac{x^3+9}{2x^2-11}dx$

12. $\int \frac{x^3+1}{x^2-6}dx$

13. $\int \frac{x^3+12}{2x^2-1}dx$

14. $\int \frac{x^3+14}{8x^2-1}dx$

15. $\int \frac{x^3+11}{x^2-11}dx$

16. $\int \frac{x^3+3}{x^2-5}dx$

17. $\int \frac{2x^3+6}{2x^2-8}dx$

18. $\int \frac{x^3+5}{3x^2-1}dx$

19. $\int \frac{x^3+9}{2x^2-4}dx$

20. $\int \frac{2x^3+1}{7x^2-1}dx$

21. $\int \frac{9x^3+2}{x^2-5}dx$

22. $\int \frac{2x^3+3}{8x^2-1}dx$

23. $\int \frac{9x^3+1}{x^2-2}dx$

24. $\int \frac{11x^3+3}{x^2-2}dx$

25. $\int \frac{2x^3+1}{4x^2-1}dx$

26. $\int \frac{13x^3+2}{5x^2-1}dx$

27. $\int \frac{2x^3+1}{5x^2-3}dx$

28. $\int \frac{x^3+8}{2x^2-5}dx$

29. $\int \frac{5x^3+6}{2x^2-3}dx$

30. $\int \frac{2x^3+4}{6x^2-2}dx$

8. Найти неопределённый интеграл

1. $\int \frac{x^3+1}{(x+1)^2(x-2)^2}dx$

2. $\int \frac{x^3+1}{(x+3)^2(x-7)^2}dx$

3. $\int \frac{x^3+6}{(2x+3)^2(x-1)^2}dx$

4. $\int \frac{x^3+2}{(3x+1)^2(x-3)^2}dx$

5. $\int \frac{x^3+1}{(x+6)^2(x-2)^2}dx$

6. $\int \frac{x^3+2}{2(x+2)^2(2x-4)^2}dx$

7. $\int \frac{x^3+4}{(x+4)^2(8x-3)^2}dx$

8. $\int \frac{x^3+1}{(2x+1)^2(x-1)^2}dx$

9. $\int \frac{x^3+9}{(2x+1)^2(x-6)^2}dx$

10. $\int \frac{x^3+8}{(x+2)^2(2x-1)^2}dx$

11. $\int \frac{x^3+2}{(x+2)^2(x-4)^2}dx$

12. $\int \frac{x^3+1}{(x+11)^2(x-4)^2}dx$

13. $\int \frac{x^3+6}{(9x+1)^2(4x-1)^2}dx$

14. $\int \frac{x^3+19}{(2x+1)^2(x-3)^2}dx$

15. $\int \frac{x^3+7}{(9x+1)^2(2x-1)^2}dx$

16. $\int \frac{x^3+6}{(4x+1)^2(2x-3)^2}dx$

17. $\int \frac{x^3+15}{(6x+1)^2(x-1)^2}dx$

18. $\int \frac{x^3+3}{(x+16)^2(4x-1)^2}dx$

19. $\int \frac{x^3+1}{(8x+1)^2(6x-1)^2}dx$

20. $\int \frac{x^3+5}{(11x+1)^2(3x-1)^2}dx$

21. $\int \frac{x^3+1}{(x+1)^2(8x-1)^2}dx$

22. $\int \frac{x^3+2}{(x+13)^2(9x-1)^2}dx$

23. $\int \frac{x^3+7}{(x+3)^2(2x-7)^2}dx$

24. $\int \frac{x^3+8}{(9x+1)^2(2x-1)^2}dx$

25. $\int \frac{x^3+15}{(4x+1)^2(7x-1)^2}dx$

26. $\int \frac{x^3+5}{(6x+1)^2(2x-1)^2}dx$

27. $\int \frac{x^3+15}{(x+1)^2(9x-1)^2}dx$

28. $\int \frac{x^3+13}{(4x+1)^2(5x-2)^2}dx$

29. $\int \frac{x^3+11}{(x+7)^2(x-4)^2}dx$

30. $\int \frac{x^3+5}{(x+2)^2(x-6)^2}dx$

9. Найти неопределённый интеграл

1. $\int \frac{\sqrt{3+\sqrt{2x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

2. $\int \frac{\sqrt{2+\sqrt{4x}}}{x\sqrt[5]{x^3}}dx$

3. $\int \frac{\sqrt{7+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

4. $\int \frac{\sqrt{4-2\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

5. $\int \frac{\sqrt{7+2\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

6. $\int \frac{\sqrt{5+\sqrt{x}}}{x\sqrt[5]{x^4}}dx$

7. $\int \frac{\sqrt{5-3\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

8. $\int \frac{\sqrt{11+9\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

9. $\int \frac{\sqrt{12+\sqrt{x}}}{x\sqrt[5]{x^3}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt{2+8\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

11. $\int \frac{\sqrt{1+6\sqrt{x}}}{x\sqrt[5]{x^4}}dx$

12. $\int \frac{\sqrt{2+3\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

13. $\int \frac{\sqrt{7-2\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

14. $\int \frac{\sqrt{1-5\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

15. $\int \frac{\sqrt{1+3\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

16. $\int \frac{\sqrt{7-\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

17. $\int \frac{\sqrt{5+2\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

18. $\int \frac{\sqrt{3-2\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

19. $\int \frac{\sqrt{1+11\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

20. $\int \frac{\sqrt{3+2\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

21. $\int \frac{\sqrt{4+9\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

22. $\int \frac{\sqrt{1-15\sqrt{x}}}{\sqrt[5]{x^4}}dx$

23. $\int \frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

24. $\int \frac{\sqrt{9+3\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

25. $\int \frac{\sqrt{5-12\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

26. $\int \frac{\sqrt{4-\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

27. $\int \frac{\sqrt{9-4\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{2+6\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

29. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

30. $\int \frac{\sqrt{11+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

10. Найти неопределённый интеграл

1. $\int \sin^4 x \cos 2x dx$

2. $\int \sin^4 2x \cos x dx$

3. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$

4. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$

5. $\int \sin^3 x \cos 2x dx$

6. $\int \sin^4 2x \cos^2 x dx$

7. $\int 5\sin^5 x \cos 2x dx$

8. $\int \sin^4 x 2\cos^4 x dx$

9. $\int \sin^4 x \cos \frac{x}{2} dx$

10. $\int \sin^4 x \cos \frac{x}{2} dx$

11. $\int \sin^4 2x \cos^3 8x dx$

12. $\int \sin^5 x \cos 4x dx$

13. $\int \sin^4 x \cos^2 3x dx$

14. $\int \sin^4 x \cos^2 4x dx$

15. $\int \sin^4 4x \cos 4x dx$

16. $\int \sin^4 4x \cos 6x dx$

17. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^5 9x dx$

18. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos 2x dx$

19. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$

20. $\int \sin^4 8x \cos \frac{x}{5} dx$

21. $\int \sin^4 4x \cos x dx$

22. $\int \sin^4 5x \cos x dx$

23. $\int \sin^4 3x \cos 4x dx$

24. $\int \sin^4 2x \cos^4 2x dx$

25. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

26. $\int \sin^4 4x \cos 8x dx$

27. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos x dx$

28. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} dx$

29. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos 2x dx$

30. $\int \sin^4 x \cos x dx$

11. Вычислить определённый интеграл

1. $\int_0^3 \left(3+4x^2\right)e^{4x}dx$

2. $\int_2^5 \left(8+6x^2\right)2e^{3x}dx$

3. $\int_1^4 \left(3-4x^2\right)e^{3x}dx$

4. $\int_{-3}^{-1} \left(4+9x^2\right)e^{x}dx$

5. $\int_0^3 \left(1-3x^2\right)e^{2x}dx$

6. $\int_1^4 \left(11x^2+7\right)e^{-2x}dx$

7. $\int_3^5 \left(4x^2-2\right)e^{6x}dx$

8. $\int_1^2 \left(12-4x^3\right)e^{2x}dx$

9. $\int_0^4 \left(5+2x^3\right)e^{3x}dx$

10. $\int_2^4 \left(8+12x^2\right)e^{3x}dx$

11. $\int_{-1}^1 \left(2-x^2\right)e^{x}dx$

12. $\int_5^6 \left(11+9x^2\right)4e^{3x}dx$

13. $\int_{2}^{4}\left(7-2x^{3}\right)e^{-2x}dx$

14. $\int_{2}^{3}\left(13-5x^{3}\right)e^{-x}dx$

15. $\int_{2}^{8}\left(3x^{2}-4\right)e^{5x}dx$

16. $\int_{0}^{3}\left(2+4x^{2}\right)2e^{-2x}dx$

17. $\int_{0}^{3}\left(9+7x^{2}\right)e^{4x}dx$

18. $\int_{3}^{4}\left(9x^{3}-3\right)e^{x}dx$

19. $\int_{-3}^{3}\left(5+12x^{4}\right)e^{-x}dx$

20. $\int_{0}^{5}\left(12-9x^{2}\right)e^{-3x}dx$

21. $\int_{-1}^{1}\left(8+2x^{3}\right)e^{x}dx$

22. $\int_{0}^{3}\left(7+4x^{2}\right)e^{3x}dx$

23. $\int_{-2}^{0}\left(3-7x^{2}\right)e^{\frac{x}{2}}dx$

24. $\int_{2}^{3}\left(2+10x^{3}\right)e^{-5x}dx$

25. $\int_{0}^{4}\left(4x^{2}-5\right)e^{-x}dx$

26. $\int_{2}^{5}\left(9+8x^{2}\right)e^{3x}dx$

27. $\int_{5}^{8}\left(1+9x^{2}\right)e^{6x}dx$

28. $\int_{8}^{9}\left(9+3x^{2}\right)e^{-5x}dx$

29. $\int_{0}^{3}\left(3-4x^{2}\right)e^{3x}dx$

30. $\int_{5}^{6}\left(5+2x^{3}\right)e^{-2x}dx$

12. Вычислить определённый интеграл

1. $\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sin^{5}x\,dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{4}x\,dx$

3. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} \cos^4 x dx$

4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} \cos^3 x dx$

5. $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^6 x dx$

6. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x dx$

8. $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 x dx$

9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^7 x dx$

10. $\int_{0}^{3\pi} \sin^8 x dx$

11. $\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx$

12. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^{11} x dx$

13. $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^8 x dx$

14. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$

15. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx$

16. $\int_{0}^{\pi} \sin^5 x dx$

17. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^7 x dx$

18. $\int_{0}^{3\pi} \sin^6 2x dx$

19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \frac{x}{2} dx$

20. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

21. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x dx$

22. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx$

23. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

24. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^7 x dx$

25. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^9 x dx$

26. $\int_{0}^{\pi} \sin^3 x dx$

27. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^{\frac{4}{3}} x dx$

28. $\int_{0}^{3\pi} \cos^{\frac{3}{2}} x dx$

29. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^{\frac{4}{9}} x dx$

30. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos^{\frac{1}{2}} x dx$

13. Вычислить определённый интеграл

1. $\int_{2}^{3} \frac{\sqrt{3+2\sqrt{x}}}{x^4} dx$

2. $\int_{3}^{4} \frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}}{2x^3} dx$

3. $\int_{-3}^{4} \frac{\sqrt{3+2\sqrt{x}}}{6x^3} dx$

4. $\int_{0}^{6} \frac{\sqrt{7+\sqrt{x}}}{x^3} dx$

5. $\int_{1}^{3} \frac{\sqrt{4-3\sqrt{x}}}{x^3} dx$

6. $\int_{2}^{6} \frac{\sqrt{1-5\sqrt{x}}}{x^3} dx$

7. $\int_{2}^{5} \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x^3} dx$

8. $\int_{3}^{5} \frac{\sqrt{9-5\sqrt{x}}}{x^3} dx$

9. $\int_{3}^{4} \frac{\sqrt{-1-6\sqrt{x}}}{x^3}dx$

10. $\int_{0}^{2} \frac{\sqrt{5+2\sqrt{x}}}{x^3}dx$

11. $\int_{-2}^{6} \frac{\sqrt{7+\sqrt{x}}}{x^3}dx$

12. $\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{x^3}dx$

13. $\int_{1.5}^{2} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^3}dx$

14. $\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-9\sqrt{x}}}{x^3}dx$

15. $\int_{-1}^{3} \frac{\sqrt{7-\sqrt{x}}}{x^3}dx$

16. $\int_{1}^{5} \frac{-\sqrt{3-3\sqrt{x}}}{x^3}dx$

17. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-3}}{x^3}dx$

18. $\int_{7}^{8} \frac{\sqrt{5\sqrt{x}-6}}{x^3}dx$

19. $\int_{2.5}^{4} \frac{\sqrt{2\sqrt{x}-1}}{x^3}dx$

20. $\int_{-3}^{4.5} \frac{\sqrt{12+5\sqrt{x}}}{x^3}dx$

21. $\int_{3.5}^{4.5} \frac{\sqrt{7\sqrt{x}-2}}{x^3}dx$

22. $\int_{2}^{6} \frac{\sqrt{5-11\sqrt{x}}}{8x^3}dx$

23. $\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{5+\sqrt{x}}}{x^3}dx$

24. $\int_{-2}^{3} \frac{\sqrt{13+\sqrt{x}}}{x^3}dx$

25. $\int_{-3}^{3} \frac{\sqrt{-11+\sqrt{x}}}{x^4}dx$

26. $\int_{6}^{7} \frac{\sqrt{14+\sqrt{x}}}{x^3}dx$

27. $\int_{9}^{10} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-12}}{x^3}dx$

28. $\int_{-4}^{3} \frac{\sqrt{13\sqrt{x}-1}}{x^3}dx$

29. $\int_{-6}^{6} \frac{\sqrt{8+6\sqrt{x}}}{x^3}dx$

30. $\int_{3}^{4} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^3}dx$

14. Вычислить определённый интеграл

1. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{(\operatorname{ctg} x + 3)\sin 3x}$

2. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x - 4)\sin x}$

3. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{(\operatorname{ctg} 2x + 5)\cos 2x}$

4. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x - 6)\sin 4x}$

5. $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x - 8)\sin 4x}$

6. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{ctg} 2x - 9)\sin 4x}$

7. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{ctg} x + 3)\cos 4x}$

8. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 6)\cos 2x}$

9. $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{ctg} x - 8)\cos 4x}$

10. $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x + 4)\cos 3x}$

11. $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/3} \frac{dx}{(2\operatorname{ctg} x + 3)\sin 2x}$

12. $\int\limits_{\pi/4}^{4\pi/3} \frac{dx}{(4 - 5\operatorname{tg} x)\sin 2x}$

13. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{(5 - 7\operatorname{tg} x)\cos x}$

14. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x - 11)\sin 4x}$

15. $\int\limits_{-3\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{ctg} 2x + 6)\cos 2x}$

16. $\int\limits_{\pi/4}^{2\pi/3} \frac{dx}{(4 - \operatorname{ctg} 2x)\sin 4x}$

17. $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x - 16)\cos 8x}$

18. $\int\limits_{\pi/8}^{2\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{ctg} x - 14)\sin x}$

19. $\int\limits_{-3\pi/4}^{\pi/6} \frac{dx}{(\operatorname{ctg} x + 13)\sin 3x}$

20. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{tg} 2x + 12)\cos 2x}$

21. $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/3} \frac{dx}{(9 - 2\operatorname{tg} x)\sin x}$

22. $\int\limits_{-\pi/4}^{2\pi/3} \frac{dx}{(5\operatorname{tg} x - 3)\cos 4x}$

23. $\int\limits_{\pi/4}^{4\pi/3} \frac{dx}{(5\operatorname{tg} x - 12)\sin 2x}$

24. $\int\limits_{-\pi/8}^{\pi/3} \frac{dx}{(8\operatorname{tg} x - 14)\sin 4x}$

25. $\int\limits_{-3\pi/4}^{\pi/6} \frac{dx}{(7\operatorname{ctg} x + 4)\sin 6x}$

26. $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/2} \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg} x + 4\right)\sin 2x}$

27. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{(6\operatorname{tg} 2x - 11)\sin 2x}$

28. $\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{dx}{(3\operatorname{ctg} x - 2)\sin 4x}$

29. $\int\limits_{-\pi/4}^{2\pi/3} \frac{dx}{(7\operatorname{tg} x - 11)\sin 3x}$

30. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 4)\sin 2x}$

15. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость).

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}$

2. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln 2x dx}{x}$

3. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)x^2}$

4. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$

5. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

6. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$

7. $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

8. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

9. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x dx}{(2+x)^3}$

10. $\int\limits_{0}^{+\infty} x \sin x dx$

11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 1}$

12. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

13. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$

14. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

15. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctgxdx}}{x^2}$

16. $\int_{0}^{+\infty} x\cos x dx$

17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2 dx}{x^3+1}$

18. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+1}$

19. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

20. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^3+1}$

21. $\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln 3x dx}{3x}$

22. $\int_{0}^{+\infty} e^{2x} dx$

23. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$

24. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$

25. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-8x+1}$

26. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,2\,\mathrm{xdx}}{x^2}$

27. $\int_{0}^{+\infty} x\cos 2x dx$

28. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x-1}$

29. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x-1}$

30. $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)x^2}$

16. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость).

1. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$

3. $\int_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

4. $\int_{0}^{1} x\ln x dx$

5. $\int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $\quad (a<b)$

6. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

7. $\int_{3}^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$

8. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$

9. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$

10. $\int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$

11. $\int_{3}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-3}}$

12. $\int_{0}^{1} x\ln 2x dx$

13. $\int_{1}^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$

14. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}$

15. $\int_{0}^{2} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^4}}$

16. $\int_{4}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-4}}$

17. $\int_{3}^{6} \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(6-x)}}$

18. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{2\sqrt{\ln x}}$

19. $\int_{2}^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}$

20. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{4-x^2}}$

21. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(9-x)\sqrt{1-x^2}}$

22. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln 2x}}$

23. $\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{16-x^4}}$

24. $\int_{5}^{6} \frac{xdx}{\sqrt{x-5}}$

25. $\int\limits_{-3}^{3}\frac{dx}{(3-x)\sqrt{9-x^2}}$

26. $\int\limits_{2}^{6}\frac{xdx}{\sqrt{x-2}}$

27. $\int\limits_{2}^{5}\frac{x^2dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}$

28. $\int\limits_{1}^{3}\frac{x^2dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$

29. $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{(3-x)\sqrt{4-x^2}}$

30. $\int\limits_{-2}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}$

17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

1. $y=(x+5)^2, \quad y=3x-5$
2. $y=(x-5)^2, \quad y=x+5$
3. $y=(2x-7)^2, \quad y=x-5$
4. $y=(x-2)^2, \quad y=5x-1$
5. $y=(x+5)^2, \quad y=x+5$
6. $y=(x+3)^2, \quad y=x-3$
7. $y=(2x-5)^2, \quad y=2x-5$
8. $y=(x-8)^2, \quad y=x-1$
9. $y=(3x-5)^2, \quad y=3x+5$
10. $y=(x+15)^2, \quad y=x-15$
11. $y=(2x-5)^2, \quad y=5x-15$
12. $y=(2x+3)^2, \quad y=3x-1$
13. $y=(x-3)^2, \quad y=x+5$
14. $y=(6x-5)^2, \quad y=7x+15$
15. $y=(x-7)^2, \quad y=2x+11$
16. $y=(5x-1)^2, \quad y=x+5$
17. $y=(7x-5)^2, \quad y=x+7$
18. $y=(6x-5)^2, \quad y=x-1$
19. $y=(8x-5)^2, \quad y=3x-1$
20. $y=(x-7)^2, \quad y=3x+5$
21. $y=(x+5)^2, \quad y=x+15$
22. $y=(x-5)^2, \quad y=3x+11$

23. $y=(x-15)^2, \quad y=3x+10$

24. $y=(3x+5)^2, \quad y=x-13$

25. $y=(7x+15)^2, \quad y=2x-5$

26. $y=(2x-5)^2, \quad y=x-1$

27. $y=(x+2)^2, \quad y=3x-1$

28. $y=(x+14)^2, \quad y=3x-7$

29. $y=(5x-3)^2, \quad y=3x+15$

30. $y=(7x-15)^2, \quad y=3x+1$

18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций, заданных параметрически

1. $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=6(t-\sin t) \\ y=4(1+\cos t) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=4(1-\sin t) \\ y=\dfrac{4}{5}(t-\cos t) \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=5(t+\sin t) \\ y=7(1-\cos t) \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}(t-\sin t) \\ y=4(1+\cos t) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=9(t+\sin t) \\ y=4\left(1-\dfrac{1}{2}\cos t\right) \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=4(t-2\sin t) \\ y=7(1+\cos t) \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=8(t+\sin t) \\ y=4(1+\cos t) \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=5(t-2\sin t) \\ y=4(1+\cos t) \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=4(1+\sin t) \\ y=2(t-\cos t) \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=4(t+\sin t) \\ y=5(1-2\cos t) \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=4(t-2\sin t) \\ y=3(1+\cos t) \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 5(t + 2\sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 7\left(\dfrac{1}{2} + \cos t\right) \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 4(1 + 4\cos t) \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(t - 2\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 4(t - 2\sin t) \\ y = \dfrac{1}{2}(1 + \cos t) \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 3(1 + \sin t) \\ y = \dfrac{1}{2}(t - \cos t) \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = 2(1 + \cos t) \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = 3(t - 3\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = 3\left(1 - \dfrac{1}{2}\cos t\right) \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}(1 + \sin t) \\ y = 4(t - \cos t) \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = 3(1 - 2\cos t) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(t - 2\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 2(t + \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 8(1 + \cos t) \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 4(1 - 2\sin t) \\ y = 4(t + \cos t) \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 7(1 + \cos t) \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = 8(t + 2\sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \dfrac{9}{2}(t - \sin t) \\ y = 2(1 - 2\cos t) \end{cases}$

19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах

1. $r = \frac{1}{3}\cos 3\varphi$
2. $r = \cos\frac{1}{2}\varphi$
3. $r = \sin 3\varphi$
4. $r = -\sin 2\varphi$
5. $r = -\cos 3\varphi$
6. $r = \cos 4\varphi$
7. $r = \frac{1}{2}\sin(-3\varphi)$
8. $r = 2\sin\frac{3}{4}\varphi$
9. $r = 2\cos 5\varphi$
10. $r = -3\cos\varphi$
11. $r = \pi\sin 3\varphi$
12. $r = 4\sin\varphi$
13. $r = \cos 4\varphi$
14. $r = -\sqrt{\pi}\cos 3\varphi$
15. $r = 7\sin 2\varphi$
16. $r = 2\sin 7\varphi$
17. $r = 3\cos 6\varphi$
18. $r = -2\cos 8\varphi$
19. $r = \frac{1}{4}\cos 5\varphi$
20. $r = \frac{1}{2}\cos 7\varphi$
21. $r = 4\sin 3\varphi$
22. $r = 3\sin 5\varphi$
23. $r = -2\cos 4\varphi$
24. $r = 6\cos 3\varphi$
25. $r = -3\sin 7\varphi$
26. $r = 2\sin 9\varphi$
27. $r = 5\cos 6\varphi$
28. $r = 6\cos 8\varphi$
29. $r = -3\sin 7\varphi$
30. $r = \sin 8\varphi$

20. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат

1. $y=2\ln 3x, \quad \sqrt{6}\le x\le\sqrt{7}$

2. $y=-5\ln 3x, \quad \sqrt{2}\le x\le\sqrt{4}$

3. $y=\ln 5x, \quad \sqrt{2}\le x\le\sqrt{7}$

4. $y=9\ln 2x, \quad \sqrt{7}\le x\le\sqrt{9}$

5. $y=-12\ln 5x, \quad \sqrt{8}\le x\le\sqrt{9}$

6. $y=10\ln 7x, \quad \sqrt{4}\le x\le\sqrt{10}$

7. $y=11\ln 5x, \quad \sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}$

8. $y=6\ln 12x, \quad \sqrt{4}\le x\le\sqrt{8}$

9. $y=3\ln x, \quad \sqrt{8}\le x\le\sqrt{9}$

10. $y=-12\ln 10x, \quad \sqrt{14}\le x\le\sqrt{16}$

11. $y=-3\ln 8x, \quad \sqrt{5}\le x\le\sqrt{9}$

12. $y=-8\ln 7x, \quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{9}$

13. $y=2\ln 15x, \quad \sqrt{10}\le x\le\sqrt{13}$

14. $y=-14\ln 5x, \quad \sqrt{8}\le x\le\sqrt{12}$

15. $y=-7\ln 2x, \quad \sqrt{10}\le x\le\sqrt{13}$

16. $y=9\ln 10x, \quad \sqrt{1}\le x\le\sqrt{3}$

17. $y=8\ln x, \quad \sqrt{15}\le x\le\sqrt{17}$

18. $y=-3\ln 14x, \quad \sqrt{24}\le x\le\sqrt{26}$

19. $y=-2\ln 5x, \quad \sqrt{14}\le x\le\sqrt{19}$

20. $y=-4\ln 10x, \quad \sqrt{7}\le x\le\sqrt{8}$

21. $y=9\ln 3x, \quad \sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}$

22. $y=8\ln x, \quad \sqrt{9}\le x\le\sqrt{11}$

23. $y=-2\ln 7x, \quad \sqrt{13}\le x\le\sqrt{15}$

24. $y=-7\ln 2x, \quad \sqrt{5}\le x\le\sqrt{7}$

25. $y=-3\ln 5x, \quad \sqrt{9}\le x\le\sqrt{17}$

26. $y=-17\ln 2x, \quad \sqrt{16}\le x\le\sqrt{20}$

27. $y=-4\ln 15x, \quad \sqrt{20}\le x\le\sqrt{21}$

28. $y=-9\ln 10x, \quad \sqrt{6}\le x\le\sqrt{10}$

29. $y=3\ln 4x, \quad \sqrt{4}\le x\le\sqrt{6}$

30. $y=-13\ln 24x, \quad \sqrt{21}\le x\le\sqrt{25}$

21. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически

1. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}(t-\sin t) \\ y=4(1+\cos t) \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=8(t+\sin t) \\ y=4(1+\cos t) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 9(t + \sin t) \\ y = 4\left(1 - \frac{1}{2}\cos t\right) \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 5(t + \sin t) \\ y = 7(1 - \cos t) \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = 4(1 - \sin t) \\ y = \frac{4}{5}(t - \cos t) \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = 4(t - 2\sin t) \\ y = 7(1 + \cos t) \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 7\left(\frac{1}{2} + \cos t\right) \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = 5(t + 2\sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = 5(1 - 2\cos t) \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = 4(t - 2\sin t) \\ y = 3(1 + \cos t) \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 4(1 + \sin t) \\ y = 2(t - \cos t) \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 5(t - 2\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = 4(t - 2\sin t) \\ y = \frac{1}{2}(1 + \cos t) \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = 3(1 + \sin t) \\ y = \frac{1}{2}(t - \cos t) \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 4(1 + 4\cos t) \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 3(t - 3\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = 3\left(1 - \frac{1}{2}\cos t\right) \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(t - 2\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = 2(1 + \cos t) \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = 1\frac{1}{2}(1 + \sin t) \\ y = 4(t - \cos t) \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(t - 2\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = \dfrac{13}{2}(1 - 2\cos t) \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 7(1 + \cos t) \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 8(t + 2\sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 4(1 - 2\sin t) \\ y = 4(t + \cos t) \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \dfrac{9}{2}(t - \sin t) \\ y = 2(1 - 2\cos t) \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 8(1 + \cos t) \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = 2(t + \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$

22. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями в полярных координатах

1. $r = 5e^{2\varphi/5}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

2. $r = e^{2\varphi/5}, \quad -\pi/3 \le \varphi \le \pi/4$

3. $r = 5e^{2\varphi/4}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$

4. $r = 2e^{\varphi/5}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/4$

5. $r = 4e^{3\varphi/5}, \quad \pi/4 \le \varphi \le \pi/2$

6. $r = 5e^{2\varphi/7}, \quad -\pi/3 \le \varphi \le \pi/3$

7. $r = 6e^{4\varphi/5}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$

8. $r = 6e^{2\varphi/3}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/3$

9. $r = 7e^{\varphi/5}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

10. $r = 5e^{2\varphi/5}, \quad -\pi/3 \le \varphi \le \pi$

11. $r = 3e^{2\varphi/4}, \quad -\pi/6 \le \varphi \le \pi/2$

12. $r = e^{2\varphi/7}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

13. $r = 5e^{\varphi/2}, \quad \pi/4 \le \varphi \le \pi/3$

14. $r = 3e^{\varphi/3}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

15. $r = 2e^{3\varphi/5}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/3$

16. $r = 4e^{2\varphi/3}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

17. $r = 5e^{\varphi/2}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$

18. $r = 4e^{2\varphi/7}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2$

19. $r = 5e^{3\varphi/5}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le 0$

20. $r = 8e^{4\varphi/5}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

21. $r = 7e^{3\varphi/5}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2$

22. $r = 6e^{\varphi/5}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

23. $r = 4e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le 0$

24. $r = 3e^{4\varphi/7}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

25. $r = 4e^{3\varphi/5}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

26. $r = 2e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

27. $r = 5e^{2\varphi/7}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

28. $r = 5e^{\varphi/2}, \quad -\pi/3 \le \varphi \le \pi/3$

29. $r = e^{2\varphi/7}, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/3$

30. $r = 3e^{2\varphi/5}, \quad -\pi/3 \le \varphi \le \pi/2$

23. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций относительно оси абсцисс

1. $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$

2. $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 + 3$

3. $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$

4. $y = x^2 + 2, y = -x^2 + 3$

5. $y = \sin x$, $-\pi \le x \le \pi$

6. $y = -x^2 + 3$, $y = 3x^2 - 2$

7. $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$

8. $y = -x^2 - 3$, $y = 2x^2 - 5$

9. $y = \sin 2x, -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi$

10. $y = 2x^2 - 1$, $y = -x^2 + 8$

11. $y = \sin x$, $-\pi \le x \le 0$

12. $y = 2x^2 - 5$, $y = -2x^2 + 5$

13. $y = \sin x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

14. $y = e^x$, $y = -x^2 + 3$,

15. $y = \sin 2x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

16. $y = e^{2x}$, $y = -x^2 + 8$

17. $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$

18. $y = 3^{2x}$, $y = -x^2 + 4$,

19. $y=\sin x$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$

20. $y=e^{3x}$, $y=-2x^2+9$,

21. $y=\cos x$, $0\le x\le \pi$

22. $y=2^x-1$, $y=-x^2+2$

23. $y=\sin x$, $0\le x\le \pi$

24. $y=3^x+1$, $y=-x^2+8$,

25. $y=\cos x$, $0\le x\le \pi$

26. $y=e^x$, $y=-x^2+8$

27. $y=\sin x$, $0\le x\le \pi$

28. $y=2^x$, $y=-2x^2+7$,

29. $y=\sin x$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$

30. $y=5^x-2$, $y=-x^2+3$

24. Вычислить площади поверхностей, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций относительно оси абсцисс

1. $y=\sin x$, $y=\sin 3x$, $0\le x\le \pi$

2. $y=x^2+1$, $y=-5x^2+6$

3. $y=\cos x$, $y=\cos 3x$, $0\le x\le \pi$

4. $y=x^2+2$, $y=-x^2+8$

5. $y=\sin x$, $y=\cos 2x$, $-\pi\le x\le \pi$

6. $y=-x^2+3$, $y=3x^2-2$

7. $y=\cos x$, $y=\sin 3x$, $0\le x\le \pi$

8. $y=-x^2-3$, $y=x^2-6$

9. $y=\sin 2x$, $y=\cos 3x$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$

10. $y=2x^2-1$, $y=-x^2+8$

11. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $-\pi\le x\le 0$

12. $y=2x^2-5$, $y=-2x^2+5$

13. $y=\sin x$, $y=\cos 3x$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$

14. $y=e^x$, $y=-x^2+3$,

15. $y=\sin 2x$, $y=\cos x$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$

16. $y=e^{2x}$, $y=-x^2+8$

17. $y=\sin x$, $y=\cos 3x$, $0\le x\le \pi$

18. $y=3^{2x}$, $y=-x^2+4$,

19. $y=\sin x$, $y=\cos 3x$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$

20. $y=e^{3x}$, $y=-2x^2+9$,

21. $y=\cos x$, $y=\sin 3x$, $0\le x\le \pi$

22. $y=2^x-1$, $y=-x^2+2$

23. $y=\sin x$, $y=\sin 4x$, $0\le x\le \pi$

24. $y=3^x+1$, $y=-x^2+8$,

25. $y=\cos x$, $y=\sin 3x$, $0\le x\le \pi$

26. $y=e^x$, $y=-x^2+8$

27. $y=\sin x$, $y=\cos 3x$, $0\le x\le \pi$

28. $y=2^x$, $y=-2x^2+7$,

29. $y=\sin x$, $y=\sin 2x$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$

30. $y=5^x-2$, $y=-x^2+3$

25. Вычислить площади поверхностей, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций относительно оси абсцисс.

1. $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=4(1+\cos t) \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=2(t+\sin t) \\ y=4(1+\cos t) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=9(t+\sin t) \\ y=4\left(1-\frac{1}{2}\cos t\right) \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=5(t+\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=2(1-\sin t) \\ y=\frac{4}{5}(t-\cos t) \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=4(t-2\sin t) \\ y=2(1+\cos t) \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=3(1+\cos t) \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=7\left(\frac{1}{4}+\cos t\right) \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=5(t-3\sin t) \\ y=4(1+\cos t) \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = 4(t - 2\sin t) \\ y = 3(1 + \cos t) \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 4(1 + \sin t) \\ y = 2(t - \cos t) \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 5(t - 2\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = 4(t - 2\sin t) \\ y = \frac{1}{2}(1 + \cos t) \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = 3(1 + \sin t) \\ y = \frac{1}{2}(t - \cos t) \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 4(1 + 4\cos t) \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 3(t - 3\sin t) \\ y = 2(1 + \cos t) \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = 3\left(1 - \frac{1}{2}\cos t\right) \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(t - 3\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = 4(t + 2\sin t) \\ y = 2(1 + \cos t) \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = 1\frac{1}{2}(1 + \sin t) \\ y = 4(t - \cos t) \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(t - 2\sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = 4(t + \sin t) \\ y = \frac{13}{2}(1 - 2\cos t) \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 7(1 + \cos t) \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 12(t + 2\sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 5(1 - 2\sin t) \\ y = 4(t + \cos t) \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \frac{9}{2}(t - \sin t) \\ y = 2(1 - 2\cos t) \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 8(1 + \cos t) \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = 3(t + \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977.
2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Зорич В.А. Математический анализ.– М.: Наука, 1981.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.– М.: Высшая школа, 1981.
5. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1977.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.