МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В.Ф. УТКИНА

Ю.С. КОСТРОВА, Л.С. РЕВКОВА, И.В. БОДРОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И БИОХИМИЧЕСКОЙ ИНЖЕНЕРИИ. ПРАКТИКУМ

Рязань 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

Ю.С. КОСТРОВА, Л.С. РЕВКОВА, И.В. БОДРОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И БИОХИМИЧЕСКОЙ ИНЖЕНЕРИИ. ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

РЕКОМЕНДОВАНО
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИМ СОВЕТОМ РГРТУ
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ПОДГОТОВКИ
11.03.03 «КОНСТРУИРОВАНИЕ И ТЕХНОЛОГИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ»,
11.03.04 «ЭЛЕКТРОНИКА И НАНОЭЛЕКТРОНИКА»,
18.03.01 «ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ»,
12.03.04 «БИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ»
(КВАЛИФИКАЦИЯ «БАКАЛАВР»)

Рязань 2022

УДК 517.912

Дифференциальные уравнения в задачах электротехники и биохимической инженерии. Практикум: учеб. пособие / Ю.С. Кострова, Л.С. Ревкова, И.В. Бодрова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. - Рязань, 2022. – 100 с.

В пособии приводится большое количество задач с подробным решением и задач для самостоятельной работы студентов по теме: «Дифференциальные уравнения» Представленные в пособии задачи позволяют сформировать у студентов представление о построении дифференциальных уравнений реальных химических, биологических, электротехнических процессов, а так же отработать навыки их решения и интерпретации.

Предназначено для студентов направлений 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 18.03.01 «Химическая технология», 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», а также для студентов всех направлений подготовки при изучении дифференциальных уравнений.

Табл. 1. Ил. 38. Библиогр.: 8 назв.

Математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения первого порядка, линейные дифференциальные уравнения второго порядка, системы дифференциальных уравнений

Печатается по решению научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензенты: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский), кафедра электронных приборов Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (зав. кафедрой докт. физ.-мат. наук, проф. М.В. Чиркин), кафедра математики РГУ имени С.А. Есенина (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Ю. Лискина)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный этап развития общества и производства предъявляют к специалистам технического профиля новые требования. Такие требования предполагают, что основной акцент делается на формирование компетенций, позволяющих решать профессиональные задачи. Особое значение приобретает знание математических приемов и методов, применяемых при решении дифференциальных уравнений, представляющих собой мощный инструмент для исследования разного рода прикладных и технических проблем. Они дают возможность решать многие вопросы физики, сопротивления материалов, химии, технологии производств, биологии, медицины, биоинженерии.

Предлагаемое пособие посвящено темам: «Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка», «Дифференциальные уравнения высших порядков», «Линейные дифференциальные уравнения», «Системы дифференциальных уравнений». Каждый раздел представлен значительным количеством примеров, в которых подробно и последовательно описывается составление и решение дифференциальных уравнений реальных химических, биологических, электротехнических процессов. Рассматриваются задачи различной степени трудности, что позволяет проиллюстрировать особенности использования математического аппарата для решения проблем, рассматриваемых в дальнейшем в рамках специальных дисциплин. Задачи подобраны таким образом, чтобы оказать студентам помощь в усвоении теоретических вопросов, а также в овладении навыками составления и решения дифференциальных уравнений по условиям инженерно-технических задач, возникающих в процессе производства, либо научной деятельности.

Учебное пособие предназначено для студентов электротехнических, химических и биоинженерных направлений подготовки. Оно может быть использовано на практических занятиях, а так же для самостоятельной работы студентов.

Авторский коллектив выражает благодарность преподавательскому составу кафедры электронных приборов, в особенности к.т.н., доценту Серебрякову Андрею Евгеньевичу и к.т.н., доценту Базылеву Виктору Кузьмичу, за ценные замечания и предложения, высказанные в процессе подготовки данного учебного пособия.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения – раздел математики, тесно связанный с другими областями знаний. Они позволяют расширить представления ученых об изучаемом процессе, выявить закономерность, которой подчиняется исследуемое явление и выразить ее в математической форме.

В данной пособии рассмотрены практические аспекты теории обыкновенных дифференциальных уравнений. С теоретическими сведениями, понятиями и теоремами теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также основными типами дифференциальных уравнений, системами дифференциальных уравнений и методами их решения можно ознакомиться в учебной литературе [1],[2].

При решении большинства практических задач посредством теории обыкновенных дифференциальных уравнений придерживаются следующих основных этапов:

1. Анализ представленных в условии задачи экспериментальных данных (в табличном, графическом или аналитическом виде). При необходимости, выполнение чертежа, поясняющего суть рассматриваемого в задаче процесса или явления.

2. Перевод задачи на математический язык, составление дифференциального уравнения рассматриваемого процесса. Указание дополнительных условий (начальных или граничных), которым должно удовлетворять решение.

3. Анализ дифференциального уравнения, его решение с учетом дополнительных условий.

4. Нахождение закона рассматриваемого процесса или явления. Его сравнение с реальными результатами экспериментов.

5. Уточнение найденного закона.

6. Анализ полученного результата, определение неизвестной информации о рассматриваемом в задаче процессе или явлении.

Конечно, при решении практических задач большое значение имеют навыки, которые приобретаются с опытом, кроме этого, требуются понимание сути рассматриваемых процессов и изобретательность.

Широкий спектр разнообразных процессов можно смоделировать с помощью дифференциальных уравнений. Например, в биологии такие уравнения дают представление о динамике численности живых организмов — о том, как отдельные индивидуумы и популяции меняются с течением времени.

Рассмотрим, например, процесс роста популяции дрожжей и проведем его анализ с помощью теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дрожжи – это одноклеточные организмы, которые используются для различных целей. Дрожжи широко применяются в пищевой промышленности в частности, в производстве ферментов и пищевых добавок, при приготовлении хлеба, пива, вина, кваса, для производства крепкого алкоголя. Дрожжи применяют для очистки от нефтяных загрязнений,

В таблице 1 собраны лабораторные данные о размере колонии дрожжей, выращенных в жидкой культуре (в количестве особей на мл культуры), в разные моменты времени.

Таблица 1

Время, в часах	Размер популяции, 10^6 особ./мл	Время, в часах	Размер популяции, 10^6 особ./мл	Время, в часах	Размер популяции, 10^6 особ./мл
0	0,2	13	114	26	200
1	0,33	14	158	27	190
2	0,5	15	166	28	210
3	1,1	16	190	29	210
4	1,4	17	194	30	213
5	3,1	18	190	31	220
6	4	19	208	32	210
7	8,9	20	190	33	200
8	10,2	21	210	34	212
9	25,2	22	200	35	200
10	27,1	23	215	36	206
11	54,8	24	220	37	210
12	74	25	210	38	215

Рисунок 1 представляет собой точечную диаграмму представленных в таблице данных.

Из таблицы 1 видно, что численность популяции с течением времени не остается постоянной и зависит от интенсивности двух процессов – рождаемости и смертности.

Как смоделировать такой процесс? Зададимся целью установить закон изменения численности рассматриваемой популяции от времени. На процессы рождаемости и смертности влияют многие факторы, а именно: продолжительность жизни, недостаток пищи, воздействие со стороны других популяций.

Предположим, что каждая отдельная дрожжевая клетка размножается с постоянной скоростью. Таким образом, осуществляется переход от реальной колонии живых организмов к абстрактной популяции.

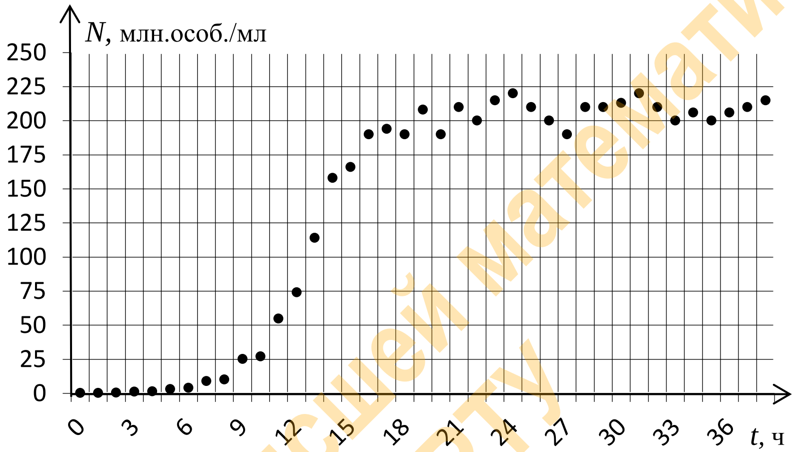


Рис. 1. Диаграмма численности колонии дрожжей

Обозначим за α – коэффициент рождаемости, $ч^{-1}$, тогда в момент времени t общая рождаемость равна $\alpha \cdot N(t)$, где $N(t)$ – количество дрожжевых клеток в момент времени t рис.2).

Аналогично, предположим, что общая скорость гибели дрожжевых клеток в момент времени t равна $\beta \cdot N(t)$, где β – это постоянная смертности на одну отдельную клетку, $ч^{-1}$.

Тогда скорость изменения числа дрожжевых клеток в момент времени t: $\alpha N(t) - \beta N(t)$. То есть:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t) \qquad (1)$$

Обозначим $\alpha - \beta = r$, тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \qquad (2),$$

где r - коэффициент, отражающий темпы роста дрожжевых клеток, $ч^{-1}$.

Рис. 2. Процесс изменения численности популяции дрожжей

Уравнение (2) содержит неизвестную функцию $N(t)$, ее производную $\frac{dN(t)}{dt}$, поэтому является дифференциальным уравнением и, в то же время, одной из простейших моделей роста численности популяции дрожжей.

Посмотрим, насколько точно уравнение (2) предсказывает изменения размера популяции дрожжей с течением времени.

Обратим внимание, что если $r > 0$, то есть уровень рождаемости больше чем уровень смертности, то $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) > 0$ и тогда можно утверждать, что популяция дрожжей растет. И наоборот, если $r < 0$, то популяция дрожжей уменьшается.

В результате решения дифференциального уравнения необходимо найти явную функцию $N(t)$, которая точно бы показывала, какой будет численность дрожжей в любой момент времени. Данная функция $N(t)$ называется общим решением дифференциального уравнения и при подстановке в уравнение (2) дает верное равенство.

Уравнение (2) представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения, получим:

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = rdt,\ \int \frac{dN(t)}{N(t)} = r\int dt,\ \ln N(t) = rt + \ln C,$$

$$\ln \frac{N(t)}{C} = rt,\ \frac{N(t)}{C} = e^{rt},\ N(t) = Ce^{rt},$$

где C - произвольная константа.

Функция $N(t) = Ce^{rt}$ является общим решением уравнения (2), причем единственным.

Понятно, что уравнение (2) не отражает всех особенностей графика на рисунке 1.

Для нахождения частного решения вычислим соответствующие C и r, исходя из данных, представленных в таблице 1.

Если $t = 0$, то $N(0) = Ce^{r\cdot 0} = C$, т.е. C - численность дрожжевых клеток в начальный момент времени. В нашем случае $N(0) = 0,2$. Следовательно, $C = 0,2$.

Вычислим r.

$$N(1) = 0,2e^{r\cdot 1} = 0,33;\ e^{r} = 1,65;\ r = \ln 1,65 \approx 0,5.$$

Получаем частное решение уравнения (2): $N(t) = 0,2e^{0,5t}$.

Таким образом, численность колонии дрожжей изменяется с течением времени по закону: $N(t) = 0,2e^{0,5r}$.

На рисунке 3 показан график кривой $N(t) = 0,2e^{0,5t}$ вместе с точечной диаграммой данных из таблицы 1, отсюда видно, что полученная модель рассматриваемого процесса $N(t) = 0,2e^{0,5t}$ описывает точные прогнозы только приблизительно в течение первых 13 часов.

Это несоответствие объясняется тем, что модель строилась в предположении, что темп роста дрожжевых клеток остаётся постоянным на уровне r, независимо от численности. В действительности, по мере увеличения численности можно ожидать, что скученность и истощение ресурсов приведут к снижению темпов роста популяции.

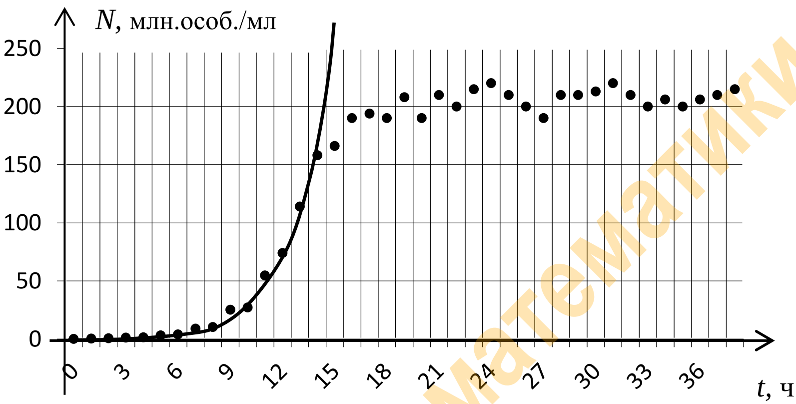


Рис. 3. Закон изменения численности колонии дрожжей.
Теоретические и эмпирические данные.

На основании данных из таблицы 1, можно показать, что скорость роста популяции дрожжей определяется следующим образом:

$$\frac{dN(t)}{dt}\frac{1}{N(t)}=0,55-0,0026N(t).$$

Тогда более точным дифференциальным уравнением для моделирования численности популяции дрожжей является уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt}=N(t)\cdot\left(0,55-0,0026N(t)\right),$$

решением которого является функция:

$$N(t)=\frac{42e^{0,55t}}{209,9+0,2e^{0,55t}}.$$

Эта функция показана на рисунке 4 вместе с данными из таблицы 1. Мы видим, что эта модель обеспечивает довольно точные прогнозы на протяжении всего периода эксперимента.

Эта новая модель дрожжей является конкретным примером более общей модели роста популяции и называется логистическим дифференциальным уравнением. Пользуясь последней формулой и зная начальную численность дрожжей, мы можем достаточно точно определить численность популяции в любой момент времени. Надо уточнить, что равенство $N(t)=\dfrac{42e^{0,55t}}{209,9+0,2e^{0,55t}}$ справедливо для искусственной экспериментальной популяции, но не будет верным для реальной популяции.

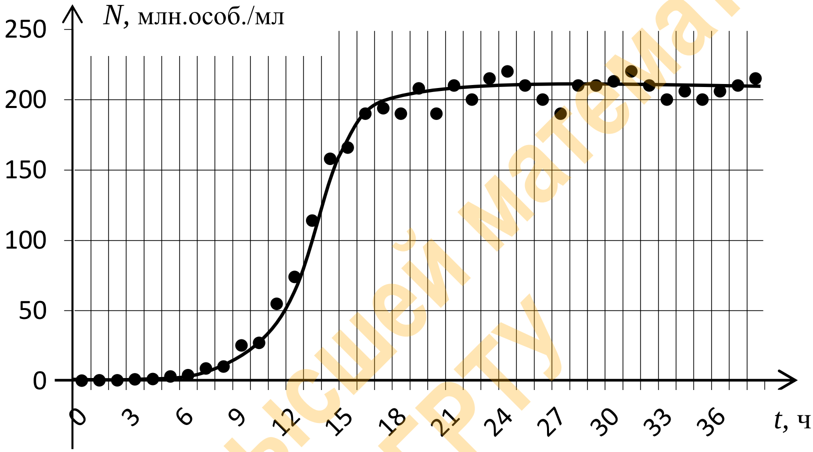


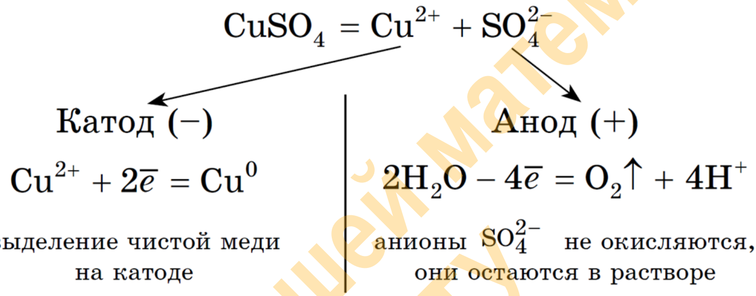
Рис. 4. Логистический закон изменения численности популяции дрожжей

Таким образом, при изучении результатов исследований различных природных процессов, решении многих задач физики и техники, химии, биологии, медицины мы приходим к построению математических моделей, основой которых являются дифференциальные уравнения. Рассмотрение разных по содержанию практических задач приводит к сходным дифференциальным уравнениям, поэтому необходимо выработать методы и приемы решения этих уравнений.

ГЛАВА 1.

УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Задача 1.1. В процессе электролиза раствора сульфата меди (II) $CuSO_4$ силу тока в цепи, в амперах, изменяют по закону $I = \dfrac{1}{t+2}$, где t – время электролиза, в часах. Определить количество меди, образовавшейся на катоде в течение двух часов.



Решение. Скорость электрохимической реакции v определяется изменением количества вещества m за единицу времени t: $v = \dfrac{dm}{dt}$.

Согласно первому закону Фарадея, масса вещества m, в граммах, выделившегося на электроде за время t, прямо пропорциональна силе тока I: $\dfrac{dm}{dt} = K \cdot I$.

$K = \dfrac{M}{F \cdot n}$ — электрохимический эквивалент вещества, г/Кл

M – молярная масса вещества, г/моль,

$F = 9{,}65 \cdot 10^4$ – постоянная Фарадея, Кл/моль

n – валентность.

Вычислим электрохимический эквивалент меди:

$$K = \frac{63,5}{9,65 \cdot 10^4 \cdot 2} = 0,33 \cdot 10^{-3}(\text{г/Кл}) = 1,2(\text{г/А} \cdot \text{ч}) .$$

Учитывая закон изменения силы тока в цепи, найдем количество меди, образовавшейся на катоде, решив дифференциальное уравнение:

$$\frac{dm}{dt} = 1,2 \cdot \frac{1}{t+2} . \tag{1.1.1}$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения (1.1.1), получим общее решение данного уравнения.

$$dm = 1,2 \cdot \frac{dt}{t+2} ,$$

$$\int dm = 1,2 \cdot \int \frac{dt}{t+2} ,$$

$$m = 1,2 \cdot \ln|t+2| + C . \tag{1.1.2}$$

В начальный момент времени масса меди на катоде равнялась нулю. Подставив начальные данные в общее решение (1.1.2), найдем C.

$$0 = 1,2 \cdot \ln|0+2| + C ,$$

$$C = -0,83 .$$

Таким образом, закон изменения массы меди, образующейся в процессе электролиза, будет иметь вид:

$$m = 1,2 \cdot \ln|t+2| - 0,83 .$$

Вычислим количество меди, образовавшейся через 2 часа.

$$m = 1,2 \cdot \ln 4 - 0,83 = 0,83(\text{г}) .$$

Ответ: 0,83 грамма меди образовалось на катоде за 2 часа.

Задача 1.2. В найденных биологических останках обнаружено содержание радиоактивного изотопа C^{14} в количестве $N = 0{,}74N_0$, где N_0 –количество радиоактивного изотопа в живом организме.

Скорость изменения содержания C^{14} с течением времени определяется формулой:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}},$$

где $T_{1/2}$ – период полураспада изотопа C^{14} (количество лет). Определить возраст останков.

Решение. Решим заданное дифференциальное уравнение, разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения.

$$\int dN = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 \int e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}} dt,$$

$$N = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 \left(-\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\right) e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}} + C = N_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}} + C,$$

В начальный момент времени $N = N_0$, тогда, C=0.

Окончательно получаем уравнение радиоактивного распада.

$$N = N_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}} \qquad (1.2.1)$$

По условию, количество радиоактивного изотопа C^{14} в останках содержится в количестве $N = 0{,}74N_0$, период полураспада изотопа C^{14} составляет 5730 лет. Подставим данные в уравнение радиоактивного распада (1.2.1) и решим его относительно t.

$$0{,}74 = e^{-1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot t}, \; t = \frac{\ln 0{,}74}{-1{,}2 \cdot 10^{-4}} = 2509 \text{ (лет)}.$$

Ответ: возраст останков составляет 2509 лет.

Задача 1.3. Скорость прироста действующего фермента во время брожения пропорциональна его количеству. Через 1 час после брожения масса фермента составила 2 г, а через 2 часа – 5 г. Найдите массу фермента до начала брожения.

Решение. Пусть m – масса действующего фермента, в граммах, t – время брожения, в часах. Тогда скорость изменения массы фермента с течением времени определяется соотношением:

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot m, \qquad (1.3.1)$$

где k - коэффициент пропорциональности, в $ч^{-1}$.

Разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения (1.3.1), получим закон изменения массы фермента в зависимости от времени.

$$\frac{dm}{m} = k \cdot dt,$$

$$\int \frac{dm}{m} = k \cdot \int dt$$

$$\ln m = k \cdot t + \ln C,$$

$$\ln \frac{m}{C} = k \cdot t,$$

$$\frac{m}{C} = e^{kt},$$

$$m = C \cdot e^{kt}. \qquad (1.3.2)$$

Найдем коэффициенты k, C, подставив начальные условия в полученное уравнение (1.3.2).

$$\begin{cases} 2 = C \cdot e^{k}, \\ 5 = C \cdot e^{2k}, \end{cases} \begin{cases} C = 2 \cdot e^{-k}, \\ 5 = 2 \cdot e^{-k} \cdot e^{2k}, \end{cases} \begin{cases} C = 2 \cdot e^{-k}, \\ 2 \cdot e^{k} = 5, \end{cases} \begin{cases} C = \dfrac{4}{5}, \\ e^{k} = \dfrac{5}{2}, \end{cases} \begin{cases} C = \dfrac{4}{5}, \\ k = \ln \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

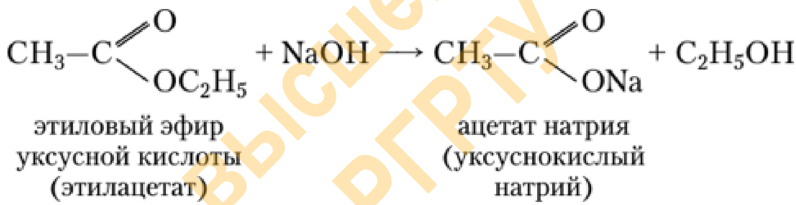
Таким образом, закон изменения массы фермента в зависимости от времени имеет вид:

$$m=\frac{4}{5}\cdot e^{\ln\frac{5}{2}t}=\frac{4}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{t}.$$

Определим массу фермента до начала брожения, т.е. в момент времени $t=0$: $m=\frac{4}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{0}=0,8(\text{г})$.

Ответ: 0,8 грамма.

Задача 1.4. В реакции омыления этилового эфира уксусной кислоты едким натром при 10^{0}C концентрации эфира и щелочи равны соответственно $a=0,025$ моль/л и $b=0,05$ моль/л. Определить время, необходимое для омыления 50% эфира, если константа скорости омыления $k=2,38\ \frac{\text{л}}{\text{моль}\cdot\text{мин}}$.



Решение. Скорость реакции омыления $\frac{dx}{dt}$ согласно закону действующих масс определяется уравнением

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x), \qquad (1.4.1)$$

где k - константа скорости омыления, $\frac{\text{л}}{\text{моль}\cdot\text{мин}}$,

x – число прореагировавших моль/л вещества (для обоих веществ одинаково),

$(a-x)$ – действующая концентрация уксусноэтилового эфира, моль/л,

$(b-x)$ – действующая концентрация гидроксида натрия, моль/л.

Разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения (1.4.1), получим общее решение.

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = kdt,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = k\int dt,$$

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x} = kt + C \text{ (если } a \neq b\text{)}. \qquad (1.4.2)$$

В начальный момент времени $t=0$ и $x=0$. Подставив начальные данные в общее решение (1.4.2), найдем *C*.

$$C = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}.$$

Таким образом, частное решение исходного дифференциального уравнения относительно t имеет вид:

$$kt = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x} - \frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a},$$

$$t = \frac{1}{k(b-a)}\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)}.$$

Найдем число прореагировавших моль вещества к моменту омыления 50% уксусноэтилового эфира:

$$x = 0,025 \cdot 0,5 = 0,0125 \text{ (моль/л)}.$$

Определим время, необходимое для омыления 50% эфира:

$$t = \frac{1}{2,38(0,05-0,025)} \ln \frac{0,025(0,05-0,0125)}{0,05(0,025-0,0125)} = 6,8 \text{ (мин)}.$$

Ответ: через 6,8 минут произойдет омыление половины уксусноэтилового эфира.

Задача 1.5. В баке находится 200 л раствора, содержащего 20 кг соли. В бак непрерывно подается вода со скоростью 5 л/мин, которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько останется соли в баке через час?

Решение. Пусть $Q(t)$ – масса соли в баке в момент времени t, кг,

$\dfrac{Q}{V}$ – концентрация соли в данном растворе, кг/л.

За dt минут из бака вытечет $5dt$ литров смеси, содержащей $\dfrac{Q}{200} \cdot 5dt$ кг соли.

Таким образом, убыль соли в растворе описывается дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$dQ = -0,025Qdt \qquad (1.5.1)$$

Знак «—» указывает на то, что количество соли в баке уменьшается.

Проинтегрировав обе части уравнения (1.5.1), получим его общее решение:

$$Q = Ce^{-0,025t}.$$

В начальный момент времени в баке имелось 20 кг соли. Тогда, $C = 20$ кг.

Таким образом, получим частное решение уравнения (1.5.1), описывающее закон изменения количества соли в баке в момент времени t:

$$Q(t) = 20e^{-0,025t}.$$

Найдем массу соли, которая останется в баке через час, т.е. при t=60 мин.

$$Q(60) = 20e^{-0{,}025\cdot 60} \approx 4{,}5 \text{ кг.}$$

Ответ: 4,5 кг.

Задача 1.6. В начальный момент времени температура тела составляла 0 °C. За 10 минут оно нагрелось до 5 °C. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 24 °C. Через сколько минут тело нагреется до 20 °C?

Решение. Скорость нагревания (или остывания) тела пропорциональна разности температуры тела и температуры окружающей среды.

Пусть T_m - температура тела, °C;

T - температура окружающей среды, °C;

t – время, мин;

k – коэффициент теплообмена, мин$^{-1}$.

Тогда скорость изменения температуры тела с течением времени описывается дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dT_m}{dt} = k(T - T_m). \tag{1.6.1}$$

Решим дифференциальное уравнение (1.6.1), разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения.

$$\int \frac{dT_m}{T - T_m} = k\int dt,$$

$$-\ln|T - T_m| = kt - \ln C,$$

$$\ln\frac{C}{|T - T_m|} = kt,$$

$$\frac{C}{|T - T_m|} = e^{kt},$$

$$T_m(t) = T - Ce^{-kt}. \qquad (1.6.2)$$

Найдем коэффициенты k, C, подставив начальные условия в полученное общее решение (1.6.2) дифференциального уравнения (1.6.1).

В начальный момент времени $t = 0$ мин и $T_m = 0^\circ$C. При $t = 10$ мин температура тела $T_m = 5^\circ$C. Температура окружающей среды $T = 24^\circ$C.

Тогда $\begin{cases} T_m(0) = 24 - Ce^{-k \cdot 0} = 0, \\ T_m(10) = 24 - Ce^{-k \cdot 10} = 5. \end{cases}$

Отсюда $C = 24,\ k = -\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{19}{24} \approx 0{,}023$.

Следовательно, закон изменения температуры тела с течением времени имеет вид: $T_m(t) = 24 - 24e^{-0{,}023t} = 24(1 - e^{-0{,}023t})$.

Определим, через какое время тело нагреется до 20°C.

$$20 = 24(1 - e^{-0{,}023t}),\ e^{-0{,}023t} = \frac{1}{6},\ 0{,}023t = -\ln\frac{1}{6},\ t \approx 78 \text{ (мин)}.$$

Ответ: через 78 мин тело нагреется до 20 °C.

Пример 1.7. В цепь последовательно включены резистор сопротивлением R=10 Ом и конденсатор емкостью C=5 мкФ, заряд которого в момент замыкания цепи равен q=4 Кл. Найти силу тока в цепи в момент ее замыкания.

Решение. Рассмотрим последовательную RC-цепь (рис.5) и выведем дифференциальное уравнение, описывающее закон изменения силы тока в ней.

Пусть $I(t)$ – сила тока в цепи, А, $q(t)$ — заряд конденсатора, Кл, в момент времени t, с.

По следствию из первого закона Кирхгофа [7, с.183-185] сила тока, протекающего через резистор и конденсатор одинакова, следовательно, $q'(t) = I(t)$.

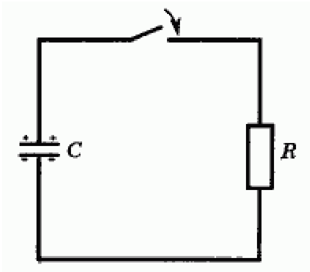


Рис. 5. Последовательная RC-цепь

Тогда по закону Ома напряжения на резисторе U_R и на конденсаторе U_C выражаются формулами [6]:

$$U_R = RI(t) = Rq'(t)\,,\; U_C = \frac{q}{C}\,.$$

Так как активные элементы цепи отсутствуют, то из второго закон Кирхгофа [7, с.183-185] следует, что

$$U_R(t) + U_C(t) = 0\,,$$

$$Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0\,. \qquad (1.7.1)$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение, разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения.

$$Rq'(t) = -\frac{1}{C}q(t),\;\; \frac{dq(t)}{q(t)} = -\frac{dt}{CR},\;\; \int\frac{dq(t)}{q(t)} = -\int\frac{dt}{CR}$$

$$\ln q(t) = -\frac{t}{CR} + \ln\tilde{C},\;\; \ln\frac{q(t)}{\tilde{C}} = -\frac{t}{CR},$$

$$q(t) = \tilde{C}e^{-\frac{t}{CR}}\,. \qquad (1.7.2)$$

С учетом исходных данных, $q(t)=\tilde{C}e^{-\frac{t}{5\cdot10^{-6}\cdot10}}=\tilde{C}e^{-5\cdot10^{5}t}$.

Найдем $\tilde{C}$: $q(0)=\tilde{C}e^{-5\cdot10^{5}\cdot0}=\tilde{C}=4$.

Тогда частное решение уравнения (7.1) примет вид:

$$q(t)=4e^{-5\cdot10^{5}t}. \qquad (1.7.3)$$

Для нахождения силы тока продифференцируем равенство (1.7.3):

$$I(t)=q'(t)=\left(4e^{-5\cdot10^{5}t}\right)'=-20\cdot10^{5}e^{-5\cdot10^{5}t}$$

Так как направление силы тока в данном случае не имеет значения, рассматриваем только его абсолютное значение. То есть, окончательно получаем закон изменения силы тока в цепи:

$$I(t)=20\cdot10^{5}e^{-5\cdot10^{5}t}$$

Найдем силу тока в момент замыкания цепи, подставив в полученное равенство $t=0$: $I(0)=20\cdot10^{5}e^{0}=2\cdot10^{6}$ А.

Ответ: $2\cdot10^{6}$ А.

Задача 1.8. Вывести закон изменения давления газа P, Па, в зависимости от высоты h, м, над уровнем моря в гравитационном поле Земли.

Решение. Рассмотрим вертикальный столб газа высотой h метров и площадью сечения S, м^2. Выделим в нем тонкий слой воздуха высотой dh метров, плотность газа ρ, кг/м^3, в котором можно считать постоянной (рис.6).

Вес выделенного объема газа будет равен:

$$F=mg=\rho gV=\rho ghS,$$

где g – ускорение свободного падения, $g=9{,}8$ м/с^2.

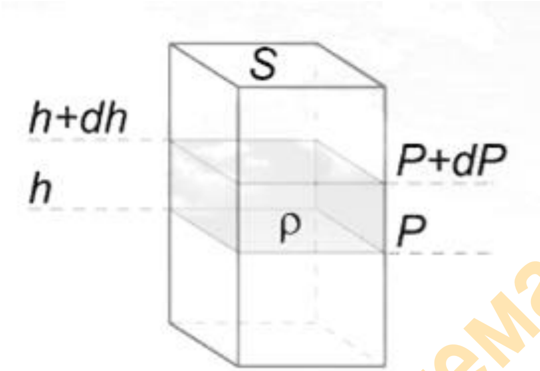


Рис.6. Вертикальный столб газа высотой h и площадью сечения S

Давление газа определяется формулой [3]:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\rho g h S}{S} = \rho g h .$$

Пусть на высоте h давление газа равно P, а на высоте $(h+dh)$ давление равно $(P+dP)$. Так как давление с увеличением высоты падает, то его приращение будет отрицательным ($dP< 0$).

Разность давлений P и $(P+dP)$ равна весу газа, заключенного в столбе высотой dh, деленной на площадь S, то есть:

$$dP = -\rho g dh .$$

Рассматривая атмосферный воздух как идеальный газ, воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона [3], чтобы выразить плотность ρ через давление P:

$$\rho = \frac{MP}{RT} ,$$

где M= 0,029кг/моль – молярная масса воздуха,
T =288,15 К – абсолютная температура,
R = 8.314Дж/(К·моль) − универсальная газовая постоянная.

Тогда $dP = -\rho g dh = -\dfrac{MP}{RT} g dh, \;\; \dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{RT} dh .$

Проинтегрировав обе части последнего уравнения, получим формулу зависимости атмосферного давления от высоты над уровнем Земли.

$$\int \frac{dP}{P} = -\int \frac{Mg}{RT} dh, \;\; \ln P = -\frac{Mg}{RT} h + \ln C,$$

$$P = Ce^{-\frac{Mg}{RT}h} \qquad (1.8.1)$$

Константа C определяется из начального условия: при $h = 0$ м, $P(0) = P_0 = 101,325$ кПа – атмосферное давление воздуха над уровнем моря.

Тогда зависимость атмосферного давления от высоты выражается формулой, которая получила название барометрической.

$$P = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h}$$

Подставив известные значения постоянных величин, получим формулу зависимости давления газа P в зависимости от высоты h над уровнем моря в гравитационном поле Земли.

$$P(h) = 101,325e^{-0,00012h}.$$

Ответ: $P(h) = 101,325e^{-0,00012h}$.

Задача 1.9. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива – m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты v после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского).

Решение. Пусть в момент времени t ракета имеет массу M(t) и движется со скоростью $\vec{v}(t)$ относительно выбранной нами инерциальной системы. Значит, импульс $\vec{p}$ системы в момент t равен $M(t)\vec{v}(t)$. Из сопла ракеты истекают продукты горения, и её масса уменьшается на dM кг в единицу времени, поэтому в момент времени $t + dt$ она будет равна $M - dMdt$, а импульс ракеты станет равным

$$\vec{p} = \left(M - dMdt\right)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right).$$

Если считать, что скорость истечения газов из ракеты относительно его сопла равна $\vec{c}$, то импульс выброшенных из ракеты газов за промежуток времени dt составит $dMdt(\vec{c} + \vec{v})$.

Приравнивая импульс системы в моменты t и t+dt, получаем:

$$M\vec{v} = \left(M - dMdt\right)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dMdt(\vec{c} + \vec{v}).$$

Раскрыв скобки и, пренебрегая произведением $dMd\vec{v}$ как бесконечно малой величиной высшего порядка, получим:

$$Md\vec{v} = -dMdt\vec{c}.$$

Направим ось ОХ по оси ракеты, совместив ее с направлением полета. В проекции на эту ось уравнение примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = -c\frac{dM}{M}.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим общее решение:

$$v(t) = -c\ln M(t) + \tilde{C}.$$

Константу $\tilde{C}$ определим из начального условия: $v(0) = 0$, $M(0) = M$.

$$v(0) = -c\ln M + \tilde{C} = 0,\ \tilde{C} = c\ln M.$$

$$v(t) = -c\ln M(t) + c\ln M,$$

$$v(t) = c\ln\frac{M}{M(t)}$$

По условию, масса ракеты без топлива m, тогда конечная скорость ракеты после сгорания топлива определяется по формуле:

$$v = c\ln\frac{M}{m}.$$

Эта формула была получена в 1903 г. К.Э. Циолковским и носит его имя. Из нее следует, что конечная скорость, приобретаемая ракетой при отсутствии внешних сил, не зависит от закона изменения массы и ограничена только отношением начальной и конечной масс ракеты. Полученная формула позволяет оценить максимальную скорость, которую может развить ракета, если предположить, что внешние силы не действуют.

Ответ: $v = c\ln\frac{M}{m}$.

Задача 1.10. Рассчитать ток стока I_C полевого транзистора с управляющим p-n-переходом [5].

Решение. Рассмотрим длинноканальный транзистор (L >> H) (Рис.7.). Будем предполагать, что канал однородный, подвижность носителей заряда μ_n не зависит от величины электрического поля, p-n–переход резкий. Из рис.7 видно, что локальная толщина канала $w = H - 2\delta$.

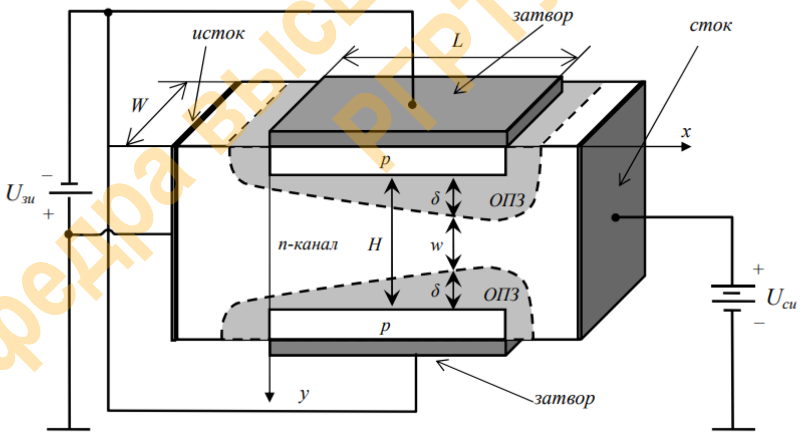


Рис.7. Структура транзистора с каналом n–типа проводимости (L – длина канала, W – ширина канала, δ — толщина ОПЗ, w – толщина канала, H — вертикальный размер кристалла)

Учитывая, что толщина области пространственного заряда (ОПЗ) $\delta=\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon(U_{СИ}(x)+U_{ЗИ})}{qN_d}}$, получим выражение для толщины канала:

$$w=H-2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon(U_{СИ}(x)+U_{ЗИ})}{qN_d}}, \qquad (1.10.1)$$

где $U_{ЗИ}$ - модуль обратного напряжения,

$U_{СИ}$ - напряжение между истоком и стоком,

ε - относительная диэлектрическая проницаемость полупроводника,

ε_0 - абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума,

N_d - концентрация легирующей примеси в канале.

При напряжении отсечки $U_{СИотс}$ канал в квазиравновесных условиях ($U_{ЗИ}=0$) перекрывается ($w=0$). Тогда из уравнения (1.10.1) находим напряжение отсечки:

$$U_{СИотс}=\frac{qN_d}{8\varepsilon\varepsilon_0}H^2. \qquad (1.10.2)$$

Из последнего равенства следует, что напряжение отсечки $U_{СИотс}$ прямо пропорционально концентрации N_d и зависит от начальной толщины канала H .

С учетом уравнений (1.10.1) и (1.10.2), получим:

$$w=H\left(1-\sqrt{\frac{U_{СИ}(x)+U_{ЗИ}}{U_{ЗИотс}}}\right).$$

Сопротивление участка сток-исток от x до $x+dx$ в открытом состоянии полевого транзистора (при $U_{ЗИ}=0$ и очень малом $U_{СИ}$) определяется шириной канала в данной точке:

$$dR(x) = \frac{\rho dx}{Wh(x)} = \frac{\rho dx}{W}\left(1 - \sqrt{\frac{U_{СИ}(x) + U_{ЗИ}}{U_{ЗИотс}}}\right), \qquad (1.10.3)$$

где $\rho = \left(q\mu_n n_0\right)^{-1}$ - удельное сопротивление канала.

На участке канала толщиной dx будет падать напряжение $dU_{СИ}(x)$:

$$dU_{СИ}(x) = I_C \cdot dR(x). \qquad (1.10.4)$$

Подставив выражение (10.3) в уравнение (10.4) получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$I_C dx = \frac{WH}{\rho}\left(1 - \sqrt{\frac{U_{СИ}(x) + U_{ЗИ}}{U_{ЗИотс}}}\right) dU_{СИ}. \qquad (1.10.5)$$

Проинтегрировав обе части уравнения, в соответствии с начальными условиями, получим:

$$I_C = \frac{W\rho}{L}\left(U_{СИ} + \frac{2}{3} \cdot \frac{U_{ЗИ}^{\frac{2}{3}} - \left(U_{СИ} + U_{ЗИ}\right)^{\frac{2}{3}}}{U_{ЗИотс}^{\frac{1}{3}}}\right).$$

С учетом того, что $R_{СИотк} = \dfrac{L}{W\rho}$ - сопротивление открытого канала, последнее выражение примет вид:

$$I_C = \frac{1}{R_{СИотк}}\left(U_{СИ} + \frac{2}{3} \cdot \frac{U_{ЗИ}^{\frac{2}{3}} - \left(U_{СИ} + U_{ЗИ}\right)^{\frac{2}{3}}}{U_{ЗИотс}^{\frac{1}{3}}}\right). \qquad (10.6)$$

При малых значениях напряжения исток-сток ($U_{СИ} << U_{ЗИ}$), ток в канале равен: $I_C = \dfrac{U_{СИ}}{R_{СИотк}}$.

Ответ: $I_C = \frac{1}{R_{СИотк}}\left(U_{СИ} + \frac{2}{3}\cdot\frac{U_{ЗИ}^{\frac{2}{3}} - \left(U_{СИ} + U_{ЗИ}\right)^{\frac{2}{3}}}{U_{ЗИотс}^{\frac{1}{3}}}\right)$. При $U_{СИ} << U_{ЗИ}$: $I_C = \frac{U_{СИ}}{R_{СИотк}}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Счетчик Гейгера, установленный вблизи радиоактивного изотопа серебра, при первом измерении зарегистрировал 5200-частиц в минуту, а через 24 часа только 300. Найдите закон изменения числа ядер серебра с течением времени при условии, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству не распавшегося вещества. Определите период полураспада изотопа.

2. При прохождении света через вещество происходит ослабление интенсивности светового потока, вследствие превращения световой энергии в другие виды энергии, т.е. происходит поглощение света веществом. Найти закон поглощения, если известно, что ослабление интенсивности пропорционально толщине слоя и интенсивности падающего излучения (закон Бугера –Ламберта – Бера).

3. Заряд $Q_0 = 10000$ Кл сообщен изолированному проводнику. Ввиду нарушения изоляции проводник теряет свой заряд со скоростью, пропорциональной заряду Q в момент времени t. За первую минуту потеря составила 100 Кл. Определить заряд проводника через 20 минут.

4. Период полураспада радия Ra^{226} составляет1600 лет. Скорость распада радия в каждый момент времени t пропорциональна его наличной массе m. Найти закон радиоактивного распада и определить, какой процент массы m_0 радия распадется через 100 лет.

5. Увеличение длины l пальчиковых клеток с течением времени t происходит со скоростью $\dfrac{dl}{dt} = (\alpha - \beta)l$, где α и β – постоянные синтеза и распада. Найти закон роста клеток, если в начальный момент их длина составляла 1 мкм.

6. Скорость распространения инфекционных заболеваний (например, гриппа) можно описать следующим дифференциальным уравнением: $\dfrac{dI}{dt} = \alpha I(N - I) - \beta I$, где I – количество инфицированных людей за время t (в месяцах), N – размер популяции, α - коэффициент скорости распространения инфекции, β - коэффициент выздоровления.

Определить количество заболевших гриппом жителей города Рязани с декабря по февраль, если 1 декабря было зафиксировано 10 инфицированных граждан, при этом $\alpha = 0,01$; $\beta = 2$ и в городе проживает 500 тыс. человек.

7. В национальный заповедник была завезена популяция из 20 волков. Через три года размер популяции составил 40 особей. Размер популяции W растет со скоростью $\frac{dW}{dt} = kW \ln \frac{200}{W}$, $k = const$. Определить закон изменения количества волков. Сколько особей будет в заповеднике через 10 лет?).

8. Популяцию дрожжей в количестве $N = 10^6$ клеток/мл помещают в жидкую среду, где она начинает расти со скоростью $\frac{dN}{dt} = \frac{5}{(t+1)^2}$, где t – время в часах. Определить размер популяции дрожжей через 4 часа.

9. Ракета с нулевой начальной скоростью движется прямолинейно под действием отдачи от струи газа, исходящей со скоростью 2 км/с. Масса ракеты с полным запасом топлива равна 400 т, без топлива — 50 т. Найти скорость движения ракеты после сгорания всего топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

10. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется четверть имеющегося радия?

11. Найти закон изменения тока в цепи *I(t)*, текущего через катушку индуктивностью L после замыкания ключа в момент времени $t = 0$ (рис.8).

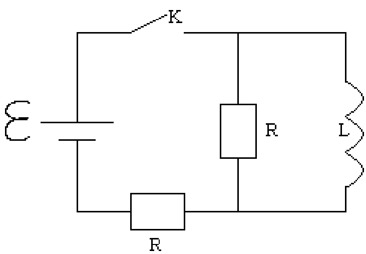


Рис. 8.

12. Сила тока в проводнике равномерно увеличивается от 0А до

2А в течение 5 секунд. Определить заряд, прошедший в проводнике.

13. Кусок горной породы содержит 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Период полураспада урана составляет 4,5 миллиарда лет, при этом из 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы, если в начальный момент времени горная порода не содержала свинца.

14. В сосуд с воздухом (80% азота, 20% кислорода) втекает азот со скоростью 0,2 л /сек, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 90% азота при условии, что смесь непрерывно перемешивается и объем сосуда – 50 литров?

Ответы:

1. 6 ч

2. $I = I_0 e^{-kx}$

3. 8179 Кл

4. $m = m_0 e^{-0,00043t}$; 4,2%

5. $l = e^{(\alpha-\beta)t}$

6. 63 тыс. человек

7. $W = 200e^{-2,3e^{-0,12t}}$, 120 особей

8. $5 \cdot 10^6$ клеток/мл

9. 4,16 км/с

10. 654 года

11. $I(t) = \dfrac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{2L}t}\right)$

12. 5 Кл

13. 970 млн. лет

14. 173,3 сек

ГЛАВА 2

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Задача 2.1. При размыкании цепи (в момент появления искры) сопротивление цепи R быстро возрастает от первоначальной величины $R_0 = 10$ Ом до бесконечности. На основании опыта допускают, что зависимость сопротивления R от времени t в этом процессе выражается формулой: $R = R_0 \cdot \dfrac{\tau}{\tau - t}$, где τ - время всего процесса размыкания. Найти силу тока I в любой момент времени t в цепи при постоянной электродвижущей силе $E = 60$ В и самоиндукции L=2 Гн, если время размыкания составило 0,4 с.

Решение. Так как ток в цепи изменяется со временем, то вследствие наличия индуктивности L возникает ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L\frac{dI}{dt}.$$

По второму закону Кирхгофа [7, с.183-185] падение напряжения в цепи $U_R = IR$ равно сумме ЭДС: $U_R = E + e_L$ или $IR = E - L\dfrac{dI}{dt}$.

В процессе размыкания цепи $R = R_0 \cdot \dfrac{\tau}{\tau - t}$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение процесса:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R_0 \tau}{L(\tau - t)} I = \frac{E}{L}\ , \qquad (2.1.1)$$

которое является линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) первого порядка.

Составим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ), соответствующее уравнению (2.1.1):

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R_0\tau}{L(\tau-t)}I=0.$$

Данное уравнение представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение, разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения.

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{R_0\tau}{L(\tau-t)}I,\ \int\frac{dI}{I}=-\frac{R_0\tau}{L}\int\frac{dt}{(\tau-t)},$$

$$\ln I=\ln C(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}},\quad I=C(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}.$$

Для определения общего решения уравнения (2.1.1) воспользуемся методом Лагранжа вариации произвольной постоянной.

Общее решение будем искать в виде:

$$I=C(t)(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}. \tag{2.1.2}$$

Продифференцируем уравнение (2.1.2) и подставим выражения для I и I' в уравнение (2.1.1).

$$I'=C'(t)(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}-C(t)\frac{R_0\tau}{L}(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}-1},$$

$$C'(t)(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}-C(t)\frac{R_0\tau}{L}(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}-1}+$$

$$+\frac{R_0\tau}{L(\tau-t)}C(t)(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}=\frac{E}{L},$$

$$C'(t)(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}=\frac{E}{L}. \tag{2.1.3}$$

Решим полученное уравнение (2.1.3) относительно $C(t)$.

$$C'(t)=\frac{E}{L}(\tau-t)^{-\frac{R_0\tau}{L}},\ C(t)=\frac{E}{L}\int(\tau-t)^{-\frac{R_0\tau}{L}}dt\,,$$

$$C(t)=\frac{E}{R_0\tau-L}(\tau-t)^{1-\frac{R_0\tau}{L}}+\tilde{C}\,,$$

где $\tilde{C}$ - произвольная постоянная.

Следовательно, общее решение уравнения (2.1.1) имеет вид:

$$I=\left(\frac{E}{R_0\tau-L}(\tau-t)^{1-\frac{R_0\tau}{L}}+\tilde{C}\right)(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}=\frac{E(\tau-t)}{R_0\tau-L}+\tilde{C}(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}$$

Определим $\tilde{C}$. В начальный момент времени $t=0,\ I=\dfrac{E}{R_0}$.

$$I(0)=\frac{E\tau}{R_0\tau-L}+\tilde{C}\tau^{\frac{R_0\tau}{L}}=\frac{E}{R_0},\ \tilde{C}=\left(\frac{E}{R_0}-\frac{E\tau}{R_0\tau-L}\right)\tau^{-\frac{R_0\tau}{L}}.$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения (2.1.1) имеет вид:

$$I(t)=\frac{E(\tau-t)}{R_0\tau-L}+\left(\frac{E}{R_0}-\frac{E\tau}{R_0\tau-L}\right)\tau^{-\frac{R_0\tau}{L}}(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}=$$

$$=\frac{E}{R_0\left(R_0\tau-L\right)}\left(R_0\left(\tau-t\right)-L(1-\frac{t}{\tau})^{\frac{R_0\tau}{L}}\right).$$

В соответствии с заданными параметрами цепи, закон изменения силы тока в зависимости от времени примет вид:

$$I(t)=6\left(5\left(0{,}4-t\right)-(1-2{,}5t)^2\right)=6-37{,}5t^2\ \text{(А)}.$$

Ответ: $I(t)=6-37{,}5t^2$ А.

Задача 2.2. Последовательно включены источник напряжения $E = U\cos(\omega t)$, где U=10В, ω=100рад/с, резистор сопротивлением R=10 Ом и катушка индуктивности L= 1Гн (рис.9.). Найти силу тока в установившемся режиме, если в начальный момент времени t ток в контуре равен нулю (принять, что установившийся режим произойдет через 10 секунд после включения).

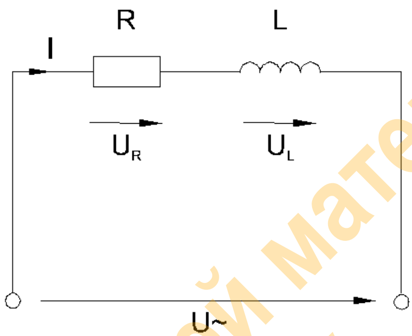


Рис.9. Последовательная RL-цепь

Решение. Напряжения на катушке U_L и резисторе U_R выражаются формулами:

$$U_L = L\frac{dI}{dt},\ U_R = RI(t)\,.$$

Из второго закон Кирхгофа [7, с.183-185] следует, что

$$U_L(t) + U_R(t) = E(t)\,.$$

Подставим выражения для напряжений в последнее равенство:

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = U\cos\omega t\,. \qquad (2.2.1)$$

Запишем уравнение в соответствии с параметрами цепи.

$$\frac{dI(t)}{dt} + 10I(t) = 10\cos 100t \qquad (2.2.2)$$

Поскольку нам необходимо найти ток в установившимся режиме, то необходимо найти частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

Составим ЛОДУ, соответствующее уравнению (2.2.2) и найдем его общее решение.

$$\frac{dI(t)}{dt}+10I(t)=0,\ \frac{dI(t)}{I(t)}=-10dt,\ \int\frac{dI(t)}{I(t)}=-10\int dt,$$

$$\ln I=-10t+\ln C,\ I=Ce^{-10t}.$$

Для определения общего решения уравнения (2.2.2) воспользуемся методом Лагранжа вариации произвольной постоянной.

Общее решение будем искать в виде $I=C(t)e^{-10t}$. Продифференцируем данное решение: $I'=C'(t)e^{-10t}-10C(t)e^{-10t}$.

Подставим выражения для I и I' в уравнение (2.2.2).

$$C'(t)e^{-10t}-10C(t)e^{-10t}+10C(t)e^{-10t}=10\cos 100t,$$

$$C'(t)e^{-10t}=10\cos 100t.$$

Решим полученное уравнение относительно $C(t)$.

$$C'(t)=10e^{10t}\cos 100t,\ C(t)=10\int e^{10t}\cos 100t\,dt.$$

Получили циклический интеграл. Решим его по частям.

$$\underline{\int e^{10t}\cos 100t\,dt}=\left|\begin{matrix} u=e^{10t} & du=10e^{10t}dt \\ dv=\cos 100t\,dt & v=\frac{1}{100}\sin 100t\end{matrix}\right|=\frac{1}{100}e^{10t}\sin 100t-$$

$$-\frac{1}{10}\int e^{10t}\sin 100t\,dt=\left|\begin{matrix} u=e^{10t} & du=10e^{10t}dt \\ dv=\sin 100t\,dt & v=-\frac{1}{100}\cos 100t\end{matrix}\right|=$$

$$= \frac{1}{100} e^{10t} \sin 100t + \frac{1}{1000} e^{10t} \cos 100t - \frac{1}{100} \underline{\int e^{10t} \cos 100t dt}.$$

$$1\frac{1}{100} \int e^{10t} \cos 100t dt = \frac{1}{100} e^{10t} \sin 100t + \frac{1}{1000} e^{10t} \cos 100t + \tilde{C},$$

$$\int e^{10t} \cos 100t dt = \frac{1}{101} e^{10t} \left(\sin 100t + \frac{1}{10} \cos 100t \right) + \frac{100}{101} \tilde{C}.$$

Таким образом,

$$C(t) = \frac{10}{101} e^{10t} \left(\sin 100t + \frac{1}{10} \cos 100t \right) + \bar{C}, \text{ где } \bar{C} = \frac{1000}{101} \tilde{C}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.2.2) имеет вид:

$$I(t) = \frac{10}{101} \left(\sin 100t + \frac{1}{10} \cos 100t \right) + \bar{C} e^{-10t},$$

Установившийся режим достигается при $\bar{C} = 0$.

Тогда частное решение уравнения (2.2.2) примет вид:

$$I(t) = \frac{10}{101} \left(\sin 100t + \frac{1}{10} \cos 100t \right).$$

Таким образом, получил закон изменения силы.

На рис. 10. представлены графики изменения силы тока и напряжения с течением времени.

Найдем силу тока в установившемся режиме:

$$I(10) = \frac{10}{101} \left(\sin 1000 + \frac{1}{10} \cos 1000 \right) = 0{,}087 \text{A}.$$

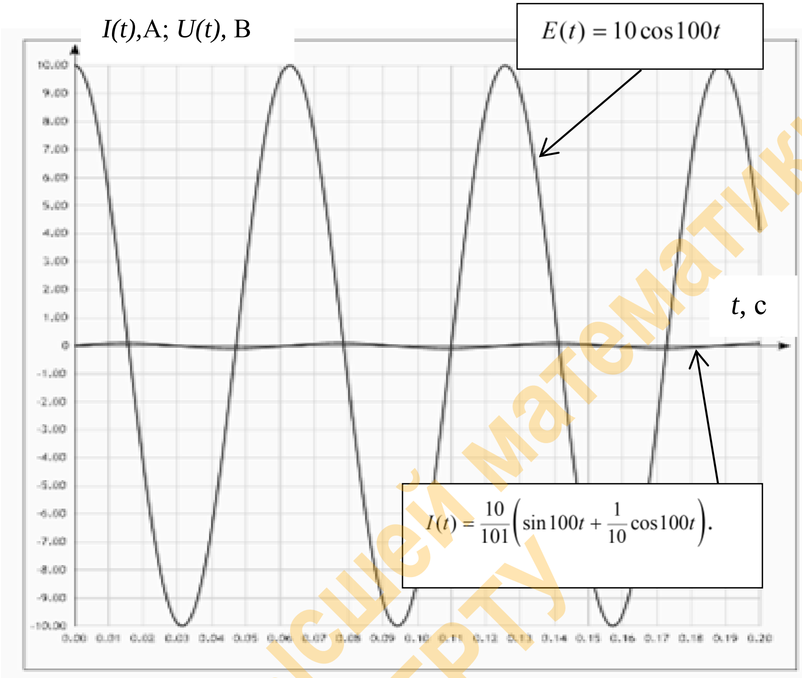


Рис.10. Сила тока и напряжение в цепи

Ответ: 0,087 А.

Задача 2.3. Оценить концентрацию K, мг/мл, лекарственного препарата в крови через полчаса после введения дозы в концентрации 2,5 мг/мл, если скорость изменения его концентрации с течением времени t, ч, описывается дифференциальным уравнением:

$$K' + K = 1 + \sin t \qquad (2.3.1).$$

Решение. Для определения концентрации лекарственного препарата через полчаса, найдем частное решение заданного линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

Составим соответствующее ему ЛОДУ и найдем его общее решение.

$$K' + K = 0,\ \frac{dK}{dt} = -K,\ \frac{dK}{K} = -dt,\ \int\frac{dK}{K} = -\int dt,$$

$$\ln K = -t + \ln C,\ C = const,\ \ln\frac{K}{C} = -t,\ K = Ce^{-t}.$$

Методом Лагранжа вариации произвольной постоянной найдем общее решение уравнения (2.3.1).

Общее решение будем искать в виде $K = C(t)e^{-t}$.

Продифференцируем данное решение: $K' = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t}$.

Подставим выражения для K и K' в уравнение (2.3.1).

$$C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = 1 + \sin t,\ C'(t)e^{-t} = 1 + \sin t.$$

Решим полученное уравнение относительно *C(t)*.

$$C'(t) = (1 + \sin t)e^{t},\ C(t) = \int(1 + \sin t)e^{t}dt = \int e^{t}dt + \int e^{t}\sin t dt.$$

$\int e^{t}\sin t dt$ – циклический интеграл. Решим его отдельно по частям.

$$\underline{\int e^{t}\sin t dt} = \left|\begin{matrix} u = e^{t} & du = e^{t}dt \\ dv = \sin t dt & v = -\cos t\end{matrix}\right| = -e^{t}\cos t + \int e^{t}\cos t dt =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = e^{t} & du = e^{t}dt \\ dv = \cos t dt & v = \sin t\end{matrix}\right| = -e^{t}\cos t + e^{t}\sin t - \underline{\int e^{t}\sin t dt}.$$

$$2\int e^{t}\sin t dt = -e^{t}\cos t + e^{t}\sin t + \tilde{C},$$

$$\int e^{t}\sin t dt = \frac{1}{2}e^{t}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2}\tilde{C}.$$

Таким образом,

$$C(t) = \int e^{t}dt + \int e^{t}\sin t dt = e^{t} + \frac{1}{2}e^{t}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2}\tilde{C}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.3.1) имеет вид:

$$K=\left(e^t+\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+\frac{1}{2}\tilde{C}\right)e^{-t}=1+\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)+\frac{1}{2}\tilde{C}e^{-t}.$$

Так как в начальный момент времени концентрация составляла 2,5 мг/мл, то, подставив данные условия в полученное решение, найдем $\tilde{C}$.

$$K(0)=1+\frac{1}{2}(\sin 0-\cos 0)+\frac{1}{2}\tilde{C}e^0=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tilde{C}=2{,}5;\ \tilde{C}=4.$$

Тогда частное решение уравнения (2.3.1) примет вид:

$$K(t)=1+\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)+2e^{-t}.$$

Таким образом, получили закон изменения концентрации лекарственного препарата в крови (рис. 11).

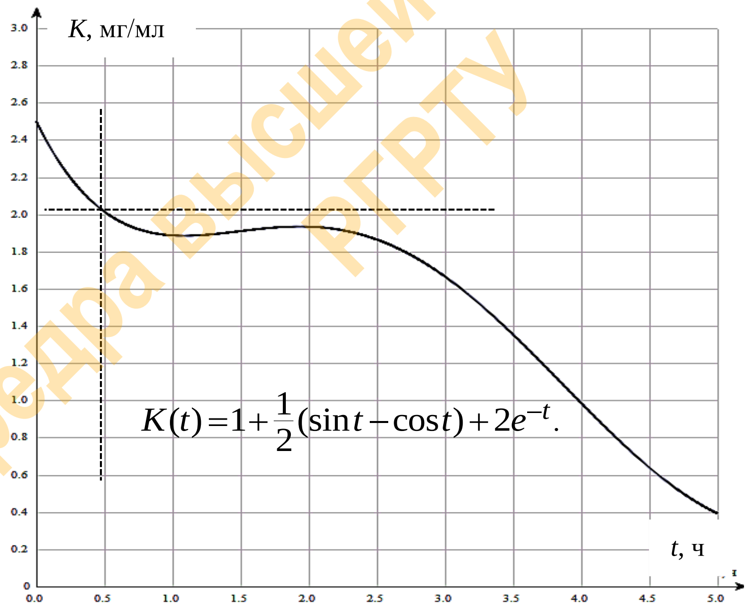


Рис. 11. Изменение концентрации лекарственного препарата в крови с течением времени.

Найдем концентрацию лекарственного препарата в крови через полчаса.

$$K(0,5)=1+\frac{1}{2}(\sin 0,5-\cos 0,5)+2e^{-0,5}\approx 2\ \left(\text{мг/мл}\right).$$

Ответ: 2 мг/мл.

Задача 2.4. Установить закон изменения концентрации глюкозы в крови по времени при постоянном внутривенном введении в количестве, колеблющемся от 155 до 630 мг/мин, если известно, что оно продолжалось 60 мин, в течение которых брались пробы крови через равные интервалы времени.

Решение. Пусть в момент времени *t,* мин, *q(t)* – количество глюкозы в крови, мг, V – объем крови, мл, $K=\dfrac{q}{V}$ – концентрация глюкозы в крови, $\dfrac{\text{мг}}{\text{мл}}$.

В данном случае вводимая глюкоза определяется в количестве, пропорциональном ее наличному содержанию в крови. С другой стороны, концентрация глюкозы повышается в результате постоянного ее введения. В итоге эти двух взаимосвязанных процессов изменение концентрации глюкозы в крови с течением времени определяется линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка:

$$\frac{dK}{dt}+\lambda K=\frac{\rho}{V}, \qquad (2.4.1)$$

где λ – постоянная скорости вливания, мин$^{-1}$,
ρ – количество вводимой глюкозы, мг/мин.

Составим ЛОДУ, соответствующее уравнению (2.4.1):

$$\frac{dK}{dt}+\lambda K=0$$

Данное уравнение представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение, разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения.

$$\frac{dK}{dt} = -\lambda K, \ \frac{dK}{K} = -\lambda dt, \ \int \frac{dK}{K} = -\lambda \int dt,$$

$$\ln K = -\lambda t + \ln C, \ \ln \frac{K}{C} = -\lambda t,$$

$$K = Ce^{-\lambda t}.$$

Для определения общего решения уравнения (2.4.1) воспользуемся методом Лагранжа вариации произвольной постоянной.

Общее решение будем искать в виде:

$$K = C(t)e^{-\lambda t}$$

Продифференцируем данное решение:

$$K' = C'(t)e^{-\lambda t} - \lambda C(t)e^{-\lambda t}.$$

Подставим выражения для K и K' в уравнение (2.4.1).

$$C'(t)e^{-\lambda t} - \lambda C(t)e^{-\lambda t} + \lambda C(t)e^{-\lambda t} = \frac{\rho}{V},$$

$$C'(t)e^{-\lambda t} = \frac{\rho}{V}, \ C'(t) = \frac{\rho}{V}e^{\lambda t}.$$

Решим полученное уравнение относительно *C(t)*.

$$C(t) = \frac{\rho}{V}\int e^{\lambda t}dt,$$

$$C(t) = \frac{\rho}{V\lambda}e^{\lambda t} + \tilde{C},$$

где $\tilde{C}$ – произвольная постоянная.

Следовательно, общее решение уравнения (2.4.1) имеет вид:

$$K = \left(\frac{\rho}{V\lambda}e^{\lambda t} + \tilde{C}\right)e^{-\lambda t}$$

Определим $\tilde{C}$. В начальный момент времени $t = 0, \ K = 0.$

$$K(0)=\left(\frac{\rho}{V\lambda}e^{0}+\tilde{C}\right)e^{0}=0,\ \tilde{C}=-\frac{\rho}{V\lambda}.$$

Таким образом, частное решение уравнения (2.4.1) имеет вид:

$$K=\left(\frac{\rho}{V\lambda}e^{\lambda t}-\frac{\rho}{V\lambda}\right)e^{-\lambda t}=\frac{\rho}{V\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right).$$

В реальных условиях концентрация глюкозы в крови при $t=0$ не равна нулю, но полученная формула остается правильной, если $\tilde{C}$ представляет концентрацию глюкозы, превышающую в момент введения первоначальное значение.

В ходе экспериментальных наблюдений установлено, что концентрация глюкозы определяется формулой:

$$K=53{,}8(1-e^{-0{,}0519t})$$

Сопоставляя уравнения, полученные экспериментально и теоретически, получаем значения $\lambda=0{,}0519$ мин$^{-1}$ и $\dfrac{\rho}{\lambda V}=53{,}8\ \dfrac{\text{мг}}{\text{мл}}$.

Количество вводимой глюкозы ρ = 297 мг/мин, так что объем распространения глюкозы V = 10,6 л.

Ответ: $K(t)=\dfrac{\rho}{V\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)\ \dfrac{\text{мг}}{\text{мл}}$, где $\lambda=0{,}0519$ мин$^{-1}$ и $\dfrac{\rho}{\lambda V}=53{,}8\ \dfrac{\text{мг}}{\text{мл}}$.

Задача 2.5. В любой момент времени t скорость v отдельного эритроцита крови превышает среднюю скорость движения потока крови на величину t^2. Найти закон движения эритроцита крови, если при t = 0, путь $S=S_0$, v = 0.

Решение. Скорость в момент времени t будет равна

$$v(t)=S'(t)=\frac{dS}{dt}\ .$$

Средняя скорость движения потока за время t с начала движения равна $v_{cp} = \dfrac{S - S_0}{t}$.

По условию задачи $v - v_{cp} = t^2$.

Тогда получим закон движения эритроцита крови:

$$\frac{dS}{dt} - \frac{S - S_0}{t} = t^2 \text{ или } \frac{dS}{dt} - \frac{1}{t}S = t^2 - \frac{S_0}{t} \qquad (2.5.1)$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Решим его методом вариации произвольной постоянной (Лагранжа). Для этого сначала решим однородное дифференциальное уравнение, соответствующее полученному выше:

$$\frac{dS}{dt} - \frac{1}{t}S = 0.$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Найдем его решение, разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S}{t}, \quad \frac{dS}{S} = \frac{dt}{t}, \quad \int \frac{dS}{S} = \int \frac{dt}{t},$$

$$\ln|S| = \ln|t| + \ln|C|,$$

$$S = Ct.$$

Применяя метод Лагранжа вариации произвольной постоянной, общее решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде: $S=C(t)t$.

Продифференцируем данное решение:

$$S' = C'(t)t + C(t)$$

Подставим выражения для S и S' в уравнение (2.5.1).

$$C'(t)t + C(t) - \frac{1}{t}C(t)t = t^2 - \frac{S_0}{t},$$

$$C'(t)t = t^2 - \frac{S_0}{t}.$$

Решим полученное уравнение относительно $C(t)$.

$$C'(t) = t - \frac{S_0}{t^2},\ C(t) = \int\left(t - \frac{S_0}{t^2}\right)dt,$$

$$C(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{S_0}{t} + \tilde{C},$$

где $\tilde{C}$ - произвольная постоянная.

Следовательно, общее решение уравнения (2.5.1) имеет вид:

$$S = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{S_0}{t} + \tilde{C}\right)\cdot t \text{ или } S = \frac{t^3}{2} + S_0 + \tilde{C}t.$$

Используя начальное условие, найдем $\tilde{C}$. Для этого продифференцируем общее решение.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{3}{2}t^2 + \tilde{C},\ 0 = \frac{3}{2}\cdot 0 + \tilde{C},\ \tilde{C} = 0.$$

Тогда частное решение уравнения (2.5.1) примет вид:

$$S = \frac{t^3}{2} + S_0.$$

Подученное уравнение – закон движения эритроцита крови.

Ответ: $S = \frac{t^3}{2} + S_0$.

Задача 2.6. Найти закон изменения давления крови в аорте во время работы сердца человека.

Решение. Сердечно-сосудистая система представляет собой замкнутую систему, состоящую из множества крупных и мелких сосудов, по которым непрерывно движется кровь. От сердца кровь по артериям идет ко всем органам и возвращается обратно по венам к сердцу. Самая большая артерия (аорта) постепенно разветвляется на более мелкие артерии (артериолы), которые заканчиваются тончайшими кровеносными сосудами (капиллярами), снабжающими все органы человека кровью.

Для того чтобы кровь могла достигнуть самых отдаленных участков тела, необходимо в сосудах поддерживать определенное давление. Это достигается работой сердца, а также обусловлено состоянием стенок сосудов, особенно артерий.

Сердце – полный мышечный орган, состоящий из четырех полостей: двух предсердий и двух желудочков. Оно работает по принципу нагнетательного насоса: при сокращении сердца кровь с силой выталкивается из левого и правого желудочков в сосуды.

Артерии представляют собой полные трубы, в стенках которых имеются мышцы и эластичные волокна, которые могут растягиваться и сокращаться. Когда волна крови, нагнетаемой сердцем, проходит по артериям и давит на их стенки, сосуды растягиваются, а затем под действием эластичных волокон суживаются. При сужении сосуды давят на кровь, находящуюся внутри них. Таким образом, в сосудах создается давление крови.

Давление крови в сосудах во время сокращения (систолы) сердца называется систолическим (или максимальным), а во время покоя (диастолы) сердца называется диастолическим (или минимальным).

Рассмотрим математическую модель сердечно-сосудистой системы, учитывая лишь основные ее свойства. В связи с этим представим аорту (рис.12) в виде упругого объемного сосуда, емкость которого зависит от давления, развиваемого во время работы сердца.

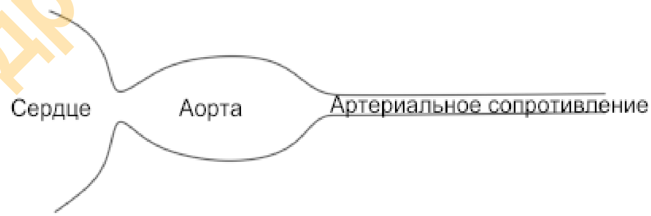


Рис 12. Модель аорты

Этот упругий сосуд связан с трубкой, оказывающей потоку крови определенное сопротивление, которое назовем артериальным.

Будем различать две последовательные фазы:

диастолическую фазу – количество притоков от сердца к аорте равно нулю;

систолическую фазу – кровь поступает в аорту из сердца.

Диастолическая фаза.

При рассмотрении работы сосуда учтем дополнительно:

- линейную зависимость;
- подчинение системы закону Пуазейля.

Линейная зависимость между давлением и объемом выражается отношением

$$\left|\frac{dp}{dV}\right| = k \qquad (2.6.1)$$

где k - постоянная,
p - давление во вмещающем сосуде, Па,
V - объем крови, л.

Чем больше сопротивление вмещающих сосудов, тем больше давление в момент сокращения сердца и во время диастолы.

По закону Пуазейля объем жидкости, протекающей за секунду через сечение трубки, прямо пропорционален разности давлений у входа в трубку, и на выходе из нее, четвертой степени диаметра трубки и обратно пропорционален длине трубки и коэффициенту вязкости.

Если принять давление на наружном конце трубки равным нулю, то закон Пуазейля можно записать:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{p}{\omega}, \qquad (2.6.2)$$

где $\omega = \dfrac{8l\mu}{\pi r^4}$ - постоянное сопротивление;
r - радиус трубки;
μ - вязкость крови;
l - длина трубки.

Знак минус означает, что большему давлению p в сердце соответствует большее уменьшение объема в единицу времени.

Исключая из равенств (2.6.1) и (2.6.2) величину dV, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{p} = -\frac{k}{\omega} dt \,. \qquad (2.6.3)$$

Решение уравнения (2.6.3) находится непосредственным интегрированием

$$p = C^* \cdot e^{-\frac{k}{\omega}t}, \text{ где } C^* = e^C \,.$$

При $t = 0$ $C^* = p(0) = p_0$, и тогда $p = p_0 e^{-\frac{k}{\omega}t}$.

Таким образом, в течение диастолического периода (клапаны аорты закрыты) давление падает по показательному закону.

Систолическая фаза.

Особенностью этой фазы является то, что кровь накачивается в аорту путем сокращения мышцы сердца. Скорость изменения объема в аорте является результатом двух факторов: количества притоков (от сердца) и оттоков (вытеканий) по артерии.

Количество вытеканий на основании закона Пуазейля:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{p}{\omega} \,.$$

Знак минус отсутствует, так как теперь $\dfrac{dV}{dt}$ является не изменением объема в единицу времени в аорте, а объемом потока, проходящего через поперечное сечение в единицу времени.

Обозначим объем потока, поступающего в единицу времени в аорту, функцией $i(t)$.

Очевидно, что изменение объема в аорте:

$$\frac{dV}{dt} = i(t) - \frac{p}{\omega} \,. \qquad (2.6.4)$$

Если $i > \dfrac{p}{\omega}$, то отношение $\dfrac{dV}{dt}$ положительно, т.е. объем потока крови в аорте увеличивается, и наоборот.

Учитывая равенство (2.6.1), уравнение (2.6.4) перепишем в виде

$$\frac{dp}{dt}=k\left[i(t)-\frac{p}{\omega}\right] \text{ или } \frac{dp}{dt}+\frac{k}{\omega}p=ki(t). \qquad (2.6.5)$$

Функция $i(t)$ является неизвестной. В качестве приближения принимаем закон $i=A\sin Bt$, т.е. число вытеканий потока крови и аорту аппроксимируется функцией синуса.

Тогда уравнение (2.6..5) принимает вид:

$$\frac{dp}{dt}+\frac{k}{\omega}p=kA\sin Bt.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого имеет вид:

$$p=Ce^{-\frac{k}{\omega}t}+e^{-\frac{k}{\omega}t}\int kA\sin Bte^{\frac{k}{\omega}t}dt,$$

где $\mu=e^{\frac{k}{\omega}t}$ – интегрирующий множитель.

Применяя к полученному интегралу метод интегрирования по частям $\left|\begin{matrix} u=e^{\frac{k}{\omega}t}, dv=\sin Btdt \\ du=\frac{k}{\omega}e^{\frac{k}{\omega}t}, v=-\frac{1}{B}\cos Bt \end{matrix}\right|$ и, решая полученное затем равенство, получим:

$$p=Ce^{-\frac{k}{\omega}t}+Ak\frac{(\frac{k}{\omega})\sin Bt-B\cos Bt}{\frac{k^2}{\omega^2}+B^2}. \qquad (2.6.6)$$

При $t=0$ $p=p_0$, откуда $C=p_0+\dfrac{kAB}{\frac{k^2}{\omega^2}+B^2}$ (2.6.7)

Окончательно, после подстановки в равенство (2.6.6) значения (2.6.7), получаем равенство, отражающее закон изменения давления крови в аорте во время систолической фазы

$$p = (p_0 + \frac{kAB}{\frac{k^2}{\omega^2} + B^2})e^{-\frac{k}{\omega}t} + \frac{Ak\left[\frac{k}{\omega}\sin Bt - B\cos Bt\right]}{\frac{k^2}{\omega^2} + B^2}.$$

Ответ: диастолическая фаза: $p = p_0 e^{-\frac{k}{\omega}t}$,

систолическая фаза:

$$p = (p_0 + \frac{kAB}{\frac{k^2}{\omega^2} + B^2})e^{-\frac{k}{\omega}t} + \frac{Ak\left[\frac{k}{\omega}\sin Bt - B\cos Bt\right]}{\frac{k^2}{\omega^2} + B^2}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Скорость снижения вирусной нагрузки N (в тыс. ед./л) с течением времени t (в днях) определяется формулой: $N' + 2tN = te^{-t^2}$. Найти закон изменения концентрации вирусов в крови, если $N(0)=1$ тыс. ед./л.

2. Найти закон изменения напряжения на конденсаторе в RC-цепи при коммутации ее на источник постоянного напряжения (рис.13).

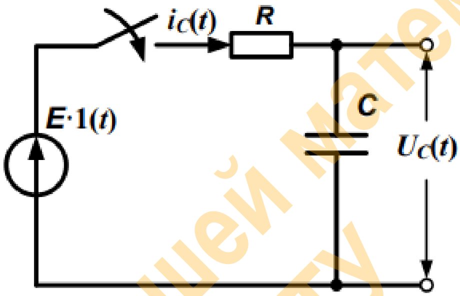


Рис.13. Схема коммутации RC-цепи на источник постоянного напряжения E

3. Уравнение скорости последовательно протекающих реакций $A \xrightarrow{k_1} P \xrightarrow{k_2} C$ записывается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 e^{-k_1 t} - k_2 x.$$

Определить закон изменения концентрации соединения x с течением времени, если $x(0) = 0$,

$k_1 = 0,05 \frac{\text{дм}^3}{\text{моль} \cdot \text{мин}}$ — постоянная скорости первой стадии процесса,

$k_2 = 6,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{дм}^3}{\text{моль} \cdot \text{мин}}$ — постоянная скорости второй стадии.

4. К последовательной RL-цепи подключен источник напряжения $U = 100\sin 50t$. Определить амплитуду силы тока в цепи

при установившемся режиме, если $R = 2\text{Ом}$, $L = 0{,}4\text{Гн}$.

5. Из сосуда с воздухом (80% азота, 20% кислорода) объемом $V = 2$ л вытекает $K(t) = 2t$ л воздуха в минуту и втекает такое же количество воздушной смеси. При этом во втекающей смеси количество азота составляет $N(t) = t^3$ л в минуту. Определить количество азота в сосуде через 1 минуту, если в начальный момент времени в сосуде содержалось 0,1 л азота. Количество азота в сосуде определяется уравнением $y' = N - \dfrac{K}{V}y$.

6. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, сопротивления и катушки индуктивности (рис.14). При $t = 0$ происходит замыкание ключа. Найти зависимость силы тока от времени.

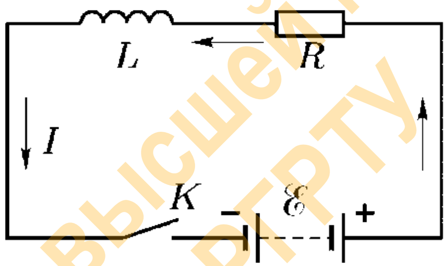


Рис.14. Последовательная электрическая цепь

7. Сила тока в электрической цепи с омическим сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L удовлетворяет дифференциальному уравнению $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$, где E – электродвижущая сила. Найти зависимость силы тока $i(t)$ от времени, если E изменяется по синусоидальному закону: $E = E_0 \sin \omega t$ и $i(0) = 0$.

Ответы:

1. $\frac{1}{2}(t^2+2)e^{-t^2}$
2. $U_C(t)=E-Ee^{-\frac{t}{RC}}$
3. $x(t)=\frac{10}{3}(e^{0,015t}-1)e^{-0,065t}$
4. 5 А
5. 0,274 л
6. $I(t)=\frac{U}{R}\left(e^{-\frac{R}{L}t}-1\right)$
7. $i(t)=\frac{E_0}{\sqrt{(L\omega)^2+R^2}}\sin(\omega t-\beta)$, где $\beta=arctg\frac{\omega}{\alpha}$ и $\alpha=\frac{R}{L}$

ГЛАВА 3.

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

Задача 3.1. Поток вещества поступает в реактор с постоянной скоростью v, где одновременно с диффузией протекает химическая реакция первого порядка с постоянной скоростью w.

Построить математическую модель данного процесса. Определить профиль изменения концентрации $C(x)=C$ вещества вдоль оси x реактора, если известны длина реактора L и граничные концентрации $c(0)=c_1$, $c(L)=c_2$.

Решение. Процесс диффузии химически однородного вещества подчиняется закону Фика, согласно которому, количество продиффундировавшего вещества $m_д$ за промежуток времени Δt прямо пропорционально площади поверхности S, через которую проходит вещество, и градиенту его концентрации $gradC=\dfrac{dC}{dx}$:

$$m_д=-D\left(\frac{dC}{dx}\right)S\Delta t\,,$$

где D – коэффициент диффузии, знак « – » показывает, что поток направлен в сторону уменьшения концентрации.

Так как поток вещества обусловлен не только диффузией, но конвекцией (питание реактора со скоростью v), то количество вещества m, проходящее через сечение площади S за промежуток времени Δt, будет равно:

$$m=vCS\Delta t-D\left(\frac{dC}{dx}\right)S\Delta t\,,$$

где $vCS\Delta t$ - количества вещества концентрации C конвективного потока скорости v, проходящего через сечение площади S за промежуток времени Δt.

Рассмотрим схему реактора и выделим внутри него слой толщиной Δx и площадью S (рис.15).

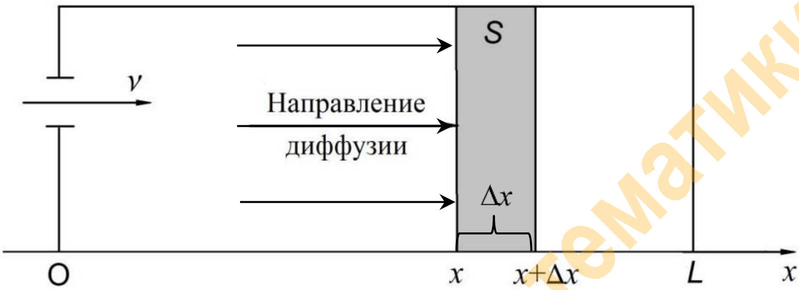


Рис. 15. Схема реактора

Через сечения x и $x+\Delta x$ протекает количество вещества равное соответственно:

$$m(x) = vC(x)S\Delta t - D\left(\frac{dC(x)}{dx}\right)S\Delta t \text{ и}$$

$$m(x+\Delta x) = vC(x+\Delta x)S\Delta t - D\left(\frac{dC(x+\Delta x)}{dx}\right)S\Delta t.$$

В рассматриваемом слое толщиной Δx накопление количества вещества $\Delta m = m(x) - m(x+\Delta x)$.

Применим формулу конечных приращений Лагранжа [1]:

$$C(x+\Delta x) = C(x) + \frac{dC(x)}{dx}\Delta x, \quad \frac{dC(x+\Delta x)}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} + \frac{d^2C(x)}{dx^2}\Delta x.$$

Тогда

$$\Delta m = vC(x)S\Delta t - D\left(\frac{dC(x)}{dx}\right)S\Delta t - vC(x)S\Delta t - v\frac{dC(x)}{dx}\Delta xS\Delta t +$$

$$+D\left(\frac{dC(x)}{dx}\right)S\Delta t + D\left(\frac{d^2C(x)}{dx^2}\right)\Delta xS\Delta t = D\left(\frac{d^2C(x)}{dx^2}\right)\Delta xS\Delta t -$$

$$-v\frac{dC(x)}{dx}\Delta xS\Delta t.$$

В силу реакции первого порядка, накопившееся вещество исчезает с течением времени. За промежуток времени Δt количество исчезнувшего вещества $\Delta m = wCS\Delta x\Delta t$.

Приравняв правые части последних равенств, получим математическую модель диффузии, сопровождающейся химической реакцией первого порядка:

$$\frac{d^2C}{dx^2} - \frac{v}{D}\cdot\frac{dC}{dx} - \frac{w}{D}C = 0. \qquad (3.1.1)$$

Полученное уравнение – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Чтобы установить координатную зависимость концентрации *C(x)*, найдем решение последнего дифференциального уравнения при начальных условиях $c(0) = c_1$ и $c(L) = c_2$.

Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$\lambda^2 - \frac{v}{D}\lambda - \frac{w}{D} = 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{v}{2D}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4kD}{v^2}}\right), \quad \lambda_2 = \frac{v}{2D}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4kD}{v^2}}\right).$$

Тогда общее решение уравнения (3.1.1) имеет вид:

$$C(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}.$$

Используя начальные условия, найдем постоянные *A* и *B*.

$$c_1 = A + B,\ c_2 = Ae^{\lambda_1 L} + Be^{\lambda_2 L},$$

$$A = \frac{c_1 e^{\lambda_2 L} - c_2}{e^L\left(e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}\right)},\ B = \frac{c_2 - c_1 e^{\lambda_1 L}}{e^L\left(e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}\right)}$$

Подставив эти значения в общее решение, найдем частное решение уравнения (3.1.1):

$$C(x) = \frac{c_1 e^{\lambda_2 L} - c_2}{e^L\left(e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}\right)} e^{\lambda_1 x} + \frac{c_2 - c_1 e^{\lambda_1 L}}{e^L\left(e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}\right)} e^{\lambda_2 x}.$$

Полученное равенство представляет собой искомый профиль изменения концентрации вещества вдоль оси реактора.

Ответ: $C(x) = \dfrac{c_1 e^{\lambda_2 L} - c_2}{e^L\left(e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}\right)} e^{\lambda_1 x} + \dfrac{c_2 - c_1 e^{\lambda_1 L}}{e^L\left(e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}\right)} e^{\lambda_2 x}$

Задача 3.2. В электрической цепи, содержащей резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор ёмкостью C, могут возбуждаться электрические колебания. Вывести уравнения, описывающие закон изменения тока в последовательной RLC-цепи (рис. 16) и параллельной RLC-цепи (рис. 17).

Решение. Рассмотрим последовательную RLC-цепь (рис.16) и выведем дифференциальное уравнение, описывающее закон изменения тока в ней.

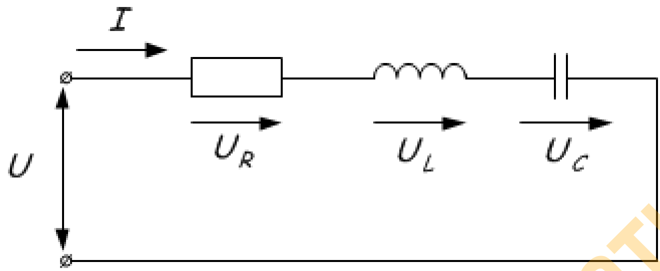


Рис. 16. Последовательная RLC-цепь

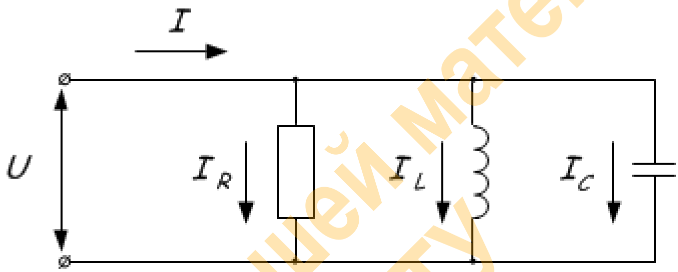


Рис. 17. Параллельная RLC-цепь

Пусть *q(t)* — заряд конденсатора, Кл, в момент времени *t*, с. Тогда напряжения на катушке U_L, на резисторе U_R, на конденсаторе U_C выражаются формулами [6]:

$$U_L = L\frac{dI}{dt},\; U_R = RI(t),\; U_C = \frac{q}{C}.$$

Из второго закон Кирхгофа [2, с.183-185] следует, что

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = E(t),$$

где *E(t)* – электродвижущая сила (э.д.с) источника питания, В.

Подставим выражения для напряжений U_R, U_C, U_L в последнее равенство: $L\dfrac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \dfrac{q(t)}{C} = E(t)$.

Продифференцируем его, учитывая что $q'(t) = I(t)$. Получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = 0. \qquad (3.2.1)$$

Рассмотрим параллельную RLC-цепь (рис.17) и выведем дифференциальное уравнение, описывающее закон изменения тока в ней.

Из первого закона Кирхгофа [7, с.183-185] следует, что:

$$I_R(t) + I_L(t) + I_C(t) = I(t) \qquad (3.2..2)$$

Учтем, что ток на катушке I_L, на резисторе I_R, на конденсаторе I_C выражается формулами [3]:

$$I_L = \frac{1}{L}\int_0^t U d\tau, \; I_R = \frac{U}{R}, \; I_C = C\frac{dU}{dt}.$$

Подставив данные выражения в равенство (3.2.2) и продифференцировав его, получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка для постоянного тока $I(t) = I_0$:

$$\frac{U}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t U d\tau + C\frac{dU}{dt} = I_0 \;;$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC}U = 0. \qquad (3.2.3)$$

Если ввести обозначение $2\beta = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ для уравнения (3.2.1) и $2\beta = \frac{1}{RC}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ для уравнения (3.2.3), то уравнения примут вид:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\beta\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0\,;\ \frac{d^2U}{dt^2} + 2\beta\frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0\,.$$

Данные дифференциальные уравнения совпадают с уравнением, описывающим затухающие колебания грузика на пружине. Следовательно, в последовательной и параллельной RLC-цепи при определенных значениях параметров также могут возникать затухающие колебания.

Решим дифференциальное уравнение $\frac{d^2I}{dt^2} + 2\beta\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0.$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

$$k_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Величина $\beta = \frac{R}{2L}$ называется коэффициентом затухания, с$^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ – резонансной частотой, Гц.

Рассмотрим три возможных режима.

1) $R^2 > \frac{4L}{C}$

Тогда $\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} > 0$, следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных отрицательных корня. В данном случае общее решение примет вид:

$$I(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} .$$

Получили закон изменения тока в последовательной RLC-цепи. В рассматриваемом режиме ток монотонно стремится к нулю (рис.18).

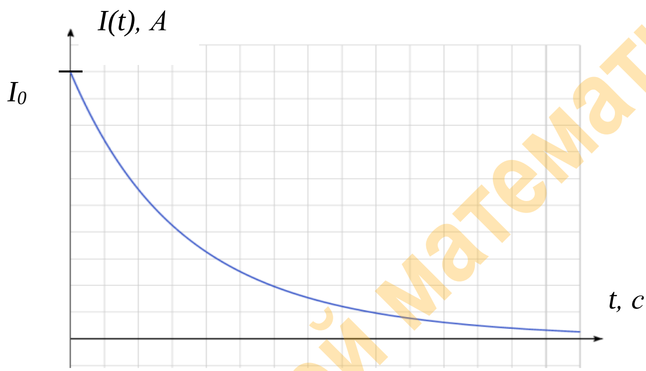


Рис. 18. Закон изменения тока в последовательной RLC-цепи

2) $R^2 = \dfrac{4L}{C}$

Тогда $\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{1}{LC}} = 0$, следовательно, характеристическое уравнение имеет два совпадающих действительных отрицательных корня. В данном случае общее решение примет вид:

$$I(t) = C_1 t e^{-\beta t} + C_2 e^{-\beta t},$$

где $\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, $с^{-1}$.

В рассматриваемом режиме закон изменения силы тока отражает возрастание тока в начале процесса и его последующее быстрое затухание (рис. 19).

Данный режим называют граничным или критическим.

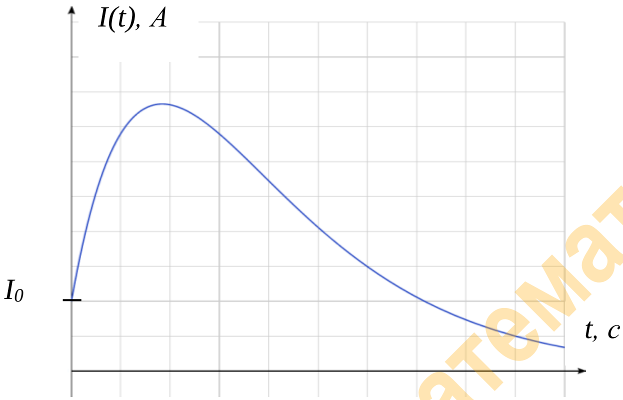


Рис. 19. Закон изменения силы тока при граничном режиме

3) $R^2 < \dfrac{4L}{C}$

Тогда $\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{1}{LC}} < 0$, следовательно, корнями характеристического уравнения являются комплексно-сопряженные числа. В данном случае общее решение примет вид:

$$I(t) = e^{-\beta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t),$$

где $\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, с$^{-1}$,

$\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$ – частота колебаний, Гц,

A, B – коэффициенты, зависящие от начальных условий.

Таким образом, получили закон изменения силы тока, график которого представлен на рис. 20.

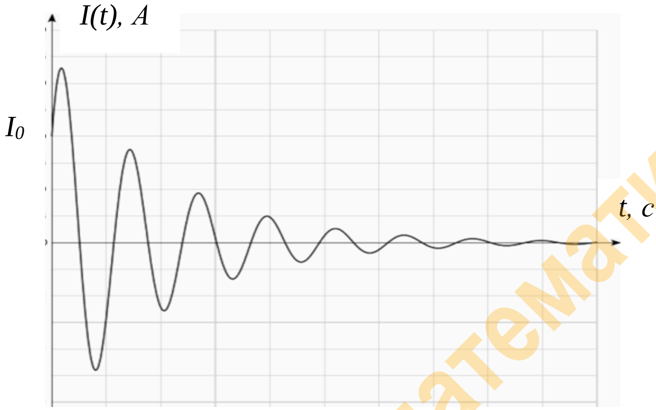


Рис. 20. Закон изменения силы тока

Ответ: $\dfrac{d^2I}{dt^2}+2\beta\dfrac{dI}{dt}+\omega_0^2 I=0$; $\dfrac{d^2U}{dt^2}+2\beta\dfrac{dU}{dt}+\omega_0^2 U=0$

Задача 3.3. Последовательно соединенные катушка индуктивностью L=5 Гн, резистор сопротивлением R=40 Ом и конденсатор емкостью $C=2\cdot10^{-4}$ Ф подключены к источнику постоянного напряжения 60В (рис.21). Найти силу тока в цепи *I(t)*, если в начальный момент времени *t* ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

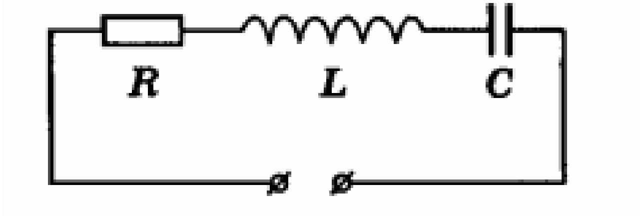


Рис.21. Схема последовательной RLC-цепи

Решение. Воспользуемся уравнением (3.2.1), полученным в предыдущей задаче.

Подставим в уравнение (3.2.1) исходные данные задачи:

$$I'' + 8I' + 10^3 I = 0 .$$

Характеристическое уравнение примет вид: $\lambda^2 + 8\lambda + 10^3 = 0$.

Найдем корни данного уравнения: $\lambda_{1,2} = -4 \pm 2i\sqrt{246}$.

Тогда общее решение ЛОДУ будет иметь вид:

$$I = e^{-4t}\left(C_1 \sin 2\sqrt{246}t + C_2 \cos 2\sqrt{246}t\right)$$

С учетом того, что в начальный момент времени отсутствовал как ток в цепи, так и напряжение на резисторе и конденсаторе, при t=0 по закону Кирхгофа напряжение, генерируемое источником, совпадает с напряжением на катушке индуктивности, и можно записать начальные условия $I(0) = 0$, $5I'(0) = 60$.

Используя начальные условия, найдем коэффициенты C_1 и C_2.

Из первого условия $C_2 = 0$, следовательно,

$$I = C_1 e^{-4t} \sin 2\sqrt{246}t .$$

Найдем производную:

$$I' = C_1 e^{-4t}\left(-4\sin 2\sqrt{246}t + 2\sqrt{246}\cos 2\sqrt{246}t\right).$$

С учетом начальных условий $C_1 = \dfrac{6}{\sqrt{246}} = \sqrt{\dfrac{6}{41}}$.

Тогда, сила тока в цепи: $I = e^{-4t}\left(\sqrt{\dfrac{6}{41}} \sin 2\sqrt{246}t\right)$.

График изменения силы тока с течением времени представлен на рис. 22.

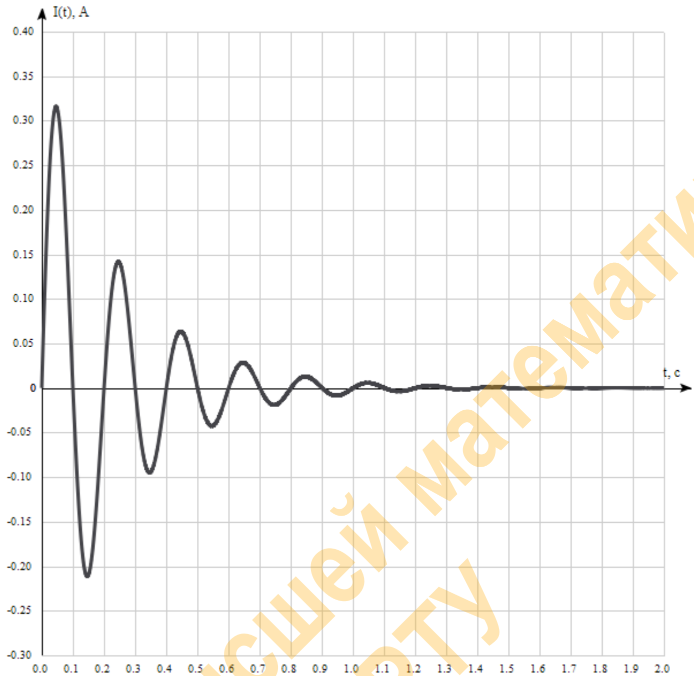


Рис.22. Изменение силы тока в цепи

Ответ: $I = e^{-4t}\left(\sqrt{\dfrac{6}{41}}\sin 2\sqrt{246}t\right)$ А.

Задача 3.4. Определить напряжение на конденсаторе через 10 секунд после переключения ключа S при исходных параметрах схемы (рис.23): E=80В, L=40 Гн, C=10 Ф, $R_1=R_2=5$ Ом.

Решение. Любое скачкообразное изменение в цепи (включение, выключение, переключение и пр.), приводящее к изменению установившегося режима, называют коммутацией. Так как в цепи после коммутации (переключении ключа S) будет отсутствовать внешний источник энергии, то рассматриваемый процесс будет свободным. Согласно второму закону коммутации: в любой ветви напряжение и заряд на конденсаторе сохраняют в момент коммутации те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и в дальнейшем изменяются, начиная с этих значений.

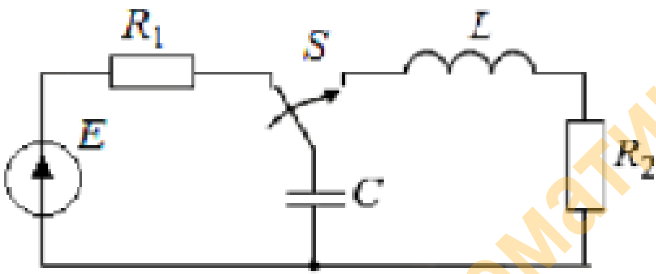


Рис. 23. Схема цепи

По второму закону Кирхгофа:

$$U_L(t) + U_{R2}(t) + U_C(t) = E(t) \qquad (3.4.1)$$

Напряжения на катушке U_L, на резисторе U_{R2} выразим через напряжение на конденсаторе:

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = LC\frac{d^2U_C}{dt^2},\ U_{R2} = RI_C(t) = RC\frac{dU_C}{dt}.$$

Подставив данные выражения в уравнение (3.4.1), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E(t) \qquad (3.4.2)$$

Общее решение уравнения (3.4.2) будем искать в виде суммы свободной $U_{C\ \text{св}}$ и принужденной $U_{C\ \text{пр}}$ составляющих:

$$U_C = U_{C\ \text{св}} + U_{C\ \text{пр}}.$$

Внешнее воздействие в цепи отсутствует, поэтому $U_{C\ \text{пр}} = 0$.

Тогда $U_C = U_{C\ \text{св}}$.

Свободная составляющая находится из уравнения (3.4.2) с учетом того, что $E(t)=0$.

Составим дифференциальное уравнение исходя из заданных параметров схемы.

$$400\frac{d^2U_C}{dt^2}+50\frac{dU_C}{dt}+U_C=0 \qquad (3.4.3)$$

Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$400\lambda^2+50\lambda+1=0,$$

$$\lambda_1=-0{,}1\left(\text{с}^{-1}\right);\ \lambda_2=-0{,}025\left(\text{с}^{-1}\right).$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (3.4.3) будет иметь вид:

$$U_C(t)=U_{C\text{ св}}(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}=Ae^{-0{,}1t}+Be^{-0{,}025t}.$$

Контур имеет последовательное соединение, следовательно, ток на его элементах равный:

$$I_R(t)=I_L(t)=I_C(t)=C\frac{dU_C}{dt}=-0{,}1ACe^{-0{,}1t}-0{,}025BCe^{-0{,}025t}=$$

$$=-Ae^{-0{,}1t}-0{,}25Be^{-0{,}025t}.$$

Найдем коэффициенты A и B. С учетом второго закона коммутации, в начальный момент времени $t=0$ напряжение на конденсаторе $U_C(0)=E=80B$, $I_R=\dfrac{E}{R_1+R_2}=\dfrac{80}{10}=8$ А.

Тогда, $A+B=80$, $-A-0{,}25B=8$.

Откуда $A=-37\frac{1}{3}$, $B=117\frac{1}{3}$.

Частное решение будет иметь вид:

$$U_C(t) = -37\frac{1}{3}e^{-0,1t} + 117\frac{1}{3}e^{-0,025t}.$$

Определим напряжение на конденсаторе через 10 секунд после переключения ключа.

$$U_C(10) = -37\frac{1}{3}e^{-1} + 117\frac{1}{3}e^{-0,25} = 77,8B.$$

Напряжение и ток при разрядке конденсатора убывают по экспоненциальному закону (рис.24).

При этом ток разрядки отрицательный, так как направлен противоположно току зарядки конденсатора.

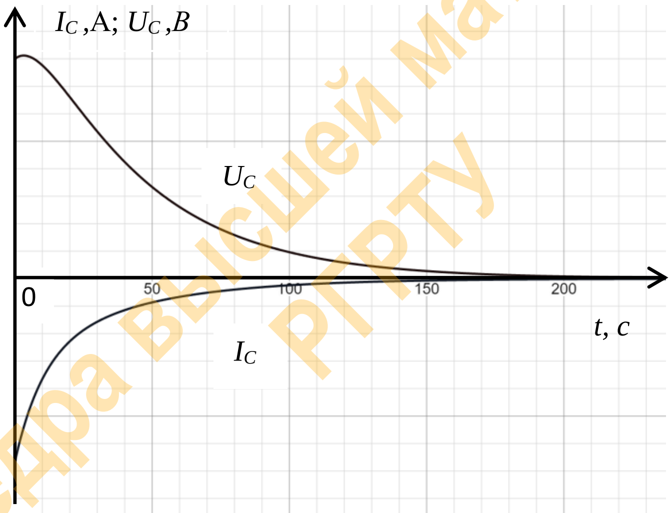


Рис.24. Изменение напряжения на конденсаторе и тока в цепи при разрядке конденсатора

Ответ: 77,8 В

Задача 3.5. В лаборатории проживает колония бактерий. На момент эксперимента их численность составляла 10^6 клеток, а через час их численность увеличилась в 2 раза. Найти функцию численности бактерий, если введенный химический препарат заставляет бактерии мутировать и изменяет скорость рождаемости следующим образом:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -y(t) - 2\frac{dy(t)}{dt},$$

где $y(t)$ – количество бактерий.

Решение

Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0. \tag{3.5.1}$$

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка.

Составим для него характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Корни действительные и равные:

$$k_1 = k_2 = -1\ \left(\text{ч}^{-1}\right).$$

Имеем частные решения:

$$y_1 = e^{k_1 t} = e^{-t}.$$

$$y_2 = te^{k_1 t} = te^{-t}$$

Тогда общее решение ЛОДУ (20.1) имеет вид:

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$$

Поскольку $y(0) = 10^6$, то получим $10^6 = C_1$.

По условию через час численность бактерий составила $2 \cdot 10^6$ клеток. Следовательно, так как $y(1) = 2 \cdot 10^6$, то

$$y(1) = 10^6e^{-1} + C_2e^{-1} = 2 \cdot 10^6,\ C_2 = 4{,}4 \cdot 10^6.$$

Подставив константы интегрирования в общее решение, получим частное решение ЛОДУ (3.5.1):

$$y(t) = 10^6 e^{-t} + 4{,}4 \cdot 10^6 t e^{-t}.$$

Таким образом, численность мутированных бактерий изменяется по полученному выше закону. Рассмотрим характер изменения численности на рис.25.

По графику видно, что в отличие от традиционного роста количества бактерий с течением времени до состояния сатурации, мутированные бактерии замедляют скорость размножения уже через час после начала наблюдений и их количество через 8 часов близко к нулю.

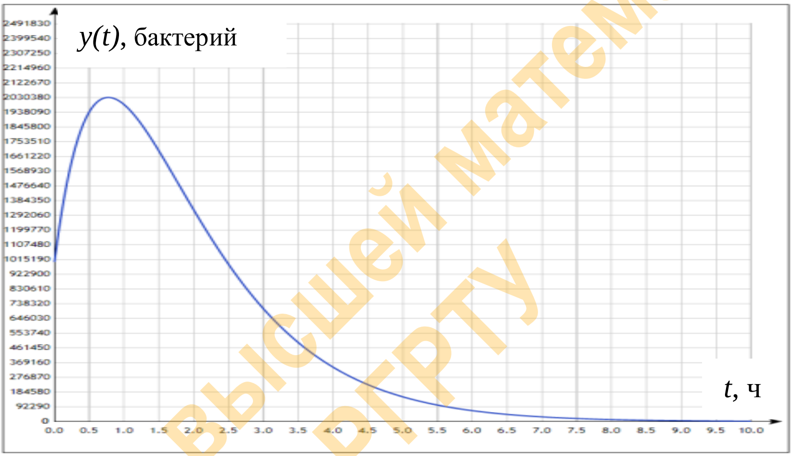


Рис.25. Изменение численности мутированных бактерий с течением времени

Ответ: $y(t) = 10^6 e^{-t} + 4{,}4 \cdot 10^6 t e^{-t}$ бактерий.

Задача 3.6. Потенциальная энергия свободной частицы $U(x)$, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме, стенки которой бесконечно высокие (рис.26.), имеет вид:

$$U(x) = \begin{cases} \infty\,, x < 0 \\ 0, 0 < x < a. \\ \infty,\ x > a \end{cases}$$

Определить вид волновых функций частицы, находящейся в одномерной потенциальной яме. Найти выражение для полной энергии частицы, движущейся в потенциальной яме.

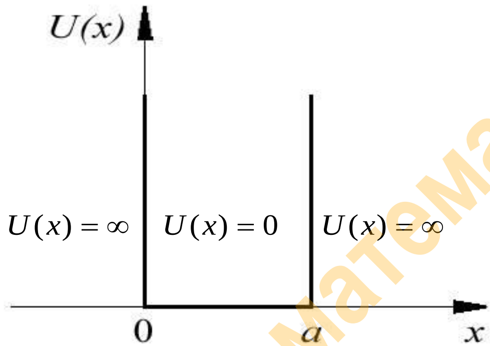


Рис. 26. Потенциальная энергия частицы *U(x)*

Решение. Для одномерного движения частицы вдоль оси x уравнение Шредингера имеет вид [4, С.169-192]:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-U(x)]\Psi=0, \qquad (3.6.1)$$

где Ψ – волновая функция частицы,

m – масса частицы, кг,

$\hbar = 6{,}58\cdot10^{-16}$ эВ · с – постоянная Дирака,

E – полная энергия частицы, эВ,

$U(x)$ – потенциальная энергия частицы, эВ.

В силу бесконечно большой потенциальной энергии вне ямы, уравнение (3.6.1) выполняется, если вне ямы волновая функция $\Psi(x)$ обращалась в ноль. С физической точки зрения, это означает, что частица не может выйти за пределы ямы, поскольку стенки являются для нее непроницаемыми. В силу непрерывности волновая функция $\Psi(x)$ должна обращаться в ноль и на границах ямы (при $x=0$ и при $x=a$): $\Psi(0)=0$, $\Psi(a)=0$.

Уравнение стационарных состояний Шредингера внутри ямы примет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0\text{, где } k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E.$$

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Найдем его общее решение.

Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$\lambda^2 + k^2 = 0, \quad \lambda^2 = -k^2, \ \lambda = \pm ki .$$

Тогда общее решение уравнения стационарных состояний Шредингера будет иметь вид гармонических функций:

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx .$$

Значения волновой функции на границах ямы позволяют определить константы A и B.

$\psi(0) = B\cos 0, \ B = 0$

$\psi(a) = A\sin ka = 0 .$

Данное условие выполняется при $ka = \pi n, \ n = 1, 2, ...$

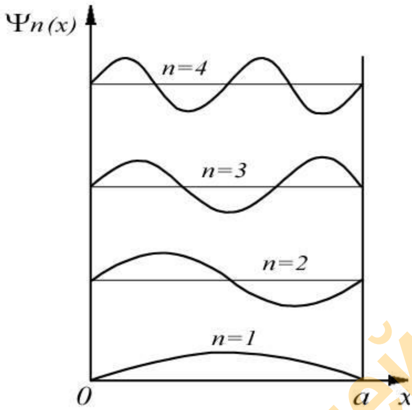
Подставим найденные значения в общее решение уравнения Шредингера: $\psi_n(x) = A\sin\dfrac{\pi n}{a}x, \ n = 1, 2, ...$ Значение $n = 0$ не учитывается, т.к. оно обнуляет волновую функцию, что соответствует отсутствию частицы в яме.

Найдем выражение для полной энергии частицы, движущейся в потенциальной яме с непроницаемыми стенками, подставив в выражение $k^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}E$ найденное условие $ka = \pi n, \ n = 1, 2, ...$:

$$\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \ E_n = \frac{(\pi n\hbar)^2}{2ma^2}, \ n = 1, 2, ... \qquad 3.6.2)$$

Число n, определяющее энергию частицы в яме, называется квантовым числом, а соответствующее ему значение E_n - уровнем энергии. Состояние частицы с наименьшей энергией, в данном случае с $n=1$, называется основным состоянием. Все остальные состояния являются возбужденными. Важной особенностью является то, что частица, находящаяся в потенциальной яме, может иметь только дискретные, квантованные, значения энергии, определяемые выражением (3.6.2) [4, С.169-192].

Вид волновой функции и энергетический спектр в зависимости от значения квантового числа представлены на рис. 27. и рис.28. соответственно.



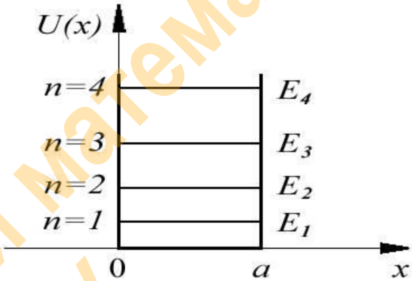


Рис.27. Волновые функции   Рис.28. Энергетический спектр

Ответ: $E_n = \dfrac{(\pi n\hbar)^2}{2ma^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

Задача 3.7. Найти ширину области пространственного заряда (ОПЗ) для резко несимметричного плоского *p-n* перехода (не учитывать вклад электронов и дырок в электрическое поле в ОПЗ) (Рис. 29).

Решение. Ширина области пространственного заряда (ОПЗ) $\delta = \delta_\text{p} + \delta_n$ зависит от концентрации донорных N_d и акцепторных N_a примесей в n – и p – полупроводниках.

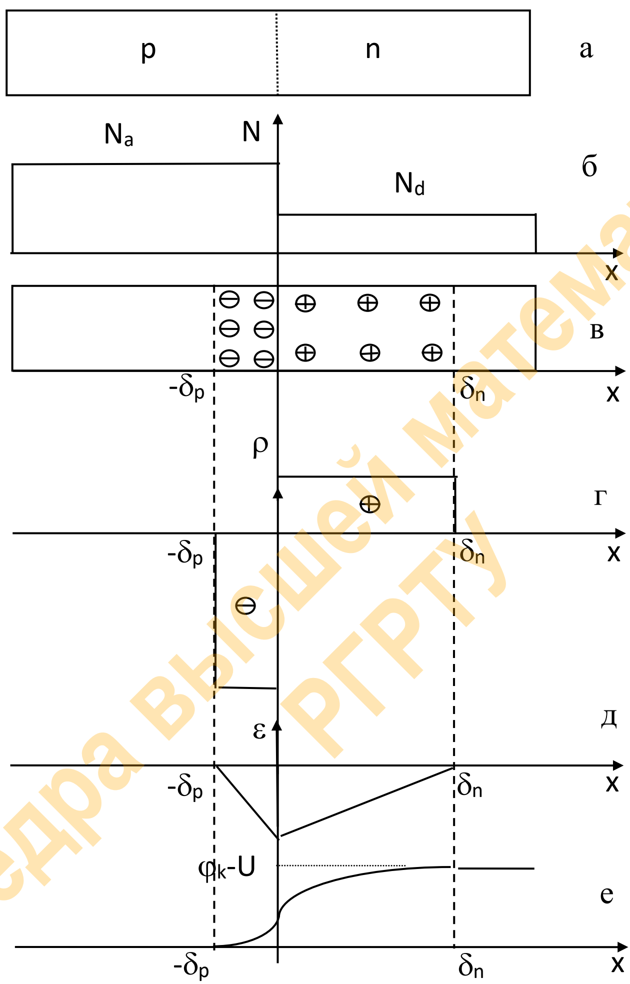


Рис. 29. Распределение концентрации примесей (б), плотности заряда (в, г), напряжённости электрического поля (д), потенциала (е) в p-n-переходе

Ширину ОПЗ можно определить из решения уравнения Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (3.7.1)$$

где $\rho(x)$ – плотность зарядов,

ε – диэлектрическая проницаемость полупроводника,

ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума.

Плотность заряда постоянная и определяется только концентрациями соответствующих примесей:

$$\rho_p = -eN_a,\ \rho_n = eN_d.$$

Вне слоя $\left(x < -\delta_p,\ x > \delta_n\right)$ электрическое поле отсутствует: $\varphi'(-\delta_p) = 0,\ \varphi'(\delta_n) = 0$.

Граничные условия вне слоя для потенциала можно представить следующим образом: $\varphi(-\delta_{\text{p}}) = 0; \quad \varphi(\delta_n) = \varphi_k - U$.

Уравнение (3.7.1) представляет собой дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка. Запишем его отдельно для распределения потенциала в n-области и в p-области соответственно.

$$\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} = -\frac{\rho_n}{\varepsilon\varepsilon_0},\ \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} = -\frac{\rho_p}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (3.7.2)$$

Найдем решения уравнений (3.7.2) путем последовательного интегрирования каждого из них.

$$\frac{d\varphi_n}{dx} = -\int \frac{\rho_n}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = -\frac{eN_d}{\varepsilon\varepsilon_0}\int dx = -\frac{eN_d}{\varepsilon\varepsilon_0}x + C_1,$$

$$\frac{d\varphi_p}{dx} = -\int \frac{\rho_p}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = \frac{eN_a}{\varepsilon\varepsilon_0}\int dx = \frac{eN_a}{\varepsilon\varepsilon_0}x + C_2.$$

Определив константы C_1, C_2 из граничных условий, получим:

$$\frac{d\varphi_n}{dx}=\frac{eN_d}{\varepsilon\varepsilon_0}(\delta_n-x),$$
$$\frac{d\varphi_p}{dx}=\frac{eN_a}{\varepsilon\varepsilon_0}(x+\delta_p). \qquad (3.7.3)$$

Проинтегрируем полученные уравнения еще раз.

$$\varphi_n=\int\frac{eN_d}{\varepsilon\varepsilon_0}(\delta_n-x)dx=-\frac{eN_d}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\delta_n-x)^2+C_3,$$
$$\varphi_p=\int\frac{eN_a}{\varepsilon\varepsilon_0}(x+\delta_p)dx=\frac{eN_a}{2\varepsilon\varepsilon_0}(x+\delta_p)^2+C_4.$$

Определив константы C_3, C_4 из граничных условий, получим:

$$\varphi_n=-\frac{eN_d}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\delta_n-x)^2+\varphi_k-U,$$
$$\varphi_p=\frac{eN_a}{2\varepsilon\varepsilon_0}(x+\delta_p)^2. \qquad (3.7.4)$$

В силу того, что $\varphi_p(0)=\varphi_n(0)$, получим из уравнений (3.7.4) равенство:

$$\frac{e}{2\varepsilon\varepsilon_0}(N_d\delta_n^2+N_a\delta_p^2)=\varphi_k-U. \qquad (3.7.5)$$

Кроме того, из равенства положительного и отрицательного заряда в ОПЗ следует, что $N_a\delta_p=N_d\delta_n$.

Тогда, с учетом последних двух равенств, получим ширину ОПЗ:

$$\delta=\delta_\text{p}+\delta_n=\sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0(N_a+N_d)(\varphi_k-U)}{eN_aN_d}}.$$

Ответ: $\delta=\sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0(N_a+N_d)(\varphi_k-U)}{eN_aN_d}}.$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Последовательная цепь (рис. 30) состоит из катушки индуктивностью L=200 мГн, резистора сопротивлением R=5 Ом, источника постоянного напряжения U=2 В. Определить длительность переходного процесса в цепи.

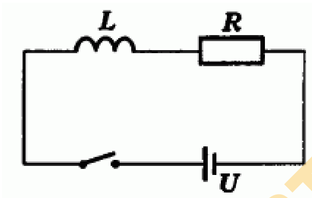


Рис. 30. Схема последовательной RL-цепи

2. Снижение вирусной нагрузки на организм можно описать формулой: $4\frac{d^2I}{dt^2}+4\frac{dI}{dt}+I=0$. Определить закон изменения количества копий вируса $I(t)$ с течением времени t, если в начальный момент времени нагрузка составляла 2 млн. копий/мл, а скорость изменения количества $I'(0)=0$.

3. Частица с энергией E движется в положительном направлении оси X и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U, причем $E<U$ (рис. 31). Определить плотность вероятности обнаружения частицы на расстоянии x от потенциального барьера.

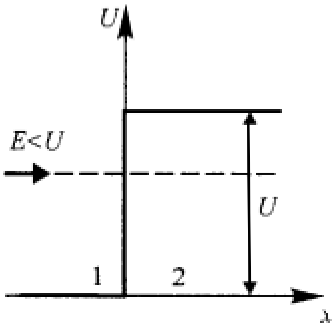


Рис. 31. Прямоугольный потенциальный барьер

4. Вывести уравнение, описывающее закон изменения тока в последовательной RL-цепи (рис. 32).

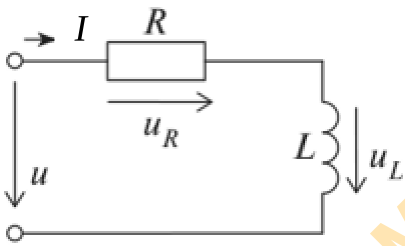


Рис. 32. Последовательная RL-цепь

5. Решить уравнение 3.2.3, полученное в задаче 3.2 для параллельной RLC-цепи.

Ответы:

1. 0,12 с
2. $I(t) = e^{-0,5t}(2+t)$
3. $|\psi_2(x)|^2 = \left|\dfrac{2k_1}{k_1 + i\beta}\right|^2 \cdot e^{-2\beta x}$, $k_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$.
4. $I(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{R}{L}t}$
5. 1) $R^2 > \dfrac{L}{4C}$, $U(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$.

   2) $R^2 = \dfrac{L}{4C}$, $U(t) = C_1 t e^{-\beta t} + C_2 e^{-\beta t}$,

   3) $R^2 < \dfrac{L}{4C}$,

   $$U(t) = e^{-\beta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t),\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}.$$

ГЛАВА 4

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

Задача 4.1. Частица ион гелия массой $m = 6{,}64 \times 10^{-27}$ кг движется по оси, совмещенной с осью Ох, отталкиваясь от точки $x = 0$ с силой $F_1 = 3mr_0$ и притягиваясь к точке $x = 1$ с силой $F_2 = 4mr_1$, где r_0 и r_1- расстояние до этих точек. Определить закон движения частицы с учетом начальных условий: $x(0) = 2; x'(0) = 0$.

Решение. Пусть в момент времени t частица находилась в точке $x(t)$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для сил, действующих на точку: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a}$.

В проекции на ось Ох: $3mr_0 + 4mr_1 = ma$,

$$3mx + 4m(1 - x) = mx''$$

После сокращения на m и приведения подобных членов, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$x'' + x = 4 . \qquad (4.1.1)$$

Найдем общее решение соответствующего ему линейного однородного уравнения: $x'' + x = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 1 = 0,\ k^2 = -1,\ k = \pm i$$

Тогда общее решение однородного уравнения примет вид:

$$\bar{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

Частное решение линейного неоднородного уравнения будем искать по виду правой части в виде: $\tilde{x} = A$.

Найдем $\tilde{x}''$ и подставим в уравнение (22.1): $0 + A = 4,\ A = 4$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (4.1.1) примет вид:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 4$$

Найдем C_1, C_2 из начальных условий:

$$x(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 + 4 = C_1 + 4 = 2,\ C_1 = -2.$$

$$x' = \left(C_1\cos t + C_2\sin t + 4\right)' = -C_1\sin t + C_2\cos t,$$

$$x'(0) = -C_1\sin 0 + C_2\cos 0 = C_2 = 0.$$

Получим частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1.1): $x = -2\cos t + 4$.

Таким образом, закон движения частицы ион гелия (рис.33):

$$x(t) = -2\cos t + 4\ (\text{мм}).$$

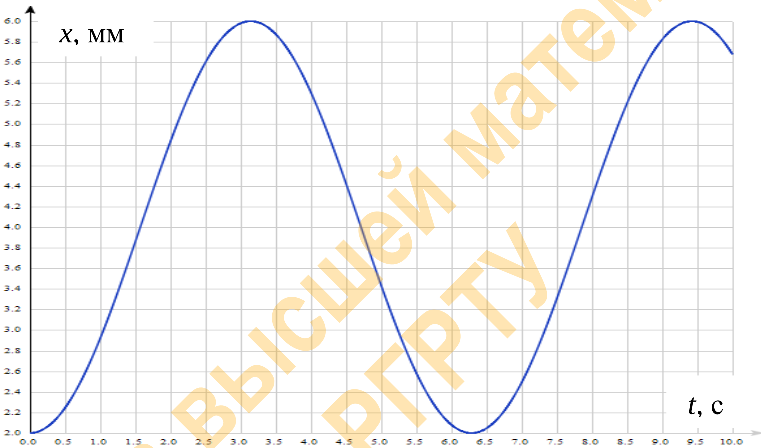


Рис.33. Движение частицы ион гелия

Ответ: $x = -2\cos t + 4$ мм.

Задача 4.2. К источнику переменного напряжения $U = U_m \sin \omega t$ подключается идеальный колебательный контур с индуктивностью L=1 Гн и емкостью C=100 пФ. При какой частоте ω источника колебания сила тока будет иметь неограниченно возрастающую со временем амплитуду?

Решение. Описанное в задаче явление неограниченного возрастания амплитуды гармонических колебаний называется резонансом. Фактически резонанс наступает в том случае, когда собственная частота колебательного контура $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, где L – индуктивность, Гн, C – емкость, пФ, совпадает с частотой колебаний источника тока.

Пусть $I(t)$ — это сила тока в цепи, А, а $q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t, Кл. Тогда напряжения на катушке U_L и на конденсаторе U_C составят:

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = I', \; U_C = \frac{q}{C} = \frac{q}{10^{-10}} = 10^{10} q.$$

Применим второй закон Кирхгофа [2, с.183-185]:

$$U_L(t) + U_C(t) = U,$$

$$I' + 10^{10} q = U_m \sin \omega t.$$

Дифференцируя, получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$I'' + 10^{10} I = \omega U_m \cos \omega t \qquad (4.2.1)$$

Составим ЛОДУ, соответствующее данному уравнению и найдем его общее решение.

$$I'' + 10^{10} I = 0.$$

Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 10^{10} = 0$.
Найдем корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \pm 10^5 i.$$

Тогда общее решение однородного уравнения примет вид:

$$\bar{I} = c_1 \cos 10^5 t + c_2 \sin 10^5 t,$$

представляющее собой колебания с амплитудой $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

Частное решение линейного неоднородного уравнения будем искать по виду правой части. Возможны два случая.

1 случай.

Если $\omega \neq 10^5$ Гц , то частное решение примет вид:

$$\tilde{I} = A\cos\omega t + B\sin\omega t \ .$$

При этом колебания, задаваемые данным выражением, будут иметь постоянную амплитуду $\sqrt{A^2+B^2}$. Что не удовлетворяет условию задачи.

2 случай.

Если частота $\omega = 10^5$ Гц, то частное решение будет иметь вид:

$$\tilde{I} = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \ .$$

Данное выражение задает колебания, имеющие непрерывно возрастающую с течением времени амплитуду $t\sqrt{A^2+B^2}$.

Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения (4.2.1) примет вид:

$$I = \overline{I} + \tilde{I} = c_1\cos 10^5 t + c_2\sin 10^5 t + t(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Таким образом, сила тока в цепи будет иметь неограниченно возрастающую амплитуду и изменяться по закону:

$$I = (c_1 + At)\cos 10^5 t + (c_2 + Bt)\sin 10^5 t.$$

Ответ: Источник ЭДС должен генерировать напряжение частотой $\omega = 10^5$ Гц.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. На колебательную систему, состоящую из груза массы m и пружины, действует внешняя сила с частотой ω: $F = F_0 \cos \omega t$. Процесс можно описать уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$, где ω_0 – собственная частота колебаний незатухающего осциллятора, Гц. Найти закон изменения смещения во времени $x(t)$.

2. К источнику переменного напряжения $U = U_m \sin \omega t$ подключен идеальный колебательный контур с индуктивностью L=0,1 Гн и емкостью C=40 мкФ. Определить закон изменения силы тока.

Ответы:

1. $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$,

где φ_0 − начальная фаза колебаний в момент $t = 0$.

2. $I(t) = C_1 \cos 0{,}5 \cdot 10^{-3} t + C_2 \sin 0{,}5 \cdot 10^{-3} t +$
$+ t(A\cos \omega t + B\sin \omega t).$

ГЛАВА 5

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задача 5.1. Размер популяций тли T и божьей коровки B моделируются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -2T + 4B, \\ \dfrac{dB}{dt} = T - 2B. \end{cases}$$

Определить, как меняется численность обеих популяций с течением времени, если в начальный момент на изучаемой территории было зафиксировано 1000 особей тли и 200 особей божьей коровки.

Решение. Из первого уравнения заданной системы выразим B.

$$B = \frac{1}{4}\frac{dT}{dt} + \frac{1}{2}T. \qquad (5.1.1)$$

Продифференцируем данное выражение по t.

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{4}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dT}{dt}.$$

Подставим выражения для B и $\dfrac{dB}{dt}$ во второе уравнение системы.

$$\frac{1}{4}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dT}{dt} = T - \frac{1}{2}\frac{dT}{dt} - T,$$

$$\frac{1}{4}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{dT}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + 4\frac{dT}{dt} = 0.$$

Получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Найдем его общее решение.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+4k=0,\ k(k+4)=0,$$
$$k_1=0,\ k_2=-4.$$

Решением являются действительные различные корни. Следовательно, общее решение линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$T(t)=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}=C_1+C_2e^{-4t}.$$

Найдем $B(t)$, продифференцировав полученное решение и подставив в выражение (5.1.1).

$$\frac{dT}{dt}=-4C_2e^{-4t},$$

$$B(t)=\frac{1}{4}\left(-4C_2e^{-4t}\right)+\frac{1}{2}\left(C_1+C_2e^{-4t}\right)=$$
$$=-C_2e^{-4t}+\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{-4t}=\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2e^{-4t}.$$

Найдем константы C_1 и C_2.

По условию в начальный момент времени $T(0)=1000,\ B(0)=200.$ Тогда

$$\begin{cases} T(0)=C_1+C_2=1000, \\ B(0)=\dfrac{1}{2}C_1-\dfrac{1}{2}C_2=200, \end{cases}$$

$$C_1=700,\ C_2=300.$$

Таким образом, законы динамики популяций тли и божьей коровки примут вид:

$$\begin{cases} T(t)=700+300e^{-4t}, \\ B(t)=350-150e^{-4t}. \end{cases}$$

Популяция тли убывает от первоначального размера в 1000 особей до предельного размера в 700 особей. В то же время популяция божьей коровки возрастает от первоначального размера в 200 особей до предельного размера в 350 особей. Данное взаимодействие позволяет сделать вывод о симбиозе двух рассматриваемых видов (рис.34).

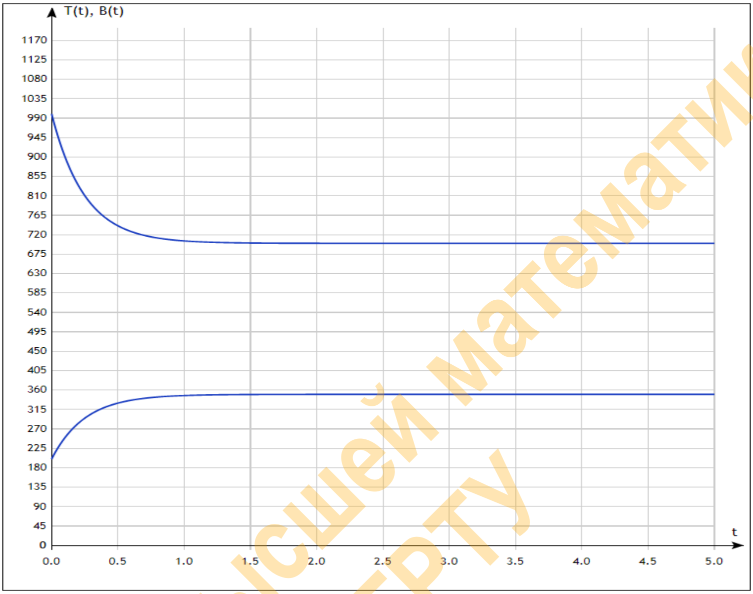


Рис.34. Изменение численности популяций тли и божьей коровки

Ответ: $\begin{cases} T(t) = 700 + 300e^{-4t}, \\ B(t) = 350 - 150e^{-4t}. \end{cases}$

Задача 5.2. Имеются два контура (рис.35). Первый контур состоит из источника переменного напряжения $U(t) = 200\sin 40t$ и индуктивности 0,8 Гн, а второй — из индуктивности 6 Гн и сопротивления 100 Ом. Катушки находятся в состоянии взаимоиндукции с коэффициентом L_k =2 Гн. Найти амплитуду напряжения на сопротивлении второго контура при установившемся режиме.

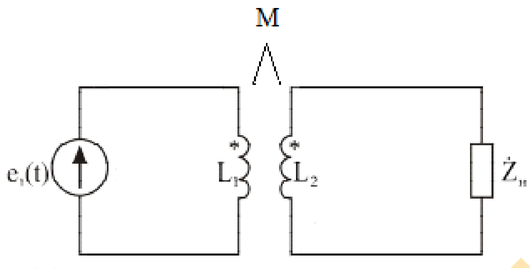


Рис.35. Контуры

Решение. Пусть $I_1(t)$ и $I_2(t)$ — силы тока в первом и втором контурах соответственно, А.

Тогда напряжение на катушке первого контура U_{L_1} составляет:

$$U_{L_1} = L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_k \frac{dI_2}{dt} = 0,8 \frac{dI_1}{dt} + 2 \frac{dI_2}{dt},$$

напряжение на катушке второго контура:

$$U_{L_2} = L_k \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} = 2 \frac{dI_1}{dt} + 6 \frac{dI_2}{dt}.$$

По второму закону Кирхгофа для первого контура:

$$U_{L_1} = E(t),\ 0,8 \frac{dI_1}{dt} + 2 \frac{dI_2}{dt} = 200 \sin 40t.$$

Для второго контура сумма напряжений на катушке и резисторе равна нулю:

$$U_{L_2}(t) + U_R(t) = 0,\ 2 \frac{dI_1}{dt} + 6 \frac{dI_2}{dt} + 100 I_2 = 0$$

Получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}8\dfrac{dI_1}{dt}+2\dfrac{dI_2}{dt}=200\sin 40t, \\ 2\dfrac{dI_1}{dt}+6\dfrac{dI_2}{dt}+100I_2=0. \end{cases}$$

Домножим первое уравнение системы на 2,5 и вычтем его из второго уравнения. Получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$I_2{}' + 250I_2 = -500\sin 40t \qquad (5.2.1)$$

Составим однородное уравнение, соответствующее данному, и найдем его общее решение.

$$\frac{dI_2}{dt} + 250I_2 = 0,\ \frac{dI_2}{dt} = -250I_2,\ \frac{dI_2}{I_2} = -250dt,$$

$$\ln I_2 = -250t + \ln C,\ I_2 = Ce^{-250t}.$$

Воспользуемся методом Лагранжа вариации произвольной постоянной. Общее решение уравнения (5.2.1) будем искать в виде $I_2 = C(t)e^{-250t}$.

Продифференцируем данное решение:

$$I_2{}' = C'(t)e^{-250t} - 250C(t)e^{-250t}$$

Подставим найденные выражения в уравнение (5.2.1):

$$C'(t)e^{-250t} - 250C(t)e^{-250t} + 250C(t)e^{-250t} = -500\sin 40t,$$

$$C'(t)e^{-250t} = -500\sin 40t,\ C'(t) = -500e^{250t}\sin 40t$$

Решим полученное уравнение относительно *C(t)*:

$$C(t) = -500\int e^{250t}\sin 40t dt.$$

Получили циклический интеграл. Решим его по частям.

$$\underline{\int e^{250t}\sin 40t dt} = \left| \begin{matrix} u=e^{250t} & du=250e^{250t}dt \\ dv=\sin 40t dt & v=-\frac{1}{40}\cos 40t \end{matrix} \right| = -\frac{1}{40}e^{250t}\cos 40t +$$

$$+\frac{25}{4}\int e^{250t}\cos 40t dt = \left| \begin{matrix} u=e^{250t} & du=250e^{250t}dt \\ dv=\cos 40t dt & v=\frac{1}{40}\sin 40t \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{40}e^{250t}\cos 40t + \frac{5}{32}e^{250t}\sin 40t - \frac{625}{16}\underline{\int e^{250t}\sin 40t dt}.$$

$$\frac{641}{16}\int e^{250t}\sin 40t dt = -\frac{1}{40}e^{250t}\cos 40t + \frac{5}{32}e^{250t}\sin 40t + \tilde{C},$$

Таким образом,

$$C(t) = \frac{200}{641}e^{250t}\cos 40t - \frac{1250}{641}e^{250t}\sin 40t + \bar{C}, \text{ где } \bar{C} = -\frac{8000}{641}\tilde{C}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (5.2.1) для силы тока второго контура имеет вид:

$$I_2(t) = \frac{50}{641}\left(4\cos 40t - 25\sin 40t\right) + \bar{C}e^{-250t},$$

а установившийся режим достигается при $\bar{C} = 0$.

В данном случае $I_2(t) = \frac{50}{641}\left(4\cos 40t - 25\sin 40t\right)$.

По закону Ома напряжение на резисторе $U_R = RI(t)$

Следовательно, напряжение на резисторе второго контура:

$$U_R = RI_2(t) = \frac{5000}{641}\left(4\cos 40t - 25\sin 40t\right) =$$

$$= 31{,}2\cos 40t - 195\sin 40t.$$

Амплитуда напряжения на сопротивлении составляет: $\sqrt{31{,}2^2 + 195^2} \approx 197{,}4$ В.

Ответ: 197,4 В.

Задача 5.3. Пусть $A_1 \xrightarrow{k} A_2$ — прямая реакция 2-го порядка, где k — константа скорости реакции $A_1 \to A_2$, A_1 — исходное вещество, A_2 — продукт.

Обозначим через $x_1(t)\ \frac{\text{моль}}{\text{дм}^3}$, $x_2(t)\ \frac{\text{моль}}{\text{дм}^3}$ концентрации веществ A_1, A_2 соответственно, тогда уравнение кинетики прямой реакции 2-го порядка имеет вид:

$$\begin{cases} x_1' = -kx_1^2 \\ x_2' = kx_1^2 \end{cases}$$

Найти функции концентраций при условии, что $k = 0,5\frac{\text{дм}^3}{\text{моль}\cdot\text{мин}}$.

Замечание.

При изучении задач химической кинетики, связанных с последовательными прямыми и параллельными реакциями, протекающими при постоянной температуре, в силу закона действия масс и принципа независимости приходят к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j\neq i}^{n} k_{ij} x_j^{a_{ij}} - \sum_{m\neq i}^{n} k_{mi} x_i^{mi}, i = 1,\dots,n,$ где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор концентраций реагирующих веществ $A_i (i = 1,\dots,n)$ в момент времени $t \geq 0$, $k_{ij} \geq 0$ — константы скоростей реакций $A_j \to A_i, i \neq j$,

α_{ij} — порядок реакций (целые положительные числа).

Решение. Рассмотрим первое уравнение заданной системы.

$$\frac{dx_1}{dt} = -0,5x_1^2,$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1^2} = -0,5\int dt,$$

$$-\frac{1}{x_1}-C_1=-0,5t,$$

$$x_1=\frac{2}{t-2C_1}.$$

Подставим найденное общее решение во второе уравнение исходной системы.

$$x_2'=0,5\left(\frac{2}{t-2C_1}\right)^2,$$

$$x_2'=\frac{2}{\left(t-2C_1\right)^2},$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{2}{(t-2C_1)^2},$$

$$\int dx_2=\int\frac{2dt}{(t-2C_1)^2}=\left|\begin{matrix}u=2C_1-t\\ du=-dt\end{matrix}\right|=-2\int\frac{1}{u^2}du=\frac{2}{u}+C_2.$$

Проведя обратную замену $u=2C_1-t$, получим

$$x_2=\frac{2}{2C_1-t}+C_2$$

Ответ: $x_1=\dfrac{2}{t-2C_1}\ \dfrac{\text{моль}}{\text{дм}^3}$, $x_2=\dfrac{2}{2C_1-t}+C_2\ \dfrac{\text{моль}}{\text{дм}^3}$.

Задача 5.4. На электрической схеме (рис.36) равные индуктивности *L*, ёмкость *C* и сопротивление нагрузки *R* подключены к источнику напряжения, изменяющемуся по закону $U(t)=U\cos\omega t.$ Выяснить характер колебаний падения напряжения на нагрузке, ограничиваясь установившимся процессом.

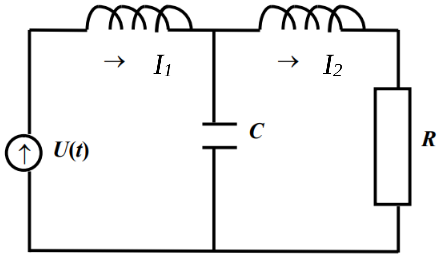


Рис.36. Схема электрической цепи

Решение. Пусть I_1, I_2 — токи в левом и правом контурах соответственно. Тогда ток через ёмкость равен $I_2 - I_1$.

По закону Кирхгофа получим систему дифференциальных уравнений относительно токов I_1, I_2:

$$\begin{cases} L\dfrac{dI_1}{dt} + L\dfrac{dI_2}{dt} + RI_2 = U(t); \\ L\dfrac{dI_2}{dt} + RI_2 + \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t (I_2 - I_1)dt = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом исключения. Дифференцируем по t второе уравнение системы и выразим I_1:

$$L\frac{d^2I_2}{dt^2} + R\frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C}(I_2 - I_1) = 0,$$

$$I_1 = LC\frac{d^2I_2}{dt^2} + RC\frac{dI_2}{dt} + I_2.$$

Полученное уравнение ещё раз продифференцируем по t и подставим в первое уравнение системы.

$$L^2C\frac{d^3I_2}{dt^3} + LRC\frac{d^2I_2}{dt^2} + 2L\frac{dI_2}{dt} + RI_2 = U(t).$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное дифференциальное уравнение:

$$L^2C\frac{d^3I_2}{dt^3}+LRC\frac{d^2I_2}{dt^2}+2L\frac{dI_2}{dt}+RI_2=0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$L^2Ck^3+LRCk^2+2Lk+R=0$$

В силу того, что все слагаемые левой части уравнения положительны, оно имеет только комплексные корни. Причем, у данных корней действительные части отрицательные. Следовательно, все слагаемые общего решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному неоднородному уравнению, содержат экспоненты с отрицательным показателем и поэтому быстро убывают с ростом t. Таким образом, установившийся процесс определяется частным решением исходного неоднородного уравнения.

Будем искать частное решение неоднородного дифференциального уравнения по виду правой части. Поскольку правая часть $U(t)=U\cos\omega t$, то частное решение ищем в виде:

$$I_2=\tilde{I}_2=A\cos\omega t+B\sin\omega t\,.$$

Дифференцируем по t полученное уравнение.

$$\frac{dI_2}{dt}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t,$$

$$\frac{d^2I_2}{dt^2}=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t,$$

$$\frac{d^3I_2}{dt^3}=A\omega^3\sin\omega t-B\omega^3\cos\omega t.$$

Подставим в исходное неоднородное уравнение полученные выражения.

$$L^2C\left(A\omega^3\sin\omega t - B\omega^3\cos\omega t\right) + LRC\left(-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t\right) +$$
$$+2L\left(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t\right) + R\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) = U(t).$$
$$A(-2L\omega + L^2C\omega^3)\sin\omega t + B(R - LRC\omega^2)\sin\omega t +$$
$$+A(R - LRC\omega^2)\cos\omega t + B(-2L\omega + L^2C\omega^3)\cos\omega t = U\cos\omega t.$$

В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A(-2L\omega + L^2C\omega^3) + B(R - LRC\omega^2) = 0, \\ A(R - LRC\omega^2) + B(-2L\omega + L^2C\omega^3) = U. \end{cases}$$

Обозначим $\alpha = -2L\omega + L^2C\omega^3$, $\beta = R - LRC\omega^2$, тогда

система примет вид: $\begin{cases} \alpha A + \beta B = 0, \\ \beta A - \alpha B = U, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\beta U}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ B = \dfrac{-\alpha U}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{cases}$

Найдём амплитуду решения I_2 как $\sqrt{A^2 + B^2}$, т.е.

$$|\gamma| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{\beta^2U^2}{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2} + \frac{\alpha^2U^2}{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2}} = \frac{|U|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

или

$$|\gamma| = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|U|}{\sqrt{L^2\omega^2(LC\omega^2 - 2)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}.$$

В соответствии с законом Ома $U_2 = RI_2$.

Тогда падение напряжения на нагрузке можно получить из последнего уравнения умножением обеих частей равенства на *R*.

Выясним влияние частоты колебаний ω на отношение амплитуд напряжения на нагрузке к выходному напряжению.

При малых частотах, когда $\omega << \dfrac{1}{LC}$, $\omega \to 0$ величинами порядка ω^2 и выше можно пренебречь. Тогда $|\gamma| \to 1$.

То есть колебания малой частоты проходят через схему, практически не изменяя амплитуды.

Для больших частот, когда $\omega >> \dfrac{1}{LC}$, $\omega \to 0$ главным членом подкоренного выражения будет член со старшей степенью ω. Для таких частот $|\gamma| \to 0$.

То есть колебания высокой частоты практически не проходят через данную схему.

Представленная зависимость (рис.37) характерна для фильтров низких частот, которые пропускают низкие и почти не пропускают высокие частоты.

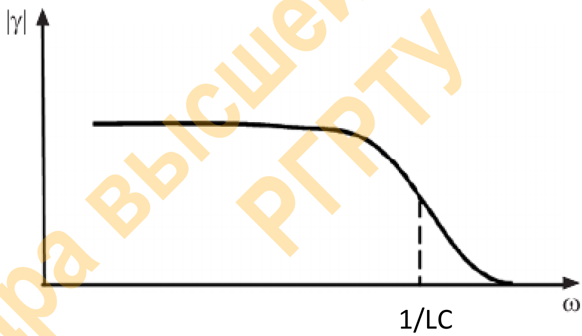


Рис.37. Амплитудно-частотная характеристика фильтров низких частот

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Имеются два контура (рис.38). Первый контур состоит из источника переменного напряжения $U(t) = 50\sin 40t$ и индуктивности 2,7 Гн, а второй — из индуктивности 5,1 Гн и сопротивления 200 Ом. Катушки находятся в состоянии взаимоиндукции с коэффициентом L_k =3,7 Гн. Найти амплитуду напряжения на сопротивлении второго контура при установившемся режиме.

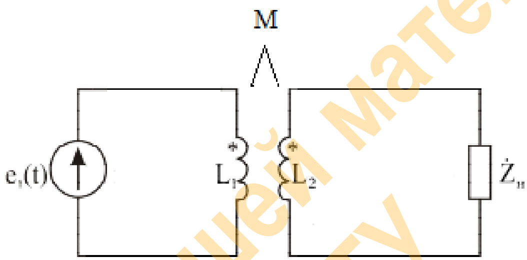


Рис.38. Контуры

2. В некоторой химической реакции вещество C разлагается на два вещества – x и y. Скорость образования каждого из продуктов разложения пропорциональна наличному количеству вещества C. Найти зависимость x и y от времени, если в начале процесса $C = 1$, $x = 0, y = 0,$ а по истечении одного часа $C = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{8}, y = \frac{3}{8}$.

3. Преобразование радиоактивных веществ происходит со скоростью, пропорциональной наличному количеству данного вещества. RaB преобразуется в RaC с такой скоростью, что половина количества RaB оказывается преобразованной по истечении 27 мин. В свою очередь полвина вещества RaC преобразуется в другое вещество в течение 19,5 мин. Принимая первоначальное количество RaB за единицу, найти, какое количество RaB и RaC будем иметь по истечении 1 часа.

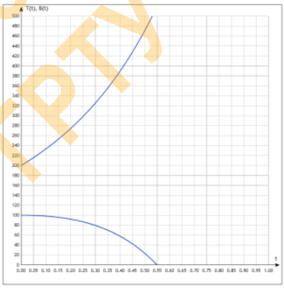
4. Размер конкурирующих популяций черной крысы B и серой крысы G моделируются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dB}{dt} = 2B - G, \\ \dfrac{dG}{dt} = -B + 2G. \end{cases}$$

Определить, как меняется численность конкурирующих популяций с течением времени, если в начальный момент на изучаемой территории было зафиксировано 100 особей черной крысы и 200 особей серой крысы. Изобразить графически.

Ответы:

1. 68,52 В
2. $x = \dfrac{1}{4}(1 - 2^{-t}); y = \dfrac{3}{4}(1 - 2^{-t})$.
3. $RaB = 0{,}124,\ RaC = 0{,}249$.
4. $\begin{cases} B(t) = 150e^{t} - 50e^{3t}, \\ G(t) = 150e^{t} + 50e^{3t}. \end{cases}$



Библиографический список

1. Бухенский К.В., Елкина Н.В., Маслова Н.Н., Ципоркова К.А. Опорные конспекты по высшей математике. Часть 2: учеб. пособие. Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 240с
2. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: 1983.
3. Мануйлов А. В., Родионов В. И. Основы химии. Интернет-учебник. – [Электронный ресурс] https://hemi.nsu.ru/index.htm
4. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Квантовая физика: учеб. Пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 496 с.
5. ПОЛЕВЫЕ ТРАНЗИСТОРЫ: Составители С.В. Тихов, П.А. Шиляев. Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 28 с.
6. Савельев И.В. Курс общей физики. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. Учебник. - СПб.: Издательство «Лань», 2019. – 500 с.
7. Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – М.: «Академия», 2006. – 560 с.
8. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: Учебник. Часть1. – 10-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 448 с.

Кострова Юлия Сергеевна

Ревкова Лариса Сергеевна

Бодрова Ирина Валерьевна

Дифференциальные уравнения в задачах
электротехники и биохимической инженерии. Практикум

Редактор
Корректор
Подписано в печать . Формат бумаги 60x84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 6,25.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.