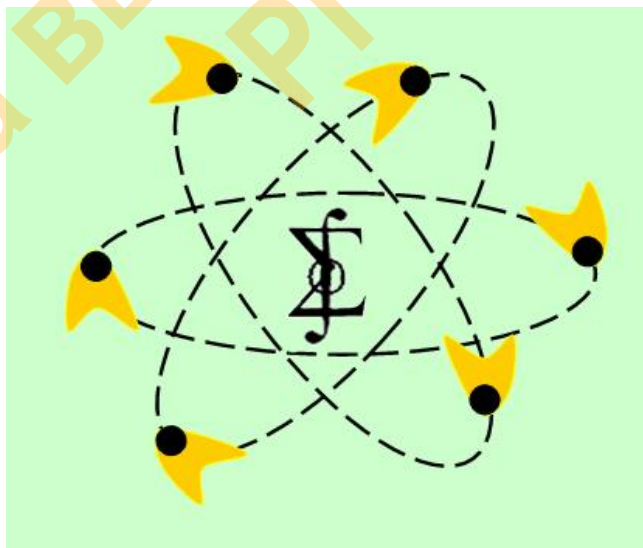


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

**И.В. БОДРОВА, В.В. ГРИШИНА, Ю.С. КОСТРОВА,
А.В. КУЗНЕЦОВ, Т.Л. ЛЬВОВА, Л.С. РЕВКОВА**

РЯДЫ: ТЕОРИЯ, ПРАКТИКА, ПРИЛОЖЕНИЯ



Рязань 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им.В.Ф. Уткина

И.В. БОДРОВА, В.В. ГРИШИНА, Ю.С. КОСТРОВА,
А.В. КУЗНЕЦОВ, Т.Л. ЛЬВОВА, Л.С. РЕВКОВА

РЯДЫ: ТЕОРИЯ, ПРАКТИКА, ПРИЛОЖЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*РЕКОМЕНДОВАНО
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИМ СОВЕТОМ ФГБОУ ВО
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.Ф. УТКИНА»
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ ВСЕХ
ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
(КВАЛИФИКАЦИЯ: БАКАЛАВР, МАГИСТР, СПЕЦИАЛИТЕТ)*

Рязань 2022

УДК 517.5

Ряды: теория, практика, приложения: учеб. пособие / И.В. Бодрова, В.В. Гришина, Ю.С. Кострова, А.В. Кузнецов, Т.Л. Львова, Л.С. Ревкова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2022. – 100 с.

Содержит необходимые теоретические сведения по темам «Числовые ряды», «Функциональные ряды», «Ряды Фурье». Приведены доказательства теорем, образцы решения типовых задач и задания для самостоятельной работы, к которым даны ответы.

Предназначено студентам, обучающимся по направлениям подготовки 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 11.03.01 «Радиотехника», 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы», и соответствует действующим Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования.

Библиогр.: 7 назв.

Числовые ряды, признаки сходимости; функциональные ряды, область сходимости, равномерная сходимость, степенные ряды, ряды Тейлора и Маклорена; ряды Фурье, интеграл Фурье, преобразование Фурье

Печатается по решению научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. Нелюхин), кафедра электронных приборов Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (канд. техн. наук, доц. А.Е. Серебряков), кафедра математики Института физико-математических и компьютерных наук ФГБОУ «Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина» (канд. физ.-мат. наук, доц. В.А. Ковалёв)

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ	5
1.1. Числовые ряды. Основные понятия.....	5
1.2. Свойства числовых рядов.....	8
1.3. Необходимый признак сходимости ряда.....	9
1.4. Гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле).....	11
1.5. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.....	13
1.5.1. Первый признак сравнения.....	13
1.5.2. Второй признак сравнения.....	15
1.5.3. Признак сходимости Даламбера.....	18
1.5.4. Радикальный признак сходимости Коши.....	21
1.5.5. Интегральный признак сходимости Коши.....	23
1.6. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.....	26
1.7. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость.....	30
1.8. Комплексные числовые ряды.....	34
2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.....	38
2.1. Определение функционального ряда. Область сходимости.....	38
2.2. Равномерная сходимость функционального ряда.....	42
2.3. Почленное интегрирование функциональных рядов.....	46
2.4. Почленное дифференцирование функциональных рядов.....	48
2.5. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости степенного ряда.....	50
2.6. Равномерная сходимость степенного ряда в круге его сходимости.....	54
2.7. Вещественные степенные ряды. Интервал сходимости вещественного степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена.....	55
2.8. Приложения степенных рядов.....	60
2.8.1. Вычисление значений функций с помощью ряда Маклорена.....	60
2.8.2. Приближенное вычисление определенных интегралов при помощи степенных рядов.....	62
2.8.3. Вычисление пределов функций.....	63
2.8.4. Решение дифференциальных уравнений.....	63
2.9. Прикладные приложения. Основы теории возмущений на примере решения алгебраического уравнения.....	64

3. РЯДЫ ФУРЬЕ.....	68
3.1. Ортогональные и ортонормированные системы функций.....	68
3.2. Ряды и коэффициенты Фурье. Теорема Дирихле.....	71
3.3. Физическое истолкование разложения функции в тригонометрический ряд Фурье.....	72
3.4. Разложение 2π -периодических функций в тригонометрический ряд Фурье.....	73
3.5. Разложение в ряд Фурье 2π -периодических четных и нечетных функций.....	77
3.6. Сдвиг отрезка разложения.....	79
3.7. Изменение длины отрезка интегрирования. Разложение в ряд Фурье 2ℓ -периодических функций.....	80
3.8. Разложение в ряд Фурье непериодической функции.....	82
3.9. Ряд Фурье в комплексной форме.....	86
3.10. Интеграл Фурье.....	89
3.11. Преобразование Фурье.....	92
3.12. Прикладные задачи, связанные с применением ряда Фурье и преобразования Фурье.....	95
Библиографический список.....	99

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Числовые ряды. Основные понятия

Определение 1. Числовым рядом называется выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Действительные или комплексные числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – члены числового ряда; u_n – общий или n -й член числового ряда, который является функцией от его номера, $u_n = f(n)$.

Частичные суммы первых членов числового ряда

$S_1 = u_1$; $S_2 = u_1 + u_2$; $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$; ...; $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$; ...
составляют последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$.

Определение 2. Суммой ряда S называется предел последовательности его частичных сумм при $n \rightarrow \infty$, если этот предел существует и конечен:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (1.1)$$

Если ряд имеет конечную сумму (1.1), его называют *сходящимся*, в противном же случае (т.е. если сумма бесконечна или не существует) *расходящимся*.

Говорят также: ряд *сходится* или ряд *расходится*.

Примеры некоторых числовых рядов:

1. Ряд $0 + 0 + 0 + \dots$ сходится, так как его сумма равна нулю: $S = 0$.
2. Ряд $1 + 1 + 1 + \dots$ расходится, так как его сумма равна бесконечности.
3. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расходится, так как предела частичных сумм не существует (сумма четного числа членов ряда равна нулю, сумма нечетного числа – единице).

Пример 1. Задан общий член ряда $u_n = \frac{n}{2^n + 1}$. Написать первые три члена ряда.

Общий член u_n можно считать функцией натурального аргумента, подставляя вместо n последовательно 1, 2, 3, получаем соответствующие члены ряда:

$$\begin{aligned} n=1; \quad u_1 &= \frac{1}{2^1 + 1} = \frac{1}{3}; \\ n=2; \quad u_2 &= \frac{2}{2^2 + 1} = \frac{2}{5}; \\ n=3; \quad u_3 &= \frac{3}{2^3 + 1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ряд можно записать в виде:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{n}{2^n + 1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + 1}.$$

Пример 2. Найти общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots$.

Числители каждого члена ряда – последовательные нечетные положительные числа, их общий вид $(2n-1)$. Знаменатели – степени числа 2, их показатели – номер члена, общий вид знаменателя 2^n . Таким образом, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ – общий член ряда.

Пример 3. Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, если он сходится.

Имеем $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Представим u_n в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами A и B :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Найдем A и B :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}.$$

Дроби равны, знаменатели их одинаковы, следовательно, равны и числители:

$$1 = A(n+1) + Bn.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n :

$$n^1: \quad A + B = 0,$$

$$n^0: \quad A = 1,$$

откуда $A=1$, $B=-1$. Общий член принимает вид $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, тогда его

члены можно записать так:

$$u_1 = 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}; \quad u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \dots$$

Частичная сумма ряда:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Найдем } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Итак, предел последовательности частичных сумм ряда существует и конечен, следовательно, ряд сходится и его сумма $S = 1$.

Пример 4. Исследовать сходимость числового ряда $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ по определению сходимости числового ряда.

Члены ряда образуют геометрическую прогрессию, поэтому такой числовой ряд называется геометрическим.

Если $q \neq 1$, то n -я частичная сумма ряда выражается формулой

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Вычислим пределы S_n в зависимости от знаменателя прогрессии q :

1) если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1} \right) = \frac{a}{1-q}$, ряд сходится и его

сумма является суммой бесконечно убывающей прогрессии $S = \frac{a}{1-q}$;

2) если $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ и ряд расходится;

3) если $q = 1$, то заданный ряд принимает вид $a + a + a + \dots$, $S_n = na$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$, ряд расходится;

4) если $q = -1$, заданный ряд принимает вид $a - a + a - \dots + (-1)^{n-1}a + \dots$, тогда $S_{2k} = 0$; $S_{2k+1} = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, ряд расходится.

Таким образом, геометрический ряд сходится к сумме $S = \frac{a}{1-q}$, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$.

Пример 5. Найти общий член ряда и исследовать числовой ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ на сходимость по определению.

Данный числовой ряд является суммой бесконечного числа членов геометрической прогрессии, $a = 1$, $q = -\frac{1}{2}$. Следовательно, общий член данного ряда является n -м членом этой геометрической прогрессии $u_n = aq^{n-1}$, то есть $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ или $u_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Сумма этого ряда конечна и равна $S = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$, следовательно, ряд является сходящимся.

Пример 6. Исследовать на сходимость числовой ряд по определению сходимости $\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$.

Найдем частичную сумму ряда S_n , используя свойство логарифмов:

$$S_n = \ln \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1).$$

Сумма числового ряда есть предел частичной суммы ряда (1.1)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, следовательно, данный числовой ряд расходится.

1.2. Свойства числовых рядов

Свойство 1. Если в ряде $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ отбросить конечное число членов, то полученный ряд и исходный ряд сходятся или расходятся одновременно.

Ряд, полученный из данного ряда отбрасыванием первых его n членов, называется n -м остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и обозначается $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$.

Следствие

Ряд и его остаток либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Свойство 2. Если сходится ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ и его сумма равна S , то сходится ряд $\alpha u_1 + \alpha u_2 + \dots + \alpha u_n + \dots$ и его сумма равна αS . Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ при $\alpha \neq 0$ также расходится.

Доказательство

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha u_1 + \alpha u_2 + \dots + \alpha u_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha S$. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Предположим обратное, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ сходится. Следовательно, имеет конечную сумму $S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha S_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{\alpha}$.

То есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, что противоречит условию.

Свойство 3. Если сходятся ряды $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ и $v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$ и суммы их соответственно равны S_1 и S_2 , то сходится ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и его сумма равна $S_1 + S_2$.

Доказательство

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n + v_1 + v_2 + \dots + v_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{1n} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Следствие

Сумма или разность сходящегося и расходящегося числовых рядов есть расходящийся числовой ряд.

При этом следует заметить, что сумма или разность двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Задачи для самостоятельного решения

Для каждого ряда записать формулу частичной суммы S_n , найти $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ и сделать вывод о сходимости или расходимости исследуемого числового ряда. Для сходящихся рядов найти сумму ряда.

1. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + \dots$

(Ряд расходится. Воспользоваться формулой суммы первых n слагаемых арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.)

2. $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} + \dots$

(Ряд расходится.)

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$

(Ряд сходится, $S = \frac{6}{5}$.)

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(Ряд сходится, $S = \frac{1}{2}$.)

1.3. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел его общего члена равен нулю,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (1.2)$$

Доказательство

Из сходимости числового ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$. Так как $u_n = S_n - S_{n-1}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$.

Этот признак сходимости является необходимым, но не достаточным. Существуют расходящиеся числовые ряды, у которых выполняется необходимый признак сходимости. Например, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд, кото-

рый является расходящимся, но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Из необходимого признака сходимости вытекает *достаточный признак расходимости* числового ряда.

Теорема. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Доказательство

Предположим обратное. Если бы ряд сходил, то по необходимому признаку $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, что противоречит условию. Следовательно, ряд расходится.

Исследуем ряды на сходимость, используя необходимый признак сходимости или достаточный признак расходимости числовых рядов.

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+2}$.

Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Выполняется достаточный признак расходимости числового ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, следовательно, данный ряд расходится.

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\ln(n+3)}$.

Найдем предел общего члена ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\ln(n+3)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, это неопределенность, для её раскрытия воспользуемся правилом Лопиталя. Для этого рассмотрим функции, дифференцируемые при $x > 1$, $f_1(x) = x + 2$ и $f_2(x) = \ln(x + 3)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)'}{(\ln(x+3))'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+3) = \infty \neq 0, \text{ следовательно, выпол-}$$

няется достаточный признак расходимости числового ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, данный ряд расходится.

Пример 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2}$.

Найдем предел общего члена ряда: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3+2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 0$ (высшая степень n знаменателя больше высшей степени n числителя, следовательно, предел равен нулю).

Так как предел общего члена равен нулю, то выполняется необходимый признак сходимости числового ряда (1.2). Вывод о сходимости данно-

го ряда на основании необходимого признака сделать нельзя. Исследуемый ряд может как сходиться, так и расходиться. Для определения сходимости надо воспользоваться определением или достаточными признаками сходимости числовых рядов, которые будут изложены дальше.

Задачи для самостоятельного решения

Для следующих числовых рядов найти предел общего члена и исследовать числовые ряды, используя необходимый признак сходимости или достаточный признак расходимости числовых рядов:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n-1}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Ответы. 1. 0, сходимость определить нельзя. 2. $\frac{1}{2}$, ряд расходится. 3. ∞ , ряд расходится. 4. $\frac{\pi}{2}$, ряд расходится. 5. e^2 , ряд расходится. 6. 0, сходимость определить нельзя.

1.4. Гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)

Определение 1. Числовой ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ называется *гармоническим* рядом. Каждый член этого ряда, начиная со второго, является средним гармоническим двух его соседних членов.

Гармоническое среднее двух чисел m и n есть число h , обратное которому – это среднее арифметическое чисел, обратных m и n :

$$h = \frac{2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}.$$

Очевидно, что для гармонического ряда выполняется необходимый признак сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Несмотря на это, гармонический ряд является расходящимся. Докажем его расходимость [1].

Доказательство

Рассмотрим вспомогательный числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Так как каждый член гармонического ряда больше или равен каждому соответствующему члену вспомогательного ряда, то и все частичные суммы гармонического ряда также больше соответствующих частичных сумм вспомогательного ряда. Найдем теперь предел частичных сумм вспомогательного ряда.

Найдем частичные суммы вспомогательного ряда:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$S_4 = S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{2} = 1 + \frac{2}{2}.$$

$$S_8 = S_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{2}.$$

$$S_{16} = S_{2^4} = 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{4}{2}.$$

$$\text{Таким образом, } S_{2^k} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Вычислим предел частичных сумм вспомогательного ряда:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{2}\right) = \infty.$$

Так как предел подпоследовательности частичных сумм вспомогательного ряда равен бесконечности, то равен бесконечности и предел частичных сумм гармонического ряда, следовательно, гармонический ряд расходится по определению.

Определение 2. Числовой ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ называется обобщенным гармоническим рядом или рядом Дирихле. Ряд Дирихле сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Частным случаем ряда Дирихле при $p = 1$ является гармонический ряд.

1.5. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *положительным* (или рядом с положительными членами), если все его элементы положительны, т.е. для любого $n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$.

Рассмотрим, какими свойствами обладают такие ряды.

Теорема 1. Последовательность частичных сумм положительного ряда $\{S_n\}$ строго возрастает.

Теорема 2. (Необходимое и достаточное условие сходимости положительного ряда.) Для того чтобы положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм ряда $\{S_n\}$ была ограничена сверху.

При исследовании числовых рядов часто нет необходимости находить сумму ряда, а достаточно лишь ответить на вопрос: сходится данный ряд или расходится?

Для этого удобно применять теоремы сравнения, которые позволяют сделать вывод о сходимости ряда с положительными членами с помощью некоторого вспомогательного ряда.

Рассмотрим исследование сходимости числовых рядов с положительными членами по достаточным признакам, которые однозначно определяют их сходимость.

1.5.1. Первый признак сравнения

Теорема. Если для двух положительных числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $u_n \leq v_n$, то:

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; (1.3)

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. (1.4)

То есть из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, а из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего.

Доказательство

Докажем пункт 1.

Пусть S_n^u и S_n^v – частичные суммы данных рядов. Из условия $u_n \leq v_n$ следует, что $S_n^u \leq S_n^v$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то предел его частичных сумм существует и конечен: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^v = S^v$, где S^v – сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и $S_n^v < S^v$, так как все члены ряда положительны. Кроме того, также и $S_n^u < S^v$.

Таким образом, последовательность частичных сумм $\{S_n^u\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом S^v , то есть по признаку существования предела последовательность $\{S_n^u\}$ имеет конечный предел, следовательно, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Докажем пункт 2.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится и все члены неотрицательны, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^u = \infty$. С учетом неравенства $u_n \leq v_n$ для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ также выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^v = \infty$, следовательно, этот ряд является расходящимся.

Первый признак сравнения справедлив также в том случае, если его условие выполняется, начиная не с первого, а с некоторого другого номера.

Исследуем следующие ряды с положительными членами на сходимость по первому признаку сравнения.

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$.

Сравним данный ряд с числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который является сходящимся как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Так как $\frac{1}{2^n + 3} < \frac{1}{2^n}$, то исследуемый ряд сходится по первому признаку сравнения (1.3).

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sin^2 n}{n}$.

Так как $3 \leq 3 + \sin^2 n \leq 4$, то $\frac{1}{n} < \frac{3 + \sin^2 n}{n}$.

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому и больший исследуемый ряд также расходится по первому признаку сравнения (1.4).

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать следующие числовые ряды с положительными членами по первому признаку сравнения.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 1}{2^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 5}$

Ответы: ряды 1–3 расходятся, ряд 4 сходится.

Ряды 1 и 2 сравнить с гармоническим рядом, ряды 3 и 4 сравнить с суммой геометрической прогрессии.

1.5.2. Второй признак сравнения

Теорема. Если для двух числовых рядов с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ существует конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \quad (0 < k < \infty), \quad (1.5)$$

то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Доказательство

Так как существует конечный предел отношения общих членов двух рядов, то для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n , выполняется неравенство

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - k \right| < \varepsilon, \text{ откуда } (k - \varepsilon)v_n < u_n < (k + \varepsilon)v_n.$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то сходится по первому признаку сравнения и меньший ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (k - \varepsilon)v_n$. Тогда согласно свойству 2 для числовых рядов сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то по первому признаку сравнения расходится и больший числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon)v_n$, следовательно, по свойству 2

для числовых рядов расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

При использовании признаков сравнения часто используется эквивалентность бесконечно малых последовательностей при $n \rightarrow \infty$:

$$\sin \frac{1}{n} \sim \operatorname{tg} \frac{1}{n} \sim \arcsin \frac{1}{n} \sim \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \sim \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}.$$

Исследуем следующие числовые знакоположительные ряды по второму признаку сравнения.

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+n+1}.$

При применении второго признака сравнения важно определить второй, эталонный ряд, сходимость которого известна [2]. Напомним, что предел отношения общих членов двух рядов должен быть равен константе, отличной от нуля (1.5). Поэтому подберем эталонный ряд в виде ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, причем p найдем как разность высшей степени n знаменателя и высшей степени n числителя: $p = 3 - 1 = 2$. Таким образом, эталонным рядом будет являться ряд Дирихле вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ с общим членом

$$v_n = \frac{1}{n^2}. \text{ Этот ряд сходится, так как } p = 2 > 1.$$

Проверим выполнение второго признака сравнения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{n^3+n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n}{n^3+n+1} = 1.$$

Предел отношения общих членов двух рядов (исследуемого и эталонного) равен константе, отличной от нуля, следовательно, исследуемый ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+n+1}$ также является *сходящимся*, как и эталонный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ по второму признаку сравнения (1.5).

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \ln \left(\frac{n+1}{n} \right).$

Подберем эталонный ряд. Так как при $n \rightarrow \infty \quad \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n}$, то $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} = v_n$.

Следовательно, эталонным рядом является обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$. Этот ряд сходится, так как $p = \frac{4}{3} > 1$. Предел отношения общих членов исследуемого и эталонного рядов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} = 1$$

равен константе, отличной от нуля, следовательно, исследуемый ряд *сходится* так же, как и эталонный, по второму признаку сравнения (1.5).

Пример 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \operatorname{tg}^3 \frac{2}{n^2}$.

Подберем эталонный ряд, учитывая эквивалентность бесконечно малых последовательностей при $n \rightarrow \infty$:

$$n^5 \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{2}{n^2} \sim n^5 \left(\frac{2}{n^2} \right)^3 = \frac{8n^5}{n^6} = \frac{8}{n}.$$

Таким образом, эталонным для исследуемого ряда является гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который *расходится*.

Предел отношения общих членов двух рядов равен константе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \operatorname{tg}^3 \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{1} = 8 \neq 0.$$

Делаем вывод, что исследуемый ряд *расходится* одновременно с гармоническим рядом.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать следующие числовые ряды на сходимость, применяя второй признак сравнения. Указать эталонный ряд для сравнения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n^2+3}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{\pi}{n^2}$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 3}{5^n + 5}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n + \sqrt[3]{n^5}}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arcsin^3 \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{n^2} \right)$$

Ответы

1. Расходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 2. Сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. 3. Сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4. Сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. 5. Расходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 6. Сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n$. 7. Сходится,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$. 8. Расходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. 9. Сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. 10. Сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

1.5.3. Признак сходимости Даламбера

Теорема. Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \quad (1.6)$$

Тогда этот ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Доказательство

По определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon \text{ или } l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Пусть $l < 1$. Тогда можно подобрать ε так, что $l + \varepsilon < 1$. Пусть $l + \varepsilon = q < 1$. Тогда $u_{n+1} < qu_n$ при $n > N$, то есть

$$u_2 < qu_1,$$

$$u_3 < qu_2 < q^2 u_1,$$

$$u_4 < qu_3 < q^3 u_1,$$

.....

$$u_n < q^{n-1} u_1.$$

Числовой ряд $qu_1 + q^2 u_1 + \dots + q^{n-1} u_1 + \dots$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. По первому признаку сравнения сходится также и ряд $u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$, следовательно, сходится и исходный ряд.

Рассмотрим теперь случай, когда $l > 1$. В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. То есть, начиная с некоторого номера N , выполняется неравенство $u_{n+1} > u_n$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Замечание. Если $l = 1$, то исследуемый ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. В этом случае необходимо использовать другие методы исследования.

При решении задач на сходимость числовых рядов с положительными членами в первую очередь необходимо выбрать один из признаков, с помощью которого будет исследована сходимость ряда.

С помощью признака Даламбера исследуются на сходимость ряды, общий член которых содержит $n!$, a^n , n^n , например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \text{ и т.п.}$$

Исследуем следующие числовые ряды с положительными членами с помощью признака Даламбера.

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}.$

Преобразуем выражение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} : \frac{n^2}{5^n} = \frac{(n^2 + 2n + 1)5^n}{5 \cdot 5^n \cdot n^2} = \frac{(n^2 + 2n + 1)}{5n^2}.$$

Найдем предел полученного выражения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{5n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{5} < 1, \text{ исследуемый ряд сходится по признаку}$$

Даламбера (1.6).

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}.$

Вычислим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{3^{n+1}} : \frac{n!}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot 3^n}{3 \cdot 3^n \cdot n!} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

исследуемый ряд расходится по признаку Даламбера (1.6).

Пример 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)n!}{(n+1)!n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)!}{(n+1)!n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1, \end{aligned}$$

по признаку Даламбера (1.6) исследуемый ряд расходится.

Пример 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)}$.

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)(3n+1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)(4n+5)} \cdot \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1, \end{aligned}$$

следовательно, исследуемый ряд сходится.

Пример 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$.

Вычислим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{(n+1)^2+1} : \frac{n+2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n^2+1)}{(n+2)(n^2+2n+2)} = 1.$$

Так как предел равен 1, то признак Даламбера не даёт ответа о сходимости или расходимости ряда, необходимо воспользоваться другим признаком сходимости. Здесь подойдет второй признак сравнения (1.5).

Задачи для самостоятельного решения

Следующие числовые ряды с положительными членами исследовать на сходимость по признаку Даламбера. Указать значение l .

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^{2n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n \cdot n^4}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n^2 \cdot 3^n}$$

Ответы

1. Сходится, $l = \frac{1}{25}$. 2. Сходится, $l = \frac{2}{e}$. 3. Расходится, $l = +\infty$.
 4. Сходится, $l = \frac{3}{4}$. 5. Сходится, $l = 0$. 6. Расходится, $l = \frac{3}{2}$. 7. Расходится, $l = +\infty$.

1.5.4. Радикальный признак сходимости Коши

Теорема. Пусть дан числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \quad (1.7)$$

Тогда данный ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Доказательство

По определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|\sqrt[n]{u_n} - l| < \varepsilon$ или $l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon$.

Пусть $l < 1$. Так как $\varepsilon > 0$ можно взять любым, подберем его так, чтобы $l + \varepsilon < 1$. Обозначим $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Тогда из правой части неравенства получим

$$\sqrt[n]{u_n} < q, \quad u_n < q^n \text{ при } n > N.$$

Ряд $q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, и ряд $u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$ также сходится по первому признаку сравнения. В силу свойства 1 числовых рядов ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ также сходится.

Рассмотрим теперь случай, если $l > 1$. Начиная с некоторого номера $n = N$, будет выполняться неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} > 1 \text{ или } u_n > 1.$$

Тогда общий член данного ряда не будет стремиться к нулю, что является достаточным для расходимости числового ряда.

Замечание. При $l = 1$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. В этом случае необходимо провести исследование с помощью другого признака.

Исследуем следующие числовые ряды на сходимость с помощью радикального признака Коши.

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2} \right)^n$.

Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3} < 1, \text{ исследуемый ряд сходится}$$

по радикальному признаку Коши (1.7).

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \left| \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \end{array} \right| = e > 1,$$

исследуемый ряд расходится по радикальному признаку Коши (1.7).

Пример 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{n} \right)^n$.

Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\arctg \frac{1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{1}{n} = 0 < 1, \text{ исследуемый ряд сходится}$$

по радикальному признаку Коши (1.7).

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать числовые ряды с положительными членами на сходимость по радикальному признаку Коши. Указать значение l .

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n} \right)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{3n+2}{2n+1} \right)^n$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

Ответы

1. Сходится, $l = \frac{1}{e}$. 2. Сходится, $l = \frac{1}{2}$. 3. Сходится, $l = \sqrt{\frac{2}{3}}$. 4. Сходится, $l = 0$. 5. Сходится, $l = \frac{1}{e^2}$. 6. Расходится, $l = \frac{3}{2}$. 7. Расходится, $l = \frac{e}{2}$.

1.5.5. Интегральный признак сходимости Коши

Теорема. Пусть члены числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и не возрастают, то есть $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$, и пусть $f(x)$ – положительная, определенная при $x \in [1; +\infty)$ невозрастающая функция, такая что

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots$$

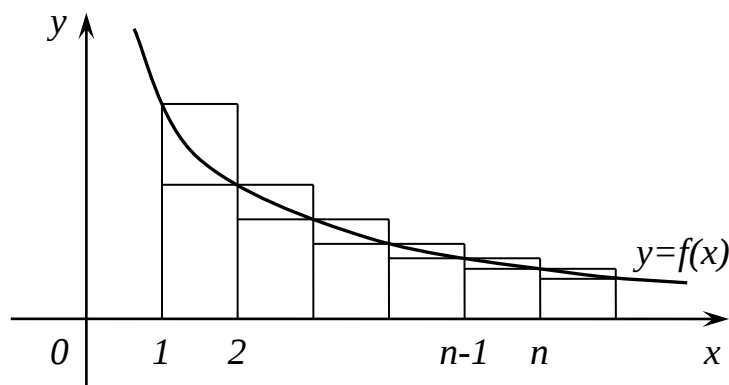
Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится ($\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = \text{const}$), то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

2. Если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ расходится ($\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = \infty$ или не существует), то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство

Изобразим члены исследуемого ряда и функцию $f(x)$ графически:



1. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда существует предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x)dx = \text{const} = A.$$

Так как $\int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx = A$, то $f(1) + \int_1^n f(x)dx < f(1) + A = M$.

Рассмотрим n -ю частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$:

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n).$$

$$\int_1^n f(x)dx > f(2) + f(3) + \dots + f(n).$$

Следовательно, $f(1) + \int_1^n f(x)dx > f(1) + f(2) + \dots + f(n) = S_n$.

Таким образом, $0 < S_n < f(1) + A = M$.

Последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена сверху и возрастает в силу положительности членов ряда. Поэтому последовательность частичных сумм имеет конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

По определению сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится и, следовательно, сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, что и требовалось доказать.

2. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда по условию $f(x) \geq 0$ и для $x \geq 1$ выполняется условие:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = +\infty \text{ или не существует.}$$

По определению интегральных сумм

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1) + f(2) + \dots + f(n-1), \text{ следовательно,}$$

$$S_{n-1} > \int_1^{\infty} f(x)dx = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится по определению и также расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ [3].

Для исследования данного ряда на сходимость применим интегральный признак Коши. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x^{\alpha}}$.

Вычислим несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$. Возможны два случая.

1-й случай: $\alpha = 1$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln|b| - \ln|1|) = +\infty.$$

Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 1$ расходится.

2-й случай: $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 1; \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Таким образом, получили, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$. Тогда по интегральному признаку Коши числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$.

Объединяя 1-й и 2-й случаи, получаем, что ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Для исследования данного ряда на сходимость применим интегральный признак Коши. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x \ln x}$. Выбранная функция удовлетворяет всем условиям теоремы.

Вычислим несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$.

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln|\ln x| \Big|_2^b \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln|\ln b| - \ln|\ln 2|) = +\infty. \end{aligned}$$

Так как интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ расходится, то и числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится по интегральному признаку Коши.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать следующие числовые ряды на сходимость с помощью интегрального признака Коши. Указать $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2 + 1}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)}$

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$

Ответы

1. Ряд сходится, $\frac{1}{\ln 2}$. 2. Ряд расходится, $+\infty$. 3. Ряд сходится, $\frac{3\pi^2}{32}$.
4. Ряд расходится, $+\infty$. 5. Ряд сходится, $\frac{1}{\ln \ln 2}$.

1.6. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница

Определение. Числовой ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (1.8)$$

где $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$, называется *знакопередающимся* числовым рядом. Его

удобнее записывать с помощью знака суммы $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$.

Сходимость или расходимость знакопередающихся числовых рядов исследуется по признаку Лейбница [1].

Теорема Лейбница (признак сходимости Лейбница для знакопередающихся числовых рядов).

Знакопередающийся числовой ряд сходится, если:

1) последовательность абсолютных величин ряда монотонно убывает, то есть $u_n > u_{n+1}$, возможно, начиная не с первого, а с некоторого номера N ;

2) общий член ряда стремится к нулю, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Доказательство

Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов знакопеременующегося ряда (1.8):

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Из условия 1 следует, что выражение в каждой скобке положительно, значит $S_{2m} > 0$ возрастает с увеличением m .

Запишем сумму S_{2m} другим способом:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

В силу условия 1 выражение в каждой скобке положительно и $S_{2m} < u_1$.

Таким образом, последовательность четных частичных сумм $\{S_{2m}\}$ монотонно возрастает при увеличении m и ограничена сверху. Следовательно, по теореме о монотонно возрастающих последовательностях она сходится и имеет конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < u_1$.

Рассмотрим частичные суммы нечетного числа членов ряда (1.8):

$$S_{2m+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - (u_{2m} - u_{2m+1}).$$

В силу условия 1 выражение в каждой скобке положительно и $S_{2m+1} < u_1$.

Докажем, что последовательность $\{S_{2m+1}\}$ также стремится к S :

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

Так как по условию 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} + 0 = S,$$

причем $0 < S < u_1$.

Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ как при четном n , так и при нечетном n . Таким образом, знакопеременующийся числовой ряд (1.8) при условиях 1 и 2 сходится и его сумма не превосходит первого члена ряда.

Замечание. При использовании теоремы Лейбница необходимо проверять условие $u_{n+1} < u_n$. Оно равносильно любому из условий:

1) $u_n - u_{n+1} > 0$;

2) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$;

3) функция $y = f(x)$, где $f(n) = u_n$, является невозрастающей на промежутке $[1; +\infty)$ [т.е. $y'(x) < 0$ на $[1; +\infty)$].

Поэтому при решении задач можно проверять одно из этих утверждений.

Оценка точности вычисления суммы знакопеременующегося ряда

Пусть сходящийся знакопеременующийся ряд (1.8) имеет сумму S . Оценим точность вычисления суммы ряда, которую можно получить при

замене суммы данного ряда S на его частичную сумму $S_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n$.

Обозначим через R_n сумму ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_k$, который является остатком ряда (1.8) и представляет собой знакочередующийся ряд. Из теоремы Лейбница следует, что для сходящегося ряда (1.8) справедливо неравенство $|R_n| < u_{n+1}$.

Пример 1. Исследовать знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n}$ на сходимость по признаку Лейбница. В случае сходимости вычислить его сумму с точностью до 0,01.

Проверим выполнение условий теоремы Лейбница:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow u_n > u_{n+1}, \text{ первое условие выполняется.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0, \text{ второе условие выполняется.}$$

Так как оба условия теоремы Лейбница выполняются, то исследуемый знакочередующийся ряд сходится.

Для вычисления суммы ряда с точностью до 0,01 найдем первый член ряда, меньший 0,01:

$$u_1 = \frac{1}{3} \approx 0,33 > 0,01;$$

$$u_2 = \frac{1}{3^2} \approx 0,11 > 0,01;$$

$$u_3 = \frac{1}{3^3} \approx 0,037 > 0,01;$$

$$u_4 = \frac{1}{3^4} \approx 0,012 > 0,01;$$

$$u_5 = \frac{1}{3^5} \approx 0,0041 < 0,01.$$

Поэтому для выполнения заданной точности при вычислении суммы ряда достаточно взять первые четыре слагаемых. Итак, сумма данного знакочередующегося сходящегося ряда с точностью до 0,01 равна

$$S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} \approx 0,333 - 0,111 + 0,037 - 0,012 \approx 0,25.$$

Пример 2. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Ряд является знакочередующимся. Так как $u_n = \frac{1}{n!} > u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, то последовательность $\{u_n\}$ является убывающей. Следовательно, данный ряд – ряд типа Лейбница. При этом $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$. Значит, по теореме Лейбница ряд сходится.

Подберем такое n , для которого $|R_n| < \varepsilon$. Тогда $S \approx S_n$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Учитывая замечание к теореме Лейбница, достаточно найти такое n , для которого $|u_{n+1}| < \varepsilon$. Тогда $|R_n| < u_{n+1} < \varepsilon$.

Так как при $n=6$ получим $u_{n+1} = u_7 = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < \frac{1}{1000} = \varepsilon$, то $S \approx S_6 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} = \frac{91}{144}$.

Таким образом, сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ равна $S_6 = \frac{91}{144}$.

Пример 3. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot 3^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ на сходимость по признаку Лейбница.

Ряд является знакочередующимся. Рассмотрим $u_n = 3^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ и вычислим $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \cdot \frac{1}{n} = +\infty \neq 0.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, то по теореме Лейбница исследуемый знакочередующийся ряд расходится.

Задачи для самостоятельного решения

Следующие знакочередующиеся ряды исследовать на сходимость по признаку Лейбница. Для сходящихся рядов найти сумму с точностью до 0,1; в задаче 4 с точностью до 0,01.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+3}{n^2+4}$

$$3. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3\sqrt{n}}$$

Ответы

1. Расходится. 2. Сходится, $S \approx 0,4$. 3. Расходится. 4. Сходится, $S \approx 0,19$.
5. Сходится, $S \approx 0,3$.

1.7. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость

Определение 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *знакопеременным*, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные члены.

Знакопеременные ряды являются частным случаем знакопеременных числовых рядов.

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ является *знакопеременным* рядом, так как знаменатель общего члена всегда положителен, числитель может быть как положительным, так и отрицательным ($\sin 1 > 0$, $\sin 2 > 0$, $\sin 3 > 0$, $\sin 4 < 0$, $\sin 5 < 0$, ...). Отметим, что данный ряд является *знакопеременным*, но не *знакопеременным*.

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n}$ – аналогично, числитель принимает как положительные, так и отрицательные значения, ряд *знакопеременный*.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременных числовых рядов)

Пусть дан *знакопеременный* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам *знакопеременный* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство

Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$. Для любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ сходится в силу условия данной теоремы и свойства 2 числовых рядов. Следовательно, на

основании первого признака сравнения (1.3) сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$.

Поскольку исходный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ представляет собой разность двух сходящихся рядов, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

то, на основании свойства 3 числовых рядов, этот ряд сходится.

Обратное утверждение неверно: из сходимости знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Далее введем понятия абсолютно и условно сходящихся числовых рядов.

Определение 2. Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (1.9)$$

Определение 3. Если ряд, составленный из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, расходится, а исходный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то этот ряд называется *условно сходящимся*.

Из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, установленной с помощью достаточных признаков расходимости числовых рядов, следует и расходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ получена с помощью других признаков, необходимо исследовать исходный ряд по теореме Лейбница (для знакочередующихся рядов) или по определению сходимости (для знакопеременных, но не знакочередующихся рядов).

Исследуем следующие знакопеременные ряды на сходимость и абсолютную сходимость.

Пример 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Исследуем на сходимость ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ с помощью первого признака сравнения (1.3).

Так как обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ является сходящимся и $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ сходится по первому признаку сравнения, следовательно, исследуемый числовой знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ сходится абсолютно (1.9).

Пример 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, составленный из модулей членов исходного ряда. Этот ряд расходится, следовательно, исходный ряд абсолютно не сходится.

Исследуем его на условную сходимость по теореме Лейбница. Исследуемый числовой ряд является знакочередующимся. Так как $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = u_{n+1}$, то последовательность $\{u_n\}$ является убывающей.

Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то по теореме Лейбница исследуемый ряд сходится.

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ является условно сходящимся.

Пример 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n^2}{3n+5}$.

Ряд является знакопеременным, так как числитель может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Предел общего члена $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos n^2}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n^2}{3 + \frac{5}{n}}$ не существует, следовательно, выполняется достаточный признак расходимости числового ряда и исследуемый знакопеременный ряд расходится.

Свойства абсолютно и условно сходящихся числовых рядов

Свойство 1. Если исходный ряд сходится, то ряд, в котором перегруппированы члены без изменения их порядка, также сходится. Сумма ряда при этом не изменится.

Свойство 2. Если числовой ряд сходится условно, то, изменяя порядок его членов, можно сделать его сумму равной заданному числу или даже сделать его расходящимся.

Свойство 3. Если числовой ряд абсолютно сходится и имеет сумму S , то ряд, полученный из данного ряда перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S , что и исходный ряд.

Свойство 4. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать или вычитать. В результате получится абсолютно сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$$

с суммой $S_1 + S_2$ в случае сложения или $S_1 - S_2$ в случае вычитания.

Определение 4. Произведением двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ называется ряд вида

$$(u_1 v_1 + u_1 v_2 + \dots + u_1 v_n + \dots) + (u_2 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_2 v_n + \dots) + \dots + (u_n v_1 + u_n v_2 + \dots + u_n v_n + \dots) + \dots$$

Все эти произведения можно записать в виде бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n & \dots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & u_n v_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Свойство 5. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 \cdot S_2$.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать знакопеременные числовые ряды на сходимость. В случае сходимости определить тип сходимости (абсолютная или условная).

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{5n^2+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{3n+2}{2n+3} \right)^n$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{5^n n!}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Ответы

1. Расходится. 2. Сходится абсолютно. 3. Сходится условно. 4. Сходится абсолютно. 5. Сходится абсолютно. 6. Расходится. 7. Сходится абсолютно. 8. Сходится условно.

1.8. Комплексные числовые ряды

Рассмотрим числовые ряды, членами которых являются комплексные числа.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$, где $c_n = a_n + ib_n$ – общий член ряда, причем $a_n = \operatorname{Re} c_n$, $b_n = \operatorname{Im} c_n$ – действительная и мнимая части комплексного числа c_n . Таким образом, комплексный ряд можно представить как сумму двух числовых рядов с действительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Определение 1. Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ комплексного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ имеет конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a + ib$, то ряд называется *сходящимся*, а комплексное число S – его суммой. В противном случае, если предел не существует или равен бесконечности, комплексный числовой ряд называется *расходящимся*.

Теорема (необходимое и достаточное условие сходимости комплексного числового ряда)

Числовой ряд с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба вещественных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Без доказательства.

Следствие. Комплексный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится, если расходится хотя бы один из числовых рядов.

Данная теорема позволяет применять для исследования на сходимость комплексных числовых рядов все достаточные признаки сходимости числовых вещественных рядов.

Замечание. На комплексные ряды переносится понятие абсолютной и условной сходимости.

Определение 2. Комплексный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой вещественный ряд, составленный из модулей членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Теорема. Если комплексный числовой ряд сходится абсолютно, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, а также сходятся вещественные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Обратно, если абсолютно сходятся числовые вещественные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то абсолютно сходится комплексный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость комплексный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4i-3}{7} \right)^n$.

Составим ряд из модулей членов исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{4i-3}{7} \right|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{9}{49} + \frac{16}{49}} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7} \right)^n = \frac{5}{7} + \left(\frac{5}{7} \right)^2 + \left(\frac{5}{7} \right)^3 + \dots + \left(\frac{5}{7} \right)^n + \dots$$

Полученный ряд является сходящимся как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, $q = \frac{5}{7}$. Следовательно, исходный комплексный ряд является абсолютно сходящимся.

Пример 2. Исследовать на сходимость комплексный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2+i}{2} \right)^n$.

Составим ряд из модулей и применим к нему достаточный признак расходимости числового ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4} \right)^n = +\infty, \text{ ряд расходится, так как вы-}$$

полняется достаточный признак расходимости.

Пример 3. Исследовать на сходимость комплексный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^n}{n \cdot 2^n}$.

Составим ряд из модулей членов данного ряда и исследуем полученный ряд по радикальному признаку Коши. В случае сходимости полученного ряда исходный ряд будет абсолютно сходиться, в случае расходимости – расходиться:

$$|c_n| = \frac{(\sqrt{3^2 + 1})^n}{n \cdot 2^n} = \frac{(\sqrt{10})^n}{n \cdot 2^n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\sqrt{10})^n}{n \cdot 2^n}} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1, \text{ следовательно, ряд из модулей рас-}$$

ходится по радикальному признаку Коши. Значит, расходится и исходный комплексный ряд.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать комплексные ряды на сходимость. Указать тип сходимости (абсолютная или условная).

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+3i)^n}{3^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{3^n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+in}}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i(n+2i)}{3n} \right)^n$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$$

Ответы

1. Расходится, признак Даламбера или радикальный Коши.
2. Сходится абсолютно, признак Даламбера или радикальный Коши.
3. Сходится условно, применить признак Лейбница к каждому вещественному ряду.
4. Расходится, достаточный признак расходимости.
5. Сходится абсолютно, радикальный признак Коши.
6. Сходится абсолютно, второй признак сравнения.

Контрольные вопросы по теме «Числовые ряды»

1. Дайте определение числового ряда, частичной суммы и суммы числового ряда. Дайте определение сходящегося и расходящегося ряда. Укажите известные сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.
2. Исследуйте сходимость ряда, составленного из членов геометрической прогрессии.
3. Докажите расходимость гармонического ряда. Дайте понятие обобщенного гармонического ряда.

4. Перечислите основные свойства числовых рядов. Докажите одно из этих свойств.
5. Докажите необходимый признак сходимости числового ряда.
6. Докажите теоремы сравнения числовых рядов с положительными членами. Приведите пример применения этих признаков.
7. Докажите признак Даламбера сходимости числовых рядов с положительными членами. Приведите пример применения этого признака.
8. Докажите радикальный признак Коши сходимости числовых рядов с положительными членами. Приведите пример применения этого признака.
9. Докажите интегральный признак Коши сходимости числовых рядов с положительными членами. Приведите пример применения этого признака.
10. Дайте понятие знакопеременного числового ряда, его абсолютной и условной сходимости. Приведите примеры.
11. Докажите признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Приведите пример применения этого признака.
12. Дайте определение числового ряда с комплексными членами. Сформулируйте методы исследования на сходимость комплексных числовых рядов. Приведите примеры сходящегося и расходящегося комплексных рядов.
13. Свойства условно и абсолютно сходящихся числовых рядов. Примеры условно сходящихся и абсолютно сходящихся числовых рядов.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.1. Определение функционального ряда. Область сходимости

Определение 1. Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (2.1)$$

члены которого есть функции от x , составляющие функциональную последовательность, называется *функциональным рядом* относительно переменной x .

Если переменная принимает только вещественные значения, то функциональный ряд называется *вещественным*. Если переменная может принимать и комплексные значения, то ряд называется *комплексным*. В данном параграфе будем рассматривать вещественные функциональные ряды.

При фиксированном значении x получим числовой ряд.

Определение 2. Область сходимости функционального ряда – это совокупность значений x , при которых все функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ определены и ряд (2.1) сходится.

Функция вида $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ называется *частичной суммой функционального ряда* (2.1).

В каждой фиксированной точке x_0 из области сходимости числовой ряд сходится и имеет сумму $S(x_0)$. Таким образом, для каждой точки x_0 из области сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S(x_0)$.

То есть для любого $\varepsilon > 0$ и x_0 из их области сходимости найдется такое $N(\varepsilon, x_0)$, что при всех $n > N(\varepsilon, x_0)$ выполняется неравенство $|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$.

Следовательно, для каждой точки области сходимости существует последовательность функций $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$, которая сходится к *предельной функции* $S(x)$, называемой *суммой ряда*. Таким образом, в области сходимости сумма ряда является функцией переменной x .

Рассмотрим функциональный ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$, который является бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем x . Известно, что при $|x| < 1$ ряд будет сходиться. Сумма этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии будет:

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Таким образом, областью сходимости данного ряда является интервал $(-1, 1)$ и сумма ряда есть функция $S(x) = \frac{1}{1-x}$, определенная при $x \in (-1, 1)$.

Для нахождения области сходимости функционального ряда можно использовать, например, признак Даламбера или радикальный признак Коши.

1. Признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1.$$

2. Радикальный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1.$$

В результате применения данных признаков получаем интервал или совокупность интервалов, которые являются внутренней областью сходимости исследуемого функционального ряда.

Сходимость в граничных точках исследуется отдельно. Для этого необходимо придать x числовые значения в граничных точках интервала сходимости и исследовать полученные числовые ряды по известным признакам сходимости для числовых рядов.

Пример 1. Исследовать сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1} \right)^n$ в точках $x=1$, $x=3$.

Пусть $x=1$. При подстановке получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n$. Этот ряд является геометрическим расходящимся рядом, так как $q > 1$.

Пусть $x=3$. При подстановке получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{13} \right)^n$, который является сходящимся, как геометрический ряд, $q < 1$.

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$.

Для нахождения области сходимости используем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(x+2)^n}{(n+1)(x+2)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{(n+1)(x+2)} \right| = \frac{1}{|x+2|} < 1 \Rightarrow |x+2| > 1.$$

Решим полученное неравенство:

$$\begin{cases} x+2 > 1, \\ x+2 < -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x < -3. \end{cases}$$

Получим совокупность двух интервалов $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

Исследуем сходимость ряда в граничных точках $x=-3$, $x=-1$.

Пусть $x=-3$. При подстановке получим знакочередующийся ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Данный ряд сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x = -1$. При подстановке получим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который является классическим расходящимся рядом.

Таким образом, область сходимости исследуемого функционального ряда $(-\infty; -3] \cup (-1; +\infty)$.

Для нахождения области сходимости функциональных рядов также можно использовать сравнение с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Пример 3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2+x^2} + \dots + \frac{1}{n+x^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}.$$

Члены данного ряда положительны при любых значениях x , поэтому воспользуемся вторым признаком сравнения и сравним исследуемый ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+x^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+x^2} = 1 = \text{const}.$$

Оба ряда имеют одинаковую сходимость; в силу того, что гармонический ряд является расходящимся, исследуемый ряд расходится при всех значениях x . Поэтому область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ – пустое множество.

Пример 4. Найти область сходимости и сумму функционального ряда

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Если $x \neq 0$, то получаем геометрическую прогрессию с $b_1 = x^2$ и $q = \frac{1}{1+x^2}$, причем $0 < q < 1$, ряд сходится при любых x . Сумма ряда будет:

$$S(x) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2(1+x^2)}{(1+x^2)-1} = 1+x^2.$$

Если $x = 0$, $u_n(0) = 0$, тогда $S(0) = 0$, ряд также сходится.

Итак, область сходимости $(-\infty; +\infty)$, сумма ряда: $S(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Задачи для самостоятельного решения

Найти области сходимости следующих функциональных рядов и исследовать сходимость в граничных точках.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^x}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x^2)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \frac{x^{2n}}{n} \cos(x+2\pi n)$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n (x-1)^{2n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$

Ответы

1. $(1; +\infty)$. 2. $(0; +\infty)$, при $x > 1$ сходится абсолютно, при $0 < x \leq 1$ сходится условно. Воспользоваться признаком Лейбница. 3. $(-\infty; +\infty)$.

4. $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, воспользоваться формулой приведения, затем признаком

Даламбера. 5. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$, воспользоваться радикальным признаком Коши. 6. $\left(\frac{1}{e}; e\right)$. 7. $(-\infty; +\infty)$. 8. $(-\infty; +\infty)$, воспользоваться радикальным признаком Коши и эквивалентностью бесконечно малых.

9. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$. 10. $x=0$, воспользоваться радикальным признаком Коши и эквивалентностью бесконечно малых.

2.2. Равномерная сходимость функционального ряда

В каждой точке области сходимости функциональный ряд сходится к своей сумме, но для того, чтобы выполнялись естественные свойства этой суммы (почленное дифференцирование и интегрирование, непрерывность суммы функционального ряда), требуются более жесткие условия к его сходимости. Одно из этих условий – равномерная сходимость функционального ряда [2].

Как было определено выше, для каждой точки области сходимости существует последовательность функций $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$, которая сходится к предельной функции $S(x)$.

Рассмотрим и сравним определения сходимости и равномерной сходимости последовательности функций.

Сходимость: последовательность функций $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$ сходится к предельной функции $S(x)$ в некоторой области [сегменте $[a; b]$ или интервале $(a; b)$], если для каждого x_0 из этой области выполняется условие:

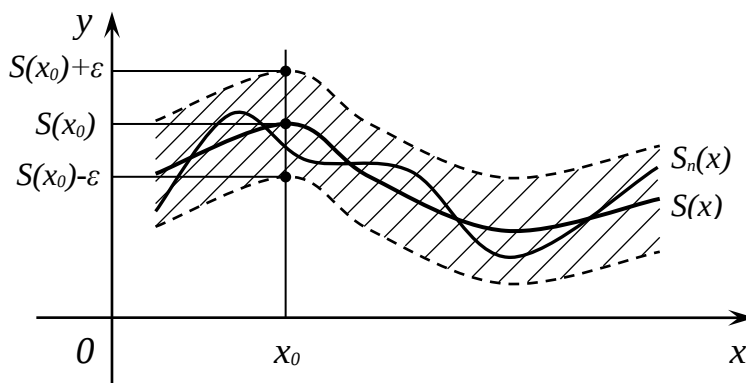
для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon, x_0)$, такое n , что при всех $n > N(\varepsilon, x_0)$ выполняется неравенство $|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$.

В этом определении $N(\varepsilon, x_0)$ находится по каждому значению x_0 и, следовательно, зависит от x_0 .

Равномерная сходимость: последовательность функций $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$ сходится к предельной функции $S(x)$ равномерно в некоторой области, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ и сразу для всех x_0 из данной области выполняется неравенство $|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$.

В отличие от предыдущего определения для равномерной сходимости утверждается существование N сразу для всех значений x_0 из данной области.

Геометрически равномерная сходимость означает, что какая бы ни была полоса шириной 2ε с центральной кривой $y = S(x)$, начиная с некоторого номера N , все кривые $y = S_n(x)$ будут лежать внутри этой полосы.



Рассмотрим последовательность функций $x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$, которая сходится к предельной функции $S(x) = 0$ при $0 \leq x < 1$. То есть для каждого значения x_0 из этого промежутка при любом заданном ε , начиная с некоторого n , выполняется неравенство $x_0^n < \varepsilon$. При этом заметим, что по мере приближения x_0 к единице придется брать всё большие значения n , соответствующие выбранным значениям ε , так как чем ближе значения x к единице, тем значения функции $y = x^n$ убывают медленнее. Поэтому нельзя найти такое x_0 , соответствующее выбранному ε , что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $x_0^n < \varepsilon$ сразу для всех значений x , принадлежащих промежутку $0 \leq x < 1$.

Следовательно, последовательность функций $x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ сходится к предельной функции $S(x) = 0$ при $0 \leq x < 1$, но неравномерно.

Таким образом, функциональный ряд называется равномерно сходящимся в некоторой области, если последовательность его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ равномерно сходится в этой области к предельной функции $S(x)$.

Сформулируем удобный достаточный признак равномерной сходимости, который был предложен Вейерштрассом.

Теорема Вейерштрасса. (Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда.)

Функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, каждый член которого является функцией, определенной на отрезке $[a; b]$, сходится равномерно на этом отрезке, если существует сходящийся числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, такой что для любого $x \in [a; b]$ и для любого $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется условие $|u_n(x)| \leq a_n$.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется мажорирующим для функционального ряда $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, сама теорема Вейерштрасса – теоремой о мажорировании.

Доказательство

На основании первого признака сравнения и из условия $|u_n(x)| \leq a_n$ можно сделать вывод о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ в каждой точке x отрезка $[a; b]$, а также об абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на этом отрезке.

Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то по определению последовательности его частичных сумм имеет конечный предел S , то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|S_n - S| < \varepsilon$, и в силу положительности членов ряда $S - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) < \varepsilon$.

То есть остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ меньше заданного ε , начиная с некоторого n , будет:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < \varepsilon.$$

Следовательно, и остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$, и тем более $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, также меньше заданного ε , начиная с некоторого n , для всех значений x из данного отрезка. То есть по каждому ε найдем такое N , что при всех $n > N$ для всех значений x , принадлежащих отрезку $[a; b]$, имеет место неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, что означает равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Пример. Исследовать функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$ на равномерную сходимость.

При всех действительных x выполняется неравенство $\left| \frac{\sin^2 nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ является сходящимся и, следовательно, мажорирующим для исследуемого функционального ряда. Поэтому функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$ равномерно сходится при всех действительных значениях x .

Теорема Коши. (Непрерывность суммы равномерно сходящегося функционального ряда.)

Пусть все члены функционального ряда $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a; b]$ и составленный из них функциональный ряд равномерно сходится на этом отрезке. Тогда сумма этого функционального ряда будет непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Доказательство

Из непрерывности членов данного функционального ряда следует непрерывность каждой из его частичных сумм $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$. По условию эта последовательность частичных сумм сходится равномерно к предельной функции $S(x)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n , для всех значений x и $x+h$ h – достаточно мало, из заданного отрезка выполняются неравенства: $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ и $|S_n(x+h) - S(x+h)| < \varepsilon$.

Из непрерывности частичных сумм следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $h(\varepsilon) > 0$ и $0 < h < h(\varepsilon)$, что $|S_n(x+h) - S_n(x)| < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} |S(x+h) - S(x)| &= |S_n(x+h) - S_n(x+h) + S_n(x) - S_n(x) + S(x+h) - S(x)| = \\ &= |(S_n(x+h) - S_n(x)) + (S_n(x) - S(x)) + (S(x+h) - S_n(x+h))| \leq \\ &\leq |S_n(x+h) - S_n(x)| + |S_n(x) - S(x)| + |S(x+h) - S_n(x+h)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $h(\varepsilon) > 0$, что для всех x и $x+h$ из заданного сегмента выполняется неравенство $|S(x+h) - S(x)| < 3\varepsilon$, то есть предельная функция $S(x)$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$. Доказать равномерную сходимость функционального ряда на отрезках $[0; 1]$, $[-1; 1]$ и $[-4; 4]$ с помощью признака Вейерштрасса. Указать мажорирующие числовые ряды.

2. Исследовать функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1 + \ln^2 x)}$ на сходимость и равномерную сходимость. Указать мажорирующий числовой ряд.

3. Исследовать функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^3}$ на сходимость и равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса. Указать мажорирующий числовой ряд.

Ответы

1. $[-5; 5)$, мажорирующие ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n \cdot 5^n}$.
2. Сходится, причем равномерно, на всей числовой оси, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. 3. Сходится, причем равномерно, на всей числовой оси, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

2.3. Почленное интегрирование функциональных рядов

Лемма. (Предельный переход под знаком интеграла с переменным верхним пределом.)

Если последовательность непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$ сходится к предельной функции $S(x)$ равномерно на этом отрезке, то при любом $\alpha \in [a; b]$ последовательность интегралов с переменным верхним пределом $\int_{\alpha}^x S_1(x)dx, \int_{\alpha}^x S_2(x)dx, \dots, \int_{\alpha}^x S_n(x)dx, \dots$, как последовательность функций, сходится равномерно к функции $\int_{\alpha}^x S(x)dx$ для всех $x \in [a; b]$.

Теорема (о почленном интегрировании функционального ряда)

Если функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a; b]$ и имеет сумму $S(x)$, то при любом $\alpha \in [a; b]$ функциональный ряд из интегралов с переменным верхним пределом $\int_{\alpha}^x u_1(x)dx + \int_{\alpha}^x u_2(x)dx + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(x)dx + \dots$ также сходится равномерно на этом отрезке и имеет сумму $\int_{\alpha}^x S(x)dx$.

Доказательство

Рассмотрим частичную сумму

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^x u_1(x)dx + \int_{\alpha}^x u_2(x)dx + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(x)dx &= \int_{\alpha}^x (u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x))dx = \\ &= \int_{\alpha}^x S_n(x)dx. \end{aligned}$$

По условию теоремы последовательность частичных сумм $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$ сходится на отрезке $[a; b]$ равномерно. Следовательно, последовательность интегралов $\int_{\alpha}^x S_1(x)dx, \int_{\alpha}^x S_2(x)dx, \dots, \int_{\alpha}^x S_n(x)dx, \dots$ сходится равномерно к функции $\int_{\alpha}^x S(x)dx$. Но эти интегралы являются частичными суммами ряда $\int_{\alpha}^x u_1(x)dx + \int_{\alpha}^x u_2(x)dx + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(x)dx + \dots$. Тем самым доказаны равномерная сходимость ряда из интегралов и равенство его суммы

интегралу $\int_{\alpha}^x S(x)dx$. Переход от исходного ряда и его суммы к ряду из интегралов и его сумме называется *почленным интегрированием* функционального ряда.

Пример. Найти сумму $S(x)$ функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1} = 1 + 2 \cdot 3x + \dots + n \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots$ с помощью теоремы о почленном интегрировании [4].

Найдем область сходимости ряда по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 3^n \cdot x^n}{n \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 3 \cdot x}{n} \right| < 1 \Rightarrow |3x| < 1.$$

Таким образом, область сходимости данного ряда $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. В граничных точках получаем расходящиеся ряды.

Данный ряд является в этой области равномерно сходящимся, так как выполняется неравенство $|n \cdot (3x)^{n-1}| \leq \frac{n}{a^{n-1}}$ при $a > 1$ для всех

$x \in \left(-\frac{1}{3} + \delta; \frac{1}{3} - \delta\right)$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Так как числовой положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ при $a > 1$ сходится по признаку Даламбера или ради-

кальному признаку Коши, то он является мажорирующим для исходного функционального ряда. Следовательно, исследуемый ряд равномерно сходится и к нему можно применить теорему о почленном интегрировании.

Исключение составляют точки $x = \pm \frac{1}{3}$, в которых равномерность нарушается. Составим ряд из интегралов с переменным верхним пределом:

$\int_0^x u_n(x)dx = \int_0^x n \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1} dx = 3^{n-1} \cdot x^n \Big|_0^x = 3^{n-1} \cdot x^n$. Получим функциональный ряд, являющийся суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = 3x$ (в области сходимости $|q| < 1$):

$$x + 3x^2 + 9x^3 + \dots + 3^{n-1}x^n + \dots$$

Сумму этого ряда найдем как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\int_0^x S(x)dx = \frac{b_1}{1-q} = \frac{x}{1-3x}$, тогда

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-3x} \right)' = \frac{1}{(1-3x)^2}.$$

Ответ: сумма исследуемого функционального ряда равна $\frac{1}{(1-3x)^2}$

при $-\frac{1}{3} + \delta < x < \frac{1}{3} - \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало.

Задачи для самостоятельного решения

Для следующих функциональных рядов найти области сходимости и равномерной сходимости. Найти суммы рядов по теореме о почленном интегрировании.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$

Ответы

1. $(-1; 1)$, $\frac{1}{(1-x)^2}$. 2. $(-1; 1)$, $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. 3. $(-1; 1)$, $\frac{2}{(1-x)^3}$ (проинтегрировать два раза, затем сумму два раза продифференцировать).

2.4. Почленное дифференцирование функциональных рядов

Лемма. Пусть последовательность функций $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$ сходится на отрезке $[a; b]$ к предельной функции $S(x)$. Пусть эти функции имеют непрерывные производные, последовательность которых $S'_1(x), S'_2(x), \dots, S'_n(x), \dots$ сходится к некоторой предельной функции $\sigma(x)$ равномерно на отрезке $[a; b]$. Тогда:

1. Последовательность $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$ сходится к предельной функции равномерно.

2. $\frac{d(S(x))}{dx} = \sigma(x)$.

Теорема (о почленном дифференцировании функционального ряда)

Пусть функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a; b]$ и имеет сумму $S(x)$, а его члены имеют на этом отрезке непрерывные производные, причем составленный из этих производных ряд $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$ сходится на $[a; b]$ равномерно и имеет сумму $\sigma(x)$.

Тогда функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a; b]$ равномерно и производная его суммы равна сумме ряда производных $\frac{d(S(x))}{dx} = \sigma(x)$.

Доказательство

Пусть $S_n(x)$ — n -я частичная сумма функционального ряда $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Тогда $S'_n(x) = (u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x))' = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x)$ является n -й частичной суммой ряда из производных. По условию теоремы последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ сходится на отрезке $[a; b]$, а последовательность частичных сумм $\{S'_n(x)\}$ сходится на этом отрезке равномерно. Следовательно, на основании леммы последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится к предельной функции равномерно и производная предельной функции равна предельной функции последовательности $\{S'_n(x)\}$.

Таким образом, для почленного дифференцирования в некоторой точке x сходящегося функционального ряда достаточно сходимости ряда его непрерывных производных в сколь угодно малом отрезке, содержащем точку x .

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$ с помощью теоремы о почленном дифференцировании.

Найдем область сходимости ряда по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{4n+1}}{4n+1} : \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^4(4n-3)}{(4n+1)} \right| < 1.$$

Таким образом, областью сходимости функционального ряда является интервал $(-1; 1)$.

Составим ряд из производных $u'_n(x) = \left(\frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right)' = x^{4n-4}$:

$$1 + x^4 + x^8 + \dots + x^{4n-4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4}.$$

Ряд является суммой геометрической прогрессии со знаменателем x^4 , который равномерно сходится при $|x| \leq a < 1$. Суммой ряда из производных

является функция $\sigma(x) = \frac{1}{1-x^4}$. Тогда по теореме о почленном дифференцировании $\sigma(x) = S'(x) = \frac{1}{1-x^4}$. Сумма заданного ряда будет

$$S(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x^4} = \int_0^x \left(\frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{2(1+x^2)} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|1-x| + \frac{1}{4} \ln|1+x| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти сумму функциональных рядов с помощью теоремы о почленном дифференцировании. Указать область сходимости ряда и область равномерной сходимости ряда из производных.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Ответы

1. $-\ln(1-x)$, $-1 \leq x < 1$, $|x| \leq a < 1$. 2. $\ln(1+x)$, $-1 < x \leq 1$, $|x| \leq a < 1$.
3. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$, $|x| \leq a < 1$.

2.5. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости степенного ряда

Определение. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

где z_0 и коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ не зависят от переменной z , называется степенным рядом относительно переменной z .

При $z_0 = 0$ ряд имеет вид

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (2.2)$$

Если переменная z и коэффициенты ряда принимают комплексные значения, то степенной ряд называется *комплексным*. Если же переменная и коэффициенты ряда – вещественные, то степенной ряд называется *вещественным*. В этом случае степенной ряд будет:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Придавая переменной x или z конкретные числовые значения, получаем числовой ряд (комплексный или вещественный).

Множество всех значений переменной, при которой степенной ряд (2.2) сходится, называется *областью сходимости степенного ряда* [2].

Области сходимости степенных рядов описываются следующей теоремой.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (2.2) сходится при некотором значении $z = z_1$, то он сходится *абсолютно* при всех значениях z , для которых $|z| < |z_1|$. Если степенной ряд (2.2) расходится при $z = z_2$, то он расходится при всех значениях z , для которых $|z| > |z_2|$.

Доказательство

Предположим, что в точке $z = z_1$ степенной ряд (2.2) сходится. Тогда числовой ряд $a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \dots + a_n z_1^n + \dots$ сходится. В этом случае выполняется необходимый признак сходимости и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_1^n = 0$. Кроме того, члены этого ряда ограничены, то есть найдется такое K , что, начиная с некоторого номера n , выполняется неравенство $|a_n z_1^n| < K$. Таким образом,

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_1^n \frac{z^n}{z_1^n} \right| = |a_n z_1^n| \cdot \left| \frac{z}{z_1} \right|^n.$$

Предположим, что $|z| < |z_1|$, тогда $q = \left| \frac{z}{z_1} \right| < 1$. Следовательно,

$|a_n z^n| = \left| a_n z_1^n \frac{z^n}{z_1^n} \right| = |a_n z_1^n| \cdot \left| \frac{z}{z_1} \right|^n = |a_n z_1^n| \cdot q^n < K q^n$, значит, начиная с некоторого n , члены степенного ряда $|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + \dots + |a_n z^n| + \dots$ становятся меньше соответствующих членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $K + Kq + \dots + Kq^{n-1} + \dots$. Следовательно, степенной ряд (2.2) сходится *абсолютно*.

Предположим теперь, что исходный степенной ряд расходится в точке $z = z_2$. Тогда для всех точек z , удовлетворяющих условию $|z| > |z_2|$, будет

$$q = \left| \frac{z}{z_2} \right| > 1.$$

В этом случае $|a_n z^n| = \left| a_n z_2^n \frac{z^n}{z_2^n} \right| = |a_n z_2^n| \cdot \left| \frac{z}{z_2} \right|^n = |a_n z_2^n| \cdot q^n$ и $|a_n z^n| > |a_n z_2^n|$.

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $|z| > |z_2|$, то по доказанному выше должен сходиться и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$, что противоречит предположению.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует число R , $|z_1| < R < |z_2|$, такое, что при всех $|z| < R$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится, а при всех $|z| > R$ расходится. Заметим, что R может принимать любые значения из промежутка $[0; +\infty)$.

Множество всех комплексных чисел z , удовлетворяющих условию $|z| < R$, образуют на комплексной плоскости круг радиусом R с центром в начале координат, поэтому область сходимости степенного ряда называют также *кругом сходимости*. Радиус R круга сходимости называют радиусом сходимости. На границе круга сходимости, $|z| = R$, ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда применяются формулы:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (2.3)$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (2.4)$$

Кроме того, необходимо исследовать сходимость степенного ряда на границе круга сходимости.

Для нахождения круга сходимости степенного ряда можно применять непосредственно признак Даламбера или радикальный признак Коши.

Пример 1. Найти радиус сходимости степенного комплексного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

По формуле (2.3) радиус сходимости будет:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \infty,$$

следовательно, при любом z ряд сходится.

Пример 2. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n}$.

В этом случае $a_n = \frac{1}{4^n}$. Радиус сходимости ищем по формуле (2.4):

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 : \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} \right) = 4.$$

Пример 3. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} (nx)^n$.

Здесь $a_n = n^n$, используя формулу (2.4), получаем

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Так как $R = 0$, то заданный ряд сходится только при $x = 0$.

Замечание. Для степенного ряда общего вида $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$, где R – радиус сходимости.

Пример 4. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{5n+1}$.

Для данного ряда $x_0 = 2$, $a_n = \frac{3^n}{5n+1}$. Радиус сходимости находим по формуле (2.3):

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^n}{5n+1} : \frac{3^{n+1}}{5(n+1)+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{3(5n+1)} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $R = \frac{1}{3}$, а интервал сходимости – $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3} \right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти радиус сходимости и область сходимости степенных рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n! (z-i)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^{2n}}{n^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)!}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n (x+1)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n-1}}{3^n}$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+2}$$

Ответы

1. $R = 0$, точка $z = i$. 2. $R = +\infty$. 3. $R = 1$, $|z + 2i| < 1$. 4. $R = +\infty$. 5. $R = 1$, $(-2; 0)$. 6. $R = \sqrt{3}$, $(-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3})$. 7. $R = 1$, $(-1; 1)$.

2.6. Равномерная сходимость степенного ряда в круге его сходимости

Теорема (область равномерной сходимости степенного ряда)

Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, содержащемся в его круге сходимости.

Доказательство

Пусть степенной ряд $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $|z| < R$. Возьмем замкнутый круг радиусом $R_1 < R$, лежащий строго внутри круга сходимости с центром в точке O . Тогда все точки меньшего круга удовлетворяют неравенству $|z| \leq R_1$. Возьмем точку z_0 , лежащую в кольце между двумя концентрическими окружностями. Так как эта точка расположена внутри круга сходимости, то числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ сходится абсолютно. Но при любом z_1 , принадлежащем меньшему кругу, $|z_1| < |z_0|$, поэтому $|a_n z_1^n| = |a_n| \cdot |z_1|^n < |a_n| \cdot |z_0|^n = |a_n z_0^n|$.

Следовательно, по теореме Вейерштрасса степенной ряд $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в меньшем круге $|z| \leq R_1$ равномерно.

Теорема (непрерывность суммы степенного ряда)

В любой замкнутой области, лежащей внутри круга сходимости степенного ряда, сумма ряда является непрерывной функцией.

Доказательство

Из предыдущей теоремы следует, что в любой замкнутой области внутри круга сходимости степенного ряда сходимость ряда является равномерной. Тогда сумма ряда, являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, также является непрерывной функцией по теореме Коши (п.2.2).

Равномерная сходимость степенных рядов позволяет находить их суммы с помощью почленного интегрирования и дифференцирования.

2.7. Вещественные степенные ряды. Интервал сходимости вещественного степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена

Рассмотрим вещественный степенной ряд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

При $x_0 = 0$ он принимает вид

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \quad (2.5)$$

Сформулируем теорему Абеля для вещественного степенного ряда.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (2.5) сходится в точке x_1 , то он абсолютно сходится в каждой точке x , для которой $|x| < |x_1|$. Если степенной ряд (2.5) расходится в точке x_2 , то он расходится и при всех значениях x , для которых $|x| > |x_2|$.

Интервалом сходимости вещественного степенного ряда (2.5) является интервал $(-R; R)$, а для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$.

На границах интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Сходимость в граничных точках исследуется отдельно. Число R называется радиусом сходимости вещественного степенного ряда. Радиус сходимости можно вычислить по формулам:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Необходимо исследовать сходимость в граничных точках $x = x_0 \pm R$. Задачи нахождения радиуса сходимости и области сходимости вещественных степенных рядов рассмотрены в примерах 2 – 4 п. 2.5.

Сумма любого сходящегося степенного ряда является функцией, непрерывной внутри интервала сходимости. В связи с этим возникает две задачи.

Первая задача: по заданному ряду найти функцию в аналитическом виде, равную сумме ряда. Эта задача называется суммированием сходящегося ряда.

Вторая задача: по заданной функции найти сходящийся степенной ряд, сумма которого в области сходимости совпадает с заданной функцией [2].

Рассмотрим функцию вещественного переменного $f(x)$, имеющую в окрестности точки $x = a$ непрерывные производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно. Тогда представление функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = a$ имеет вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x - a)}{1!} + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x - a)^n}{n!} + r_n(x),$$

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа, причем ζ находится между x и a .

Рассмотрим теперь степенной ряд

$$f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \dots$$

Частичная сумма этого степенного ряда имеет вид

$$S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!},$$

а остаток ряда $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Замечание. Остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора для функции $f(x)$ необязательно совпадает с остатком $R_n(x)$ степенного ряда этой функции. Поэтому из сходимости степенного ряда Тейлора не следует, что суммой этого ряда будет функция $f(x)$. Рассмотрим условия сходимости степенного ряда Тейлора к функции $f(x)$.

Утверждение. (Необходимое и достаточное условие сходимости степенного ряда.)

Если остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, то этот ряд сходится и его сумма будет $f(x)$.

Рассмотрим для примера разложение функции $y = e^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^\zeta}{(n+1)!}, \text{ где } \zeta \in (0; x).$$

Для остаточного члена при любом x получается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}e^\zeta}{(n+1)!} \leq e^x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Следовательно, ряд $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ сходится при любом x , и суммой его является функция e^x .

Теорема. Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ сходится в окрестности точки $x_0 = a$ к функции $f(x)$, тогда этот ряд является рядом Тейлора, причем $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Доказательство

Применим к степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ теорему о почленном дифференцировании, найдем $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + \frac{(n+1)!c_{n+1}(x-a)}{1!} + \dots$$

(производные предыдущих n слагаемых будут равны нулю). При $x_0 = a$ получим $f^{(n)}(a) = n!c_n$, откуда следует, что $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Удобный признак разложимости функции в ряд Тейлора описывается следующей теоремой. Приведем её без доказательства.

Теорема. (Достаточный признак сходимости степенного ряда.)

Если функция $f(x)$ имеет производные сколь угодно высоких порядков и существует такая постоянная C , что при любых x из заданного множества и n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| < C$, то функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора при любом a из заданного множества:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

В частности, при $a = 0$ разложение функции в ряд Тейлора называется разложением в ряд Маклорена и имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций в области их сходимости, которые наиболее часто используются на практике.

1. Показательная функция:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ область сходимости } x \in (-\infty; +\infty).$$

2. Гиперболические функции:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

3. Тригонометрические функции:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

4. Биномиальный ряд:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$$\text{область сходимости } x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geq 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

В частности, при $\alpha = -1$ получим

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \text{ при } x \in (-1; 1).$$

5. Логарифмическая функция:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ при } x \in (-1; 1].$$

6. Обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ при } x \in [-1; 1].$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \text{ при } x \in [-1; 1].$$

Разложение функций в степенной ряд Тейлора имеет важное практическое значение.

Пример 1. Разложить функцию $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ в ряд Маклорена.

Запишем ряд $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, $x \in \mathbf{R}$.

Тогда для $y = \sin 3x$ получим (подставив вместо x в данный ряд $3x$) ряд Маклорена:

$$\sin 3x = 3x - \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{3^5 x^5}{5!} - \frac{3^7 x^7}{7!} + \dots$$

Почленно разделим ряд на $x \neq 0$:

$$\frac{\sin 3x}{x} = 3 - \frac{3^3 x^2}{3!} + \frac{3^5 x^4}{5!} - \frac{3^7 x^6}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n} \text{ при } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

То есть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n}$, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = 2^{-x^2}$ в ряд Маклорена.

Преобразуем функцию $f(x) = 2^{-x^2} = e^{\ln 2^{-x^2}} = e^{-x^2 \ln 2}$.

Используем табличное разложение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbf{R}.$$

Тогда получим

$$2^{-x^2} = e^{-x^2 \ln 2} = 1 - x^2 \ln 2 + \frac{x^4 \ln^2 2}{2!} - \frac{x^6 \ln^3 2}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} \ln^n 2}{n!}, x \in \mathbf{R}.$$

Пример 3. Разложить функцию $f(x) = e^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

Преобразуем функцию $f(x)$, выразив $x - x_0$:

$$f(x) = e^x = e^{(x-1)+1} = e^1 \cdot e^{x-1} = e \cdot e^{x-1}.$$

Применим к функции e^{x-1} разложение для e^x , подставив вместо x разность $(x-1)$:

$$e^{x-1} = 1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

Умножая данный ряд на число e , получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= e \cdot e^{x-1} = e \cdot 1 + e \cdot \frac{(x-1)}{1!} + e \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + e \cdot \frac{(x-1)^n}{n!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}, x \in (-\infty; +\infty). \end{aligned}$$

Пример 4. Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$.

Преобразуем функцию $f(x)$, выделив в аргументе выражение $(x-2)$:

$$\sin \frac{\pi x}{4} = \sin \left(\frac{\pi}{4}(x-2+2) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4}(x-2) \right).$$

Так как $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ при $x \in (-\infty; +\infty)$, то, подставив вместо x выражение $\frac{\pi}{4}(x-2)$, получим:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{4} x &= \cos \left(\frac{\pi}{4}(x-2) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{\pi}{4}(x-2) \right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} (x-2)^{2n}}{4^{2n} \cdot (2n)!} \\ &\text{при } x \in (-\infty; +\infty). \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Разложить по степеням x (в окрестности точки $x=0$) указанные функции, найти интервалы сходимости.

1. $y = a^x$

2. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

3. $y = \sin^2 x$

4. $y = xe^{-2x}$

5. $y = \operatorname{sh} 2x$

6. $y = \sin 3x + x \cos 3x$

7. $y = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$

8. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

9. $y = \ln(1+x-2x^2)$

10. $y = \frac{1}{4-x^2}$

11. Используя формулу Тейлора, разложить функцию $y = \ln x$ по степеням $(x-1)$.

Ответы

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \ln^n a}{n!}$, $(-\infty; +\infty)$. 2. $\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$, $(-\infty; +\infty)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty; +\infty)$. 4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!}$, $(-\infty; +\infty)$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $(-\infty; +\infty)$. 6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+4) \cdot 3^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(-\infty; +\infty)$.
7. $-\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{3^{n+1}} \right) x^n$, $(-1; 1)$. 8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1; 1)$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n - 1}{n} \cdot x^n$, $(-0,5; 0,5]$. 10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$, $(-2; 2)$. 11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$, $(0; 2]$.

2.8. Приложения степенных рядов

2.8.1. Вычисление значений функций с помощью ряда Маклорена

Разложения функций в ряд Маклорена позволяют вычислять значения этих функций с достаточно большой точностью. Пусть задана функция $y = f(x)$, для которой известно ее разложение в степенной ряд (ряд Тейлора) на некотором интервале $(-R; R)$. Требуется вычислить значение функ-

ции $y = f(x)$ при $x = x_1 \in (-R; R)$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Так как функция представима в виде степенного ряда, то

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Соответственно при $x = x_1$ получаем

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n + \dots \quad (2.6)$$

Подберем номер n таким образом, чтобы остаток ряда (2.6) $R_n = a_{n+1}x_1^{n+1} + a_{n+2}x_1^{n+2} + \dots$ удовлетворял условию $|R_n| < \varepsilon$. Тогда $f(x_1) \approx S_n = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n$ с указанной точностью $\varepsilon > 0$.

Пример. Вычислить значение $\sqrt{e}$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Используем разложение функции $y = e^x$ в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

$$\text{Тогда } \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1/2}{1!} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \dots + \frac{(1/2)^n}{n!} + \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

Подберем n таким образом, чтобы

$$|R_n| = \left| \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(1/2)^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \right| < \varepsilon.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(1/2)^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{(1/2)^{n+3}}{(n+3)!} + \dots = \\ &= \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1/2}{(n+2)} + \frac{1/4}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \\ &< \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 = \frac{(1/2)^n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Так как $R_n < \frac{(1/2)^n}{(n+1)!}$, то подберем n таким образом, чтобы $\frac{(1/2)^n}{(n+1)!} < \varepsilon$, тогда и $R_n < \varepsilon$.

$$\text{При } n = 3 \text{ имеем } \frac{(1/2)^3}{4!} = \frac{1}{8 \cdot 24} = \frac{1}{192} > 0,001,$$

$$\text{при } n = 4 \text{ получим } \frac{(1/2)^4}{5!} = \frac{1}{16 \cdot 120} = \frac{1}{1920} < 0,001.$$

Так как $R_4 < \varepsilon$, то с точностью до $\varepsilon = 0,001$

$$\sqrt{e} \approx S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{211}{128} \approx 1,648.$$

2.8.2. Приближенное вычисление определенных интегралов при помощи степенных рядов

Разложение функции в степенной ряд используется при вычислении определенных (или неопределенных) интегралов в том случае, когда эти интегралы являются «неберущимися» или их вычисление трудоёмко.

Чтобы вычислить $\int_a^b f(x)dx$, подынтегральную функцию раскладывают в ряд Тейлора на отрезке $[a; b]$, а затем используют свойство почленного интегрирования степенного ряда. Далее подбирают n таким образом, чтобы остаток R_n полученного ряда не превышал заданной точности вычислений. Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx S_n$.

Пример. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Разложим функцию e^{-x^2} в степенной ряд. Так как $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ при $x \in \mathbf{R}$, то

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \text{ при } x \in \mathbf{R}.$$

Сходящийся степенной ряд можно почленно интегрировать, поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \Big|_0^1 \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}. \end{aligned}$$

Полученный числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ удовлетворяет теореме Лейбница (проверьте самостоятельно), поэтому его сумма $S \approx S_n$, если $|R_n| \leq a_{n+1} < \varepsilon$.

При $n = 4$ получаем $a_{n+1} = a_5 = \frac{1}{5! \cdot 11} = 0,00076 < \varepsilon$, поэтому $S \approx S_4$ с точностью до $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Следовательно,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,747.$$

2.8.3. Вычисление пределов функций

Пример. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{3x} - 1 - 3x}$.

Заменим функции $\cos 2x$, e^{3x} их разложением в ряд Маклорена:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{3x} - 1 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \dots\right)}{\left(1 + 3x + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \dots\right) - 1 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{2x^2}{3} + \dots}{\frac{9}{2} + \frac{9x}{2} + \dots} = \frac{4}{9}.$$

2.8.4. Решение дифференциальных уравнений

Пример. Записать пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = e^y + xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0$.

Так как $x_0 = 0$, то будем искать решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

По условию $y(0) = 0$, тогда $y'(0) = (e^y + xy)|_{x=0, y=0} = 1$.

Продифференцируем уравнение $y' = e^y + xy$, чтобы вычислить y'' .
Получим $y'' = (e^y + xy)'_x = e^y y' + y + xy'$.

Отсюда $y''(0) = e^0 \cdot 1 + 0 + 0 \cdot 1 = 1$.

Аналогично $y''' = (e^y y' + y + xy')'_x = e^y (y')^2 + e^y y'' + y' + y' + xy'' =$
 $= e^y y'' + 2y' + xy'' + e^y (y')^2$, $y'''(0) = e^0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + e^0 \cdot 1 = 4$.

$y^{IV} = (e^y y'' + 2y' + xy'' + e^y (y')^2)'_x =$
 $= e^y y' y'' + e^y y''' + 2y'' + y'' + xy''' + e^y (y')^3 + e^y 2y' y'' =$
 $= 3e^y y' y'' + e^y y''' + 3y'' + xy''' + e^y (y')^3$, $y^{IV}(0) = 7$.

Подставим найденные коэффициенты в ряд и получим

$$y(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{7}{4!}x^4 + \dots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \dots$$

Запишем в ответ пять первых членов полученного разложения
 $y(x) \approx 0 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{24}x^4$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько надо взять членов ряда $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$, чтобы вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$?

2. Сколько надо взять членов ряда $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$, чтобы вычислить $\sin 15^\circ$ с точностью до $\varepsilon = 0,0001$?

3. Сколько надо взять членов ряда $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$, чтобы найти число e с точностью до $\varepsilon = 0,0001$?

4. Вычислить $\sqrt[3]{7}$ с точностью до $\varepsilon = 0,01$ с помощью разложения функции $\sqrt[3]{8+x}$ в степенной ряд по степеням x .

5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до $\varepsilon = 0,0001$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_{-0,2}^0 e^{-5x^2} dx$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

8. С какой точностью будет вычислено число $\frac{\pi}{4}$, если воспользоваться разложением в ряд функции $\operatorname{arctg} x$, взяв сумму его первых пяти членов при $x = 1$?

Ответы

1. 2 члена. 2. 2 члена. 3. 8 членов. 4. 1,92. 5. 0,4931. 6. 0,608. 7. 0,187. 8. $\varepsilon = 0,1$.

2.9. Прикладные приложения. Основы теории возмущений на примере решения алгебраического уравнения

В случае нелинейных задач, когда точное решение либо громоздко, либо аналитически не находится, можно применить метод теории возмущений. Его идея состоит в использовании решения «невозмущенной» задачи, решение которой заранее известно. Вводится «малый» параметр, и решение ищется в виде приближения к «невозмущенному» решению. Обычно оно представляется в виде ряда относительно параметра.

Пример 1. Выписать решения уравнения с параметром:

$$x^2 + x - 6\varepsilon = 0, \text{ где } \varepsilon \ll 1.$$

Для невозмущенного уравнения $x^2 + x = 0$ известны корни $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Тогда корни «возмущенного» уравнения ищем в виде:

$$x(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n.$$

Подставим данное разложение в исходное уравнение:

$$(a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots)^2 + (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots) - 6\varepsilon = 0,$$

приводя подобные слагаемые по степеням параметра, получаем

$$(a_0^2 + a_0) + (2a_0a_1 + a_1 - 6)\varepsilon + (a_1^2 + 2a_0a_2 + a_2)\varepsilon^2 + \dots = 0.$$

Из этого представления получим систему соотношений на коэффициенты ряда:

$$\begin{cases} a_0^2 + a_0 = 0, \\ 2a_0a_1 + a_1 - 6 = 0, \\ a_1^2 + 2a_0a_2 + a_2 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Фиксируя значение коэффициента a_0 (один из корней «невозмущенного» уравнения), последовательно определяем коэффициенты ряда:

$$a_0 = -1; a_1 = -6; a_2 = 36; \dots$$

или

$$a_0 = 0; a_1 = 6; a_2 = -36; \dots$$

Получены два решения для исходного «возмущенного» уравнения:

$$x_1(\varepsilon) = -1 - 6\varepsilon + 36\varepsilon^2 + \dots,$$

$$x_2(\varepsilon) = 6\varepsilon - 36\varepsilon^2 + \dots$$

В рассмотренном примере количество решений «возмущенной» задачи совпало с количеством решений «невозмущенной» задачи. Это так называемый *регулярный* случай. Возможны ситуации, когда это не выполняется. Эти случаи называются *сингулярными*.

Пример 2. Найти решение уравнения с параметром:

$$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0, \text{ где } \varepsilon \ll 1.$$

Как видно при обращении значения параметра в ноль тип уравнения меняется и число решений «возмущенной» и «невозмущенной» задач становится различным.

Соответствующее «невозмущенному» корню решение находится аналогично регулярному случаю:

$$x(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n.$$

Подстановка в уравнение дает следующее равенство:

$$\varepsilon(a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots)^2 + (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots) - 1 = 0.$$

Приводя подобные слагаемые по степеням параметра, получаем систему:

$$\begin{cases} a_0 - 1 = 0, \\ a_0^2 + a_1 = 0, \\ 2a_0a_1 + a_2 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Из системы последовательно вычисляем коэффициенты ряда

$$a_0 = 1; a_1 = -1; a_2 = 2; \dots$$

и записываем решение в виде ряда

$$x_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \dots$$

Для поиска второго «сингулярного» решения классическая схема неприменима. Если проанализировать характер решений при малых значениях параметра, то заметим, что один из корней стремится к бесконечности при стремлении значения параметра к нулю. Наша задача определить скорость этого стремления. Если предположить полиномиальный характер этого стремления к бесконечности, то можем сделать замену переменной

$$x(\varepsilon) = \frac{y(\varepsilon)}{\varepsilon^m},$$

где степень m подбирается из конкретной задачи. Для нашего случая заметим, что $x_1 x_2 = -\frac{1}{\varepsilon}$ (из теоремы Виета). Следовательно, $m = 1$.

Замена $x(\varepsilon) = \frac{y(\varepsilon)}{\varepsilon}$ приводит к новому виду уравнения:

$$\varepsilon \left(\frac{y}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{y}{\varepsilon} - 1 = 0$$

или иначе

$$y^2 + y - \varepsilon = 0,$$

которое решается регулярным образом. Его решения имеют вид:

$$y_1(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + \dots,$$

$$y_2(\varepsilon) = -1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + \dots$$

Возврат к старой переменной даст следующие решения:

$$x_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \dots \text{ (регулярный корень),}$$

$$x_2(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \dots \text{ (сингулярный корень).}$$

Контрольные вопросы по теме «Функциональные и степенные ряды»

1. Определение функциональной последовательности и функционального ряда. Определение области сходимости функционального ряда.
2. Определение сходимости и равномерной сходимости функциональной последовательности на сегменте. Определение равномерной сходимости функционального ряда в области.

3. Доказать признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

4. Доказать теорему Коши о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда.

5. Теорема о почленном интегрировании ФР.

6. Теорема о почленном дифференцировании ФР.

7. Определение степенного ряда. Теорема Абеля.

8. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда.

9. Теорема Тейлора и ряд Тейлора. Необходимое и достаточное условие сходимости степенного ряда к заданной функции.

3. РЯДЫ ФУРЬЕ

3.1. Ортогональные и ортонормированные системы функций

Функции вещественного переменного обладают многими свойствами векторов. Функции можно, как и векторы, складывать и умножать на число. В конечномерных пространствах можно найти конечную систему векторов или базис, по которому можно разложить любой вектор пространства. Пространство функций вещественного переменного не является конечномерным. В связи с этим возникает задача поиска бесконечных систем функций, которые могли бы служить базисом для разложения различных функций. Но разложение функций по бесконечному базису перестает быть обычной суммой, превращаясь в ряд или в интеграл. Разложения такого рода будут рассмотрены в данном третьем разделе [5].

Рассмотрим вектор $\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n$, заданный координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в ортонормированном базисе из векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ в n -мерном линейном векторном пространстве.

Все векторы, составляющие ортонормированный базис, попарно ортогональны, следовательно, их скалярные произведения равны нулю:

$$(\bar{a}_i, \bar{a}_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Кроме того, все базисные векторы единичные: $|\bar{a}_i| = 1$.

Умножим правую и левую части равенства $\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n$ скалярно на вектор $\bar{a}_1$:

$$(\bar{x}, \bar{a}_1) = x_1(\bar{a}_1, \bar{a}_1) + \dots + x_n(\bar{a}_n, \bar{a}_1).$$

Ввиду ортогональности векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ и свойства скалярного произведения векторов $(\bar{a}_1, \bar{a}_1) = |\bar{a}_1|^2$ равенство приобретает вид:

$$(\bar{x}, \bar{a}_1) = x_1|\bar{a}_1|^2, \quad \text{откуда} \quad x_1 = (\bar{x}, \bar{a}_1) \cdot \frac{1}{|\bar{a}_1|^2} = (\bar{x}, \bar{a}_1).$$

Аналогично умножая последовательно правую и левую части равенства $\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n$ скалярно на векторы $\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, получаем соответственно:

$$x_2 = \frac{(\bar{x}, \bar{a}_2)}{|\bar{a}_2|^2} = (\bar{x}, \bar{a}_2), \quad \dots, \quad x_n = \frac{(\bar{x}, \bar{a}_n)}{|\bar{a}_n|^2} = (\bar{x}, \bar{a}_n).$$

Таким образом, разложение вектора $\bar{x}$ по ортонормированному базису будет иметь вид:

$$\bar{x} = (\bar{x}, \bar{a}_1)\bar{a}_1 + (\bar{x}, \bar{a}_2)\bar{a}_2 + \dots + (\bar{x}, \bar{a}_n)\bar{a}_n,$$

то есть коэффициенты разложения вектора $\bar{x}$ по ортонормированному базису являются скалярными произведениями самого вектора $\bar{x}$ на базисные векторы.

Примером ортонормированного базиса является тройка векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Рассмотрим теперь систему непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, среди которых нет функции, тождественно равной нулю:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

Распространим понятие *нормированности* и *ортogonalности* векторов на систему непрерывных на некотором отрезке функций.

Длину или норму вектора определим как квадратный корень из скалярного произведения вектора самого на себя. Поэтому введем определение нормы функции на отрезке.

Определение 1. Нормой $\|\varphi(x)\|_{[a; b]}$ функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется число $\|\varphi(x)\|_{[a; b]} = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x) dx}$.

Если этот интеграл равен единице, $\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x) dx} = 1$, то функция $\varphi(x)$ называется *нормированной* на отрезке $[a; b]$.

Введем понятие ортогональности функций на отрезке. Так как необходимым и достаточным условием ортогональности векторов является равенство нулю их скалярного произведения, то понятие ортогональности для двух функций будет [6] следующим.

Определение 2. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называются *ортogonalными* на отрезке $[a; b]$, если

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0.$$

Теперь можно ввести понятие ортогональной и ортонормированной системы непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

Система этих функций будет нормирована на $[a; b]$, если нормирована каждая функция системы, и ортогональна, если попарно ортогональны любые две входящие в систему функции.

Определение 3. Система непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется *ортонормированной*, если она является нормированной и ортогональной, то есть выполняется условие

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Приведем примеры ортогональных и ортонормированных систем функций.

Пример 1. Рассмотрим систему тригонометрических функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$. Она ортогональна на отрезке $[-\pi; \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 \text{ при } n \neq m, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \text{ при } n \neq m, n=1, 2, 3, \dots, m=1, 2, 3, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \text{ при любых } n=0, 1, 2, \dots, m=1, 2, 3, \dots$$

Данная система тригонометрических функций не является нормированной на $[-\pi; \pi]$, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Норма каждой из тригонометрических функций $\cos nx, \sin nx$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ равна $\sqrt{\pi}$, норма единицы на отрезке $[-\pi; \pi]$ равна $\sqrt{2\pi}$.

Для того чтобы из ортогональной, но ненормированной на некотором отрезке системы функций получить ортонормированную систему, необходимо разделить каждую функцию, входящую в данную систему, на ее норму.

Таким образом, получим систему ортонормированных на отрезке $[-\pi; \pi]$ функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots \quad (3.1)$$

Пример 2. Множество функций $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots$ образуют ортогональную на отрезке $[0; \pi]$ систему функций, так как при $n \neq m$

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0, \text{ а при } n = m \int_0^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 3. Множество полиномов Лежандра $P_0(x)=1, P_1(x)=x, \dots, P_m(x)=\frac{1}{m! \cdot 2^m} \cdot \frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}, m=0, 1, 2, \dots$, образуют ортогональную на от-

резке $[-1; 1]$ систему функций, так как $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$ при $n \neq m$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти нормы функций [7]:
 - a) $f(x) = x - 1$ на отрезке $[0; 1]$;
 - b) $f(x) = \sin 2x$ на отрезке $[0; 2\pi]$;
 - c) $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1; e]$;
 - d) $f(x) = 3x - 4$ на отрезке $[0; 1]$.
2. Проверить ортогональность функций $f(x) = \sin x, g(x) = x$ на отрезке $[0; \pi]$.
3. Найти, при каком значении λ заданные функции $f(x)$ и $g(x)$ ортогональны:

- a) $f(x) = \sin \lambda x, g(x) = x$ на отрезке $[0; \pi]$;
 b) $f(x) = \ln x, g(x) = 2 + \lambda x$ на отрезке $[1; e]$;
 c) $f(x) = e^{2x}, g(x) = 3 + \lambda x$ на отрезке $[0; 1]$.

4. Найти, при каком значении λ функция $f(x)$ будет иметь заданное значение нормы $\|f(x)\|$:

- a) $f(x) = \lambda \cos x, \|f(x)\| = 2$ на отрезке $[0; 2\pi]$;
 b) $f(x) = \ln \lambda x, \|f(x)\| = \sqrt{e-2}$ на отрезке $[1; e]$;
 c) $f(x) = 2\lambda - 3x^2, \|f(x)\| = \sqrt{\frac{1}{5}}$ на отрезке $[0; 1]$.

Ответы

1. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. b) $\sqrt{\pi}$. c) $\sqrt{e-2}$. d) $\sqrt{7}$. 2. Не являются ортогональными.
 3. a) $\lambda = \frac{1}{2} + n$. b) $\lambda = -\frac{8}{e^2 + 1}$. c) $\lambda = \frac{6 - 6e^2}{e^2 + 1}$. 4. a) $\lambda = \sqrt{\frac{4}{\pi}}$. b) $\lambda = 1, \lambda = e^{\frac{2}{1-e}}$.
 c) $\lambda = 0, \lambda = \frac{1}{3}$.

3.2. Ряды и коэффициенты Фурье. Теорема Дирихле

Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы произвольная ортонормированная система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ и некоторая непрерывная функция $f(x)$. Рассмотрим задачу разложения функции $f(x)$ по данной системе функций, то есть

$$f(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) + \dots$$

По аналогии с разложением вектора по ортонормированному базису найдем коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$:

$$a_n = (f(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Определение 1. Ряд $a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ называется *рядом Фурье* по системе ортонормированных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$.

Рассмотрим разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций (3.1) на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Коэффициенты этого ряда называются *коэффициентами ряда Фурье* и определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (3.2)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на отрезке

$[-\pi; \pi]$, то все интегралы имеют смысл, таким образом, можно говорить о разложении ее в ряд Фурье и о сходимости этого ряда. Но есть случаи, когда ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ сходится, но не к функции $f(x)$, а к какой-то другой функции, либо не сходится.

В связи с этим возникает задача: выяснить, в каких случаях ряд Фурье функции $f(x)$ сходится именно к этой функции. Система достаточных условий для того, чтобы функция $f(x)$ была разложима в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$, представлена в теореме Дирихле (условия Дирихле).

Определение 2. *Кусочно-непрерывной на отрезке* называется функция, имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва 1-го рода.

Определение 3. *Кусочно-монотонной на отрезке* называется функция, которая является монотонной на каждом участке непрерывности.

Теорема Дирихле. (Условия Дирихле.)

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi; \pi]$ и является на нем кусочно-непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ во всех точках непрерывности отрезка $[-\pi; \pi]$.

Если $S(x)$ – сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, то во всех точках непрерывности этой функции

$$S(x) = f(x),$$

а во всех точках разрыва

$$S(x) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)). \quad (3.3)$$

Кроме того, $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi-0) + f(-\pi+0))$. Эти условия называют также *условиями Дирихле*.

Из теоремы Дирихле следует, что значения функции $f(x)$ в точках разрыва не влияют на ее разложение в ряд Фурье, следовательно, функции, имеющие одни и те же точки разрыва и отличающиеся друг от друга только в этих точках, имеют одинаковое разложение в ряд Фурье.

Отметим также одно важное свойство тригонометрического ряда Фурье.

Для всякой функции $f(x)$, интеграл от которой на отрезке $[-\pi; \pi]$ существует, справедливо равенство *Парсеваля-Ляпунова*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (3.4)$$

3.3. Физическое истолкование разложения функции в тригонометрический ряд Фурье

Если рассматривать время в качестве независимой переменной, то функция от этой переменной будет описывать движение некоторой систе-

мы. Представим движение этой системы на некотором отрезке времени в виде комбинации заранее заданных движений.

В частности, можно представить произвольное движение на некотором отрезке времени в виде одновременных гармонических колебаний с периодами $2\pi, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \dots$. Любое колебание такого вида представляется функцией вида

$$u_n(t) = A_n \sin(nt + \varphi_n) = A_n \sin \varphi_n \cos nt + A_n \cos \varphi_n \sin nt = a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Функция вида $u_n(x) = A_n \sin(nx + \varphi_n)$ называется *простой гармоникой*. Число A_n называется *амплитудой гармоникой*, а число φ_n – *начальной фазой*.

Таким образом, пара соседних членов тригонометрического ряда соответствует гармонической составляющей $u_n(x) = A_n \sin(nx + \varphi_n)$ с периодом $\frac{2\pi}{n}$ и амплитудой A_n , которая называется *n-й гармоникой движения*.

Найдем амплитуду *n-й гармоникой*:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin nx \right) = \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\sin \varphi_n \cos nx + \cos \varphi_n \sin nx) = A_n \sin(nx + \varphi_n). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \sin \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}.$$

Частичная сумма тригонометрического ряда

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется *сложным гармоническим колебанием* и является суммой простых гармоник.

3.4. Разложение 2π -периодических функций в тригонометрический ряд Фурье

Все тригонометрические функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$, составляющие базис при разложении некоторой функции в ряд Фурье, являются периодическими с периодом 2π . Следовательно, и любая их сумма

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

также является периодической с периодом, не меньшим 2π .

Таким образом, первоначально на отрезке $[-\pi; \pi]$ задана некоторая функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле (3.3). Составив её тригонометрический ряд Фурье, получим в качестве суммы ряда функцию $S(x)$, которая определена не только на отрезке $[-\pi; \pi]$, но и при всех действительных значениях x . При этом на отрезке $[-\pi; \pi]$ сумма $S(x)$ определяет исходную функцию $f(x)$.

Сумма $S(x)$ будет определять исходную функцию $f(x)$ и вне заданного отрезка в том и только в том случае, если сама функция $f(x)$ будет периодической с периодом 2π в точках непрерывности, то есть $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Напротив, если исходная функция не является периодической, то вне отрезка $[-\pi; \pi]$ она может не совпадать с функцией $S(x)$.

Таким образом, если на отрезке $[-\pi; \pi]$ задана периодическая с периодом 2π функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, то её тригонометрический ряд Фурье задает эту функцию при всех действительных значениях x .

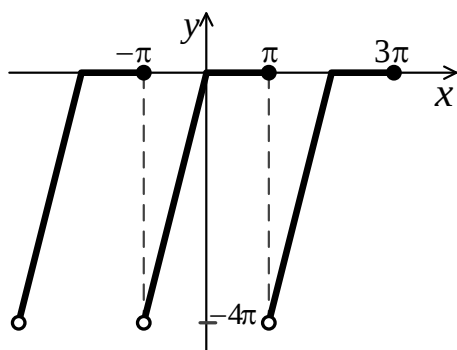
Если функция $f(x)$ не является периодической при выполнении условий Дирихле, то тригонометрический ряд Фурье определяет её только на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Но непериодическую функцию, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$ и удовлетворяющую условиям Дирихле, также можно разложить в ряд Фурье. При этом полученный ряд будет сходиться к функции $f(x)$ в точках непрерывности. Более того, полученный ряд будет сходящимся на всей числовой оси, а его суммой будет периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю числовую ось. Исключение составят лишь точки разрыва первого рода, в которых сумма тригонометрического ряда Фурье будет равна полусумме правого и левого пределов периодического продолжения данной функции, то есть $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье 2π -периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \in (-\pi; 0), \\ 0, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$$

График функции $f(x)$ имеет вид:



Найдем коэффициенты ряда Фурье по формулам (3.2):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 4x dx + \int_0^{\pi} 0 dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(2x^2 \Big|_{-\pi}^0 \right) = \frac{1}{\pi} (0 - 2\pi^2) = -2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 4x \cos nx dx + \int_0^{\pi} 0 \cdot \cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 4x \cos nx dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по частям } u = 4x, du = 4dx, \\ dv = \cos nx dx, v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left(4x \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{1}{n} \sin nx \cdot 4 dx \right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx = \frac{4}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 = \frac{4}{\pi n^2} (1 - \cos \pi n) = \frac{4}{\pi n^2} (1 - (-1)^n),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 4x \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = 4x, du = 4dx, \\ dv = \sin nx dx, v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4x}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{4}{n} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-0 + \frac{4(-\pi)}{n} \cos(-\pi n) + \frac{4}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 \right) =$$

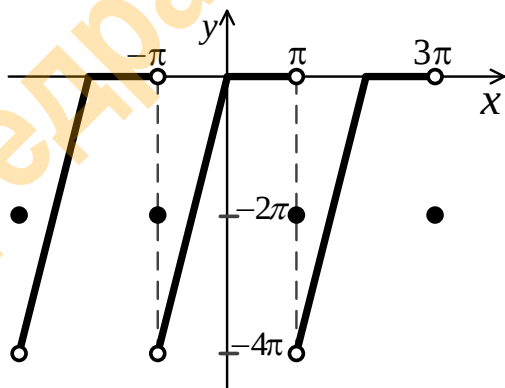
$$= -\frac{4\pi}{\pi n} \cos \pi n = \frac{4}{n} (-1)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim -\frac{2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) \cos nx + \frac{4}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \right) =$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k), \\ -2\pi, & x = \pi + 2\pi k, \end{cases} \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

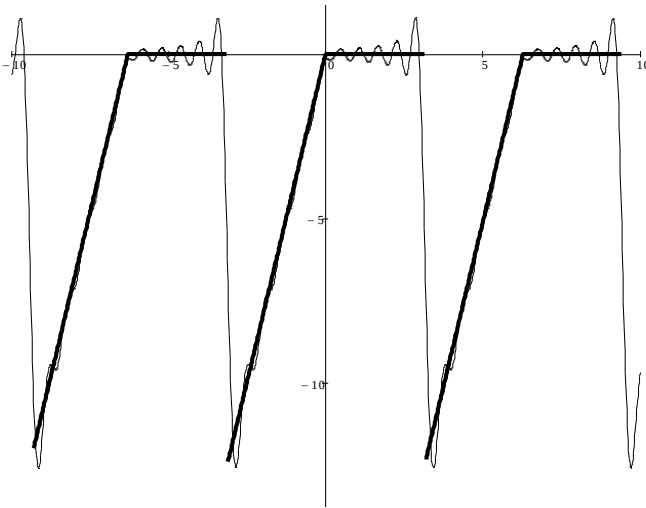
Сумма данного ряда изображена на рисунке:



Обратите внимание, что значение суммы ряда Фурье в точках разрыва функции равно

$$S(\pi + 2\pi k) = \frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \frac{0 + (-4\pi)}{2} = -2\pi.$$

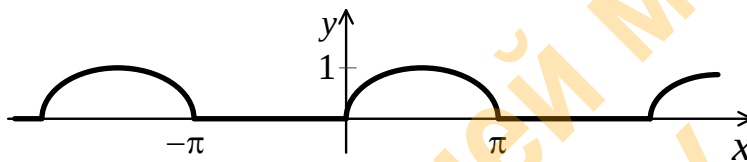
На следующем рисунке изображены функция $y = f(x)$ и частичная сумма ее ряда Фурье $S_{10}(x)$.



Пример 2. Найти разложение в ряд Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k), \\ \sin x, & x \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k], \end{cases} \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

График функции имеет вид:



Найдем ее коэффициенты Фурье по формулам (3.2):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(1+n)x + \sin(1-n)x) dx. \end{aligned}$$

Если $n=1$, то $\sin(1-n)x=0$, поэтому получим

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{4\pi} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

При $n \neq 1$ будет следующее:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(1+n)x + \sin(1-n)x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\cos(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\cos(n+1)\pi}{1+n} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} + \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{1+n} + \frac{1+(-1)^{n-1}}{n-1} \right) = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 (n - \text{нечетное}), \\ \frac{-2}{\pi(4k^2-1)}, & n = 2k (n - \text{четное}). \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos(x-nx) - \cos(x+nx)) dx = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos(1-n)x - \cos(1+n)x) dx.$$

Если $n=1$, то $\cos(1-n)x=1$, поэтому получим

$$b_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}.$$

При $n \neq 1$ будет следующее:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos x(1-n) - \cos x(1+n)) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin x(1-n)}{1-n} - \frac{\sin x(1+n)}{1+n} \right) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Таким образом, данная функция имеет разложение:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)} \cos(2kx).$$

Равенство верно при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

3.5. Разложение в ряд Фурье 2π -периодических четных и нечетных функций

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет теореме Дирихле и является четной, то есть $f(-x) = f(x)$. Тогда ее коэффициенты Фурье можно вычислить по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0.$$

При этом ряд Фурье четной функции принимает вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (3.5)$$

Такой ряд называется *рядом Фурье по косинусам*.

Если функция $y = f(x)$ является нечетной функцией, то есть $f(-x) = -f(x)$, то ее коэффициенты Фурье можно вычислить по формулам:

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

При этом ряд Фурье нечетной функции принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (3.6)$$

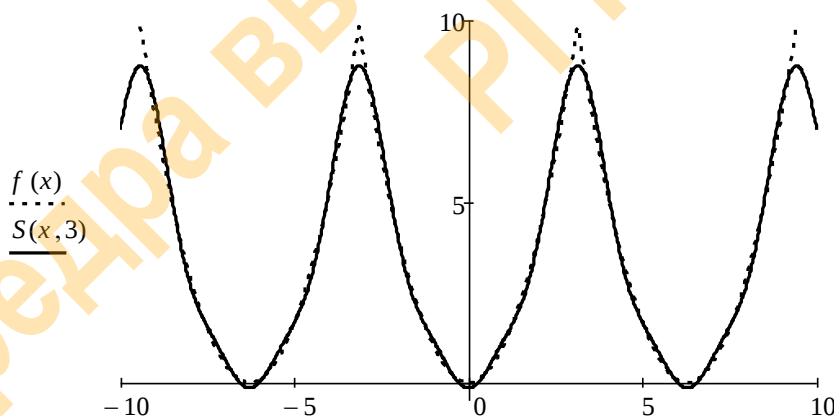
Такой ряд называется *рядом Фурье по синусам*.

Пример 1. Пусть функция $y = f(x)$ является 2π -периодической и удовлетворяет условию $f(x) = x^2$ при $x \in [-\pi; \pi]$. Найти ее разложение в ряд Фурье.

Так как функция четная, то коэффициенты $b_n = 0$. Применяя формулу (3.5), вычисляем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = \cos nx dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin nx dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) dx \right) = \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \left(\pi \cos \pi n - \int_0^{\pi} (\cos nx) dx \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^n - \frac{4}{\pi n^3} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Тогда разложение этой функции в ряд Фурье имеет вид $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2, x \in [-\pi; \pi]$.



На рисунке представлены график функции $y = f(x)$ и ее частичная сумма ряда Фурье $S(x, 3)$.

Замечание. Подставим в ряд $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$ значение $x = 0$.

В результате получим $0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}$ или

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \dots$$

Таким образом, используя разложение функций в ряд Фурье, можно находить суммы некоторых числовых рядов. Существуют специальные справочники, например [5], в которых представлены суммы наиболее часто встречающихся при решении практических задач рядов.

Пример 2. Пусть функция $y = f(x)$ является 2π -периодической и удовлетворяет условию $f(x) = x$ при $x \in (-\pi; \pi)$. Найти ее разложение в ряд Фурье.

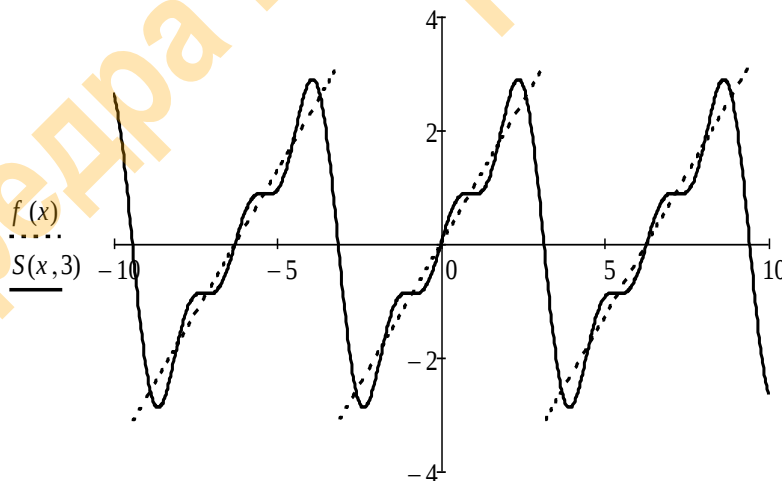
Так как данная функция является нечетной, то $a_0 = a_n = 0$, найдем ее коэффициенты b_n , используя формулу (3.6):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = x \sin nx dx, \quad v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left. \frac{-x \cos nx}{n} \right|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi \cos \pi n}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= -\frac{2\pi}{\pi n} (-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Подставим найденные коэффициенты в ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \begin{cases} x, & x \in (-\pi; \pi), \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

На рисунке изображены функция $y = f(x)$ и ее частичная сумма $S(x, 3)$:



3.6. Сдвиг отрезка разложения

Во многих теоретических и прикладных задачах приходится иметь дело с разложением функции в тригонометрический ряд Фурье не на отрезке $[-\pi; \pi]$, а на каком-либо другом отрезке, например $[a; b]$. Задача состоит в том, чтобы из базисной ортонормированной системы функций на

отрезке $[-\pi; \pi]$ получить ортонормированную систему функций на отрезке $[a; b]$.

Поскольку функции $\sin nx$, $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом 2π , интегралы от этих функций не изменятся от сдвига пределов интегрирования, то есть система функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots$ является ортонормированной не только на отрезке $[-\pi; \pi]$, но и на любом отрезке вида $[a; a + 2\pi]$.

Далее, если функция $f(x)$ является периодической с периодом 2π , то периодическими с тем же периодом будут все функции вида $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$.

Поэтому коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a; a + 2\pi]$ вычисляются так же, как и для отрезка $[-\pi; \pi]$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n, \\ \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = b_n.\end{aligned}$$

Таким образом, при вычислении коэффициентов Фурье 2π -периодической функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ можно использовать любые отрезки $[a; a + 2\pi]$.

3.7. Изменение длины отрезка интегрирования. Разложение в ряд Фурье 2ℓ -периодических функций

Разложение периодической функции $f(x)$, удовлетворяющей теореме Дирихле, в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[a; a + 2\ell]$, длина которого равна 2ℓ , можно осуществить с помощью подстановки $x = \frac{\ell}{\pi}t$, и

функция $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$ будет задана на отрезке $\left[\frac{a\pi}{\ell}; \frac{a\pi}{\ell} + 2\pi\right]$ длиной 2π .

Выполнив обратную замену, получим разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[a; a + 2\ell]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi nx}{\ell} \right),$$

$$\text{где } a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi nx}{\ell} dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi nx}{\ell} dx. \quad (3.7)$$

Если при этом $y = f(x)$ – четная функция, то она разлагается в ряд Фурье только по косинусам. То есть $b_n = 0$, а ряд имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{\ell},$$

$$\text{где } a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx. \quad (3.8)$$

Если функция $y = f(x)$ является нечетной, то она разлагается в ряд Фурье только по синусам. То есть $a_0 = a_n = 0$, а ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad \text{где } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx. \quad (3.9)$$

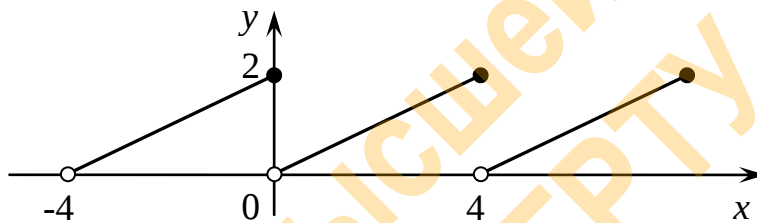
Замечание. При нахождении коэффициентов Фурье для 2ℓ -периодической функции будет полезно учитывать следующее: если $y = g(x)$ является 2ℓ -периодической функцией и интегрируема на отрезке $[0; 2\ell]$, то

$$\int_0^{2\ell} g(x) dx = \int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx = \int_c^{2\ell+c} g(x) dx$$

для любого $c \in \mathbf{R}$.

То есть при вычислении коэффициентов Фурье можно выбирать любой промежуток длиной 2ℓ , результат интегрирования от этого не изменится.

Пример. Разложим в ряд Фурье функцию, заданную графически:



Эта функция является периодической с периодом $T = 2\ell = 4$. Поэтому $\ell = 2$. При этом $f(x) = \frac{x}{2}$, если $x \in (0; 4]$. Вычислим коэффициенты Фурье, используя формулы (3.7):

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{x}{2} dx = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{x}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{x}{2} \sin \frac{\pi n x}{2} dx = -\frac{2}{\pi n}.$$

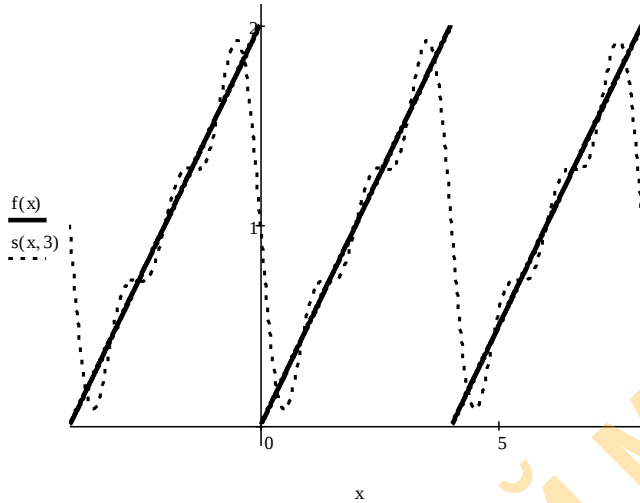
Таким образом, $y = f(x)$ имеет формальный ряд Фурье:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right) = \\ &= \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 \cos \frac{\pi n x}{2} - \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \right) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2}. \end{aligned}$$

Применим теорему Дирихле и получим:

$$f(x) \sim 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in (0, 4), \\ 1, & x = 0, x = 4. \end{cases}$$

То есть в точках непрерывности функции $y = f(x)$ ряд сходится к этой функции, а в точках разрыва – к $\frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$.



На рисунке представлены график функции $f(x)$ и частичная сумма ряда $S(x, 3)$.

3.8. Разложение в ряд Фурье непериодической функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(0; d)$ и удовлетворяет на этом интервале теореме Дирихле, то есть является кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной на отрезке $[0; d]$.

Для данной функции можно получить разложение в ряд Фурье: а) по косинусам, б) по синусам и в) общего вида:

а) чтобы разложить функцию $y = f(x)$ в ряд по косинусам, рассмотрим вспомогательную периодическую функцию с периодом $T = 2d$ такую, что

$$y = g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0; d), \\ f(-x), & x \in (-d; 0). \end{cases}$$

То есть продолжим исходную функцию $y = f(x)$ по четности и по периодичности.

Разложим полученную функцию $y = g(x)$ в ряд Фурье. Так как она является четной, то $b_n = 0$, для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ найдем

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx,$$

где $\ell = \frac{T}{2} = d$. Полученный ряд будет сходиться к функции $y = f(x)$, если $x \in (0; d)$ – точка непрерывности этой функции;

б) чтобы разложить функцию $y = f(x)$ в ряд по синусам, рассмотрим вспомогательную периодическую функцию с периодом $T = 2d$ такую, что

$$y = g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0; d), \\ -f(-x), & x \in (-d; 0). \end{cases}$$

То есть продолжим исходную функцию $y = f(x)$ по нечетности и по периодичности.

Разложим полученную функцию $y = g(x)$ в ряд Фурье. Так как она является нечетной, то $a_0 = a_n = 0$ и $b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$, где $\ell = \frac{T}{2} = d$. Полученный ряд будет сходиться к функции $y = f(x)$, если $x \in (0; d)$ – точка непрерывности этой функции;

в) чтобы получить разложение в ряд Фурье общего вида, для функции $y = f(x)$ рассмотрим вспомогательную периодическую функцию с периодом $T = d$ такую, что $y = g(x) = f(x)$, $x \in (0; d)$. То есть продолжим исходную функцию $y = f(x)$ по периодичности. Разложим полученную функцию $y = g(x)$ в ряд Фурье:

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right),$$

где $a_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^d f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\ell} \int_0^d f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx$, $b_n = \frac{1}{\ell} \int_0^d f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$,
 $\ell = \frac{T}{2} = \frac{d}{2}$.

Полученный ряд будет сходиться к функции $y = f(x)$, если $x \in (0; d)$ – точка непрерывности функции $y = f(x)$.

Замечание. Во всех трех случаях в точках разрыва функции $y = f(x)$ ряд Фурье сходится к $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ – среднему арифметическому пределов этой функции слева и справа.

Пример. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & 1 < x < 2 \end{cases}$ в ряд Фурье:

а) по косинусам, б) по синусам, в) общего вида:

а) рассмотрим разложение данной функции по косинусам. Продолжим функцию $y = f(x)$ по четности, а затем по периодичности.

Период полученной функции $T = 2d = 2 \cdot 2 = 4$, следовательно, $\ell = \frac{T}{2} = 2$. Найдем коэффициенты ряда Фурье (3.8): $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (-2x) dx + \int_1^2 3 dx = 2,$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \int_0^1 (-2x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx + \int_1^2 3 \cos \frac{\pi n x}{2} dx =$$

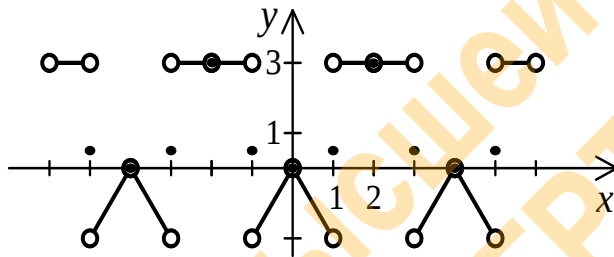
$$= -\frac{10}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{\pi^2 n^2}.$$

Ряд Фурье функции $y = f(x)$ будет иметь вид

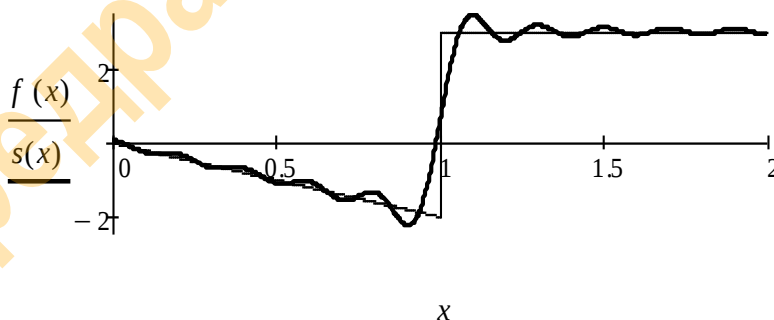
$$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{10}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{\pi^2 n^2} \right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} -2x, & x \in [0; 1), \\ 3, & x \in (1; 2), \\ 3, & x = 2, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Сумма ряда изображена на рисунке:



На чертеже представлены график функции $y = f(x)$ и график частичной суммы $S_{20}(x)$ ее ряда Фурье:



б) рассмотрим разложение $f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & 1 < x < 2 \end{cases}$ по синусам. Про-

должим функцию по нечетности, а затем по периодичности. Период полученной функции $T = 4$, следовательно, $\ell = 2$. Найдем коэффициенты её ряда Фурье (3.9): $a_0 = a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \int_0^1 (-2x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_1^2 3 \sin \frac{\pi n x}{2} dx =$$

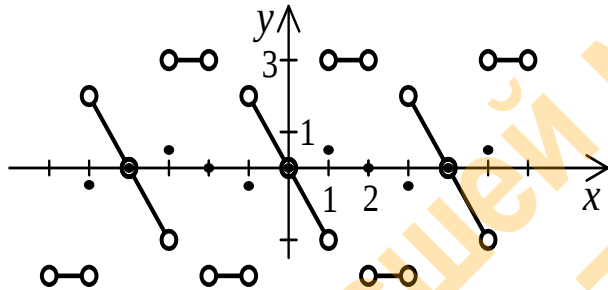
$$= \frac{10}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{8}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{6}{\pi n} (-1)^n.$$

Таким образом, ряд Фурье будет иметь вид:

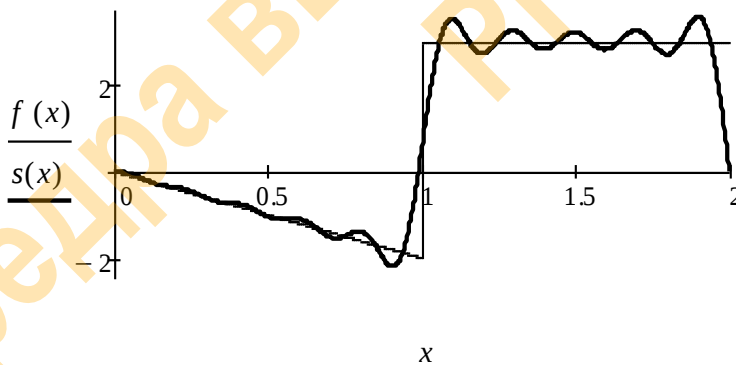
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{8}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{6}{\pi n} (-1)^n \right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} -2x, & x \in (0; 1), \\ 3, & x \in (1; 2), \\ 0, & x = 0, x = 2, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Сумма ряда изображена на рисунке:



На чертеже представлены график функции $f(x)$ и график частной суммы $S_{20}(x)$ ряда Фурье:



в) рассмотрим разложение исходной функции $f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & 1 < x < 2 \end{cases}$ в

ряд Фурье общего вида. Продолжим функцию по периодичности.

Период полученной функции $T = d = 2$, следовательно, $\ell = 1$. Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (-2x) dx + \int_1^2 3 dx = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{1} \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{1} dx = \int_0^1 (-2x) \cos(\pi n x) dx + \int_1^2 3 \cos(\pi n x) dx = \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n),$$

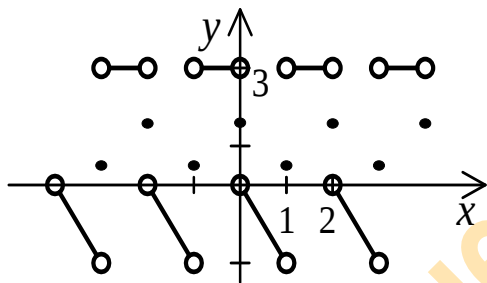
$$b_n = \frac{1}{1} \int_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{1} dx = \int_0^1 (-2x) \sin(\pi n x) dx + \int_1^2 3 \sin(\pi n x) dx = \frac{5(-1)^n - 3}{\pi n}.$$

Ряд Фурье будет иметь вид:

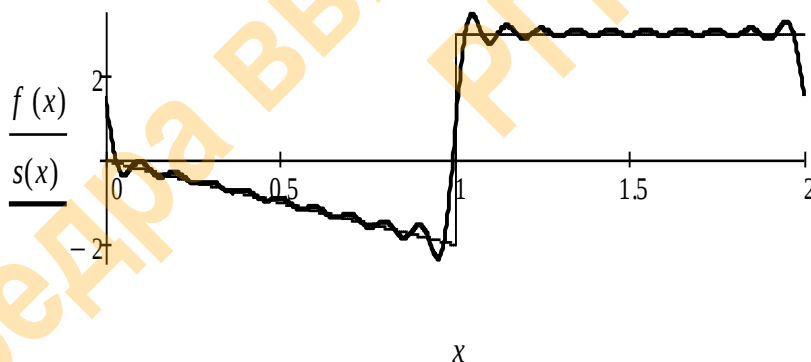
$$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x) + \frac{5(-1)^n - 3}{\pi n} \sin(\pi n x) \right) =$$

$$= \begin{cases} -2x, & x \in (0; 1), \\ 3, & x \in (1; 2), \\ \frac{3}{2}, & x = 0, x = 2, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Сумма ряда изображена на рисунке:



На чертеже представлены график функции $f(x)$ и график частной суммы $S_{20}(x)$ ряда Фурье:



3.9. Ряд Фурье в комплексной форме

При решении различных задач физики и радиотехники принято записывать тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме, так как она алгебраически проще и более симметрична.

Формулы Эйлера $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$, $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ позволяют выра-

зить тригонометрические функции через показательные функции с комплексным показателем. Поэтому тригонометрический ряд Фурье можно представить в комплексной форме.

Пусть 2ℓ -периодическая функция $y = f(x)$ имеет тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \right).$$

Так как $\cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} + e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} - e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}}{2i}$, то

$$\begin{aligned} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) &= a_n \frac{e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} + e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} - e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}}{2i} = \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}. \end{aligned}$$

Введем обозначения $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$. В результате ряд Фурье функции $y = f(x)$ примет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{\ell}}. \quad (3.10)$$

Ряд (3.10) называется рядом Фурье для функции $y = f(x)$ в комплексной форме. Коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме находят по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}} dx. \quad (3.11)$$

Вопрос о сходимости ряда Фурье в комплексной форме решается с помощью теоремы Дирихле.

Пример 1. Записать ряд Фурье в комплексной форме для 2π -периодической функции $y = f(x)$ такой, что $f(x) = e^{2x}$ при $x \in (-\pi; \pi]$.

Так как функция $y = f(x)$ имеет период $T = 2\pi$, то ее коэффициенты Фурье находятся по формуле (3.11) при $\ell = \pi$, т.е.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} e^{-i\frac{\pi n x}{\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x - inx} dx = \frac{1}{2\pi(2 - in)} e^{(2 - in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi(2 - in)} (e^{(2 - in)\pi} - e^{-(2 - in)\pi}) = \frac{1}{2\pi(2 - in)} (e^{2\pi} e^{-in\pi} - e^{-2\pi} e^{in\pi}). \end{aligned}$$

Так как $e^{\pm in\pi} = \cos(\pm n\pi) + i \sin(\pm n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$,
то $c_n = \frac{(e^{2\pi}(-1)^n - e^{-2\pi}(-1)^n)}{2\pi(2 - in)} = \frac{(-1)^n}{\pi(2 - in)} \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2} = \frac{(-1)^n}{\pi(2 - in)} \text{sh}(2\pi).$

Ряд Фурье функции $y = f(x)$ будет иметь вид (3.10):

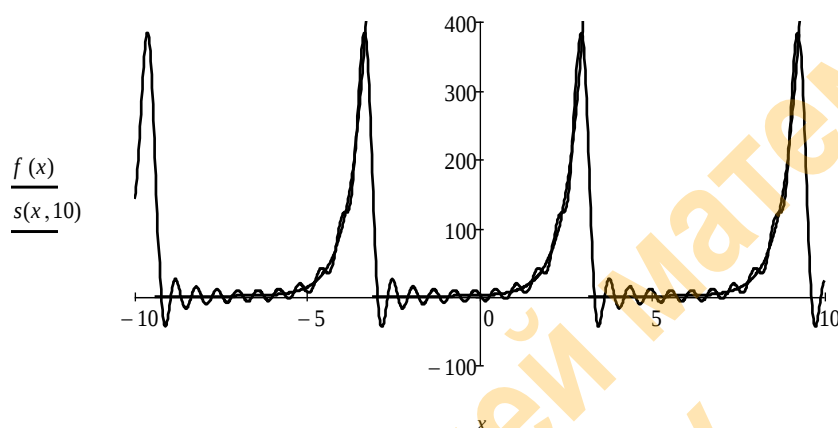
$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(2 - in)} \text{sh}(2\pi) e^{i\pi n x} = \frac{\text{sh}(2\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2 - in)} e^{i\pi n x}.$$

Применим к полученному ряду теорему Дирихле:

$$\frac{\operatorname{sh}(2\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2-in)} e^{i\pi n x} = \begin{cases} e^{2x}, & x \in (-\pi; \pi), \\ \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2} = \operatorname{ch}(2\pi), & x = \pm\pi. \end{cases}$$

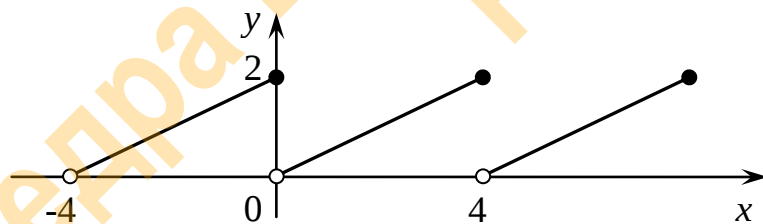
Таким образом, в точках непрерывности функции $y = f(x)$ ряд Фурье сходится к этой функции, а в точках разрыва $x = \pi(2m+1)$, где $m \in \mathbb{Z}$, к числу $\operatorname{ch}(2\pi)$.

На рисунке представлены график функции $y = f(x)$ и частичная сумма ее ряда Фурье $S(x, 10)$:



Отметим, что частичная сумма ряда Фурье в комплексной форме имеет вид $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i \frac{\pi k x}{\ell}}$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме функцию $y = f(x)$, заданную графически:



Данная функция $y = f(x)$ является периодической с периодом $T = 2\ell = 4$, поэтому $\ell = 2$. При этом $f(x) = \frac{x}{2}$, если $x \in (0; 4]$. Вычислим ее

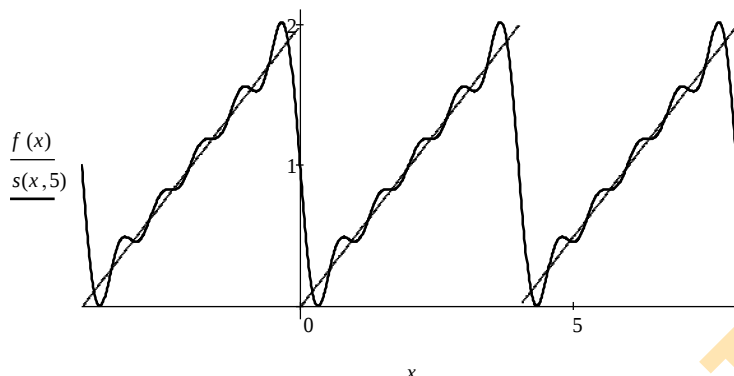
коэффициенты Фурье: $c_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{x}{2} dx = 1$,

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{x}{2} dx = 1, \quad c_n = \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{x}{2} e^{-i \frac{\pi n x}{2}} dx = [\text{интегрируем по частям}] = \frac{i}{\pi n}.$$

Ряд Фурье для функции $y = f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{i}{\pi n} e^{i \frac{\pi n x}{2}} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in (0; 4), \\ 1, & x = 0, x = 4. \end{cases}$$

На рисунке представлены график функции $y = f(x)$ и частичная сумма ее ряда Фурье $S(x, 5)$:



3.10. Интеграл Фурье

Как известно, всякую периодическую или непериодическую функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы Дирихле на отрезке $[-\ell; \ell]$, можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right),$$

где $a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx$, $b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ – непериодическая функция, заданная на бесконечном промежутке $(-\infty; \infty)$. Предположим, что на любом конечном промежутке $[-\ell; \ell]$ данная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то есть сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty. \quad (3.12)$$

Подставив в ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right)$$

выражения для коэффициентов, получим:

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \left(\cos \frac{\pi n t}{\ell} \cos \frac{\pi n x}{\ell} + \sin \frac{\pi n t}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right) dt$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{\pi n (x-t)}{\ell} dt.$$

Вводя новую переменную $\alpha = \frac{\pi t}{\ell}$, $\Delta\alpha = \frac{\pi}{\ell}$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos n\alpha(x-t) dt \right) \Delta\alpha.$$

Так как выполняется условие (3.12), при $\ell \rightarrow +\infty$ первый интеграл стремится к нулю, поэтому предельный переход при $\ell \rightarrow +\infty$ приводит к интегральному представлению функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha. \quad (3.13)$$

Эта формула называется *интегральной формулой Фурье*, стоящий под ней интеграл – *интегралом Фурье*. Представление функции $f(x)$ в таком виде называется *разложением функции в интеграл Фурье*.

Всё сказанное выше касалось лишь тех точек, в которых функция $f(x)$ непрерывна. Для точек разрыва справедлива формула, описывающая полусумму односторонних пределов:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt \right) d\alpha. \quad (3.14)$$

Итак, приходим к формулировке теоремы Фурье.

Теорема Фурье

Если функция $f(x)$ на бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$ является ограниченной и абсолютно интегрируемой, а в каждом конечном промежутке удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то для любой точки непрерывности имеют место равенство (3.13) и равенство (3.14) для точек разрыва этой функции.

Интеграл Фурье можно записать и в комплексной форме с помощью двойного интеграла:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt \right) d\alpha. \quad (3.15)$$

Пример 1. Найти разложение функции $f(x)$ в интеграл Фурье, если

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

При любом $x \geq 0$ функция принимает значения, не превышающие единицу, следовательно, в бесконечном промежутке функция ограничена и абсолютно интегрируема. Кроме того, эта функция имеет одну точку разрыва первого рода $x = 0$ и удовлетворяет условиям теоремы Дирихле.

Согласно теореме Фурье функцию $f(x)$ можно разложить в интеграл в соответствии с формулой (3.13):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \cos \alpha(x-t) dt \right) d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(-e^{-t} \cos \alpha(x-t) \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} \sin \alpha(x-t) dt \right) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. $f(x)$ – четная функция. Тогда четными являются все функции вида $f(t) \cos \alpha t$ и нечетными – все функции вида $f(t) \sin \alpha t$, следовательно, все интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt$ обращаются в ноль, а также

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt.$$

Таким образом, в случае четной функции $f(x)$ интеграл Фурье может быть записан в виде:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha.$$

2. $f(x)$ – нечетная функция. В этом случае нечетными будут функции вида $f(t) \cos \alpha t$ и четными – функции вида $f(t) \sin \alpha t$. Следовательно, интеграл Фурье для нечетной функции примет вид:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x d\alpha.$$

Пример 2. Разложить в интеграл Фурье четную функцию $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\ell \leq x \leq \ell, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Эта функция ограничена, абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке и удовлетворяет условиям теоремы Дирихле в любом конечном сегменте. Таким образом,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\ell} \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \ell}{\alpha} \cos \alpha x d\alpha.$$

Эта формула справедлива для всех значений x , за исключением точек $x = \pm \ell$. В этих точках интеграл Фурье принимает значение, равное $1/2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Функцию $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < \infty$, представить интегралом Фурье, продолжив ее: а) четным образом, б) нечетным образом.

Ответ: а) $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha$, б) $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha$.

2. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0,5, & x = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha x d\alpha.$

3. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, использовать полученный результат предыдущей задачи.

Ответ: $\frac{\pi}{2}.$

3.11. Преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, является ограниченной и абсолютно интегрируемой, а в каждом конечном промежутке удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то есть для любой точки непрерывности имеет место равенство (3.15).

Обозначим

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt. \quad (3.16)$$

Тогда интеграл Фурье в комплексной форме функции $f(x)$ можно записать в следующем виде, заменив α на $-\alpha$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (3.17)$$

Определение. Переход от функции $f(x)$ к функции $F(\alpha)$, определяемый формулой (3.16), называется *преобразованием Фурье функции $f(x)$* . Часто преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется сама функция $F(\alpha)$.

Обратный переход от функции $F(\alpha)$ к функции $f(x)$ называется *обратным преобразованием Фурье* (3.17). Также обратным преобразованием Фурье функции $F(\alpha)$ называется функция $f(x)$.

Если функция $F(\alpha)$ является преобразованием Фурье функции $f(x)$, то этот факт также можно записать следующей формулой:

$$F(\alpha) = F[f(t)](\alpha).$$

Рассмотрим преобразование Фурье для четных и нечетных функций.

Пусть функция $f(x)$ – четная. Тогда обозначим

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt.$$

Используя формулу интеграла Фурье для четных функций, записываем следующую формулу:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x d\alpha.$$

Формула

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt$$

определяет косинус-преобразование четной функции $f(x)$, или *косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$* .

Формула

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$$

определяет *обратное косинус-преобразование Фурье*, приводящее от функции $F(\alpha)$ к четной функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ – нечетная. Тогда определим следующую функцию, которую также называют *синусом-преобразованием Фурье функции $f(x)$* :

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt.$$

Используя формулу интеграла Фурье для нечетных функций, записываем *обратное синус-преобразование Фурье от функции $\Phi(\alpha)$ к функции $f(x)$* :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha x d\alpha.$$

Рассмотрим интеграл Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt \right) d\alpha.$$

Пусть

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt. \quad (3.18)$$

Таким образом,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (3.19)$$

С преобразованием Фурье связано такое понятие, как спектральная функция. Пусть

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt,$$

тогда
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt d\alpha.$$

Последний интеграл есть интеграл Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме. Таким образом,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha.$$

С механической точки зрения функция $e^{i\alpha x}$ при любом значении α описывает гармоническое колебание. Поэтому интегральное преобразование (3.18) функции $f(x)$ можно представить как движение в виде бесконечной системы независимых колебаний с различными частотами. Функция $F(\alpha)$ показывает при этом, с какой интенсивностью происходят колебания, соответствующие различным значениям α . Функция $F(\alpha)$ называется *спектральной функцией* для исходной функции $f(x)$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-\beta x}$, определенную только при $x > 0$. Мы можем, продолжив данную функцию на область отрицательных значений четным или нечетным образом, найти её косинус-преобразование и синус-преобразование.

Для косинус-преобразования имеем

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt.$$

Вычисляя интеграл двукратным интегрированием по частям, получаем

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

Аналогично для синус-преобразования этой функции –

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти преобразование Фурье для функций:

1. $f(x) = e^{-k^2|x|}$
2. $f(x) = e^{-|t|}$
3. $f(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Ответы: 1. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k^2}{\alpha^2 + k^2}$. 2. $-i \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 1)^2}$. 3. $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$.

3.12. Прикладные задачи, связанные с применением ряда Фурье и преобразования Фурье

Задача о колебании струны

Рассмотрим метод решения уравнения колебаний струны на основе разделения переменных. Существенным для этого метода является использование рядов Фурье.

Необходимо решить уравнение колебаний струны с неподвижными x :

$$u(x, 0) = f(x) = \sin^3 x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x) = 0 \text{ при } t = 0.$$

Как известно, уравнение колебания струны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Так как концы струны закреплены, то

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0.$$

Решение уравнения колебания струны с неподвижными концами, удовлетворяющее заданным начальным условиям, будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{\ell} \cdot t + D_n \sin \frac{an\pi}{\ell} \cdot t \right),$$

где C_n – коэффициенты в разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам, а D_n – коэффициенты в разложении функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам [7]. Найдем коэффициенты C_n , обеспечивающие выполнение начальных условий:

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \sin^3 x \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

Получим $C_1 = \frac{3}{4}$, $C_3 = -\frac{1}{4}$, остальные коэффициенты обращаются в ноль. Все коэффициенты D_n равны нулю, так как $\varphi(x) = 0$.

Таким образом, решением уравнения колебания струны с неподвижными концами и заданными начальными условиями является функция:

$$u(x, t) = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi x}{\ell} \cos \frac{a\pi t}{\ell} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi x}{\ell} \cos \frac{3a\pi t}{\ell}.$$

Задача о распределении температур в бесконечном стержне

Найти функцию $U(x, t)$ распределения температур в бесконечном стержне, зная, что она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и в начальный момент времени температура в стержне была распределена в соответствии с условием

$$U(x, 0) = \varphi(x).$$

Будем считать функцию $U(x, t)$ определенной при $t > 0$, а функцию $\varphi(x)$ – достаточно быстро убывающей при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда её преобразование Фурье существует: $F[\varphi(x)](\alpha) = F$.

Применим к обеим частям уравнения преобразование Фурье по переменной $x(t = \text{const})$:

$$F\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right](\alpha) = a^2 F\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right](\alpha). \quad (3.20)$$

Рассмотрим левую часть равенства (3.20):

$$\begin{aligned} F\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \cdot e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, t) \cdot e^{-i\alpha x} dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} F[U(x, t)](\alpha), \end{aligned}$$

где $F[U(x, t)](\alpha)$ – преобразование Фурье по переменной x искомого решения $U(x, t)$.

Рассмотрим правую часть равенства (3.20):

$$a^2 (i\alpha)^2 F[U(x, t)](\alpha) = -a^2 \alpha^2 F[U(x, t)](\alpha).$$

Приравняв правую и левую части равенства, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами относительно неизвестной функции $F[\varphi(x)](\alpha)$, зависящей от переменной t :

$$\frac{\partial}{\partial t} F[U(x, t)](\alpha) = -a^2 \alpha^2 F[U(x, t)](\alpha).$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция

$$F[U(x, t)](\alpha) = C e^{-a^2 \alpha^2 t}.$$

При $t = 0$ получим $F[U(x, 0)] = C$. Следовательно,

$$F[U(x, t)](\alpha) = F[U(x, 0)] e^{-a^2 \alpha^2 t}.$$

С помощью обратного преобразования Фурье (3.19) найдем искомую функцию $U(x, t)$.

Используя формулу (3.18), получаем $F[\varphi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) e^{-i\alpha z} dz$. Тогда

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \alpha^2 t + i(x-z)\alpha} d\alpha \right] \varphi(z) dz.$$

После вычисления внутреннего интеграла окончательно имеем

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}} \varphi(z) dz.$$

Типовые задачи по теме «Ряды Фурье»

1. Функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a;b]$, разложить в ряд Фурье:
а) общего вида, б) по косинусам, в) по синусам.

2. В одной системе координат начертить графики функции $f(x)$ и частичных сумм $S_5(x)$ рядов а, б, в.

$$1. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ 2, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 4x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2, \\ -x, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & 0 \leq x < 1, \\ 3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 2, \\ x - 2, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 2, \\ -\frac{1}{2}x, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ -x + 3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 4x - 2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 2, \\ -1, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$24. f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 4 - 3x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 2, \\ -1, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ x - 2, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x < 1, \\ 3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$30. f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -2x + 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Контрольные вопросы по теме «Ряды Фурье»

1. Дайте понятие ортогональной и ортонормированной систем непрерывных функций на некотором отрезке. Дайте определение нормы функции на отрезке. Приведите примеры ортонормированной системы функции на отрезке.

2. Дайте определение ряда Фурье и тригонометрического ряда Фурье. Выведите формулы коэффициентов Фурье при разложении периодических функций в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$. Сформулируйте теорему Дирихле и равенство Парсеваля.

3. Разложение периодических функций в тригонометрический ряд Фурье на произвольном отрезке. Сформулируйте теоремы о сдвиге и изменении длины отрезка разложения. Разложение в тригонометрический ряд Фурье периодических четных и нечетных функций. Приведите примеры.

4. Разложение непериодических функций в тригонометрический ряд Фурье на произвольном отрезке.

Приведите примеры разложения функций общего вида, а также четных и нечетных функций, заданных на полупериоде.

5. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. С помощью формул Эйлера выведите формулы коэффициентов Фурье в комплексной форме.

6. Сформулируйте понятие интеграла Фурье, теоремы Фурье. Приведите пример разложения функции с помощью интеграла Фурье на бесконечном промежутке.

7. Преобразование Фурье общего вида, синус- и косинус-преобразования Фурье.

Библиографический список

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Ч. 2. – М.: Рольф, 2000.
2. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях: учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1983.
3. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа /под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.
4. Задачник–практикум по высшей математике. Ч. 3. Ряды. Теория функции комплексного переменного. Ряды и интеграл Фурье /под ред. В.А. Волкова –СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.
5. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Наука, 1980.
6. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т.1. – М.: Мир, 1985.
7. Ильин М.Е., Елкина Н.В., Львова Т.Л. Ряды Фурье: учебное пособие. – Рязань: РГРТУ, 2011.

Б о д р о в а Ирина Валерьевна
Г р и ш и н а Вера Васильевна
К о с т р о в а Юлия Сергеевна
К у з н е ц о в Алексей Викторович
Л ь в о в а Татьяна Львовна
Р е в к о в а Лариса Сергеевна

Ряды: теория, практика, приложения

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор И.В. Черникова

Подписано в печать 20.05.22. Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 6,25.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.