7314

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ 2

Методические указания к самостоятельной работе

Рязань 2022

УДК 517.98

Тематические тесты по математике. Ч. 2: методические указания к самостоятельной работе/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: Г.С. Лукьянова, Н.В. Елкина, Е.А. Сюсюкалова, С.В. Богатова. – Рязань, 2022. – 40 с.

Содержат краткий теоретический справочник и примеры тестов по темам «Интегральное исчисление функции одной действительной переменной», «Линейные пространства и операторы», «Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных», «Дифференциальные уравнения и операционное исчисление».

Предназначены для студентов всех направлений и специальностей, изучающих высшую математику.

Библиогр.: 5 назв.

Интеграл, приложения интегралов, функция нескольких переменных, частная производная, базис, линейный оператор, квадратичная форма, дифференциальное уравнение, оригинал, изображение

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

Предисловие

Данные методические указания содержат краткий теоретический справочник и примеры тестов то темам «Интегральное исчисление функции одной действительной переменной», «Линейные пространства и операторы», «Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных», «Дифференциальные уравнения и операционное исчисление».

Перед выполнением любого теста рекомендуется повторить теоретический материал (внимательно изучить конспекты своих лекций и теоретический справочник в методических указаниях) и методы решения типовых задач (решить задачи из расчетно-графической работы).

Если при выполнении теста нужно выбрать вариант ответа, то может быть один или несколько верных вариантов ответа.

Тест считается зачтенным, если вы правильно решили не менее 7 заданий.

Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a,b\rangle$, если $\forall x\in\langle a,b\rangle\ \ F'(x)=f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке $\langle a,b\rangle$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$ и обозначается $\int f(x)dx$.

$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\}$, где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на промежутке $\langle a,b\rangle$, а C – произвольная постоянная.

Таблица основных интегралов

1. $\int 1\cdot du = u + C$

2. $\int u^{\alpha}\, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int a^{u}\, du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$

($\int e^{u}\, du = e^{u} + C$)

5. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

6. $\int \cos u\, du = \sin u + C$

7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$

8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

9. $\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$

10. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C$

11. $\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$

12. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C$

13. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$

14. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$

15. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C_1 = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C_2$, $a \neq 0$

16. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$, $a \neq 0$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C_1 = -\arccos\frac{u}{a} + C_2$, $a \neq 0$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

Основные методы интегрирования

1. Замена переменной

$$\int f(x)dx = \left|\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix}\right| = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

2. Внесение под дифференциал

$$\int f(u(x))\cdot d(u(x)) = \left|d(u(x)) = u'(x)dx\right| = \int f(u)\,du.$$

3. Интегрирование по частям $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$.

Приложения определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Вычисление площади плоской фигуры

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$ $\left(f(x)\ge 0\right)$, слева и справа – соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком $[a,b]$ оси OX, вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

2. Если плоская фигура ограничена графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x)\le f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, то ее площадь находится по формуле $S = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$.

3. Если криволинейная трапеция ограничена сверху кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $y(t)\ge 0, t\in[t_1, t_2]$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, где t_1 и t_2 определяются из уравнений: $x(t_1) = a$ и $x(t_2) = b$.

4. Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, вычисляется по формуле $S=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$.

Вычисление длины дуги кривой

1. Пусть кривая AB на плоскости задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция при $x\in[a,b]$, $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$. Тогда длина кривой вычисляется по формуле $l(AB)=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$.

2. Если кривая AB задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in[t_1,t_2]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $A(x(t_1), y(t_1))$ и $B(x(t_2), y(t_2))$, то длина дуги кривой находится по формуле

$$l(AB)=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt.$$

3. Если кривая AB задана уравнением в полярных координатах $r=r(\varphi)$, где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема при $\varphi\in[\alpha,\beta]$, то $l(AB)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\varphi)+\left[r'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi$.

Вычисление объема тела

1. Пусть задано тело и построены его сечения плоскостями, перпендикулярными к оси OX и проходящими через точки $x\in[a,b]$ на ней, причем площадь сечения – непрерывная на $[a,b]$ функция $S(x)$. Тогда объем тела, заключенного между плоскостями $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$.

2. Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ $\left(f(x)\geq 0\right)$ и прямыми $y=0$, $x=a$ и $x=b$, вокруг оси OX, то его объем вычисляется по формуле $V=\pi\int\limits_a^b\left[f(x)\right]^2 dx$.

Несобственные интегралы

Пусть функция $y=f(x)$ определена и ограничена на промежутке $[a,+\infty)$ и для любого $b>a$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ – несобственный интеграл первого рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$.

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$, не является ограниченной при $x\to b$ ($x=b$ – особая точка функции), ограничена и интегрируема на отрезке $[a,b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ –несобственный интеграл второго рода от функции $y=f(x)$ на промежутке $[a,b)$.

Аналогично, если $x=a$ – особая точка функции $y=f(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

Тест 1

1. Значение интеграла $\int\limits_0^{\pi} \sin 4x \cdot \cos 2x dx$ равно … . (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

2. Найти коэффициент B, если

$$\int \frac{dx}{x\left(x^2-4\right)} = A\ln|x| + B\ln|x+2| + C\ln|x-2| + Const.$$

(Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

3. При замене $\operatorname{tg} x = t$ интеграл $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1}$ переходит в интеграл … . (Выберите один вариант ответа.)

а) $\int \frac{dt}{t+1}$; **б)** $\int \frac{\left(t^2+1\right)dt}{t+1}$; **в)** $\int \frac{dt}{(t+1)\left(t^2+1\right)}$; **г)** $\int \frac{dt}{(t+1)\cos^2 t}$.

4. Длина дуги кривой $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$, где $0 \le t \le \pi$ равна … . (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

5. Если $\int (2x+1)e^{2x}dx = (ax+b)e^{2x} + C$, то значение $a+b$ равно … . (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

6. Вычислите интеграл $\int\limits_1^3 (x-2)e^{x-1}dx$. (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

7. Найти $6S$, где S – площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x. \end{cases}$ (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

8. Разложение дроби $\frac{x+5}{(x-2)^2\left(x^2+1\right)}$ на простейшие имеет вид … . (Выберите один вариант ответа.)

а) $\dfrac{A}{(x-2)^2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$; **б)** $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x^2+1}$;

в) $\dfrac{A}{\left(x-2\right)^2}+\dfrac{B}{x^2+1}$; **г)** $\dfrac{A}{\left(x-2\right)^2}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$.

9. Интеграл $\int\dfrac{x+1}{x^2+4}dx$ равен … . (Выберите один вариант ответа.)

1) $\dfrac{1}{x^2+4}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$; **2)** $\ln\left|x^2+4\right|+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$;

3) $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$; **4)** $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C$;

5) $\ln\left|x^2+4\right|+C$.

10. Вычислить $\dfrac{2A}{\pi}$, если $A=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2-4x+8}$. (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

Тест 2

1. Найти значение $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx$. (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

2. Если

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-4)}=A\ln|x-1|+B\ln|x-2|+C\ln|x-4|+Const,$$

то значение $9A$ равно … .

3. При замене $e^x=t$ интеграл $\int\dfrac{dx}{e^x-e^{-x}}$ переходит в интеграл … . (Выберите один вариант ответа.)

а) $\int\dfrac{dt}{t^2-1}$; **б)** $\int\dfrac{tdt}{t^2-1}$; **в)** $\int\dfrac{dt}{1-t^2}$; **г)** $\int\dfrac{tdt}{t-1}$.

4. Найти $\dfrac{12}{\pi}L$, где L – длина дуги кривой $\rho = 2\cos\varphi$, если $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{12}$. (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

5. Если $\int (3x-1)e^{-2x}dx = (ax+b)e^{-2x} + C$, то значение $\dfrac{1}{3}ab$ равно … . (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

6. Найти $\dfrac{A}{4\pi}$, если $A = \int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx$. (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

7. Найти $3S$, где S – площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x. \end{cases}$ (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

8. Разложение дроби $\dfrac{1}{(x+4)^2(x^2+x+1)}$ на простейшие имеет вид … . (Выберите один вариант ответа.)

а) $\dfrac{A}{(x+4)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1} + \dfrac{B}{x+4}$; **б)** $\dfrac{A}{x+4} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$;

в) $\dfrac{A}{(x+4)^2} + \dfrac{B}{x^2+x+1}$; **г)** $\dfrac{A}{(x+4)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$.

9. Интеграл $\int \dfrac{1}{4x^2+25}dx$ равен … . (Выберите один вариант ответа.)

1) $\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg} 2x + C$; **2)** $\dfrac{1}{10}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{5} + C$; **3)** $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{5} + C$;

4) $\dfrac{1}{8}\ln\left|4x^2+25\right| + C$; **5)** $\ln\left|4x^2+25\right| + C$.

10. Вычислить $\frac{3A}{\pi}$, если $A = \int\limits_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.)

Линейные пространства и операторы

Линейные пространства

Множество $\mathbf{V}$ с введенными на нем операциями сложения элементов $(+)$ и умножения элемента на число $(\cdot)$ называется линейным пространством (ЛП) $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, если выполняются следующие условия.

1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{V}: \ (\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x})$ – аксиома коммутативности сложения векторов.

2. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbf{V}: \ (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ – аксиома ассоциативности сложения векторов.

3. $\exists \bar{\theta} \in \mathbf{V}, \ \forall \bar{x} \in \mathbf{V}: \ \bar{x} + \bar{\theta} = \bar{x}$ – существование нулевого элемента $\bar{\theta}$ во множестве $\mathbf{V}$.

4. $\forall \bar{x} \in \mathbf{V}, \ \exists (-\bar{x}) \in \mathbf{V}: \ \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{\theta}$ – для каждого элемента $\bar{x}$ существование противоположного элемента $(-\bar{x})$.

5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{V}: \ \alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$ – аксиома дистрибутивности относительно сложения векторов.

6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \bar{x} \in \mathbf{V}: \ (\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$ – аксиома дистрибутивности относительно сложения чисел.

7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \bar{x} \in \mathbf{V}: \ \alpha \cdot (\beta \bar{x}) = (\alpha\beta) \cdot \bar{x}$ – аксиома ассоциативности умножения вектора на число.

8. $\forall \bar{x} \in \mathbf{V}: \ 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ – особая роль единицы.

Если $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n-1}, \ \bar{v}_n$ – элементы (векторы) из ЛП $\mathbf{V}$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \in \mathbb{R}$ – числа, то $\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{v}_n$ – линейная комбинация $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Векторы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n \in \mathbf{V}$ называются линейно зависимыми, если $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}: \quad \lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \bar{v}_1 + ... + \lambda_n \bar{v}_n = \bar{0}$.

Векторы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n \in \mathbf{V}$ называются линейно независимыми, если $\lambda_1 \bar{v}_1 + ... + \lambda_n \bar{v}_n = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

Систему векторов $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n \rangle \in \mathbf{V}$, взятых в указанном порядке, называют базисом ЛП $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, если: 1) векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ линейно независимы; 2) для любого вектора $\bar{x} \in \mathbf{V}$ система векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n, \bar{x}$ линейно зависима. Число элементов в базисе – размерность ЛП, обозначается $\dim(\mathbf{V})$.

Для любого вектора $\bar{x} \in \mathbf{V}$ существуют такие числа $x_1, x_2, ..., x_n$, что $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + ... + x_n \bar{e}_n$. Эти числа – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $E = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n \rangle$:

$$\bar{x} = (x_1;\ x_2; ...;\ x_n)_E \quad \text{или} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_E .$$

Пусть в ЛП $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ заданы два базиса: $E = \langle \bar{e}_1, ..., \bar{e}_n \rangle$ и $E' = \langle \bar{e}'_1, ..., \bar{e}'_n \rangle$. При этом известны координаты векторов «нового» базиса в «старом»: $\bar{e}'_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, ..., \alpha_{n1})_E$, $\bar{e}'_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{n2})_E, ..., \ \bar{e}'_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, ..., \alpha_{nn})_E$.

Матрица $U = U_{E \to E'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей перехода от «старого» базиса $E=\langle \bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n \rangle$ к «новому» $E'=\langle \bar{e}'_1,\bar{e}'_2,...,\bar{e}'_n \rangle$.

Справедлива формула перехода от старого базиса к новому $X_E = U\cdot X_{E'}$, где X_E – столбец координат некоторого произвольного вектора $\bar{x}\in\mathbf{V}$ в базисе E; $X_{E'}$ – столбец координат этого вектора в базисе E'.

Матрица U^{-1} является матрицей перехода от «нового» базиса $E'=\langle \bar{e}'_1,\bar{e}'_2,...,\bar{e}'_n \rangle$ к «старому» $E=\langle \bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n \rangle$: $X_{E'} = U^{-1}\cdot X_E$.

Евклидовы, нормированные и метрические пространства

Скалярным произведением двух векторов ЛП $\bar{x}\in\mathbf{V}$ и $\bar{y}\in\mathbf{V}$ называется число, обозначаемое $(\bar{x},\bar{y})$ и удовлетворяющее следующим условиям.

1. $\forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbf{V}:\ (\bar{x},\bar{y})=(\bar{y},\bar{x})$ (коммутативность).

2. $\forall\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\mathbf{V}:\ (\bar{x}+\bar{y},\bar{z})=(\bar{x},\bar{z})+(\bar{y},\bar{z})$ (аддитивность).

3. $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbf{V}:\ (\lambda\bar{x},\bar{y})=\lambda(\bar{x},\bar{y})$ (однородность).

4. $\forall\bar{x}\in\mathbf{V}:\ (\bar{x},\bar{x})\geqslant 0$, причем $(\bar{x},\bar{x})=0 \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{0}$ (неотрицательность скалярного квадрата).

ЛП $(\mathbf{V},+,\cdot\,)$ с введенным на нем скалярным произведением называется евклидовым пространством (ЕП), которое будем обозначать $\mathbf{E}$.

Для любых двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ произвольного ЕП выполняется неравенство Коши – Буняковского

$$(\bar{x},\bar{y})\leqslant\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}\cdot\sqrt{(\bar{y},\bar{y})},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ линейно зависимы.

Два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $\bar{x}\perp\bar{y}\Leftrightarrow(\bar{x},\bar{y})=0$.

Нормой $\|\bar{x}\|$ вектора $\bar{x}$ ЛП $\mathbf{V}$ называется такое число, которое удовлетворяет следующим трем аксиомам.

1. $\forall \bar{x} \in \mathbf{V}: \|\bar{x}\| \geqslant 0$, причем $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (нулевую норму имеет только нулевой вектор).

2. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{V}: \|\bar{x} + \bar{y}\| \leqslant \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (неравенство треугольника – норма суммы векторов не превосходит суммы норм этих векторов).

3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{x} \in \mathbf{V}: \|\alpha \cdot \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$ (константу можно выносить за знак нормы только под знаком модуля).

ЛП $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ с введенной на нем нормой $\|\bar{x}\|$ называется нормированным.

Вектор $\bar{x}$ с единичной нормой $\|\bar{x}\| = 1$ называется единичным или нормированным вектором.

Метрикой (или расстоянием) в пространстве $\mathbf{V}$ называется правило, по которому каждой паре элементов $x, y \in \mathbf{V}$ соответствует единственное неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим трем условиям (аксиомам метрического пространства).

1. $\forall x, y \in \mathbf{V}: \ \rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества).

2. $\forall x, y \in \mathbf{V}: \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии).

3. $\forall x, y, z \in \mathbf{V}: \ \rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ (аксиома треугольника).

Пространство $\mathbf{V}$ с заданной на нем метрикой $\rho(x, y)$ называется метрическим пространством.

Линейные операторы

Пусть заданы два ЛП: $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$. Линейным отображением или линейным оператором (ЛО) $\tilde{A}$ пространства $\mathbf{V}$ в пространство $\mathbf{W}$ называется такая функция $\tilde{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, что:

1) $D\left(\tilde{A}\right) = \mathbf{V}$ – область определения функции $\tilde{A}$ совпадает с множеством $\mathbf{V}$;

2) $E\left(\tilde{A}\right)\subseteq \mathbf{W}$ – область значений функции $\tilde{A}$ является подмножеством множества $\mathbf{W}$ или совпадает с ним;

3) для любых $\overline{x},\overline{y}\in \mathbf{V}$: $\tilde{A}\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\tilde{A}\left(\overline{x}\right)+\tilde{A}\left(\overline{y}\right)$;

4) для любого $\overline{x}\in \mathbf{V}$ и любого $\lambda\in\mathbb{R}$: $\tilde{A}\left(\lambda\overline{x}\right)=\lambda\tilde{A}\left(\overline{x}\right)$.

Ограничимся рассмотрением только ЛО $\tilde{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$.

Выберем в ЛП $\left(\mathbf{V},+,\cdot\right)$ базис $E=\left\langle \overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\right\rangle$. Пусть $\tilde{A}\left(\overline{e}_1\right)=\overline{f_1}$, $\tilde{A}\left(\overline{e}_2\right)=\overline{f_2}$,…, $\tilde{A}\left(\overline{e}_n\right)=\overline{f_n}$. Пусть

$$\overline{f_1}=\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \dots\\ a_{n1}\end{pmatrix}_E,\ \overline{f_2}=\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \dots\\ a_{n2}\end{pmatrix}_E,\dots,\ \overline{f_n}=\begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \dots\\ a_{nn}\end{pmatrix}_E.$$

Матрица $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$ – матрица линейного оператора $\tilde{A}$ в базисе $E=\left\langle \overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\right\rangle$. Столбцами матрицы A являются координатные столбцы образов базисных векторов.

Пусть $\overline{x}\in\mathbf{V}$ и $\overline{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}_E$, тогда $\overline{y}=\tilde{A}\left(\overline{x}\right)$ имеет координаты $\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_n\end{pmatrix}_E=\mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}_E$.

Если A – матрица ЛО $\tilde{A}$ в базисе $E=\left\langle \overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\right\rangle$, а A' – его матрица в базисе $E'=\left\langle \overline{e}'_1,\overline{e}'_2,...,\overline{e}'_n\right\rangle$, то $\mathrm{A}'=U^{-1}\mathrm{A}U$, где U – матрица перехода от $E=\left\langle \overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\right\rangle$ к $E'=\left\langle \overline{e}'_1,\overline{e}'_2,...,\overline{e}'_n\right\rangle$.

Собственные значения и собственные элементы линейного оператора

Элемент $\overline{x} \neq \overline{0} \in \mathbf{V}$ называется собственным вектором (элементом) ЛО $\tilde{A}$, если существует такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\tilde{A}(\overline{x}) = \lambda \overline{x}$. При этом λ называется собственным значением оператора $\tilde{A}$.

Пусть в пространстве $\mathbf{V}$ выбран базис $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n \rangle$. Если A – матрица ЛО $\tilde{A}$ в этом базисе, а $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_E$ – координаты элемента $\overline{x}$, то $\mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_E = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_E$.

Число λ является собственным значением ЛО $\tilde{A}$ (матрицы A) тогда и только тогда, когда оно является корнем уравнения

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = 0,$$

где E - единичная матрица, а $\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})=|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}|$ – определитель матрицы $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}$. Уравнение $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы A (ЛО $\tilde{A}$), а его корни – характеристическими числами матрицы A. Все собственные значения матрицы являются ее характеристическими числами и наоборот.

Квадратичные формы

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – произвольная точка в пространстве $\mathbb{R}^n$. Квадратичной формой (КФ) называется функция вида

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j),$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – некоторые числа, которые называются коэффициентами квадратичной формы.

Симметрическая матрица

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n \times n}$$

называется матрицей КФ $f(\overline{x})$.

Пусть U – матрица перехода от базиса $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n \rangle$ к базису $E' = \langle \overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n \rangle$, а A' – матрица этой же КФ в базисе $E' = \langle \overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n \rangle$, тогда $\mathrm{A}' = \mathrm{U}^T \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{U}$.

Так как матрица КФ является симметрической, то существует ортонормированный базис $E' = \langle \overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n \rangle$, в котором эта матрица имеет диагональный вид.

КФ $f(\overline{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$ называют КФ канонического вида. Любую КФ можно привести к каноническому виду.

КФ $f(\overline{x})$ называется положительно (отрицательно) определенной, если для любого $\overline{x} \neq \overline{0} \in \mathbb{R}^n$ $f(\overline{x}) > 0$ ($f(\overline{x}) < 0$).

КФ $f(\overline{x})$ называется знакопеременной, если существуют такие $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$, что $f(\overline{x}_1) > 0$, а $f(\overline{x}_2) < 0$.

Пусть $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица КФ $f(\overline{x})$ в некотором базисе. Обозначим: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ – угловые

миноры матрицы A.

Критерий Сильвестра: для того чтобы КФ $f(\overline{x})$, где $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$; для того чтобы КФ $f(\overline{x})$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, …, $(-1)^n \Delta_n > 0$.

Тест 1

1. Найти ранг системы векторов $f_1 = 3x^2 + 2x + 1$, $f_2 = 4x^2 + 3x + 2$, $f_3 = 3x^2 + 2x + 3$, $f_4 = x^2 + x + 1$, $f_5 = 4x^2 + 3x + 4$.

2. Найти первую координату вектора $\overline{x}$ в базисе $\langle \overline{e}_1, \overline{e}_2 \rangle$, если в базисе $\langle \overline{e}_1', \overline{e}_2' \rangle$, где $\overline{e}_1' = -3\overline{e}_1 + 8\overline{e}_2$ и $\overline{e}_2' = 7\overline{e}_1 - 7\overline{e}_2$, он имеет координаты $\overline{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix}$.

3. Найти сумму координат вектора $\overline{u} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ линейного пространства $M_{2\times 2}$ квадратных матриц 2-го порядка в базисе $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4 \rangle$, где $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу перехода $U_{E \to B}$ от базиса $E = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle$, где $\bar{e}_1 = (9; 8)$ и $\bar{e}_2 = (3; -4)$, к базису $B = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle$, где $\bar{b}_1 = (-9; -2)$ и $\bar{b}_2 = (2; -9)$. В ответе указать значение элемента u_{11} матрицы перехода с двумя знаками после запятой.

5. В пространстве $\mathbf{R}^2$ арифметических векторов вычислить скалярное произведение заданных векторов $u = (2; 1)$ и $v = (9; -3)$ по формуле $(u, v) = u \cdot A \cdot v^T$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

6. Найти квадрат евклидовой нормы вектора $\bar{u} = (-7, -6, 5)$ в базисе $E = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$, где $\|\bar{e}_1\| = 4$, $\|\bar{e}_2\| = 9$, $\|\bar{e}_3\| = 4$, причем $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = -3$, $(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = -7$.

7. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Укажите линейные операторы:

1) $\tilde{F}\bar{x} = (2x_1 - x_2,\ x_3 + 2,\ x_1 - x_2 + x_3)$;

2) $\tilde{C}\bar{x} = (2x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2,\ -2x_2 + x_3)$;

3) $\tilde{A}\bar{x} = (x_1 + 2x_2,\ 0,\ -2x_2 + x_3)$;

4) $\tilde{D}\bar{x} = (1,\ 2x_1 - x_2,\ x_3)$;

5) $\tilde{B}\bar{x} = (2x_2 - x_3,\ x_1 - 1,\ x_2 - 3x_3)$.

8. Найти наибольшее собственное число матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -10 & -2 & -2 \\ -16 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. В стандартном базисе E квадратичная форма $f(\bar{x})$

имеет вид $f\left(\bar{x}\right)=7x_1^2+8x_1x_2+x_2^2$. При переходе к базису $E=\left\langle \bar{e}_1', \bar{e}_2' \right\rangle$, где $\bar{e}_1'=\left(1;\,2\right)$ и $\bar{e}_2'=\left(2;\,3\right)$, квадратичная форма $f\left(\bar{x}\right)$ примет вид $f\left(\bar{x}\right)=27x_1^2+96x_1x_2+\lambda x_2^2$. Найти значение λ.

10. Определить знак квадратичной формы:

$$f\left(\bar{x}\right)=9x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+7x_2^2+4x_2x_3+x_3^2.$$

1. Определить нельзя. **2.** Положительно определенная.
3. Знакопеременная. **4.** Отрицательно определенная.

Тест 2

1. Найти ранг системы векторов $\bar{e}_1=\left(3;\,8;\,7;\,1\right)$, $\bar{e}_2=\left(3;\,6;\,9;\,3\right)$, $\bar{e}_3=\left(4;\,12;\,8;\,0\right)$, $\bar{e}_4=\left(-2;\,-1;\,-9;\,-5\right)$, $\bar{e}_5=\left(-5;\,0;\,-25;\,-15\right)$.

2. Найти первую координату вектора $\bar{x}$ в базисе $E=\left\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \right\rangle$, если в базисе $E'=\left\langle \bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3' \right\rangle$, где $\bar{e}_1'=3\bar{e}_1-\bar{e}_2-6\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'=\bar{e}_1+5\bar{e}_2-3\bar{e}_3$ и $\bar{e}_3'=\bar{e}_1-8\bar{e}_2-\bar{e}_3$, он имеет координаты $\bar{x}=\begin{pmatrix}-7\\1\\6\end{pmatrix}$.

3. Найти сумму координат вектора $\bar{u}=-1+7t-4t^2-6t^3$ линейного пространства $P_3\left(t\right)$ многочленов степени не выше третьей в базисе $E=\left\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4 \right\rangle$, где $\bar{e}_1=1+t+t^2$, $\bar{e}_2=1+2t+t^3$, $\bar{e}_3=t-2t^2+t^3$, $\bar{e}_1=1-t-t^2$.

4. Найти матрицу перехода $U_{E\to B}$ от базиса $E=\left\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \right\rangle$, где $\bar{e}_1=\left(-5;\,8\right)$ и $\bar{e}_2=\left(-1;\,-8\right)$, к базису $B=\left\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \right\rangle$, где $\bar{b}_1=\left(-2;\,-5\right)$ и $\bar{b}_2=\left(3;\,4\right)$. В ответе указать значение элемента

u_{21} матрицы перехода с двумя знаками после запятой.

5. В пространстве $\mathbf{R}[-2;8]$ функций, определенных и непрерывных на отрезке $[-2;8]$, задано скалярное произведение для двух функций $(f,g)=\int\limits_{-2}^{8} f(t)\cdot g(t)dt$. При каком числовом значении параметра λ функции $f(t)=-t$ и $g(t)=-t+\lambda$ будут ортогональны? Запишите ответ с тремя знаками после запятой.

6. В ортонормированном базисе $E=\langle \overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\rangle$ заданы векторы $\overline{u}=(-8;5;7)$ и $\overline{v}=(-1;-3;2)$. Определить, какой вектор имеет наибольшую норму. В ответе указать квадрат наибольшей нормы.

7. В пространстве $\mathbf{R}^2$ задан линейный оператор $\tilde{A}\overline{x}=(3x_1+10x_2;3x_1+3x_2)$. Найти сумму координат образа элемента $\overline{x}=(7;5)$.

8. Найти наибольшее собственное число линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}25 & 36\\ -12 & -17\end{pmatrix}$.

9. В стандартном базисе E квадратичная форма $f(\overline{x})$ имеет вид $f(\overline{x})=6x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2$. При переходе к базису $E=\langle \overline{e}_1',\overline{e}_2'\rangle$, где $\overline{e}_1'=(1;2)$ и $\overline{e}_2'=(2;3)$, квадратичная форма $f(\overline{x})$ примет вид $f(\overline{x})=38x_1^2+126x_1x_2+\lambda x_2^2$. Найти значение λ.

10. Определить знак квадратичной формы:

$$f(\overline{x})=-4x_1^2-10x_1x_2-2x_1x_3+8x_2^2+6x_2x_3+x_3^2.$$

1. Определить нельзя. **2.** Положительно определенная.
3. Знакопеременная. **4.** Отрицательно определенная.

Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных

Пусть $z = f(x, y)$, тогда $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ и $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ – частные приращения функции по переменным x и y соответственно.

Частные производные

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ – частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ – частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y.

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично.

Частные производные второго порядка для $z = f(x, y)$ имеют вид $z''_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, $z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, $z''_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, $z''_{yy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Производные сложных функций

1. Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы, то $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$.

2. Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные и функция $y = y(x)$ дифференцируема, то $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

3. Если функции $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ имеют непрерывные частные производные, то

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Неявно заданная функция

1. Если уравнение $F(x,y)=0$ неявно определяет функцию $y=y(x)$, то $y'(x)=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

2. Если уравнение $F(x,y,z)=0$ неявно определяет функцию $z=z(x,y)$, то $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

Дифференциалы

1. Для функции $z=f(x,y)$ можно определить

дифференциал первого порядка $dz=z'_x dx+z'_y dy$;

дифференциал второго порядка

$$d^2z=z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2;$$

дифференциал третьего порядка

$$d^3z=z'''_{xxx}dx^3+3z'''_{xxy}dx^2dy+3z'''_{xyy}dxdy^2+z'''_{yyy}dy^3.$$

2. Для функции $u=f(x,y,z)$

дифференциал первого порядка имеет вид

$$du=u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz;$$

дифференциал второго порядка имеет вид

$$d^2u=u''_{xx}dx^2+u''_{yy}dy^2+u''_{zz}dz^2+2\left(u''_{xy}dxdy+u''_{xz}dxdz+u''_{yz}dydz\right).$$

Производная по направлению и градиент

1. Градиент функции $z=f(x,y)$ в точке M_0 равен $\operatorname{grad} z(M_0)=z'_x(M_0)\cdot\bar{i}+z'_y(M_0)\cdot\bar{j}$, а производная по направлению вектора $\bar{s}$ в точке M_0 вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{s}}(M_0)=\operatorname{grad} z(M_0)\cdot\bar{s}^0=z'_x(M_0)\cdot\cos\alpha+z'_y(M_0)\cdot\cos\beta,$$

где $\bar{s}^0=\dfrac{\bar{s}}{|\bar{s}|}=(\cos\alpha;\ \cos\beta)$, $|\bar{s}^0|=1$.

2. Градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 равен $\operatorname{grad} u(M_0) = u'_x(M_0) \cdot \overline{i} + u'_y(M_0) \cdot \overline{j} + u'_z(M_0) \cdot \overline{k}$, а производная по направлению вектора $\overline{s}$ в точке M_0 вычисляется по формуле $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{s}}(M_0) = \operatorname{grad} u(M_0) \cdot \overline{s}^0 =$

$$= u'_x(M_0) \cdot \cos\alpha + u'_y(M_0) \cdot \cos\beta + u'_y(M_0) \cdot \cos\gamma,$$

где $\overline{s}^0 = \dfrac{\overline{s}}{|\overline{s}|} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$, $|\overline{s}^0| = 1$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1. Для поверхности, заданной явным уравнением $z = z(x, y)$, касательная плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задается уравнением

$$z - z_0 = z'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + z'_y(M_0) \cdot (y - y_0),$$

нормаль задается уравнением $\dfrac{x - x_0}{z'_x(M_0)} = \dfrac{y - y_0}{z'_y(M_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$.

2. Для поверхности, заданной неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, касательная плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задается уравнением

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

нормаль задается уравнением $\dfrac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \dfrac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \dfrac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$.

Экстремумы

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) для функции $z = f(x, y)$, если для любой точки $M(x, y) \neq M_0$ из некоторой ее окрестности $f(M_0) > f(M)$ (или $f(M_0) < f(M)$). Точки максимума и минимума – точки экстремума.

Необходимое условие экстремума: если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума для $z = f(x, y)$ и в этой точке существуют частные производные, то $z'_x(M_0) = 0$ и $z'_y(M_0) = 0$.

Стационарная точка – точка, в которой все частные производные первого порядка равны нулю.

Достаточное условие экстремума: функция $z = f(x, y)$ имеет в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ максимум (или минимум), если квадратичная форма $d^2 f(M_0)$ отрицательно (или положительно) определена.

Пусть в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ имеем: $A = z''_{xx}(M_0)$, $B = z''_{xy}(M_0)$, $C = z''_{yy}(M_0)$ и $\Delta = A \cdot C - B^2$. Тогда: 1) если $\Delta > 0, \quad A < 0$, то M_0 – точка максимума; 2) если $\Delta > 0, \quad A > 0$, то M_0 – точка минимума;
3) если $\Delta < 0$, то M_0 – не является точкой экстремума.

Тест 1

1. Производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = x^3 y^2 - 4\dfrac{y}{x+2} + \sin(4y)$ имеет вид … . (Выберите один вариант ответа.)

1. $\dfrac{4y}{(x+2)^2} + 3x^2 y^2 + 4\cos(4y)$.

2. $4\cos(4y) + 2x^3 y - \dfrac{4}{x+2}$.

3. $\sin(4y) + 6x^2 y - \dfrac{4y}{x+2}$.

4. $\dfrac{4y}{(x+2)^2} + 3x^2 y^2$.

5. $\cos(4y) + 2x^3 y - \dfrac{4y}{x+2}$.

2. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = y\sqrt{x} + \dfrac{x}{y^2} + x - 3y$ в точке $A(4; 2)$ равна … .

3. Дифференциал первого порядка dz функции $z = 3yx + \dfrac{x^2}{y^2} - y^3$ имеет вид … . (Выберите один вариант ответа.)

1. $dz = \left(3y + \dfrac{2x}{y^2} + 3x - 3y^2 - \dfrac{2x^2}{y^3}\right)dxdy$.

2. $dz = \left(3x - 3y^2 - \dfrac{2x^2}{y^3}\right)dx + \left(3y + \dfrac{2x}{y^2}\right)dy$.

3. $dz = \left(3y + \dfrac{2x}{2y}\right)dx + \left(3x - 3y^2 - \dfrac{x}{y}\right)dy$.

4. $dz = \left(3y + \dfrac{2x}{y^2}\right)dx + \left(3x - 3y^2 - \dfrac{2x^2}{y^3}\right)dy$.

5. $dz = \left(3y - y^3 + \dfrac{2x}{y^2}\right)dx + \left(3x - 3xy - \dfrac{2x^2}{y^3}\right)dy$.

4. Если касательная плоскость к поверхности $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10$, проведенная в точке $M_0(-7;1;8)$, пересекает ось Oz в точке с аппликатой z_0 , то z_0 равно … .

5. Уравнение нормали, проведенной в точке $M_0(1;1;5)$ к поверхности, заданной уравнением $z = x^4 + x^y + 3y$, имеет вид … . (Выберите один вариант ответа.)

1. $\dfrac{z-5}{-1} = \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{3}$. **2.** $\dfrac{z+1}{5} = \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-3}{1}$.

3. $z - 5 = (x-5) + (y-3)$.

4. $z - 5 = 5(x-1) + 3(y-1)$.

5. $z - 5 = 5(x-1) = 3(y-1)$.

6. Выражение $18 \cdot d^2 z(M_0)$ для функции $z = \sqrt[3]{2x^2 - xy^2 + 2}$ в точке $M_0(3;2)$ равно … . (Ответ запишите в виде $Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2$.)

7. Производная функции $u = 2 + \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ в точке $M\left(1; 0; 1\right)$ по направлению вектора $\overline{\ell} = 3\overline{i} + 4\overline{k}$ равна … .

8. Полная производная $\dfrac{dz}{dt}$ функции $z = x^2 \sin y$, где $x = \sqrt{t}$ и $y = e^t$, равна … . (Выберите один вариант ответа.)

1. $\dfrac{dz}{dt} = x\sin y \cdot \sqrt{t} + x^2 \cos y \cdot e^t$.

2. $\dfrac{dz}{dt} = x^2 \cdot \sqrt{t} + \sin y \cdot e^t$.

3. $\dfrac{dz}{dt} = x\sin y \cdot \dfrac{1}{\sqrt{t}} - x\cos y \cdot e^t$.

4. $\dfrac{dz}{dt} = x\sin y \cdot \dfrac{1}{\sqrt{t}} + x^2 \cos y \cdot e^t$.

5. $\dfrac{dz}{dt} = x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{t}} + \cos y \cdot e^t$.

9. Сумма частных производных $z'_x\left(M_0\right) + z'_y\left(M_0\right)$ неявно заданной функции $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \dfrac{\pi}{2}$ в точке $M_0\left(0; \dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ равна … .

10. Стационарными (критическими) точками функции $z = x^3 + 2y + y^2 - 3x - 3$ являются … . (Выберите один или несколько ответов.)

1. $\left(1; -1\right)$. **2.** $\left(-2; -2\right)$. **3.** $\left(-1; -1\right)$.

4. $\left(-2; 1\right)$. **5.** $\left(1; -2\right)$.

Тест 2

1. Частная производная $\dfrac{\partial^3 x}{\partial t \partial \varphi^2}$ функции $x = t^2\varphi - t\cos 3\varphi$ имеет вид … . (Выберите один вариант ответа.)

1. $2t + 9\cos 3\varphi$. **2.** $2t - 9\cos 3\varphi$.

3. $9\cos 3\varphi$. **4.** 0. **5.** $-9\cos 3\varphi$.

2. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \dfrac{2x}{y^3} + \sin 3y + 4$ в точке $A\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\pi}{3}\right)$ равна … . (Ответ округлите до трех знаков после запятой.)

3. Дифференциал первого порядка $du(M_0)$ функции $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{xz}{y^2}\right)$ в точке $M_0(2;1;1)$ равен … . (Ответ запишите в виде $Adx + Bdy + Cdz$.)

4. Уравнение касательной плоскости, проведенной в точке $M_0(1;-3;0)$ к поверхности, заданной уравнением $2x^2 + 3y^2 - 2z^2 + z + 3xy - 20 = 0$, имеет вид … . (Выберите один вариант ответа.)

1. $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y+3}{-15} = \dfrac{z}{1}$. **2.** $-5(x-1) = -15(y+3) = z$.

3. $(x+5) - 3(y+15) + (z-1) = 0$.

4. $-5(x-1) - 15(y+3) + z = 0$. **5.** $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+15}{-3} = \dfrac{z-1}{0}$.

5. Произведение координат направляющего вектора нормали к поверхности, заданной уравнением
$y^2 + z^2 + 2z\sqrt{x} - 2x\sqrt{y} - 5 = 0$, в точке $M_0(4;1;2)$ равно … .

6. Для функции $z = 2y^3 - 6y - x^3 + 3x + 4$ второй дифференциал $d^2 z$ имеет вид … . (Выберите один вариант ответа.)

1. $d^2z = -6dx^2 + 12ydy^2$. **2.** $d^2z = -x^3dx^2 + 2y^3dy^2$.

3. $d^2z = 6y^2dy^2 - 6ydy - 3x^2dx^2 + 3xdx$.

4. $d^2z = 12ydy^2 - 6dy - 6xdx^2 + 3dx$.

5. $d^2z = -3x^2dx + 6y^2dy$.

7. Наибольшая скорость возрастания функции $f = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точке $M_0(-1;1;-1)$ равна … .

8. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ сложной функции $z = \sqrt{u} \cdot v + u$, где $u = x^2$ и $v = \sin y$, при $x = 3$ и $y = \frac{\pi}{2}$ равна … .

9. Производная $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $x^3y - \frac{e^x}{4y} + 2x + \frac{1}{4} = 0$ в окрестности точки $A(0;1)$, равна … .

10. Значение функции $z = x^2y + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ в точке максимума равно … .

Дифференциальные уравнения и операционное исчисление

Дифференциальные уравнения (ДУ) первого порядка имеют вид $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ или $y' = f(x, y)$. Среди них выделяют следующие типы уравнений.

1. ДУ с разделяющимися переменными

$$R(x) \cdot S(y) \cdot dy + M(x) \cdot N(y) \cdot dx = 0,$$

откуда $\int \frac{S(y)dy}{N(y)} + \int \frac{M(x)dx}{R(x)} = C$ – общее решение ДУ.

2. Однородное ДУ $y' = f(x, y)$, где $f(tx, ty) = f(x, y)$. Для его решения используют замену $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, откуда $y' = u'x + u$.

3. Линейные однородные ДУ (ЛОДУ) $y' + P(x) \cdot y = 0$. Откуда $\overline{y} = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$ – общее решение ЛОДУ.

4. Линейные неоднородные (ЛНДУ) $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$, которые можно решать методом вариации произвольной постоянной.

5. Уравнение Бернулли (УБ) $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$, где $n \neq 0,\ n \neq 1$. С помощью замены $t(x) = y^{1-n}(x)$ УБ приводится к ЛНДУ.

Дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнение имеет вид $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ или $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$, и его общее решение $y = y\left(x, C_1, ..., C_n\right)$ зависит от n произвольных постоянных.

Уравнения, допускающие понижение порядка, имеют следующий вид.

1. Уравнение $y^{(n)} = f(x)$ интегрируем $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2, \ldots .$$

2. Если ДУ $F\left(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$ не содержит $y, y', ..., y^{(k-1)}$, то используем замену $y^{(k)} = z(x)$.

3. Если ДУ $F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0$ не содержит x, то используем замену $y' = p(y),\ y'' = p' \cdot p, \ldots$.

Линейное однородное ДУ (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами имеет вид $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$.

Его общее решение $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, где линейно независимые частные решения $y_1,\ y_2,\ldots,y_n$ дифференциального уравнения находятся в зависимости от корней характеристического уравнения (ХарУр) $a_0k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0$.

Корень характеристического уравнения	Кратность	Соответствующее решение
$k=k_1\in R$	1(простой)	$y_1=e^{kx}$
$k=k_{1,2,\ldots,r}\in R$	r (кратный)	$y_1=e^{kx},y_2=xe^{kx},y_3=x^2e^{kx},\ldots,$ $y_r=x^{r-1}e^{kx}$
$k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	1(простые)	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$
$k_{1,2,\ldots,2r}=\alpha\pm i\beta$	r (кратные)	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x,$ $y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots$ $y_{2r-1}=x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_{2r}=x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Линейное неоднородное ДУ (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида имеет вид $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$. Его общее решение $y(x)=\overline{y}(x)+\tilde{y}(x)$, где $\overline{y}$ – общее решение соответствующего ЛОДУ, а $\tilde{y}$ – частное решение ЛНДУ, соответствующее его правой части $f(x)$.

1. Если $f(x)=P_m(x)$, где $P_m(x)$ – многочлен порядка m, и 1) $\lambda=0$ не является корнем ХарУр, то $\tilde{y}=Q_m(x)$;

2) $\lambda=0$ – корень ХарУр кратности r, то $\tilde{y}=x^rQ_m(x)$.

2. Если $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$, и

1) $\lambda=\alpha$ не является корнем ХарУр, то $\tilde{y}=Q_m(x)e^{\alpha x}$;

2) $\lambda=\alpha$ – корень ХарУр кратности r, то $\tilde{y}=x^rQ_m(x)e^{\alpha x}$.

3. Если $f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m^*(x)\cos\beta x+P_l^{**}(x)\sin\beta x\right)$, где $P_m^*(x)$ – многочлен порядка m, $P_l^{**}(x)$ – многочлен порядка l, и

1) $\lambda=\alpha\pm i\beta$ не является корнем ХарУр, то

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}\left(Q_s^*(x)\cos\beta x+Q_s^{**}(x)\sin\beta x\right),\text{ где } s=\max(m,l);$$

2) $\lambda=\alpha\pm i\beta$ – корень ХарУр кратности r, то

$$\tilde{y}=x^re^{\alpha x}\left(Q_s^*(x)\cos\beta x+Q_s^{**}(x)\sin\beta x\right),\text{ где } s=\max(m,l).$$

В общем случае для ЛНДУ используем метод вариации произвольных постоянных: $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n$, где $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ – общее решение ЛОДУ, а функции $C_k(x),\,k=\overline{1,n},$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2+\ldots+C_n'y_n=0,\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+\ldots+C_n'y_n'=0,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases}$$

Операционное исчисление

Функция $f(t)$ называется оригиналом, если:
1) $D(f)=\mathbb{R}$, причем $\forall t<0$: $f(t)=0$; 2) $f(t)$ кусочно непрерывна на $\mathbb{R}$; 3) $\exists M>0\,\exists s_0\ge 0\,\forall t\in\mathbb{R}:\left|f(t)\right|<Me^{s_0t}$.

Функция комплексной переменной $p=\alpha+i\beta\,(\alpha>0)$ $F(p)=\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt$ называется изображением оригинала $f(t)$.

Прямое преобразование Лапласа – переход от оригинала к изображению: $f(t) \div F(p)$.

Преобразование Лапласа обладает следующими свойствами.

1. Линейность: $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$, где $C_1, C_2 = const$.

2. Подобие: если $f(t) \div F(p)$, то $f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, где $a > 0$.

3. Смещение: $e^{\alpha t} \cdot f(t) \div F(p - \alpha)$, где $\alpha = const$.

4. Запаздывание: $f(t - \tau) \div e^{-p\tau} \cdot F(p)$, где $\tau > 0$.

5. Дифференцирование оригинала: $f'(t) \div p \cdot F(p) - f(0)$,

$$f''(t) \div p^2 F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \; \ldots \; .$$

6. Дифференцирование изображения: $F'(p) \div -t \cdot f(t)$,

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t) \, .$$

7. Интегрирование оригинала: $\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}$.

8. Интегрирование изображения: $\int_p^{+\infty} F(z) dz \div \frac{f(t)}{t}$.

Таблица оригиналов и изображений

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$	$\mathrm{sh}\, \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\mathrm{ch}\, \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
t^k	$\frac{k!}{p^{k+1}}$	$t \sin \beta t$	$\frac{2\beta t}{\left(p^2 + \beta^2\right)^2}$

Окончание таблицы

$t^k e^{\alpha t}$	$\dfrac{k!}{(p-\alpha)^{k+1}}$	$t\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$
$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

Тест 1

1. Укажите вид дифференциального уравнения… . (Выберите один вариант ответа.)

1) $y'+y\sin 2x=0$;

2) $y'=\dfrac{3x-2y}{x+y}$;

3) $(e^x+2)dy-e^x y\ln y dx=0$.

(Для каждого уравнения выберите ответ из списка:
уравнение с разделяющимися переменными;
однородное уравнение;
линейное однородное уравнение;
линейное неоднородное уравнение;
уравнение Бернулли.)

2. Общим интегралом дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $2\sqrt{x+1}dy+ydx=0$ является… :

1) $\ln|y|-2\sqrt{x+1}=c$;

2) $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=c$;

3) $\dfrac{1}{2y}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=c$;

4) $\ln|y|+\sqrt{x+1}=c$.

3. Однородное дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{x-y}{3x+y}$ с помощью замены $y = u(x)\cdot x$, где $u(x)$ - неизвестная функция переменной x, сводится к уравнению с разделяющимися переменными вида … .

1. $\dfrac{u-1}{u^2+u+1}du + \dfrac{dx}{x} = 0$.
2. $\dfrac{u+3}{u^2+1}du + \dfrac{dx}{x} = 0$.
3. $\dfrac{u+3}{u^2+4u-1}du + \dfrac{dx}{x} = 0$.
4. $\dfrac{u-1}{u^2+3}du + \dfrac{dx}{x} = 0$.

4. Среди линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $y' + tgx\cdot y = 0$;
2) $y' - \mathrm{ctg}\, x\cdot y = 0$;
3) $y' + \mathrm{ctg}\, x\cdot y = 0$;
4) $y' - tgx\cdot y = 0$

выберите то, общим решением которого является семейство функций $y = c\cos x$, и укажите его номер.

5. С помощью замены $t(y) = y'$ можно понизить порядок дифференциальных уравнений… .

1. $y'' = \dfrac{1}{x}$.
2. $xy'' = (x^2+1)y'$.
3. $y'' + 3yy' = 1$.
4. $yy'' + (y')^2 = 0$.

6. Установите соответствие между линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка:

1) $x'' - x' = 0$; **2)** $x'' + x = 0$; **3)** $x'' + x' - 2x = 0$

и их характеристическими уравнениями.

A. $k^2+k=0$; **B.** $k^2+1=0$; **C.** $k^2-k=0$;

D. $k^2+k-2=0$; **E.** $k^2-1=0$; **F.** $k^2+2k-1=0$.

(Ответ введите с клавиатуры без пробелов и запятых, например 1A2B3C.)

7. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=(x-1)e^x$ можно найти в виде…:

1) $\tilde{y}=A(x-1)e^x$;

2) $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)e^x$;

3) $\tilde{y}=(Ax+B)e^x$;

4) $\tilde{y}=Axe^x$.

8. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''+3y'=x\cos 3x$ можно найти в виде…:

1) $\tilde{y}=(Ax+B)\cos 3x$;

2) $\tilde{y}=(Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x$;

3) $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)\cos 3x$;

4) $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)\cos 3x+(Cx^2+Dx)\sin 3x$.

9. Система дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y-x, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x \end{cases}$ методом исключений может быть сведена к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка…:

1) $x''+x'-2x=0$;

2) $x''-2x'+x=0$;

3) $x''+x'+2x=0$;

4) $x''-2x'-x=0$.

10. Установите соответствие между оригиналами:

1) $f(t)=e^t\sin t$; **2)** $f(t)=\cos t$; **3)** $f(t)=e^{2t}$

и их изображениями:

A. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2+1}$; **B.** $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$;

C. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$; **D.** $F(p)=\dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}$;

E. $F(p)=\dfrac{1}{p-2}$; **F.** $F(p)=\dfrac{1}{p+2}$.

(Ответ введите с клавиатуры без пробелов и запятых, например 1A2B3C.)

Тест 2

1. Укажите вид дифференциального уравнения… :

1) $y'+xy=xe^{x^2}$;
2) $\sqrt{x^2+1}yy'-xy^2+x=0$;
3) $xy'=\sqrt{y^2-x^2}+3y$.

(Для каждого уравнения выберите ответ из списка:
уравнение с разделяющимися переменными;
однородное уравнение;
линейное однородное уравнение;
линейное неоднородное уравнение;
уравнение Бернулли.)

2. Общим интегралом дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $(x+3)dy-y^2dx=0$ является… :

1) $\ln|x+3|+\dfrac{1}{y}=c$;
2) $3(x+3)^2-2y^3=c$;
3) $\ln|y|-\ln|x+3|=c$;
4) $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x+3}=c$.

3. Однородное дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{3x+y}{x-2y}$ с помощью замены $y = u(x) \cdot x$, где $u(x)$ - неизвестная функция переменной x, сводится к уравнению с разделяющимися переменными вида …

1) $\dfrac{2u-1}{2u^2+3}du + \dfrac{dx}{x} = 0$;

2) $\dfrac{2u-1}{u^2+3}du + \dfrac{dx}{x} = 0$;

3) $\dfrac{2u-1}{2u^2+1}du + \dfrac{dx}{x} = 0$;

4) $\dfrac{2u-1}{u^2-3}du + \dfrac{dx}{x} = 0$.

4. Среди линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $y' + 2xy = 0$;
2) $y' + xy = 0$;
3) $y' - xy = 0$;
4) $y' - 2xy = 0$

выберите то, общим решением которого является семейство функций $y = ce^{x^2}$, и укажите его номер.

5. С помощью замены $t(x) = y'$ можно понизить порядок дифференциальных уравнений… :

1) $y'' + (y')^2 = 1$;
2) $y'' - 2\operatorname{ctg} x y' = \sin^3 x$;
3) $y'' + y = e^x(x+1)$;
4) $y'y'' = x^2 - 1$.

6. Установите соответствие между линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка:

1) $x'' + x' - x = 0$; **2)** $x'' - x = 0$; **3)** $x'' - x' + x = 0$

и их характеристическими уравнениями:

A. $k^2 - k + 1 = 0$; **B.** $k^2 + 1 = 0$; **C.** $k^2 - k = 0$;
D. $k^2 + k - 1 = 0$; **E.** $k^2 - 1 = 0$; **F.** $k^2 + k = 0$.

(Ответ введите с клавиатуры без пробелов и запятых, например 1A2B3C.)

7. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ можно найти в виде…

1) $\tilde{y} = Ae^{-2x}$;
2) $\tilde{y} = Ax^2 e^{-2x}$;
3) $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$;
4) $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-2x}$.

8. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' = \sin 2x$ можно найти в виде…

1) $\tilde{y} = A\sin 2x$;
2) $\tilde{y} = (Ax + B)\sin 2x$;
3) $\tilde{y} = A\sin 2x + B\cos 2x$;
4) $\tilde{y} = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$.

9. Система дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ методом исключений может быть сведена к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка…

1) $x'' - x' + 2x = 0$;
2) $x'' + x' - x = 0$;
3) $x'' - x' - 2x = 0$;
4) $x'' + x' + x = 0$.

10. Установите соответствие между оригиналами:

1) $f(t) = te^{3t}$; **2)** $f(t) = \sin 3t$; **3.** $f(t) = sh3t$

и их изображениями:

A. $F(p) = \dfrac{3}{p^2 - 9}$; **B.** $F(p) = \dfrac{1}{(p-3)^2}$;

C. $F(p)=\dfrac{3}{p^2+9}$; **D.** $F(p)=\dfrac{1}{p^2}$;

E. $F(p)=\dfrac{1}{p-3}$; **F.** $F(p)=\dfrac{p}{p^2+9}$.

(Ответ введите с клавиатуры без пробелов и запятых, например 1A2B3C.)

ОТВЕТЫ

Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Тест 1

1. 0	**2.** 0,125	**3.** в	**4.** 8	**5.** 1
6. 2	**7.** 8	**8.** г	**9.** 3	**10.** 0,75

Тест 2

1. 0,25	**2.** 3	**3.** а	**4.** 2	**5.** 0,125
6. -0,5	**7.** 0,5	**8.** а	**9.** 1	**10.** 2

Линейные пространства и операторы

Тест 1

1. 3	**2.** -77	**3.** -1,67	**4.** -1,14	**5.** 45
6. 4730	**7.** 2 3	**8.** 4	**9.** 85	**10.** 2

Тест 2

1. 2	**2.** -14	**3.** -31	**4.** -5,86	**5.** -0,667
6. 138	**7.** 107	**8.** 7	**9.** 105	**10.** 3

Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных

Тест 1

1. 2	**2.** 1,75	**3.** 4	**4.** -33	**5.** 1
6. $-2dx^2+12dxdy-27dy^2$	**7.** 1,4	**8.** 4	**9.** 1	**10.** 1,3

Тест 2

1. 3 **2.** $-0,505$ **3.** $0,2dx-0,8dy+0,4dz$ **4.** 4
5. 16 **6.** 1 **7.** 3 **8.** 7 **9.** -7 **10.** -4

Дифференциальные уравнения и операционное исчисление

Тест 1

1. 1) линейное однородное уравнение; 2) однородное уравнение; 3) уравнение с разделяющимися переменными.
2. 4 **3.** 3 **4.** 1 **5.** 3;4 **6.** 1C2B3D
7. 3 **8.** 2 **9.** 1 **10.** 1A2C3E

Тест 2

1. 1) линейное неоднородное уравнение; 2) уравнение с разделяющимися переменными; 3) однородное уравнение.
2. 1 **3.** 1 **4.** 4 **5.** 2;4 **6.** 1D2E3A
7. 2 **8.** 2 **9.** 2 **10.** 1B2C3A.

Библиографический список

1. Бухенский К.В., Елкина Н.В., Маслова Н.Н., Ципоркова К.А. Опорные конспекты по высшей математике: учеб. пособие. Ч. 2. – Рязань: РГРТУ, 2010.
2. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: учеб. для вузов /под. ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: МГТУ, 1999.
3. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика: учебник. – М.: Едиториал УРСС, 2003. Т. 1.
4. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика: учебник. – М.: Едиториал УРСС, 2004. Т. 2.
5. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика: учебник. – М.: Едиториал УРСС, 2001. Т. 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тематические тесты по математике. Часть 2

Составители: Л у к ь я н о в а Галина Сергеевна
Е л к и н а Наталья Викторовна
С ю с ю к а л о в а Елена Александровна
Б о г а т о в а Светлана Викторовна

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 29.06.22. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,5.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.