7315

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ 4

Методические указания к самостоятельной работе

Рязань 2022

УДК 517.98

Тематические тесты по математике. Ч. 4: методические указания к самостоятельной работе/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: Г.С. Лукьянова, Н.В. Елкина, Е.А. Сюсюкалова, С.В. Богатова. – Рязань, 2022. – 40 с.

Содержат краткий теоретический справочник и примеры тестов по темам «Теория функций комплексного переменного», «Дискретная математика», «Теория вероятностей и математическая статистика».

Предназначены для студентов всех направлений и специальностей, изучающих высшую математику.

Библиогр.: 5 назв.

Функция комплексного переменного, формула Коши, ряд Лорана, вычет, множество, функция алгебры логики, нормальная форма, логические схемы, графы, событие, случайная величина, закон распределения, математическая статистика

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

Предисловие

Данные методические указания содержат краткий теоретический справочник и примеры тестов то темам «Теория функций комплексного переменного», «Дискретная математика», «Теория вероятностей и математическая статистика».

Перед выполнением любого теста рекомендуется повторить теоретический материал (внимательно изучить конспекты своих лекций и теоретический справочник в методических указаниях) и методы решения типовых задач (решить задачи из расчетно-графической работы).

Если при выполнении теста нужно выбрать вариант ответа, то может быть один или несколько верных вариантов ответа.

Тест считается зачтенным, если вы правильно решили не менее 7 заданий.

Теория функций комплексного переменного

Если каждому комплексному числу $z = x + iy \in D$ поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w = u + iv$, то на D определена **функция комплексного переменного** (ФКП) $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

ФКП $w = f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** z_0, если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$.

$f'(z_0)$ – **производная** ФКП $f(z)$ в точке z_0.

Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Для того чтобы ФКП $f(z)$, определённая в D, была дифференцируема в точке $z \in D$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывно дифференцируемы в той же точке и выполнялись условия $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

При этом

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Однозначная ФКП $w = f(z)$, заданная в области D, называется **аналитической в области** D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Элементарные функции комплексного переменного

1) показательная $w = e^z = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = \exp z$

2) логарифмическая $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\left(\arg z + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

3) тригонометрические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

4) гиперболические

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},\quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

$$\sin iz = i\operatorname{sh} z,\ \cos iz = \operatorname{ch} z,\ \operatorname{sh} iz = i\sin z,\ \operatorname{ch} iz = \cos z$$

5) общая степенная $z^{\mu} = e^{\mu \operatorname{Ln} z}$

6) общая показательная $a^{z} = e^{z\cdot\operatorname{Ln} a}$

7) обратные тригонометрические

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),\ \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz},\ \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

8) обратные гиперболические

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right),\ \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + z}{1 - z},\ \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z + 1}{z - 1}$$

Интеграл ФКП

$$\int_{\ell} f(z)\,dz = \int_{\ell} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_{\ell} v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$$

Если $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, – уравнение гладкой кривой l,

то $\int\limits_{\ell} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(z(t)\right)\ z'(t)\,dt$.

Теорема Коши. Если ФКП $f(z)$ - аналитическая в односвязной области D, то интеграл от $f(z)$ вдоль любой кусочно-гладкой замкнутой жордановой кривой $l \subset D$ равен нулю, т.е. $\oint\limits_{l} f(z)dz = 0$.

Интегральная формула Коши. Пусть $f(z)$ - ФКП, аналитическая в области G, L - замкнутая кусочно-гладкая жорданова кривая, принадлежащая области G вместе со своей внутренней областью D. Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива формула $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L^+} \dfrac{f(z)}{z - z_0}dz$.

ФКП $f(z)$, аналитическая в D, имеет производные любого порядка в этой области, и ее производная n-го порядка находится по формуле $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{L^+} \dfrac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$, $n = 1, 2, \ldots$, где L - замкнутая кусочно-гладкая жорданова кривая, принадлежащая D вместе со своей внутренней областью.

Разложение в ряд Тейлора. ФКП $f(z)$, аналитическая в открытом круге $|z - z_0| < R$, представима в нем в виде суммы степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$.

Разложение в ряд Лорана. Если ФКП $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, то в нем существует единственное разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}},\ n = 0, \pm 1, \ldots,$$

L – окружность $|z-z_0| = \delta, \quad r < \delta < R$.

Нули функции

Точка z_0 – **нуль** для $f(z)$ **порядка** n, если

1) $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0, \ldots,\ f^{(n-1)}(z_0) = 0,\ f^{(n)}(z_0) \neq 0$ или

2) $f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$.

Особые точки ФКП

Пусть ФКП $f(z)$ – аналитическая в кольце $0 < |z-z_0| < R$, а в самой точке z_0 не является аналитической. Точка z_0 –**изолированная особая точка** (ИОТ) $f(z)$.

1. z_0 – **устранимая ИОТ** (УОТ), если в ряде Лорана в окрестности z_0 нет коэффициентов при отрицательных степенях $(z-z_0)$. При этом $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = const$.

2. z_0 – **полюс** (П), если множество отличных от нуля коэффициентов при отрицательных степенях $(z-z_0)$ в ряде Лорана $f(z)$ в окрестности z_0 конечно. При этом $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Если z_0 нуль порядка n для $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, то z_0 – П **порядка** n для $f(z)$. При $n = 1$ получаем **простой** П.

3. z_0 – **существенно особая точка** (СОТ) $f(z)$, если в ее ряде Лорана множество отличных от нуля коэффициентов при отрицательных степенях $(z-z_0)$ бесконечно. При этом $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Вычет в ИОТ ФКП

Вычет ФКП $f(z)$ в точке z_0 – $\operatorname{res} f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$. Вычет равен коэффициенту при степени -1 в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности z_0: $\operatorname{res} f(z_0)=c_{-1}$.

1. Если z_0 – УОТ, то $\operatorname{res} f(z_0)=0$.

2. Если z_0 – простой П, то

$$\operatorname{res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)\right].$$

3. Если z_0 – П порядка n, то

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^n\right].$$

4. Если z_0 – СОТ, то $\operatorname{res} f(z_0)=c_{-1}$.

Приложения вычетов

1. Теорема Коши о вычетах. Если $f(z)$ аналитична в области D, кроме конечного числа особых точек z_1, …, z_n, то

$$\oint\limits_{L_D} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k).$$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\left|z=e^{it}\right|=\oint\limits_{|z|=1}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{\ell}\operatorname{res}\frac{P_m(z_k)}{Q_n(z_k)}$, если $n\geq m+2$ и z_k – ИОТ ФКП $f(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$, $\operatorname{Im}(z_k)>0$.

Тест 1

1. Производная функции

$f(z)=-2xy+x-y+(x^2-y^2+x+y)i$ равна … .

1. $f'(z) = -2x - 1 + (2y - 1)i$

2. $f'(z) = -2x - 1 - (2y - 1)i$

3. $f'(z) = 2x + 1 + (-2y + 1)i$

4. $f'(z) = -2y + 1 - (2x + 1)i$

5. $f'(z) = -2y + 1 + (2x + 1)i$

2. Аналитическая функция с действительной частью $u(x, y) = x - x^3 + 3xy^2$ и $f(1) = 0$ имеет вид … .

1. $f(z) = -z + z^3$

2. $f(z) = z - z^3$

3. $f(z) = 3z - 3z^3$

4. $f(z) = z + z^3 - 2$

5. $f(z) = z + 2z^3 - 3$

3. Установите соответствие между значениями комплексных функций:

1) $\sin i$; **2)** $\mathrm{sh}\, i$; **3)** $\mathrm{ch}\, i$

и их алгебраической формой записи:

A. $i\cos 1$; **B.** $i\sin 1$; **C.** $\mathrm{ch}1$; **D.** $i\mathrm{sh}1$; **E.** $\cos 1$; **F.** $\mathrm{sh}1$.

(Ответ введите с клавиатуры без пробелов и запятых, например 1A2B3C.)

4. Интеграл $\int\limits_L zRe(z^2)dz$ после преобразований сводится к сумме двух криволинейных интегралов второго рода … .

1. $\int\limits_L (x^2y - y^3)dx - (x^3 - xy^2)dy + i\int\limits_L (x^3 - xy^2)dx + (x^2y - y^3)dy$.

2. $\int\limits_L (x^3 - xy^2)dx + (x^2y - y^3)dy + i\int\limits_L (x^2y - y^3)dx - (x^3 - xy^2)dy$.

3. $\int\limits_L (x^3 - xy^2)dx - (x^2y - y^3)dy + i\int\limits_L (x^3 - xy^2)dx + (x^2y - y^3)dy$.

4. $\int\limits_L (x^3 - xy^2)dx - (x^2y - y^3)dy + i\int\limits_L (x^2y - y^3)dx + (x^3 - xy^2)dy$.

5. $\int\limits_L (y^3-x^2y)dx-(x^3-xy^2)dy+i\int\limits_L (y^3-x^2y)dx+(x^3-xy^2)dy$.

5. Интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z^2-2z-15}$ равен ...:

1) 0; **2)** 4π; **3)** $\dfrac{\pi}{2}$; **4)** 2π; **5)** -2π.

6. Интеграл $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{dz}{(z^2-1)^2}$ равен ...:

1) $-\pi$; **2)** $2\pi i$; **3)** $-\dfrac{\pi i}{2}$; **4)** $-\dfrac{\pi i}{4}$; **5)** $\dfrac{\pi}{2}$.

7. Для функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$ в области $|z|>3$, $z_0=0$, ряд Лорана имеет вид ...:

1) $\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{z^2}+\ldots+\dfrac{3^n}{z^{n+1}}+\ldots$;

2) $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{9}{z^4}+\ldots+\dfrac{(-1)^n 9^n}{z^{2n+2}}+\ldots$;

3) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{z^2}{81}+\ldots+\dfrac{z^{2n}}{9^{n+1}}+\ldots$;

4) $\dfrac{9}{z^2}+\dfrac{81}{z^4}+\ldots+\dfrac{9^n}{z^{2n}}+\ldots$;

5) $\dfrac{1}{9}-\dfrac{z^2}{81}+\ldots+\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{9^{n+1}}+\ldots$.

8. Точка $z_0=5$ является устранимой особой точкой для функций ...:

1) $f(z)=\dfrac{\operatorname{arctg}(z-5)}{z-5}$;

2) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-5z^2}$;

3) $f(z)=\dfrac{\sin(z-5)}{(z-5)^2}$;

4) $f(z)=\cos(z-5)^2$;

5) $f(z)=\dfrac{e^{z-5}-1}{z-5}$.

9. Вычет функции $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3}$ в полюсе третьего порядка $z_0=\pi$ равен ... . (В ответе нужно указывать только число, например: 3, или -2, или 1,4.)

10. Для нахождения интеграла $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{2\sin t-\cos t+1}$ в ТФКП нужно вычислить интеграл ...:

1) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{2dz}{(i+1)z^2-iz-1+2i}$;

2) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{2dz}{(i+2)z^2+(1-i)z+2-i}$;

3) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{2dz}{z^2-(1+i)z+i+4}$;

4) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{2dz}{(2-i)z^2+2iz-i-2}$;

5) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{2dz}{(3+i)z^2-4iz+3}$.

Тест 2

1. Производная функции $f(z)=-e^{2x}\sin 2y+ie^{2x}\cos 2y$ равна ...:

1) $f'(z)=-2e^{2x}\cos 2y+2ie^{2x}\sin 2y$;

2) $f'(z)=-2e^{2x}\cos 2y-2ie^{2x}\sin 2y$;

3) $f'(z)=2e^{2x}\cos 2y+2ie^{2x}\sin 2y$;

4) $f'(z)=-2e^{2x}\sin 2y+2ie^{2x}\cos 2y$;

5) $f'(z)=-e^{2x}\sin 2y+ie^{2x}\cos 2y$.

2. Аналитическая функция с мнимой частью $v(x,y)=y-\cos 2x\operatorname{sh}2y$ и $f(0)=0$ имеет вид ...:

1) $f(z)=z+2\sin 2z$;
2) $f(z)=z-\cos 2z+1$;
3) $f(z)=-z+\cos 2z-1$;
4) $f(z)=z+\sin 2z$;
5) $f(z)=z-\sin 2z$.

3. Установите соответствие между значениями комплексных функций:

1) $\operatorname{tg}3i$; **2)** $\operatorname{ctg}3i$; **3)** $\operatorname{cth}3i$

и их алгебраической формой записи:

A. $\operatorname{cth}3$; **B.** $-i\operatorname{ctg}3$; **C.** $\operatorname{ctg}3$; **D.** $-i\operatorname{cth}3$; **E.** $-i\operatorname{th}3$; **F.** $i\operatorname{th}3$.

(Ответ введите с клавиатуры без пробелов и запятых, например 1A2B3C.)

4. Интеграл $\int\limits_L z^2\,|z|\,dz$ $, где L - часть окружности $z=2e^{it}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, можно свести к интегралу ...:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}16ie^{3it}dt$; **2)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}4ie^{it}dt$; **3)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}8ite^{it}dt$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}16ie^{it}dt$; **5)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}8ite^{3it}dt$.

5. Интеграл $\oint\limits_{|z+3i|=1}\frac{dz}{z^3-4z}$ равен ...:

1) 4π; **2)** 0; **3)** $\frac{\pi}{2}$; **4)** 2π; **5)** -2π.

6. Интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{(z+1)dz}{(z-3)(z-1)}$ равен ...:

1) $4\pi i$; **2)** $3\pi i$; **3)** $2\pi i$; **4)** $-\pi i$; **5)** $-2\pi i$.

7. Для функции $f(z)=\dfrac{1}{2-z}$ в области $|z-1|<1$, $z_0=1$, ряд Лорана имеет вид ...:

1) $\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(z-1)^{n+1}}+\ldots;$

2) $1-(z-1)+\ldots+(-1)^n(z-1)^n+\ldots;$

3) $1+(z-1)+\ldots+(z-1)^n+\ldots;$

4) $\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}+\ldots;$

5) $\dfrac{1}{z-1}-1+(z-1)-\ldots+(-1)^{n+1}(z-1)^n+\ldots.$

8. Точка $z_0=3$ является простым полюсом для функций ...:

1) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-9}$;

2) $f(z)=\dfrac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2}$;

3) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-9)^2}$;

4) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-3}$;

5) $f(z)=\arcsin(z-3)$.

9. Вычет функции $f(z)=\dfrac{27e^z}{(z^2+3z)^2}$ в полюсе второго порядка $z_0=0$ равен ... . (В ответе нужно указывать только число, например: 3, или -2, или 1,4.)

10. Для нахождения интеграла $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\sin t+3\cos t}$ в ТФКП нужно вычислить интеграл ...:

1) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{3iz^2-1}$;

2) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{2idz}{(3i-1)z^2-3i-1}$;

3) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{(3i+1)z^2-1}$;

4) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{(3i+1)z^2+3i-1}$;

5) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{(3i-1)z^2+3i}$.

Дискретная математика

Под ***множеством*** будем понимать набор (совокупность) элементов одной природы. Над множествами определены следующие операции.

1. Объединение: $A\bigcup B=\{a\,|\,a\in A \text{ или } a\in B\}$.

2. Пересечение: $A\bigcap B=\{a\,|\,a\in A \text{ и } a\in B\}$.

3. Разность: $A\setminus B=\{a\,|\,a\in A \text{ и } a\notin B\}$.

4. Симметрическая разность: $A\Delta B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$.

5. Декартово произведение: $A\times B=\{\langle a,b\rangle\,|\,a\in A \text{ и } a\in B\}$.

Они обладают свойствами:

1) коммутативность: $A*B=B*A$, где $*=\bigcup,\bigcap,\Delta$;

2) ассоциативность: $A*(B*C)=(A*B)*C$, где $*=\bigcup,\bigcap$;

3) дистрибутивность: $(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$,

$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$;

4) идемпотентность: $A\bigcap A=A$, $A\bigcup A=A$;

5) закон поглощения: $A\bigcup(A\bigcap B)=A$, $A\bigcap(A\bigcup B)=A$;

6) закон де Моргана: $\overline{A\bigcap B}=\bar{A}\bigcup\bar{B}$, $\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bigcap\bar{B}$.

Отображение f между множествами X и Y – правило, сопоставляющее с каждым элементом $x\in X$ элемент $y=f(x)\in Y$, то есть $f\subseteq X\times Y$. Отображение обладает свойствами:

1) всюду определенность: $\forall x\in X\Rightarrow\exists y=f(x)\in Y$;

2) функциональность:

$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in f:\ x_1=x_2\Rightarrow y_1=y_2$;

3) сюръективность: $\forall y=f(x)\in Y\Rightarrow\exists x\in X$;

4) инъективность: $\forall x_1,x_2\in X:\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$;

5) биективность: f всюду определено, функционально, сюръективно и инъективно.

Функция алгебры логики (ФАЛ) $f(x_1,\ldots,x_n)$ задается таблицей своих значений, где переменные $x_1,\ldots,x_n$ независимо друг от друга принимают значения 0 или 1 так же, как и сама функция. Основные ФАЛ двух переменных представлены в таблице.

x,y	$x\,\&\,y$ $x\cdot y$	$x\vee y$	$x\oplus y$	$x\to y$	$x\sim y$	$x\mid y$	$x\uparrow y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
00	0	0	0	1	1	1	1	1	1
01	0	1	1	1	0	1	0	1	0
10	0	1	1	0	0	1	0	0	1
11	1	1	0	1	1	0	0	0	0

Если заменить пересечение множеств $A\bigcap B$ конъюнкцией $x\cdot y$, а объединение множеств $A\bigcup B$ дизъюнкцией $x\vee y$, то свойства операций над множествами перейдут в свойства ФАЛ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется любая дизъюнкция совершенных конъюнкций, которые содержат все рассматриваемые переменные. Для всех $f\left(\tilde{x}\right)\neq 0$ верно: $f\left(x_1,...,x_n\right)=\bigvee_{\tilde{\sigma}:f(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1}\cdot...\cdot x_n^{\sigma_n}$.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется любая конъюнкция совершенных дизъюнкций, которые содержат все рассматриваемые переменные. Для любой $f\left(\tilde{x}\right)\neq 1$ верно: $f\left(x_1,...,x_n\right)=\underset{\tilde{\sigma}:f(\tilde{\sigma})=0}{\&}\left(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee...\vee x_n^{\bar{\sigma}_n}\right)$.

Полиномом Жегалкина называется любая сумма по модулю 2 положительных конъюнкций, которые не содержат отрицания переменных, при этом:

$$\forall f(x)\neq 0\Rightarrow f\left(x_1,...,x_n\right)=\bigoplus_{\tilde{\sigma}:f(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1}\cdot...\cdot x_n^{\sigma_n},\quad \bar{x}_i=x_i\oplus 1.$$

Ориентированный граф (орграф) $G=\left(V,E\right)$ есть совокупность двух множеств: множества вершин $V=\left\{v_1,...,v_n\right\}$ и множества ребер (дуг) $E\subseteq V\times V$. В **неориентированном графе** E состоит из неупорядоченных пар из V.

Способы задания графов

1. Матрица инциденций $A_{n\times m}=\left(a_{i\,j}\right)$, где n – число вершин, m – число ребер. Для орграфа: $a_{i\,j}=1$, если из i-й вершины выходит j-е ребро; $a_{i\,j}=-1$, если ребро заходит в вершину, иначе $a_{i\,j}=0$. Для неориентированного графа: $a_{i\,j}=1$, если i-я вершина соответствует j-му ребру, иначе $a_{i\,j}=0$.

2. Матрица смежности $B_{n\times n}=\left(b_{i\,j}\right)$, где n – число вершин. При этом $b_{i\,j}=1$, если i-я и j-я вершины соединены ребром, иначе $b_{i\,j}=0$.

Операции над графами

1. Объединение графов $G_1=\left(V_1,E_1\right)$ и $G_2=\left(V_2,E_2\right)$ – это граф $G=\left(V,E\right)=G_1\bigcup G_2$, где $V=V_1\bigcup V_2$ и $E=E_1\bigcup E_2$.

2. Пересечение графов $G=\left(V,E\right)=G_1\bigcap G_2$, где

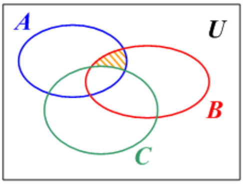
$V = V_1 \cap V_2$ и $E = E_1 \cap E_2$.

3. Дополнение графа $G = (V, E)$ – это граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$, в котором $\bar{E} = \{e \in V \times V : e \notin E\}$.

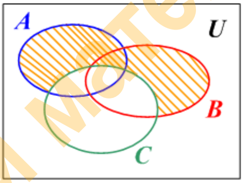
Тест 1

1. Диаграмма Эйлера - Венна для множества $(A \cup B) \setminus C$ имеет вид … . (Укажите номер верного чертежа.)

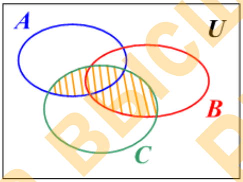
①



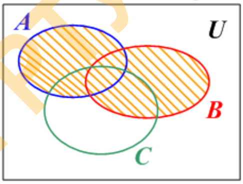
②



③



④



2. Если выражение $\overline{A \cup B} \cup \overline{B \cap (B \cup C)}$ упростить с помощью свойств операций со множествами, то получим … . (Выберите один ответ.)

а) $\bar{B}$; **б)** $\bar{A} \cap \bar{B}$; **в)** U; **г)** $\bar{A} \cap \bar{B} \cup C$.

3. Если $A = \{2, 5, 7\}$ и $B = \{1, 5, 8\}$, то соотнесите с каждым набором элементов из декартова произведения:

1) $\langle 5,5 \rangle, \langle 8,1 \rangle, \langle 1,5 \rangle$; **2)** $\langle 5,5 \rangle, \langle 7,2 \rangle, \langle 5,2 \rangle$;

3) $\langle 8,2 \rangle, \langle 5,7 \rangle, \langle 1,5 \rangle$; **4)** $\langle 8,2 \rangle, \langle 5,5 \rangle, \langle 5,2 \rangle$;

5) $\langle 2,5 \rangle, \langle 7,1 \rangle, \langle 5,5 \rangle$

название множества, которому они принадлежат:

A) $A\times A$; **B)** $B\times B$; **C)** $A\times B$; **D)** $B\times A$.

(Ответ запишите без пробелов и запятых, например 1A2B3C4D5A.)

4. Для отображения $f:\ X\to Y$, где $X=\{a,b,c\}$ и $Y=\{1,2,3\}$, которое задано следующим образом:

$$f:\quad b\to 1,\quad b\to 3,\quad c\to 2,\quad a\to 3,$$

укажите его свойства:

а) инъективность; **б)** функциональность; **в)** биективность; **г)** всюду определенность; **д)** сюръективность.

(Выберите один или несколько ответов.)

5. Функция $f=(x\to y)\,|\,z$ имеет следующий набор значений … . (Укажите только численные значения без скобок, пробелов и запятых, например 1001.)

6. Функцию $f=(1011\ 0100)$, заданную вектором своих значений, можно записать в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы следующим образом:

1) $f=\bar{x}y\vee\bar{y}(\bar{x}\,\bar{z}\vee xz)$; **2)** $f=\bar{x}\,\bar{y}\,z\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee xy\bar{z}\vee xyz$;

3) $f=(x\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})$;

4) $f=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee x\bar{y}z$;

5) $f=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee z)(x\vee\bar{y}\vee z)$.

(Выберите один ответ.)

7. Функцию $f=(1011\ 0100)$, заданную вектором своих значений, можно записать в виде совершенной конъюктивной нормальной формы следующим образом:

1) $f=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee x\bar{y}z$;

2) $f=(x\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})$;

3) $f=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})(x\vee y\vee\bar{z})(x\vee y\vee z)$;

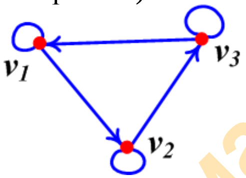
4) $f=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee z)(x\vee\bar{y}\vee z)$;

5) $f=\bar{x}\,\bar{y}\,z\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee xy\bar{z}\vee xyz$.

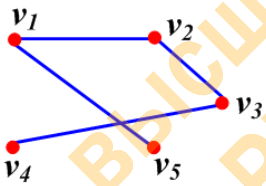
(Выберите один ответ.)

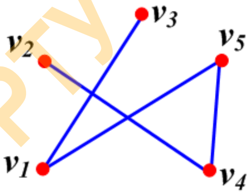
8. Полином Жегалкина для функции $f=(1100\ 1001)$, заданной вектором своих значений, имеет вид … . (Ответ запишите латинскими буквами, используя обычный символ сложения + и выписывая слагаемые в порядке убывания количества буквенных множителей, например $xyz+yz+1$.)

9. Третья строка матрицы смежности графа, изображенного на рисунке, равна … . (Ответ введите с клавиатуры без пробелов, скобок и запятых, например 10-1.)



10. Пятая строка матрицы смежности пересечения графов, изображенных на рисунке, равна … . (Ответ запишите без пробелов, скобок и запятых, например 10-1.)

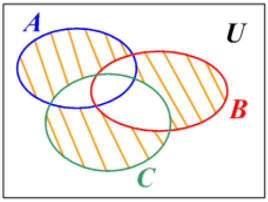




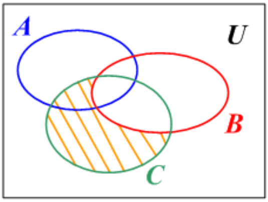
Тест 2

1. Диаграмма Эйлера - Венна для множества $(A \Delta B)\cup C$ имеет вид … . (Укажите номер верного чертежа.)

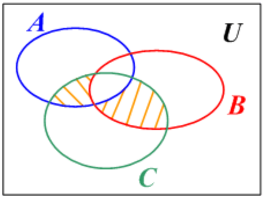
①



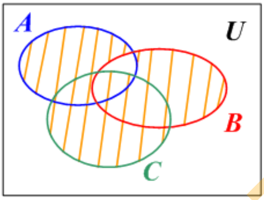
②



③



④



2. Если выражение $\overline{\left(\bar{A}\cup B\right)\cap\left(B\cap\bar{C}\right)}$ упростить с помощью свойств операций с множествами, то получим … . (Выберите один ответ.)

а) $A\cap\bar{B}\cup C$; **б)** $\bar{A}\cup B\cup\bar{C}$; **в)** $\bar{B}\cup C$; **г)** $\varnothing$.

3. Если $A=\{2,5,7\}$ и $B=\{1,5,8\}$, то соотнесите с каждым набором элементов из декартова произведения:

1) $\langle 4,4\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 8,1\rangle$; **2)** $\langle 4,1\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 1,1\rangle$;

3) $\langle 4,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 6,2\rangle$; **4)** $\langle 1,4\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 8,2\rangle$;

5) $\langle 4,4\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 6,1\rangle$

название множества, которому они принадлежат:

A) $A\times A$; **B)** $B\times B$; **C)** $A\times B$; **D)** $B\times A$.

(Ответ запишите без пробелов и запятых, например 1A2B3C4D5A.)

4. Для отображения $f:\ X\to Y$, где $Y=\{1,2,3\}$ и $X=\{a,b,c,d,e\}$, которое задано следующим образом:

$$f:\quad a\to 3,\quad c\to 1,\quad e\to 3,\quad b\to 2,$$

укажите его свойства:

а) инъективность; **б)** функциональность; **в)** биективность;
г) всюду определенность; **д)** сюръективность.

(Выберите один или несколько ответов.)

5. Функция $f=\left(\bar{x}\leftarrow y\right)\sim z$ имеет следующий набор значений … . (Запишите только численные значения без скобок, пробелов и запятых, например 1001.)

6. Функцию $f=(0111\ 0010)$, заданную вектором своих значений, можно записать в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы следующим образом:

1) $f=y\bar{z}\vee\bar{x}z$; **2)** $f=\bar{x}\,\bar{y}\,z\vee\bar{x}y\,\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee xy\bar{z}$;

3) $f=(x\vee y\vee z)(\bar{x}\vee y\vee z)(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})$;

4) $f=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee xyz$;

5) $f=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee z)(x\vee y\vee\bar{z})$.

(Выберите один ответ.)

7. Функцию $f=(0111\ 0010)$, заданную вектором своих значений, можно записать в виде совершенной конъюктивной нормальной формы следующим образом:

1) $f=(x\vee y\vee z)(\bar{x}\vee y\vee z)(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})$;

2) $f=\bar{x}\,\bar{y}\,z\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee xy\bar{z}$;

3) $f=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee z)(x\vee y\vee\bar{z})$;

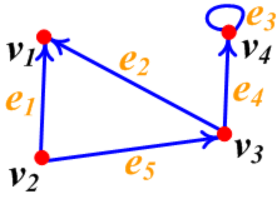
4) $f=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})(x\vee\bar{y}\vee z)(x\vee y\vee z)$;

5) $f=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee xyz$.

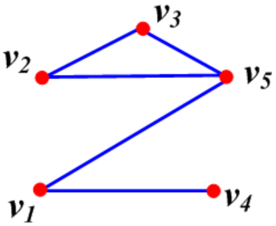
(Выберите один ответ.)

8. Полином Жегалкина для функции $f=(0001\ 1101)$, заданной вектором своих значений, имеет вид … . (Ответ запишите латинскими буквами, используя обычный символ сложения + и выписывая слагаемые в порядке убывания количества буквенных множителей, например $xyz+yz+1$.)

9. Первый столбец матрицы инцидентности графа, изображенного на рисунке, равен … . (Ответ запишите без пробелов, скобок и запятых, например 10-1.)



10. Третья строка матрицы смежности дополнения графа, изображенного на рисунке, равна … . (Ответ запишите без пробелов, скобок и запятых, например 10-1.)



Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные события

Классическое определение вероятности события A: $P(A)=\frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятных A; n – число всех исходов.

Геометрическая вероятность события A: $P(A)=\frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$, где $mes(A)$ – мера множества A, $mes(\Omega)$ – мера пространства элементарных событий Ω.

Вероятность суммы событий:

а) для совместных $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$;

б) для несовместных $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Вероятность произведения:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

Условие независимости событий: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Формула полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i), \text{ где } \bigcup_{i=1}^{n}H_i=\Omega,\ H_i\cdot H_j=\varnothing.$$

Формула Байеса: $P\left(H_i / A\right)=\dfrac{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A/H_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P\left(H_i\right)\cdot P\left(A/H_i\right)}$.

Формула Бернулли: $P_n\left(m\right)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$, $p+q=1$.

Случайные величины

<table>
<tr><th>Дискретные случайные величины (ДСВ)</th><th>Непрерывные случайные величины (НСВ)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Законы распределения
Функция распределения $F\left(x\right)=P\left(X<x\right)$,
$F(-\infty)=0;\ F(+\infty)=1;\ F(x)\ge 0;$ неубывающая</td></tr>
<tr><td>$F(x)=\sum\limits_{i} p_i,\quad x_i<x;$
$F\left(x\right)$ – ступенчатая</td><td>$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx;$
$F\left(x\right)$ – непрерывная</td></tr>
<tr><td>Ряд распределения
<table><tr><td>X</td><td>x_1</td><td>…</td><td>x_n</td></tr><tr><td>P</td><td>p_1</td><td>…</td><td>p_n</td></tr></table>$p_i>0$</td><td>Плотность распределения
$f\left(x\right)=F'\left(x\right);$
$f\left(x\right)\ge 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Условие нормировки</td></tr>
<tr><td>$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$</td><td>$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Числовые характеристики
Математическое ожидание:</td></tr>
<tr><td>$M\left(X\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$</td><td>$M\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Дисперсия:</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$D(X)=M\left(\left[X-M(X)\right]^2\right)=M\left(X^2\right)-M^2(X);$$</td></tr>
<tr><td>$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot p_i-M^2(X)=$$ $$=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2\cdot p_i$$</td><td>$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=$$ $$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2\cdot f(x)dx$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$</td></tr>
<tr><td>Дискретный случайный вектор</td><td>Непрерывный случайный вектор</td></tr>
<tr><td colspan="2">Законы распределения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функция распределения: $F(x,y)=P(X < x,\ Y < y)$;
$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0;$$ $$F(+\infty,+\infty)=1;$$ $$F(x,+\infty)=F(x);\ F(+\infty,y)=F(y);$$ $F(x,y)$ – неубывающая по x и y</td></tr>
<tr><td>$$F(x,y)=\sum_{i}\sum_{j}P_{ij},$$ $$x_i < x, y_j < y$$</td><td>$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$</td></tr>
<tr><td>Таблица распределения
<table>
<tr><td>X \ Y</td><td>y_1</td><td>…</td><td>y_j</td><td>…</td><td>y_m</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>p_{11}</td><td>…</td><td>p_{1j}</td><td>…</td><td>p_{1m}</td></tr>
<tr><td>…</td><td colspan="5">……………………</td></tr>
<tr><td>x_i</td><td>p_{i1}</td><td>…</td><td>p_{ij}</td><td>…</td><td>p_{im}</td></tr>
<tr><td>…</td><td colspan="5">……………………</td></tr>
<tr><td>x_n</td><td>p_{n1}</td><td>…</td><td>p_{nj}</td><td>…</td><td>p_{nm}</td></tr>
</table>
$$p_{ij}\geq 0;$$</td><td>Плотность распределения:
$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\,\partial y};$$ $$f(x,y)\geq 0;$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = P_i\left(X = x_i\right);$
$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = P_j\left(Y = y_j\right)$</td><td>$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = f_x(x);$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = f_y(y)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Условие нормировки</td></tr>
<tr><td>$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$</td><td>$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Числовые характеристики
Математическое ожидание (МО):</td></tr>
<tr><td>$M(X) = \sum_{i}\left(\sum_{j} x_i p_{ij}\right);$
$M(Y) = \sum_{j}\left(\sum_{i} y_j p_{ij}\right)$</td><td>$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x,y)dxdy;$
$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, p(x,y)dxdy$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дисперсия</td></tr>
<tr><td>$D(X) =$
$= \sum_{i}\sum_{j}\left(x_i - M_X\right)^2 p_{ij};$
$D(Y) =$
$= \sum_{i}\sum_{j}\left(y_j - M_Y\right)^2 p_{ij}$</td><td>$D(X) =$
$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x,y)dxdy - M_X^2;$
$D(Y) =$
$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p(x,y)dxdy - M_Y^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ковариация
$\operatorname{cov}(X,Y) = M\left[\left(X - M_X\right)\cdot\left(Y - M_Y\right)\right] =$
$= M(X \cdot Y) - M(X)\cdot M(Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Коэффициент корреляции: $r_{XY} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$</td></tr>
</table>

Математическая статистика

Генеральная совокупность (ГС) – совокупность всех подлежащих изучению объектов или результатов измерений, проводимых в неизменных условиях.

Выборочная совокупность (ВС) или выборка – совокупность объектов, случайно отобранных из ГС. Число объектов выборки n – **объем выборки**.

Вариационный ряд – элементы выборки, записанные в порядке возрастания. **Статистический ряд** – соответствие между наблюдаемыми значениями (вариантами) x_i и их частотами n_i или относительными частотами $p_i = \frac{n_i}{n}$.

Размах выборки $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Выборочное среднее $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i$.

Выборочная дисперсия $D_x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$.

Выборочное СКО $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Исправленная выборочная дисперсия $S_x^2 = \dfrac{n}{n-1}D_x$.

Интервальные оценки для нормально распределенной ГС

1. Доверительный интервал для МО при известной σ^2 дисперсии: $m \in \left(\overline{x} - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}};\quad \overline{x} + \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где $\Phi(t) = \dfrac{p}{2}$.

2. Доверительный интервал для МО при неизвестной σ^2 дисперсии: $m \in \left(\overline{x} - \dfrac{t_p S_x}{\sqrt{n}};\quad \overline{x} + \dfrac{t_p S_x}{\sqrt{n}}\right)$, где t_p – квантиль распределения Стьюдента.

3. Доверительный интервал для дисперсии с известным МО: $\sigma^2 \in \left(\dfrac{\tau D_x}{\chi_\beta^2(\tau)};\quad \dfrac{\tau D_x}{\chi_{1-\beta}^2(\tau)}\right)$, где $\chi_\beta^2(\tau), \chi_{1-\beta}^2(\tau)$ – квантили распределения хи-квадрат с τ степенями свободы, $\beta=\dfrac{1+p}{2}=1-\dfrac{\alpha}{2}$.

4. Доверительный интервал для дисперсии с известным МО:

$$\sigma^2\in\left(\frac{(\tau-1)S_x^2}{\chi_\beta^2(\tau-1)};\quad\frac{(\tau-1)S_x^2}{\chi_{1-\beta}^2(\tau-1)}\right).$$

Случайные события

Тест 1

1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова МАТЕМАТИКА?

2. Студенты данного курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается при 3 предмета. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

3. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x+y+z=6$?

4. В группе из 20 студентов 12 отличников. Сколькими способами можно в этой группе распределить 7 льготных путевок между 5 отличниками и 2 неотличниками?

5. В прямоугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(13;0)$, $B(13;16)$, $C(0;16)$ наудачу ставится точка $M(x;y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y\le\frac{7}{25}\left(10x-x^2\right)$. (В ответе указать найденную величину вероятности, умноженную на 100 и округленную до целого значения.)

6. Производится один выстрел в направлении двух мишеней, причем первая мишень появляется в два раза чаще, чем вторая. Вероятность попадания в первую мишень равна $0,7$, во вторую – $0,9$. Известно, что мишень поражена. Каковы вероятности, что это было попадание в первую или вторую мишени? (В ответе записать меньшую вероятность в виде десятичной дроби, округлив до сотых.)

7. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно

80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна $0,2$. (Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до сотых.)

8. Из урны, содержащей несколько одинаковых шаров, часть из которых белые, а остальные черные, наудачу выбираются два шара. Являются ли противоположными события: A – «только один шар белый», B – «нет ни одного белого шара»?

9. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число будет кратно 2, либо 5, либо тому и другому одновременно. (Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до сотых.)

10. В квадрат наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка удалена от сторон квадрата меньше чем $^1\!/_3$ длины его стороны. (Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до сотых.)

Тест 2

1. Сколькими способами могут встать в очередь 7 человек?

2. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 2, 4, 6 и 8, если в числе они могут повторяться?

3. Из группы студентов в 17 человек формируются две строительные бригады в 9 и 8 человек. Сколькими различными способами можно это сделать?

4. Сколькими способами можно составить патруль из 3 солдат и 1 офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

5. Подбрасывается симметричный игральный кубик с шестью гранями два раза. Чему равна вероятность того, что число очков при первом подбрасывании делится нацело на число очков при втором подбрасывании? (Ответ привести с тремя знаками после запятой.)

6. В цехе работают 20 станков трех типов. Из них 10 первого типа, 6 – второго и остальные – третьего. Вероятности того, что деталь, произведенная на станках первого, второго и третьего типов, окажется стандартной, равна 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Наудачу выбирается одна деталь. Какова вероятность того, что она стандартная? (Ответ записать с двумя знаками после запятой.)

7. Прибор состоит из 8 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна 0,25. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время t откажут не менее двух узлов. (Ответ записать с двумя знаками после запятой.)

8. Для события $\left(\overline{A}+B\right)\cdot\left(\overline{A}+\overline{B}\right)$ указать равное или равные события:

а) $\Omega \setminus A$; **б)** $A+B$; **в)** $\overline{A}$;
г) $B \setminus A$; **д)** $\overline{A}+\overline{B}$.

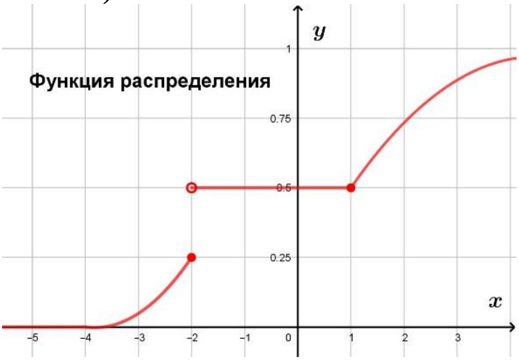
9. Две одинаковые монеты радиусом ${}^{R}\!/_{5}$ расположены внутри круга радиусом R, в который наудачу ставится точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если сами монеты не перекрываются. (Ответ записать с двумя знаками после запятой.)

10. На плоскости начерчена окружность, в которую вписан квадрат. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в круг точка попадет в квадрат. (Ответ записать с двумя знаками после запятой.)

Случайные величины

Тест 1

1. Для случайной величины (СВ) X, график функции распределения которой приведен на рисунке, найти вероятность события $\{-4 \le X < -2\}$. (Ответ ввести с клавиатуры с двумя знаками после запятой.)



2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной рядом распределения.

X	-3	-1	2
P	0,4	0,3	0,3

(В ответе указать сумму математического ожидания и дисперсии, округлив результат до двух знаков после запятой.)

3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной функцией плотности.

(В ответе указать сумму математического ожидания и дисперсии, округлив результат до двух знаков после запятой.)

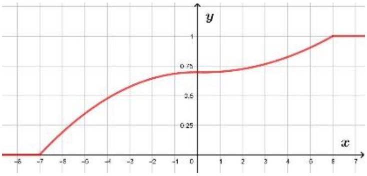
4. Случайная величина X задана своей плотностью распределения:

$$p(x)=\frac{1}{0,3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2,4)^2}{0,18}}.$$

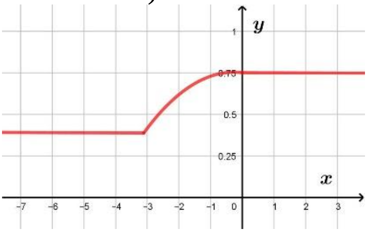
Найти сумму математического ожидания, дисперсии и вероятности попадания в интервал $(3;\ 3,6)$. (Ответ ввести с клавиатуры с тремя знаками после запятой.)

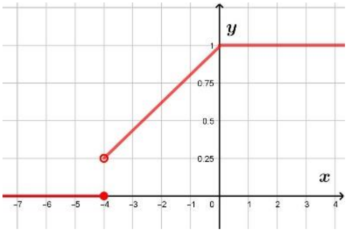
5. Какая из функций, графики которых изображены на рисунках, может быть функцией распределения случайной величины? (Выберите один или несколько ответов.)

1

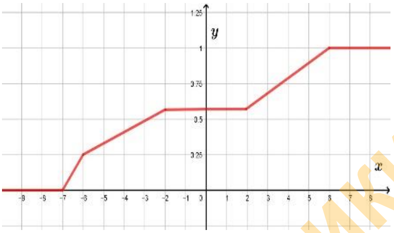


2

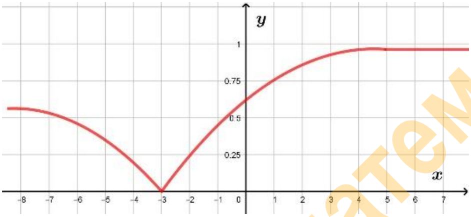




3



4



5

6. Пользуясь таблицами распределений, найти для стандартной нормальной случайной величины X вероятность события $\{-0,7 < X < 0,6\}$. (Ответ ввести с клавиатуры с двумя знаками после запятой.)

7. Начальный и центральный моменты второго порядка случайной величины равны соответственно 9,66 и 7,6. Тогда первый начальный момент равен … . (Ответ ввести с клавиатуры с двумя знаками после запятой.)

8. Двумерная случайная величина (случайный вектор) задана таблицей распределения. Заполнить пропущенное значение вероятности в таблице и найти вероятность события $\{X < -2\}$.

		Значения СВ Y			
		-1	0,2	3,4	5,3
Значения СВ X	-3,8	0,18	0,09	0,12	0,08
	-2,1	0,04		0,05	0,07
	-1,5	0,04	0,1	0,06	0,06

9. Для двумерной случайной величины (случайного вектора) заданы математические ожидания ее компонент:

$$M[X] = -4,2,\ M[Y] = 9,1.$$

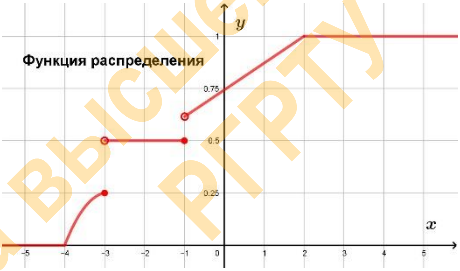
Тогда математическое ожидание случайной величины $Z = 5X + 8Y$ равно … .

10. Двумерная случайная величина (случайный вектор) задана таблицей распределения. Найти сумму математического ожидания и дисперсии случайной величины X (первой координаты случайного вектора). (Ответ ввести с клавиатуры с двумя знаками после запятой.)

		Значения СВ Y		
		-3,1	-2,5	-1,9
Значения СВ X	-2,2	0,07	0,01	0,02
	-0,4	0,03	0,3	0,15
	0,3	0,02	0,2	0,03
	1,2	0,1	0,07	0

Тест 2

1. Для случайной величины X, для которой график функции распределения приведен на рисунке, найти вероятность события $\{X > 0\}$. (Ответ ввести с клавиатуры с двумя знаками после запятой.)



2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной рядом распределения.

X	-1	0	3	4	6
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

(В ответе указать сумму математического ожидания и дисперсии, округленную до двух знаков после запятой.)

3. Случайная величина X задана функцией распределения:

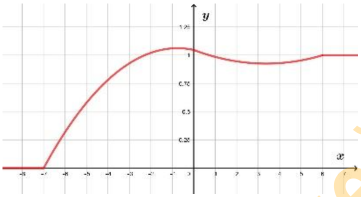
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\frac{1}{5}, \\ Ax+\frac{1}{6}, & -\frac{1}{5} < x \le 5 \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Найти сумму коэффициента A и вероятности попадания СВ X

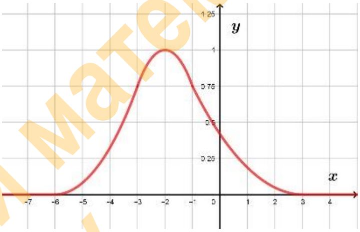
в интервал $(-1;\ 3)$. (Ответ ввести с клавиатуры с двумя знаками после запятой.)

4. Пусть случайная величина распределена по закону $\mathbf{N}\left(-0,75;\ 2,7^2\right)$. Найти значение функции распределения в точке $x=-1,8$. (Ответ ввести с клавиатуры с тремя знаками после запятой.)

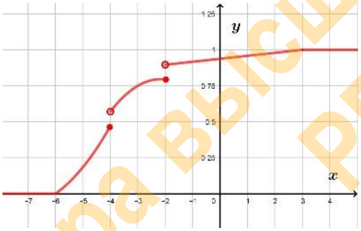
5. Какая из функций, графики которых изображены на рисунках, может быть функцией распределения случайной величины?



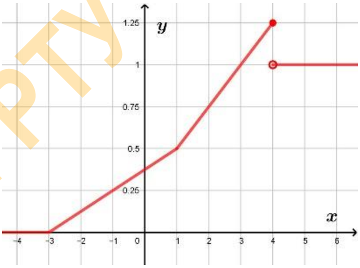
1



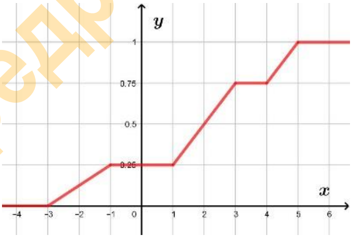
2



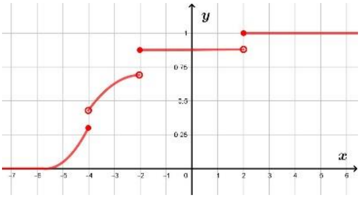
3



4



5



6

6. Пользуясь таблицами распределений, найти для стандартной нормальной случайной величины X вероятность события $\{0,16 < X < 3\}$. (Ответ ввести с клавиатуры с двумя знаками после запятой.)

7. Начальные моменты первого и второго порядков случайной величины соответственно равны 3,3 и 11,6. Тогда второй центральный момент равен … .

8. Двумерная величина (случайный вектор) задана таблицей распределения. Заполнить пропущенное значение вероятности в таблице и найти вероятность события $\{X > 1{,}8;\ Y < 5\}$.

		Значения СВ Y			
		-1	0,2	3,4	5,3
Значения СВ X	-3,8	0,18	0,09	0,12	0,08
	-2,1	0,04		0,05	0,07
	-1,5	0,04	0,1	0,06	0,06

9. Для двумерной случайной величины (случайного вектора) заданы дисперсии $D[X]=7$, $D[Y]=5$ и ковариация $\operatorname{cov}(X,Y)=-5$ ее компонент. Тогда дисперсия случайной величины $Z=-2X-3Y$ равна … .

10. Двумерная случайная величина (случайный вектор) задана таблицей распределения. Найти сумму математического ожидания и дисперсии случайной величины Y (второй координаты случайного вектора). (Ответ ввести с клавиатуры с двумя знаками после запятой.)

		Значения СВ Y		
		-1,3	0,4	1,4
Значения СВ X	0,8	0,01	0,3	0,03
	1,1	0,03	0,2	0,02
	1,9	0,02	0,2	0,03
	2,1	0,02	0,05	0,09

Математическая статистика

Тест 1

1. При увеличении коэффициента доверия (выберите один ответ):

а) величина доверительного интервала определяется только распределением оценки;

б) доверительный интервал не изменяется;

в) доверительный интервал увеличивается;

г) доверительный интервал уменьшается.

2. Дана реализация выборки из некоторого непрерывного распределения (эмпирический ряд распределения) объема 35.

№ i	3	4	5	6	7	8
$[x_i; x_{i+1}]$	$[-8;-6)$	$[-6;-5)$	$[-5;-2)$	$[-2;3)$	$[3;6)$	$[6;10)$
n_i	4	5	2	4	3	3

Найти частость (относительную частоту) четвертого интервала группировки. (В ответе привести найденную величину, умноженную на 1000 и округленную до целого.)

3. Дана реализация выборки из некоторого распределения (эмпирический ряд распределения).

x_i	-3	-2	1	2	5	7	9
n_i	2	3	4	3	2	3	3

Найти реализацию A_1 – выборочного начального момента 1-го порядка. (В ответе привести найденную величину, умноженную на 100 и округленную до целого.)

4. Пусть в качестве оценки математического ожидания используется выборочный начальный момент 1-го порядка. По данной реализации выборки из распределения X :

(-1,8; 3,6; 3,7; 5,6; 4,1; 4,0; 2,2; 1,7; -3,7; 3,9)

найти реализацию точечной оценки математического ожидания случайной величины. (В качестве ответа привести найденную величину, умноженную на 100 и округленную до целого.)

5. Пусть в качестве оценки математического ожидания используется выборочный начальный момент 1-го порядка. Для некоторой реализации выборки случайной величины X , распределенной по нормальному закону с известной дисперсией $\sigma^2 = 9$, получен эмпирический ряд распределения.

x_k	-4,4	0,4	2,7	5,5	7,6
n_k	4	2	3	4	4

Найти реализацию доверительного интервала математического ожидания СВ X с коэффициентом доверия $\alpha = 0,95$. (В ответе записать значение верхней (правой) границы доверительного интервала, умноженное на 100 и округленное до целого.)

6. Пусть в качестве оценки математического ожидания используется выборочный начальный момент 1-го порядка (выборочное среднее). По данной реализации выборки случайной величины X, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, найдены реализации:

$$\text{суммы элементов выборки } \sum_{k=1}^{6} x_k = -13,2;$$

$$\text{суммы квадратов элементов } \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = 66,24.$$

Найти реализацию доверительного интервала математического ожидания случайной величины с коэффициентом доверия $\alpha = 0,975$. (В ответе привести значение верхней (правой) границы доверительного интервала, умноженное на 100 и округленное до целого.)

7. Пусть в качестве оценки дисперсии используется выборочная исправленная дисперсия. По данной реализации выборки случайной величины X, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, найдены реализации:

$$\text{суммы элементов выборки } \sum_{k=1}^{16} x_k = -1,6;$$

$$\text{суммы квадратов элементов } \sum_{k=1}^{16} x_k^2 = 281,76.$$

Найти реализацию точечной оценки дисперсии случайной величины. (В ответе привести найденную величину, умноженную на 100 и округленную до целого.)

8. Пусть в качестве оценки дисперсии случайной величины используется выборочный центральный момент 2-го порядка M_2 (выборочная дисперсия D_x). По данной реализации выборки случайной величины X, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, найдены реализации:

суммы элементов выборки $\sum_{k=1}^{13} x_k = 89,7$;

суммы квадратов элементов $\sum_{k=1}^{13} x_k^2 = 746,33$.

Найти реализацию доверительного интервала дисперсии случайной величины с коэффициентом доверия $\alpha = 0,9995$. [В ответе привести значение верхней (правой) границы доверительного интервала, умноженное на 100 и округленное до целого.]

9. Требовалось по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о законе Пуассона распределения генеральной совокупности X (число степеней свободы $s-2$) с эмпирическим распределением выборки объема $n = 100$. Результаты вычислений были занесены в таблицу.

x_i	$n_{i\ эмп}$	$n_{i\ теор}$	$\left(n_{i\ эмп} - n_{i\ теор}\right)^2$	$\dfrac{\left(n_{i\ эмп} - n_{i\ теор}\right)^2}{n_{i\ теор}}$
0	85	82	9	$\frac{9}{82} \approx 0,108$
1	11	16	25	$\frac{25}{16} \approx 1,563$
2 3	$\left.\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right\}$	4	$\frac{4}{2} = 2$

Какой вывод можно сделать по этим расчетам? [Если проверяемая гипотеза отвергается, то ввести в качестве ответа наблюдаемое значение статистики, округленное до двух знаков после запятой. В противном случае (проверяемая гипотеза не отвергается) – ввести в качестве ответа критическое значение статистики критерия, округленное до двух знаков после запятой.]

Тест 2

1. Оценка статистического параметра значима, если (выберите один вариант ответа):

а) гипотеза о равенстве нулю оцениваемого параметра отвергается;

б) доверительный интервал оценки содержит 0;

в) критическая область статистики содержит 0;

г) дисперсия оценки стремится к 0 при увеличении объема выборки.

2. Дана реализация выборки из некоторого непрерывного распределения (эмпирический ряд распределения).

№ i	1	2	3	4	5	6
$[x_i;\ x_{i+1}]$	$[-6;0)$	$[0;3)$	$[3;6)$	$[6;10)$	$[10;16)$	$[16;21)$
n_i	5	8	7	11	10	9

Найти эмпирическую функцию распределения $F_{50}^*(x)$. (В ответе привести $F_{50}^*(2,4)$ – частное значение функции распределения в точке $x_0 = 2,4$, умноженное на 1000 и округленное до целого.)

3. Дана реализация выборки из некоторого распределения (эмпирический ряд распределения):

(1; -4; -1; 1; 1; -3; -2; 0; 2; 1).

Найти реализацию A_2 – выборочного начального момента 2-го порядка. (В ответе привести найденную величину, умноженную на 100 и округленную до целого.)

4. Пусть в качестве оценки математического ожидания используется выборочный начальный момент 1-го порядка. Для некоторой реализации выборки из распределения X получен эмпирический ряд распределения.

x_k	-7	-5	-3	0	3	6	8	10	11	13
n_k	7	5	2	4	6	5	5	7	6	5

Найти реализацию точечной оценки математического ожидания случайной величины. (В качестве ответа привести найденную величину, умноженную на 100 и округленную до целого.)

5. Пусть в качестве оценки математического ожидания используется выборочный начальный момент 1-го порядка. По данной реализации выборки случайной величины X, распределенной по нормальному закону с известной дисперсией $\sigma^2 = 16$,

(1,6; -3,7; 3,1; -2,5; 4,6; 4,3; -5,3; -5,2; 5,6; -5,6; -3,9)

найти реализацию доверительного интервала математического ожидания случайной величины с коэффициентом доверия

$\alpha = 0,9$. [В качестве ответа привести значение верхней (правой) границы доверительного интервала, умноженное на 100 и округленное до целого.]

6. Пусть в качестве оценки математического ожидания используется выборочный начальный момент 1-го порядка (выборочное среднее). По данной реализации выборки случайной величины X, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, найдены реализации:

$$\text{суммы элементов выборки } \sum_{k=1}^{11} x_k = 33;$$

$$\text{суммы квадратов элементов } \sum_{k=1}^{11} x_k^2 = 201,3.$$

Найти реализацию доверительного интервала математического ожидания случайной величины с коэффициентом доверия $\alpha = 0,9995$. [В ответе привести значение верхней (правой) границы доверительного интервала, умноженное на 100 и округленное до целого.]

7. Пусть в качестве оценки дисперсии используется выборочная дисперсия. По данной реализации выборки случайной величины X, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, найдены реализации:

$$\text{суммы элементов выборки } \sum_{k=1}^{24} x_k = 57,6;$$

$$\text{суммы квадратов элементов } \sum_{k=1}^{24} x_k^2 = 347,04.$$

Найти реализацию точечной оценки дисперсии случайной величины. (В ответе привести найденную величину, умноженную на 100 и округленную до целого.)

8. Пусть в качестве оценки дисперсии случайной величины используется выборочный центральный момент 2-го порядка M_2 (выборочная дисперсия D_x). По данной реализации выборки случайной величины X, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, найдены реализации:

$$\text{суммы элементов выборки } \sum_{k=1}^{5} x_k = 7{,}5;$$

$$\text{суммы квадратов элементов } \sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 83{,}25.$$

Найти реализацию доверительного интервала дисперсии случайной величины с коэффициентом доверия $\alpha = 0{,}95$. [В ответе привести значение верхней (правой) границы доверительного интервала, умноженное на 100 и округленное до целого.]

9. Используя критерий Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими n_i и теоретическими $n_{i\,теор}$ частотами, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

n_i	10	17	23	31	29	20	12	8
$n_{i\,теор}$	7	12	21	45	28	19	11	7

[Если проверяемая гипотеза отвергается, то ввести в качестве ответа наблюдаемое значение статистики, округленное до двух знаков после запятой. В противном случае (проверяемая гипотеза не отвергается) – ввести в качестве ответа критическое значение статистики критерия, округленное до двух знаков после запятой.]

ОТВЕТЫ

Теория функций комплексного переменного

Тест 1

1. 5 **2.** 2 **3.** 1D2B3E **4.** 4 **5.** 1
6. 3 **7.** 2 **8.** 1; 5 **9.** 0,5 **10.** 4

Тест 2

1. 4 **2.** 5 **3.** 1F2D3B **4.** 1 **5.** 2
6. 5 **7.** 3 **8.** 1; 2 **9.** 1 **10.** 4

Дискретная математика

Тест 1

1. 2 **2.** а **3.** 1B2A3D4D5C **4.** г, д **5.** 10101110
6. 4 **7.** 2 **8.** $xz+y+1$ **9.** 101 **10.** 10000

Тест 2

1. 4 **2.** в **3.** 1A2A3B4C5D **4.** б, д **5.** 01010110
6. 2 **7.** 1 **8.** $xy+yz+x$ **9.** -1010 **10.** 10010

Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные события

Тест 1

1. 151200 **2.** 1320 **3.** 28 **4.** 22176 **5.** 22
6. 0,39 **7.** 0,05 **8.** нет **9.** 0,6 **10.** 0,89

Тест 2

1. 5040 **2.** 256 **3.** 24310 **4.** 246480 **5.** 0,388
6. 0,83 **7.** 0,63 **8.** а, в **9.** 0,08 **10.** 0,64

Случайные величины

Тест 1

1. 0,25 **2.** 3,39 **3.** -3,44 **4.** 2,513 **5.** 1, 3, 4
6. 0,48 **7.** 1,43 **8.** 0,74 **9.** 51,8 **10.** 0,68

Тест 2

1. 0,25 **2.** 7,31 **3.** 0,83 **4.** 0,349 **5.** 3, 5
6. 0,44 **7.** 0,71 **8.** 0,2 **9.** 13 **10.** 0,83

Математическая статистика

Тест 1

1. в **2.** 143 **3.** 280 **4.** 233 **5.** 400
6. 132 **7.** 1877 **8.** 7518 **9.** 3,84

Тест 2

1. а **2.** 228 **3.** 380 **4.** 402 **5.** 135
6. 787 **7.** 870 **8.** 646 **9.** 11,07

Библиографический список

1. Карасев И.П. Теория функций комплексного переменного: учеб. пособие. М.: Физматлит, 2008.
2. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей. М.: МГТУ, 2004.
3. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М., Тескин О.И. Математическая статистика. М.: МГТУ, 2001.
4. Краткий курс математики. Часть 4: учеб. пособие / К.В. Бухенский, Н.В. Елкина, Н.Н. Маслова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2014. – 140 с.
5. Краткий курс математики. Часть 3: учеб. пособие / К.В. Бухенский, Н.В. Елкина, Н.Н. Маслова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2014. – 92 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 1
Теория функций комплексного переменного 1
Дискретная математика 11
Теория вероятностей и математическая статистика 19
  Случайные события 19
  Случайные величины 20
  Математическая статистика 23
Ответы 38
Библиографический список 39

Тематические тесты по математике. Часть 4

Составители: Лукьянова Галина Сергеевна
Елкина Наталья Викторовна
Сюсюкалова Елена Александровна
Богатова Светлана Викторовна

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 29.06.22. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,5.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.