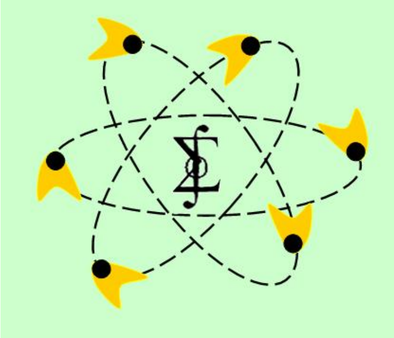
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

С.В. БОГАТОВА, Г.С. ЛУКЬЯНОВА, К.А. ЦИПОРКОВА

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ
по теме
«КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ»



Рязань 2021

Министерство науки и высшего образования РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. УТКИНА

С.В. БОГАТОВА, Г.С. ЛУКЬЯНОВА, К.А. ЦИПОРКОВА

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ
по теме
«КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

Учебное пособие

РЕКОМЕНДОВАНО
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИМ СОВЕТОМ РГРТУ
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ПОДГОТОВКИ
01.00.00 «МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»,
02.00.00 «КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ»,
09.00.00 «ИНФОРМАТИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА»,
11.00.00 «ЭЛЕКТРОНИКА, РАДИОТЕХНИКА И СИСТЕМЫ СВЯЗИ»,
12.00.00 «ФОТОНИКА, ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, ОПТИЧЕСКИЕ И
БИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ»,
15.00.00 «МАШИНОСТРОЕНИЕ»,
27.00.00 «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»
(КВАЛИФИКАЦИЯ «БАКАЛАВР»)

Рязань 2021

УДК 517.37+530.21

Расчетные задания по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля»: учеб. пособие/ С.В. Богатова, Г.С. Лукьянова, К.А. Ципоркова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. - Рязань, 2021.- 116 с.

Содержит расчетные задания по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля». Составлены для проверки знаний, умений и навыков студентов по соответствующим разделам математики на практических занятиях и для организации самостоятельной работы.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки», 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника», 11.00.00 «Электроника, радиотехника и системы связи», 12.00.00 «Фотоника, приборостроение, оптические и биотехнические системы и технологии», 15.00.00 «Машиностроение», 27.00.00 «Управление в технических системах» (квалификация «бакалавр»).

Библиогр.: 7 назв.

Двойные, тройные, криволинейные, поверхностные интегралы; поле

Печатается по решению научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензенты: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский), кафедра математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ «Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина» (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Ю. Лискина)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие……………………………………………………..4
Задание 1………………………………………………………5
Задание 2………………………………………………………7
Задание 3………………………………………………………9
Задание 4……………………………………………………..10
Задание 5…………………………………………………..……20
Задание 6……………………………………………………..…22
Задание 7……………………………………………………..24
Задание 8…………………………………………………..…26
Задание 9…………………………………………………..…28
Задание 10……………………………………………..……..31
Задание 11……………………………………………………33
Задание 12…………………………………………………...34
Задание 13……………………………………………………36
Задание 14……………………………………………..……..39
Задание 15………………………………………………..….42
Задание 16……………………………………………..……..44
Задание 17………………………………………………..….46
Задание 18……………………………………………………52
Задание 19…………………………………………..………..54
Задание 20…………………………………………………....57
Задание 21……………………………………………..……..59
Задание 22……………………………………………..……..61
Решение задач нулевого варианта………………………………63
Библиографический список..………………………………......115

Предисловие

Изучение математики студентами РГРТУ сопровождается выполнением типовых расчетов. Типовой расчет – набор задач по некоторой теме, индивидуальных для каждого студента, предназначенных для закрепления теоретических знаний и отработки практических навыков. Поэтому выполнять задания типового расчета следует своевременно и самостоятельно.

Перед выполнением типового расчета необходимо изучить соответствующий теоретический материал (лекции, рекомендованную литературу) и решения задач, разобранные на практических занятиях.

Решения задач выполняются ручкой с яркими синими или черными чернилами, все чертежи выполняются карандашом с использованием линейки и, если необходимо, циркуля.

Обязательно указывается номер каждой задачи и полностью приводится ее формулировка.

При решении задач типового расчета нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

Решения задач следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решение каждой задачи типового расчета должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения.

Типовой расчет сдается на проверку преподавателю строго в установленный срок. Самостоятельность выполнения типового расчета проверяется при его защите у преподавателя (собеседование с преподавателем), который вправе предложить решить задачи аналогичного типа или задать вопросы по любым задачам из выполненного типового расчета.

Типовой расчет засчитывается преподавателем по результатам защиты в ходе очной встречи при условии, что правильно решены все задачи на этапе самостоятельной работы.

Задание 1. Вычислить двумя способами двойной интеграл по прямоугольной области D.

1. $\iint\limits_D \left(3x^2y-4y\right)dxdy,\quad D:\ -1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 3.$

2. $\iint\limits_D \left(4xy^2-3x\right)dxdy,\quad D:\ -2\le x\le 0,\ \ 1\le y\le 2.$

3. $\iint\limits_D \left(3x^2+4xy^3\right)dxdy,\quad D:\ -1\le x\le 1,\ \ -2\le y\le 0.$

4. $\iint\limits_D \left(3xy-4y^2\right)dxdy,\quad D:\ -1\le x\le 3,\ \ -2\le y\le 1.$

5. $\iint\limits_D \left(2x^2y+7x\right)dxdy,\quad D:\ 0\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 1.$

6. $\iint\limits_D \left(3x^3y+4x\right)dxdy,\quad D:\ 1\le x\le 2,\ \ 2\le y\le 3.$

7. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2+5y\right)dxdy,\quad D:\ -1\le x\le 0,\ \ -1\le y\le 2.$

8. $\iint\limits_D \left(3xy-4y^3\right)dxdy,\quad D:\ -1\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2.$

9. $\iint\limits_D \left(3x^2y+2y^2x\right)dxdy,\quad D:\ 1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 2.$

10. $\iint\limits_D \left(3x^2-4yx\right)dxdy,\quad D:\ -1\le x\le 0,\ \ -1\le y\le 3.$

11. $\iint\limits_D \left(4xy^3-4x^2\right)dxdy,\quad D:\ 1\le x\le 3,\ \ 2\le y\le 3.$

12. $\iint\limits_D \left(4xy-7y^3x\right)dxdy,\quad D:\ -1\le x\le 2,\ \ 2\le y\le 5.$

13. $\iint\limits_D \left(3x^2+9y^2x\right)dxdy,\quad D:\ 0\le x\le 2,\ \ 3\le y\le 4.$

14. $\iint\limits_D \left(3x^2y+8y^4\right)dxdy,\quad D:\ -1\le x\le 2,\ \ -1\le y\le 1.$

15. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2 - 4x^3\right)dxdy, \quad D:\ 1 \le x \le 2,\ \ 2 \le y \le 3.$

16. $\iint\limits_D \left(3y - 4y^3x^3\right)dxdy, \quad D:\ -1 \le x \le 0,\ \ 1 \le y \le 4.$

17. $\iint\limits_D \left(3xy^2 + 9y^3\right)dxdy, \quad D:\ -1 \le x \le 1,\ \ 2 \le y \le 5.$

18. $\iint\limits_D \left(x^2y - 4y\right)dxdy, \quad D:\ -1 \le x \le 3,\ \ 0 \le y \le 2.$

19. $\iint\limits_D \left(5x^4y + 3x\right)dxdy, \quad D:\ 1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 3.$

20. $\iint\limits_D \left(x^2y + 5y\right)dxdy, \quad D:\ -1 \le x \le 1,\ \ -2 \le y \le 1.$

21. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2 - xy\right)dxdy, \quad D:\ -2 \le x \le -1,\ \ 0 \le y \le 2.$

22. $\iint\limits_D \left(2x^2y + 5y\right)dxdy, \quad D:\ 1 \le x \le 2,\ \ 3 \le y \le 4.$

23. $\iint\limits_D \left(x^2y^2 - 4y^5\right)dxdy, \quad D:\ -1 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2.$

24. $\iint\limits_D \left(5xy^4 - 3y\right)dxdy, \quad D:\ -1 \le x \le 4,\ \ 0 \le y \le 2.$

25. $\iint\limits_D \left(7x^6y - 4xy\right)dxdy, \quad D:\ -1 \le x \le 0,\ \ 1 \le y \le 3.$

26. $\iint\limits_D \left(3x^2y + 6y^2x\right)dxdy, \quad D:\ -1 \le x \le 3,\ \ -1 \le y \le 3.$

27. $\iint\limits_D \left(2xy - 4y^3\right)dxdy, \quad D:\ 1 \le x \le 2,\ \ 4 \le y \le 5.$

28. $\iint\limits_D \left(6x^2y + 12y^2\right)dxdy, \quad D:\ -1 \le x \le 2,\ \ 1 \le y \le 2.$

29. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 8y\right)dxdy, \quad D:\ 1 \le x \le 2,\ \ -2 \le y \le 1.$

30. $\iint\limits_D \left(5x^4y-4x\right)dxdy, \quad D:\ 1\le x\le 3,\quad 0\le y\le 3.$

Задание 2. Вычислить $\iiint\limits_T f\left(x,\ y,\ z\right)dxdydz$, где тело T задано неравенствами $a\le x\le b, c\le y\le d, e\le z\le g$ (тело T – параллелепипед).

1. $\iiint\limits_T \left(3xz^2-2yx+1\right)dxdydz$, $-1\le x\le 1, 0\le y\le 3, 4\le z\le 7$.
2. $\iiint\limits_T \left(z+6xyz-4xy\right)dxdydz$, $2\le x\le 5, -2\le y\le 4, 0\le z\le 1$.
3. $\iiint\limits_T \left(y^2+5z^4x-xyz\right)dxdydz$, $-2\le x\le 1, 1\le y\le 4, 3\le z\le 5$.
4. $\iiint\limits_T \left(3xy^2-xy^2z^3\right)dxdydz$, $7\le x\le 9, 1\le y\le 4, -2\le z\le 2$.
5. $\iiint\limits_T \left(6+x^3y-5z^4\right)dxdydz$, $3\le x\le 9, -4\le y\le 3, 0\le z\le 2$.
6. $\iiint\limits_T \left(9x^2y^2z-z^2+xy\right)dxdydz$, $0\le x\le 2, 1\le y\le 5, 4\le z\le 7$.
7. $\iiint\limits_T \left(2-10xz^4+xyz\right)dxdydz$, $0\le x\le 9, -3\le y\le 2, 4\le z\le 6$.
8. $\iiint\limits_T \left(12xyz-z^2y\right)dxdydz$, $0\le x\le 3, -5\le y\le -2, 4\le z\le 9$.
9. $\iiint\limits_T \left(2x+3y^2-xyz^5\right)dxdydz$, $0\le x\le 1, 3\le y\le 7, 1\le z\le 3$.
10. $\iiint\limits_T \left(4z^3y+6x^2y^3\right)dxdydz$, $4\le x\le 8, 0\le y\le 1, -5\le z\le 1$.
11. $\iiint\limits_T \left(7-z^4y+zx^2\right)dxdydz$, $1\le x\le 5, 2\le y\le 6, -4\le z\le -1$.
12. $\iiint\limits_T \left(1+x^2z-3y^3z^2\right)dxdydz$, $-2\le x\le 3, 0\le y\le 5, 2\le z\le 4$.

13. $\iiint\limits_T \left(x^3y^2z-5z^4+1\right)dxdydz$, $2\le x\le 5, -3\le y\le 0, 1\le z\le 4$.

14. $\iiint\limits_T \left(6-3xz^5+xy^2\right)dxdydz$, $-3\le x\le 1, 0\le y\le 4, 1\le z\le 2$.

15. $\iiint\limits_T \left(3z^2+xyz-xy^2\right)dxdydz$, $0\le x\le 1, -3\le y\le 0, 1\le z\le 4$.

16. $\iiint\limits_T \left(z-5x^4y+z^2y\right)dxdydz$, $-4\le x\le 0, 1\le y\le 6, 0\le z\le 2$.

17. $\iiint\limits_T \left(2x^3y^2z^4-xz\right)dxdydz$, $2\le x\le 9, 1\le y\le 4, -3\le z\le 0$.

18. $\iiint\limits_T \left(8xy-z^4+yz^2\right)dxdydz$, $0\le x\le 1, 2\le y\le 4, 5\le z\le 8$.

19. $\iiint\limits_T \left(4y^3z+x^3-xy\right)dxdydz$, $-3\le x\le 2, 1\le y\le 4, 0\le z\le 1$.

20. $\iiint\limits_T \left(5xyz+z^2-x^3y\right)dxdydz$, $-5\le x\le 0, 1\le y\le 3, 0\le z\le 2$.

21. $\iiint\limits_T \left(7+z^2yx^3-xy\right)dxdydz$, $2\le x\le 5, -2\le y\le 1, 3\le z\le 5$.

22. $\iiint\limits_T \left(4x^3y+xyz^4-1\right)dxdydz$, $0\le x\le 1, -2\le y\le 2, 1\le z\le 3$.

23. $\iiint\limits_T \left(6x^2yz-xy+yz\right)dxdydz$, $1\le x\le 3, 2\le y\le 4, 0\le z\le 5$.

24. $\iiint\limits_T \left(x^2+y^3z-xz^3\right)dxdydz$, $-2\le x\le 1, 0\le y\le 2, 0\le z\le 4$.

25. $\iiint\limits_T \left(4x-xyz+z^2y\right)dxdydz$, $0\le x\le 4, 2\le y\le 5, 4\le z\le 7$.

26. $\iiint\limits_T \left(x^3+y^3-xyz^4\right)dxdydz$, $4\le x\le 5, 0\le y\le 3, -4\le z\le 2$.

27. $\iiint\limits_T \left(x^2y^2z^2+xy-z\right)dxdydz$, $0\le x\le 2, 1\le y\le 2, 4\le z\le 7$.

28. $\iiint\limits_T \left(z^2-xy+5yz\right)dxdydz$, $5\le x\le 7, -1\le y\le 0, -2\le z\le 3$.

29. $\iiint\limits_T \left(4x - xyz^2 + x^2z^2\right)dxdydz$, $1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 2$.

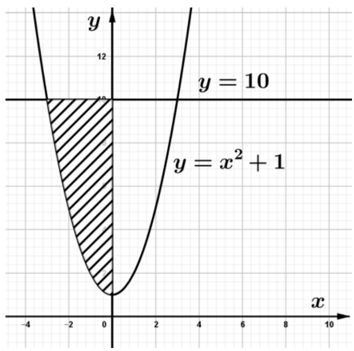
30. $\iiint\limits_T \left(xyz^2 + x^3 - y^2z\right)dxdydz$, $0 \le x \le 2,\ -5 \le y \le 0, 1 \le z \le 3$.

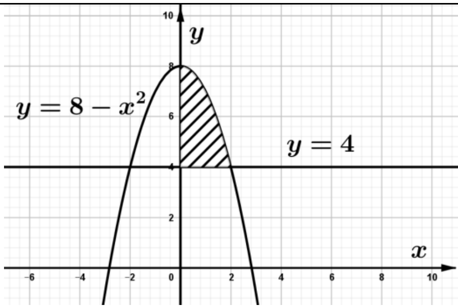
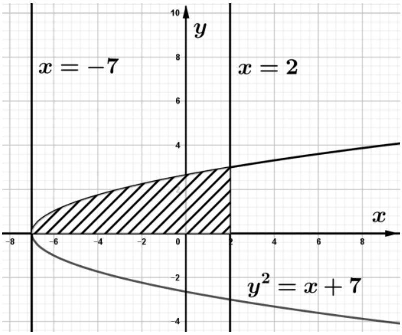
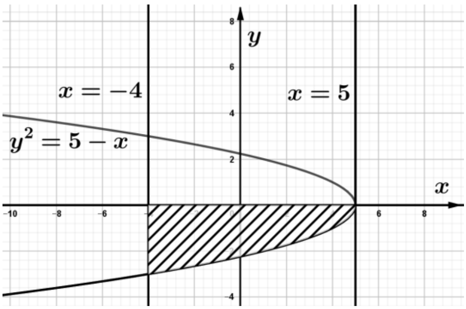
Задание 3. Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f\left(x, y\right)dxdy$ в виде повторного по заданной области D. Привести два способа решения задачи (проекция на ось Ox и ось Oy).

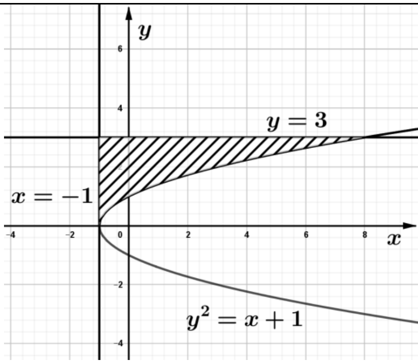
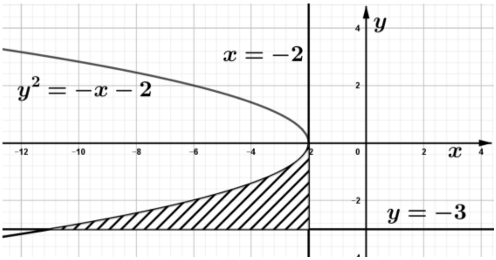
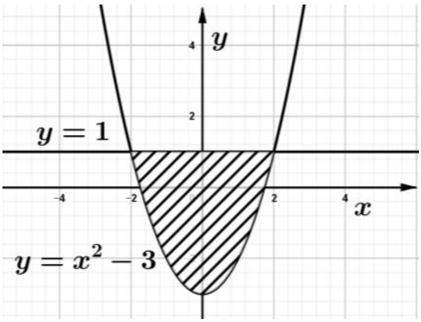
1. $D: \quad x + y = 6,\ y = x^2,\ y = 0.$
2. $D: \quad x + y = 2,\ y = x^2,\ x \ge 0.$
3. $D: \quad x + y = 3,\ y = 2x^2,\ y = 0.$
4. $D: \quad x + y = 2,\ y = 3x^2,\ x \le 0.$
5. $D: \quad x + y = 6,\ y = x^2,\ x \le 0.$
6. $D: \quad x + y = 2,\ y = x^2,\ y = 0.$
7. $D: \quad x + y = 6,\ y = x^2,\ x \ge 0.$
8. $D: \quad x + y = 3,\ y = 4x^2,\ y = 0.$
9. $D: \quad x + y = 4,\ y = 3x^2,\ x \ge 0.$
10. $D: \quad 3x + y = 10,\ y = x^2,\ y = 0.$
11. $D: \quad -x + y = 6,\ y = x^2,\ x \le 0.$
12. $D: \quad -5x + y = 6,\ y = x^2,\ y = 0.$
13. $D: \quad -3x + y = 10,\ y = x^2,\ y = 0.$
14. $D: \quad -x + y = 2,\ y = x^2,\ x \le 0.$
15. $D: \quad -x + y = 2,\ y = 3x^2,\ y = 0.$
16. $D: \quad -x + y = 3,\ y = 2x^2,\ y = 0.$
17. $D: \quad x + y = 3,\ y = 2x^2,\ x \ge 0.$
18. $D: \quad -4x + y = 5,\ y = x^2,\ y = 0.$
19. $D: \quad 3x + y = 5,\ y = 2x^2,\ y = 0.$

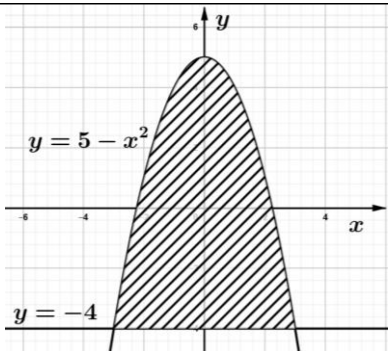
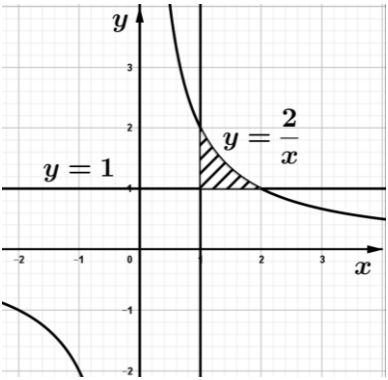
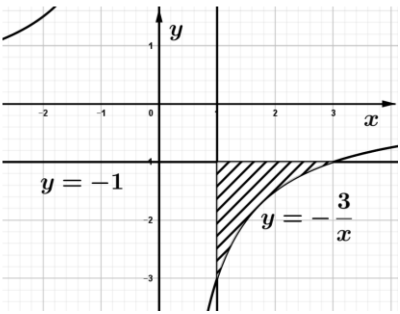
20. D: $-3x+y=2,\ y=5x^2,\ x\le 0.$
21. D: $-x+y=4,\ y=3x^2,\ y=0.$
22. D: $2x+y=5,\ y=3x^2,\ x\le 0.$
23. D: $5x+y=6,\ y=x^2,\ x\ge 0.$
24. D: $4x+y=5,\ y=x^2,\ x\ge 0.$
25. D: $-x+y=6,\ y=x^2,\ y=0.$
26. D: $x+y=12,\ y=x^2,\ y=0.$
27. D: $5x+y=6,\ y=x^2,\ x\le 0.$
28. D: $-x+y=12,\ y=x^2,\ x\le 0.$
29. D: $x+2y=3,\ y=x^2,\ y=0.$
30. D: $-x+3y=2,\ y=x^2,\ x\ge 0.$

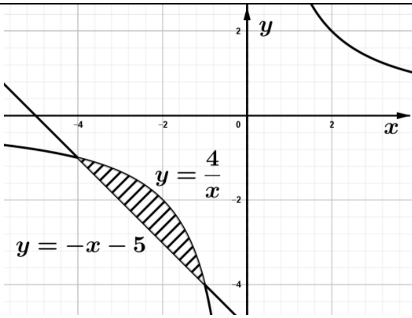
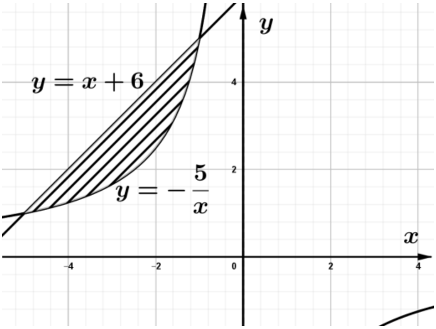
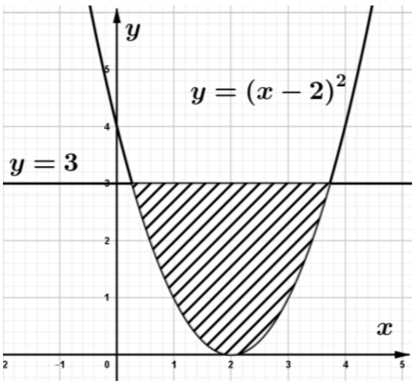
Задание 4. Перейти от двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ к повторному, если область D задана графически. (В ответе указать два способа.)

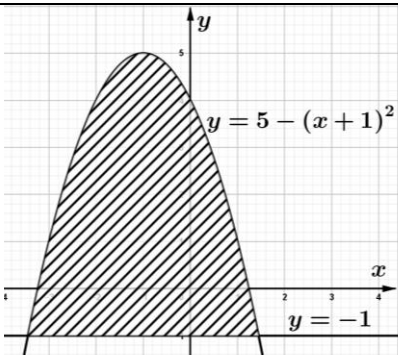
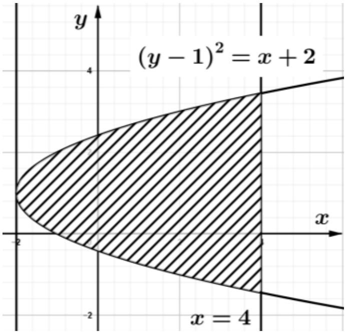
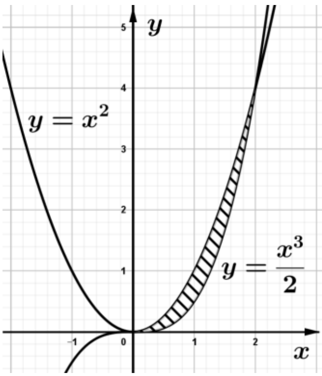
1.	

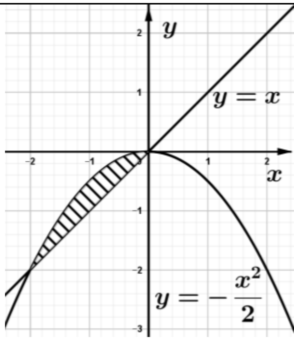
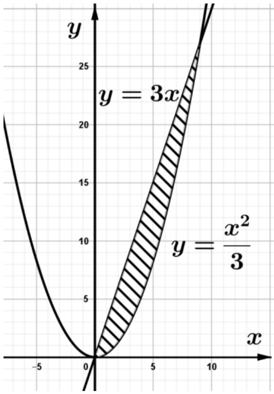
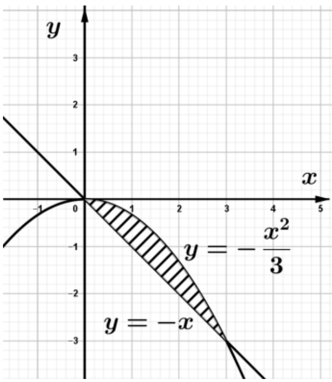
<table>
<tr><td>2.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>
</td></tr>
</table>

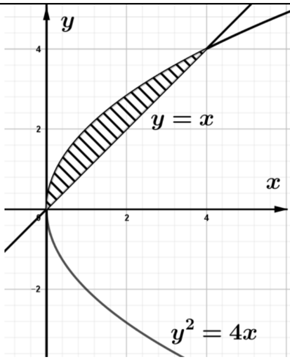
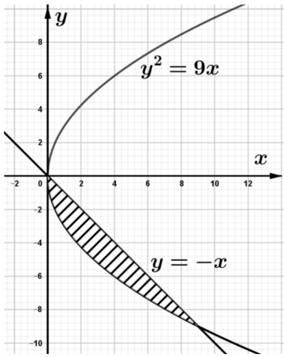
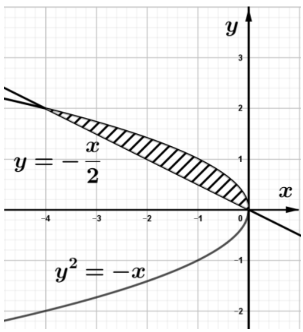
5.	y $y = 3$ $x = -1$ x $y^2 = x + 1$
6.	y $x = -2$ $y^2 = -x - 2$ x $y = -3$
7.	y $y = 1$ x $y = x^2 - 3$

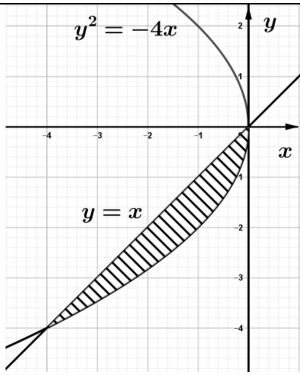
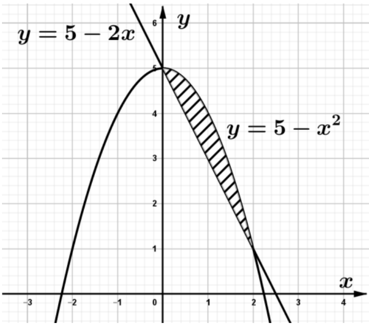
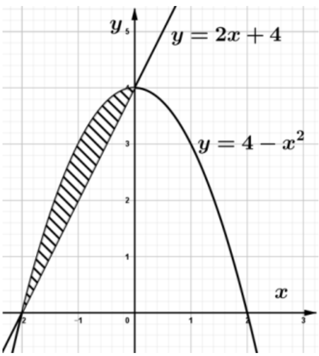
8.	y 6 y = 5 − x^2 −6 −4 4 x y = −4
9.	y 3 2 y = 2/x y = 1 1 −2 −1 0 1 2 3 x −1 −2
10.	y 1 −2 −1 0 1 2 3 x −1 y = −1 −2 y = −3/x −3

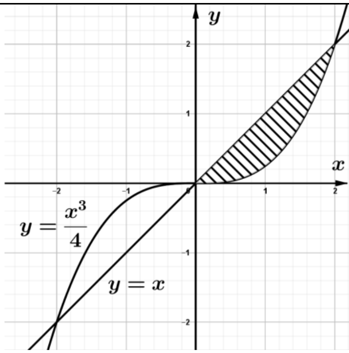
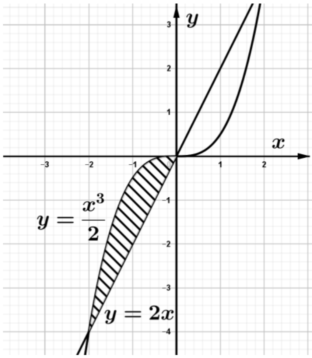
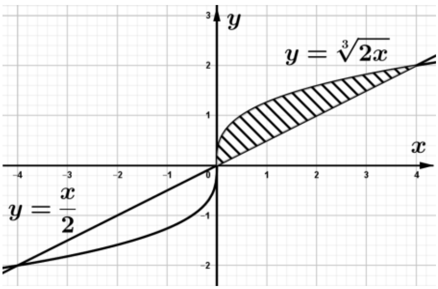
11.	y x $y = \frac{4}{x}$ $y = -x - 5$
12.	y x $y = x + 6$ $y = -\frac{5}{x}$
13.	y x $y = (x-2)^2$ $y = 3$

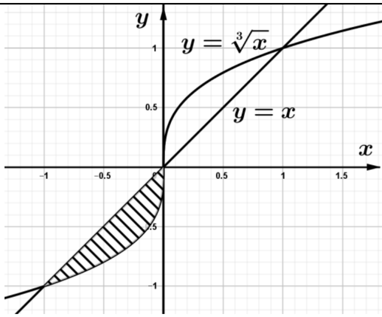
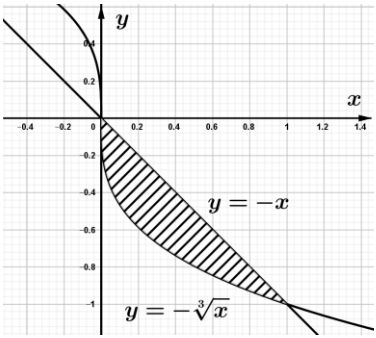
14.	
15.	
16.	

17.	y $y = x$ x $y = -\frac{x^2}{2}$ 2 1 −1 −2 −3 −2 −1 1 2
18.	y $y = 3x$ $y = \frac{x^2}{3}$ x 25 20 15 10 5 −5 0 5 10
19.	y x $y = -\frac{x^2}{3}$ $y = -x$ 3 2 1 −1 −2 −3 −1 0 1 2 3 4 5

20.	y x y = x y^2 = 4x 4 2 0 −2
21.	y x y^2 = 9x y = −x 8 6 4 2 −2 0 10 12 −4 −6 −8 −10
22.	y x y = −x/2 y^2 = −x 3 2 1 −4 −3 −2 −1 0 −1 −2

23.	
24.	
25.	

26.	y x $y = \frac{x^3}{4}$ $y = x$
27.	y x $y = \frac{x^3}{2}$ $y = 2x$
28.	y x $y = \sqrt[3]{2x}$ $y = \frac{x}{2}$

29.	
30.	

Задание 5. Вычислить двумя способами двойной интеграл по заданной области D.

1. $\iint\limits_D (3x-2y)dxdy, \qquad D:\ y \ge x,\ y \le 2x,\ y \le 2.$

2. $\iint\limits_D (x+3y)dxdy, \qquad D:\ y \ge x,\ y \le 3x,\ y \le 3.$

3. $\iint\limits_D (3y-2x)dxdy, \qquad D:\ y \ge x,\ y \le 2x,\ y \le 4.$

4. $\iint\limits_D (5x-y)dxdy, \qquad D:\ y \ge \frac{1}{2}x,\ y \le 2x,\ y \le 2.$

5. $\iint\limits_D (3x+4y)dxdy, \qquad D:\ y \ge \frac{1}{2}x,\ y \le x,\ y \le 2.$

6. $\iint\limits_D (5x-3y)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le 2x,\ x \le 2.$

7. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{1}{3}x,\ y \le x,\ x \le 3.$

8. $\iint\limits_D (3x-y)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le 2x,\ y \le 1.$

9. $\iint\limits_D (6x+y)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{1}{2}x,\ y \le 2x,\ y \le 1.$

10. $\iint\limits_D (3x+4y)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{1}{3}x,\ y \le 2x,\ y \le 2.$

11. $\iint\limits_D (3y-4x)dxdy,\qquad D:\ y \ge 2x,\ y \le 3x,\ y \le 3.$

12. $\iint\limits_D (5x+3y)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le 4x,\ y \le 4.$

13. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{1}{2}x,\ y \le 2x,\ x \le 4.$

14. $\iint\limits_D (2y-5x)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{2}{3}x,\ y \le 2x,\ y \le 2.$

15. $\iint\limits_D (3x+2y)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{2}{3}x,\ y \le x,\ y \le 3.$

16. $\iint\limits_D (7x-4y)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le 2x,\ y \le 1.$

17. $\iint\limits_D (4x+3y)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le 4x,\ y \le 2.$

18. $\iint\limits_D (3y+7x)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{1}{2}x,\ y \le 2x,\ x \le 1.$

19. $\iint\limits_D (9x-2y)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le 2x,\ x \le 1.$

20. $\iint\limits_D (3x-7y)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{1}{2}x,\ y \le 4x,\ y \le 2.$

21. $\iint\limits_D (3y-8x)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le \frac{3}{2}x,\ y \le 3.$

22. $\iint\limits_D (3x+8y)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le \frac{4}{3}x,\ y \le 4.$

23. $\iint\limits_D (3x-y)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{1}{2}x,\ y \le \frac{2}{3}x,\ y \le 2.$

24. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le \frac{5}{2}x,\ y \le 2.$

25. $\iint\limits_D (3x-4y)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{2}{3}x,\ y \le \frac{4}{3}x,\ y \le 2.$

26. $\iint\limits_D (4x-2y)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{2}{3}x,\ y \le \frac{5}{3}x,\ x \le 3.$

27. $\iint\limits_D (3y-5x)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le \frac{5}{4}x,\ y \le 5.$

28. $\iint\limits_D (3y+2x)dxdy,\qquad D:\ y \ge \frac{1}{3}x,\ y \le 2x,\ x \le 3.$

29. $\iint\limits_D (x-6y)dxdy,\qquad D:\ y \ge x,\ y \le 6x,\ x \le 1.$

30. $\iint\limits_D (3y+8x)dxdy,\qquad D:\ y \ge 2x,\ y \le 5x,\ x \le 1.$

Задание 6. Найти массу плоской пластины D, если она ограничена заданными линиями и известна ее плотность $\mu(x, y)$.

1. $D: y = x,\ y = 3x,\ x = 2 \qquad \mu(x, y) = 1 + xy$.
2. $D: y = 2x,\ y = 4x,\ x = -3 \qquad \mu(x, y) = 1 + 5xy$.
3. $D: y = x,\ y = 2x,\ y = 5 \qquad \mu(x, y) = 2 + 3x + y$.
4. $D: y = 5x,\ y = 8x,\ y = -1 \qquad \mu(x, y) = 4 - 2x - y$.
5. $D: y = -x,\ y = -6x,\ x = 3 \qquad \mu(x, y) = 1 + x^2 - 4y$.
6. $D: y = -5x,\ y = -7x,\ x = -2 \qquad \mu(x, y) = 1 - 4xy$.
7. $D: y = -x,\ y = -4x,\ y = 3 \qquad \mu(x, y) = 1 - x + y^2$.

8. $D: y=-x,\ y=-7x,\ y=-5$ $\mu(x,y)=6-2xy$.

9. $D: y=2x,\ y=4x,\ x=5$ $\mu(x,y)=3+x^2+2y$.

10. $D: y=3x,\ y=6x,\ x=-2$ $\mu(x,y)=3-x-3y$.

11. $D: y=4,\ y=9x,\ y=1$ $\mu(x,y)=2+x+3y^2$.

12. $D: y=x,\ y=3x,\ y=-4$ $\mu(x,y)=4+6x^2-y$.

13. $D: y=-2x,\ y=-3x,\ x=5$ $\mu(x,y)=1-5xy$.

14. $D: y=-7x,\ y=-10x,\ x=-4$ $\mu(x,y)=7-2x+7y$.

15. $D: y=-12x,\ y=-14x,\ y=10$ $\mu(x,y)=1+x^2+y$.

16. $D: y=-2x,\ y=-9x,\ y=-1$ $\mu(x,y)=x-8xy$.

17. $D: y=8x,\ y=13x,\ x=5$ $\mu(x,y)=x+y+4xy$.

18. $D: y=x,\ y=11x,\ x=-6$ $\mu(x,y)=3+3x^2-2y$.

19. $D: y=10x,\ y=20x,\ y=8$ $\mu(x,y)=11+20x^2y$.

20. $D: y=x,\ y=3x,\ y=-12$ $\mu(x,y)=7-x^2y$.

21. $D: y=-14x,\ y=-16x,\ x=6$ $\mu(x,y)=4+y^2+2x$.

22. $D: y=-x,\ y=-2x,\ x=-12$ $\mu(x,y)=16+6x^2+12y$.

23. $D: y=-9x,\ y=-12x,\ y=36$ $\mu(x,y)=12-9xy$.

24. $D: y=-9x,\ y=-11x,\ y=-10$ $\mu(x,y)=1+6y^2+3x$.

25. $D: y=4x,\ y=10x,\ x=24$ $\mu(x,y)=7+3x+5y$.

26. $D: y=5x,\ y=10x,\ x=-2$ $\mu(x,y)=2-x+y^2$.

27. $D: y=4x,\ y=7x,\ y=9$ $\mu(x,y)=11+12xy+x$.

28. $D: y=x,\ y=3x,\ y=-9$ $\mu(x,y)=8+6xy+y^2$.

29. $D: y=-2x,\ y=-4x,\ x=1$ $\qquad \mu(x,y)=5+6x^2+3y^2$.

30. $D: y=-x,\ y=-2x,\ x=-4$ $\qquad \mu(x,y)=10-24xy$.

Задание 7. Вычислить двойной интеграл по заданной области D с помощью перехода к полярной системе координат.

1. $\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge x,\ x\ge 0.$

2. $\iint\limits_D \frac{x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\qquad D:\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge x,\ x\le 0.$

3. $\iint\limits_D \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 25,\ y\ge \sqrt{3}x,\ y\ge 0.$

4. $\iint\limits_D \frac{4x+3y}{x^2+y^2}dxdy,$ $\qquad D:\ 1\le x^2+y^2\le 16,\ y\le \sqrt{3}x,\ y\ge x.$

5. $\iint\limits_D \frac{2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\qquad D:\ 16\le x^2+y^2\le 25,\ y\ge x,\ y\le \sqrt{3}x.$

6. $\iint\limits_D \frac{-2x+6y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 9,\ y\le x,\ x\ge 0.$

7. $\iint\limits_D \frac{3x+y}{x^2+y^2}dxdy,$ $\qquad D:\ 1\le x^2+y^2\le 5,\ y\ge x,\ y\le 0.$

8. $\iint\limits_D \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 16,\ y\ge \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y\ge 0.$

9. $\iint\limits_D \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\qquad D:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y\le \sqrt{3}x.$

10. $\iint\limits_D \frac{x+5y}{x^2+y^2}dxdy,$ $\qquad D:\ 25\le x^2+y^2\le 49,\ y\ge x,\ x\ge 0.$

11. $\iint\limits_D \frac{-y}{4\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 36,\ y\le x,\ x\le 0.$

12. $\iint\limits_D \frac{3x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\qquad D:\ 1\le x^2+y^2\le 3,\ y\ge x,\ y\ge 0.$

13. $\iint\limits_D \frac{x-5y}{x^2+y^2}dxdy,\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 49,\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

14. $\iint\limits_D \frac{7x+y}{3\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 12,\ y\ge x,\ y\le \sqrt{3}x.$

15. $\iint\limits_D (x+y)dxdy,\qquad D:\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge x,\ y\ge 0.$

16. $\iint\limits_D \frac{5x-y}{x^2+y^2}dxdy,\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 18,\ y\le \sqrt{3}x,\ x\ge 0.$

17. $\iint\limits_D (4x+3y)dxdy,\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 25,\ y\le 0,\ x\ge 0.$

18. $\iint\limits_D \frac{-x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\qquad D:\ 2\le x^2+y^2\le 12,\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

19. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\qquad D:\ 1\le x^2+y^2\le 25,\ y\ge x,\ y\le \frac{1}{\sqrt{3}}x.$

20. $\iint\limits_D 2y\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 64,\ y\ge \sqrt{3}x,\ y\le x.$

21. $\iint\limits_D (x+6y)\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\quad D:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\le 0,\ x\le 0.$

22. $\iint\limits_D \frac{7x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\qquad D:\ 2\le x^2+y^2\le 8,\ y\ge x,\ x\ge 0.$

23. $\iint\limits_D \frac{4x+6y}{x^2+y^2}dxdy,\qquad D:\ 36\le x^2+y^2\le 64,\ y\ge x,\ y\ge \frac{1}{\sqrt{3}}x.$

24. $\iint\limits_D 3x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\qquad D:\ 16\le x^2+y^2\le 49,\ y\le x,\ x\le 0.$

25. $\iint\limits_D \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 36,\ y\ge x,\ y\ge -x.$

26. $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\qquad D:\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge x,\ y\ge -\frac{1}{\sqrt{3}}x.$

27. $\iint\limits_D \dfrac{-3y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\qquad D:\ 4\le x^2+y^2\le 9,\ y\le x,\ y\ge -\sqrt{3}x.$

28. $\iint\limits_D \dfrac{-2x-3y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\qquad D:\ 1\le x^2+y^2\le 16,\ y\ge -x,\ x\ge 0.$

29. $\iint\limits_D (7x-y)\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ D:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\le -x,\ x\ge 0.$

30. $\iint\limits_D (3x+5y)\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ D:\ 4\le x^2+y^2\le 25,\ y\ge x,\ y\le -\frac{1}{\sqrt{3}}x.$

Задание 8. Найти площадь фигуры D, ограниченной заданными неравенствами.

1. $D: 4x\le x^2+y^2\le 6x,\ y\le x$.
2. $D: -2x\le x^2+y^2\le -4x,\ y\le x$.
3. $D: 4y\le x^2+y^2\le 6y,\ y\le x$.
4. $D: -2y\le x^2+y^2\le -4y,\ y\le x$.
5. $D: 4x\le x^2+y^2\le 8x,\ y\ge x$.
6. $D: -6x\le x^2+y^2\le -8x,\ y\ge x$.
7. $D: 4y\le x^2+y^2\le 8y,\ y\ge x$.
8. $D: -6y\le x^2+y^2\le -8y,\ y\ge x$.
9. $D: 8x\le x^2+y^2\le 10x,\ -x\le y\le \sqrt{3}x$.
10. $D: -6x\le x^2+y^2\le -8x,\ \sqrt{3}x\le y\le -x$.

11. $D: 8y \le x^2 + y^2 \le 10y,\ y \ge \sqrt{3}x,\ y \ge -x$.

12. $D: -6y \le x^2 + y^2 \le -8y,\ y \le -x,\ y \le \sqrt{3}x$.

13. $D: 10x \le x^2 + y^2 \le 12x,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$.

14. $D: -8x \le x^2 + y^2 \le -10x,\ \sqrt{3}x \le y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

15. $D: 10y \le x^2 + y^2 \le 12y,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$.

16. $D: -8y \le x^2 + y^2 \le -10y,\ \sqrt{3}x \le y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

17. $D: 12x \le x^2 + y^2 \le 14x,\ -\sqrt{3}x \le y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

18. $D: -10x \le x^2 + y^2 \le -12x,\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le -\sqrt{3}x$.

19. $D: 12x \le x^2 + y^2 \le 14x,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$.

20. $D: -10y \le x^2 + y^2 \le -12y,\ -\sqrt{3}x \le y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

21. $D: 14x \le x^2 + y^2 \le 16x,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

22. $D: -12x \le x^2 + y^2 \le -14x,\ y \le \sqrt{3}x$.

23. $D: 14y \le x^2 + y^2 \le 16y,\ y \le \sqrt{3}x$.

24. $D: -12y \le x^2 + y^2 \le -14y,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

25. $D: 16x \le x^2 + y^2 \le 18x,\ y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

26. $D: -14x \le x^2 + y^2 \le -16x,\ y \ge -\sqrt{3}x$.

27. $D: 16y \le x^2 + y^2 \le 18y,\ y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

28. $D: -14y \le x^2 + y^2 \le -16y,\ y \ge -\sqrt{3}x$.

29. $D: 10x \le x^2 + y^2 \le 20x,\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x$.

30. $D: 10y \le x^2 + y^2 \le 20y,\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y,\ y \ge \sqrt{3}x$.

Задание 9. Вычислить тройной интеграл, если тело T ограничено заданными поверхностями.

1. $\iiint\limits_T \left(y^2 - 3z\right) dxdydz,$

   $T:\ z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 1,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

2. $\iiint\limits_T \left(xz + y\right) dxdydz,$

   $T:\ z = 2x^2 + y^2,\ \ x + y = 1,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

3. $\iiint\limits_T \left(yz + z\right) dxdydz,$

   $T:\ z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 2,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

4. $\iiint\limits_T \left(2y^2 - z\right) dxdydz,$

   $T:\ z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 2,\quad x = 1,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

5. $\iiint\limits_T \left(xy + z\right) dxdydz,$

   $T:\ z = x^2 + 2y^2,\ \ x + y = 1,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

6. $\iiint\limits_T (xz - 3yz)\,dxdydz,$

$T:\ z = 3x^2 + 2y^2,\ \ x + y = 2,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

7. $\iiint\limits_T (xy + xz)\,dxdydz,$

$T:\ z = 3x^2 + y^2,\ \ x + y = 2,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

8. $\iiint\limits_T \left(xz + y^2\right)dxdydz,$

$T:\ z = x^2 + 3y^2,\ \ x + y = 1,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

9. $\iiint\limits_T \left(xz + 4y^2\right)dxdydz,$

$T:\ z = 4x^2 + y^2,\ \ x + y = 2,\quad x = 1,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

10. $\iiint\limits_T (x - xz)\,dxdydz,$

$T:\ z = x^2 + y^2,\ \ 2x + y = 1,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

11. $\iiint\limits_T \left(x^2 - 3yz\right)dxdydz,$

$T:\ z = x^2 + 3y^2,\ \ 3x + y = 3,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

12. $\iiint\limits_T \left(x^2 + 3xz\right)dxdydz,$

$T:\ z = 2x^2 + y^2,\ \ x + 2y = 1,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

13. $\iiint\limits_T \left(2xz + x^2\right)dxdydz,$

$T:\ z = 2x^2 + 4y^2,\ \ x + y = 1,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

14. $\iiint\limits_T \left(2y^2 + 3z\right)dxdydz,$

$T:\ z = 3x^2 + 2y^2,\ \ x + y = 1,\quad x = -1,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

15. $\iiint\limits_T \left(3y^2 - 2z\right)dxdydz,$

$T:\ z = 4x^2 + 2y^2,\ \ x + y = 2,\quad x = -1,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

16. $\iiint\limits_T \left(xz + xy^2\right) dxdydz,$

$T:\ z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 3,\quad x = 2,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

17. $\iiint\limits_T \left(y^2 + z\right) dxdydz,$

$T:\ z = 4x^2 + y^2,\ \ x + y = 3,\quad x = 1,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

18. $\iiint\limits_T \left(x^2 z + y^2\right) dxdydz,$

$T:\ z = x^2 + 2y^2,\ \ x + y = 3,\quad x = 0,\ \ y = 1,\ \ z = 0.$

19. $\iiint\limits_T \left(xz + 3y^2\right) dxdydz,$

$T:\ z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 3,\quad x = 2,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

20. $\iiint\limits_T \left(xy - 5z\right) dxdydz,$

$T:\ z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 3,\quad x = 1,\ \ y = 1,\ \ z = 0.$

21. $\iiint\limits_T \left(x^3 z + y^2\right) dxdydz,$

$T:\ z = 3x^2 + y^2,\ \ x + y = 1,\quad x = 0,\ \ y = -1,\ \ z = 0.$

22. $\iiint\limits_T \left(x^3 z + z\right) dxdydz,$

$T:\ z = 4x^2 + 3y^2,\ \ x + y = 2,\quad x = 2,\ \ y = 1,\ \ z = 0.$

23. $\iiint\limits_T \left(3x^2 z + yz\right) dxdydz,$

$T:\ z = x^2 + z^2,\ \ x + y = 2,\quad x = 1,\ \ y = 2,\ \ z = 0.$

24. $\iiint\limits_T \left(x^2 + z\right) dxdydz,$

$T:\ z = 3x^2 + 5y^2,\ \ x + y = 3,\quad x = 1,\ \ y = 1,\ \ z = 0.$

25. $\iiint\limits_T \left(5xz - z\right) dxdydz,$

$T:\ z = x^2 + 3y^2,\ \ x + y = 1,\quad x = 0,\ \ y = -1,\ \ z = 0.$

26. $\iiint\limits_T \left(yz+5y^2\right)dxdydz,$

$T:\ z=2x^2+3y^2,\ \ x+y=1,\quad x=0,\ \ y=0,\ \ z=0.$

27. $\iiint\limits_T \left(yz+3xz\right)dxdydz,$

$T:\ z=5x^2+2y^2,\ \ x+y=1,\quad x=-1,\ \ y=0,\ \ z=0.$

28. $\iiint\limits_T \left(4xz-z\right)dxdydz,$

$T:\ z=2x^2+5y^2,\ \ x+y=2,\quad x=1,\ \ y=0,\ \ z=0.$

29. $\iiint\limits_T \left(x^2z+y^2\right)dxdydz,$

$T:\ z=3x^2+5y^2,\ \ x+y=1,\quad x=-1,\ \ y=0,\ \ z=0.$

30. $\iiint\limits_T \left(y^2-2z\right)dxdydz,$

$T:\ z=2x^2+y^2,\ \ x+y=4,\quad x=3,\ \ y=0,\ \ z=0.$

Задание 10. Найти массу пирамиды T, ограниченной плоскостью P и координатными плоскостями, если задана ее плотность $\mu\left(x,y,z\right)$.

1. $P:2x+3y-4z=12$, $\qquad \mu\left(x,y,z\right)=x+2y-3z+1$.
2. $P:x-2y+5z=10$, $\qquad \mu\left(x,y,z\right)=3x-y+2z+2$.
3. $P:-3x+y+2z=6$, $\qquad \mu\left(x,y,z\right)=-5x+3y+5z+3$.
4. $P:2x-5y-2z=20$, $\qquad \mu\left(x,y,z\right)=4x-y-2z+1$.
5. $P:-x+6y-2z=6$, $\qquad \mu\left(x,y,z\right)=-4x+3y-z+2$.
6. $P:-5x-3y+2z=30$, $\qquad \mu\left(x,y,z\right)=-4x-5y+7z+3$.
7. $P:x+2y+3z=24$, $\qquad \mu\left(x,y,z\right)=6x+y+z+4$.

8. $P: x+y+3z=-6$, $\mu(x, y, z)=-4x-y-2z+5$.

9. $P: 3x+2y-5z=60$, $\mu(x, y, z)=7x+5y-z+1$.

10. $P: 7x-y+2z=28$, $\mu(x, y, z)=2x-3+z+2$.

11. $P: -5x+4y+z=40$, $\mu(x, y, z)=-2x+7y+2z+3$.

12. $P: 5x-8y-2z=40$, $\mu(x, y, z)=x-y-3z+1$.

13. $P: -3x+2y-7z=42$, $\mu(x, y, z)=-3x+2y-5z+2$.

14. $P: -x-6y+3z=24$, $\mu(x, y, z)=-7x-2y+3z+3$.

15. $P: 5x+y+6z=30$, $\mu(x, y, z)=x+5y+3z+4$.

16. $P: 4x+3y+2z=-48$, $\mu(x, y, z)=-x-2y-3z+5$.

17. $P: 7x+2y-z=14$, $\mu(x, y, z)=5x+3y-z+1$.

18. $P: 4x-3y+4z=12$, $\mu(x, y, z)=5x-4y+7z+2$.

19. $P: -x+6y+2z=18$, $\mu(x, y, z)=-3x+2y+4z+3$.

20. $P: 7x-2y-7z=28$, $\mu(x, y, z)=6x-7y-z+1$.

21. $P: -5x+y-4z=40$, $\mu(x, y, z)=-7x+4y-2z+2$.

22. $P: -x-8y+3z=24$, $\mu(x, y, z)=-3x-y+3z+3$.

23. $P: 7x+3y+2z=42$, $\mu(x, y, z)=2x+3y+7z+4$.

24. $P: 4x+2y+4z=-8$, $\mu(x, y, z)=-5x-3y-z+5$.

25. $P: x+5y-z=20$, $\mu(x, y, z)=6x+y-7z+1$.

26. $P: 8x-4y+2z=16$, $\mu(x, y, z)=x-8y+z+2$.

27. $P: -5x+5y+z=10$, $\mu(x, y, z)=-2x+y+7z+3$.

28. $P: 7x-2y-7z=28$, $\mu(x, y, z)=9x-2y-3z+1$.

29. $P: -4x+3y-5z=60$, $\mu(x, y, z)=-x+7y-8z+2$.

30. $P: -4x-2y+7z=28$, $\mu(x, y, z)=-5x-2y+6z+3$.

Задание 11. Найти объём тела T, заданного неравенствами, используя геометрический смысл тройного интеграла, с помощью перехода к ЦСК.

1. $x^2+y^2+z^2\le 16,\quad x^2+y^2\le 9,\quad z\ge 1.$
2. $z\le x^2+y^2+3,\quad x^2+y^2\le 1,\quad z\ge 2.$
3. $z\le 5-x^2-y^2,\quad x^2+y^2\le 4,\quad z\ge 1.$
4. $z\le \sqrt{x^2+y^2}+1,\quad x^2+y^2\le 2,\quad z\ge 0.$
5. $x^2+y^2+z^2\le 4,\quad x^2+y^2\le 1,\quad z\ge 0.$
6. $z\le 4-\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\le 1,\quad z\ge 0.$
7. $z\le x^2+y^2+5,\quad x^2+y^2\le 4,\quad z\ge 3.$
8. $z\le 7-x^2-y^2,\quad x^2+y^2\le 9,\quad z\ge 2.$
9. $z\le \sqrt{x^2+y^2}+5,\quad x^2+y^2\le 4,\quad z\ge 2.$
10. $x^2+y^2+z^2\le 9,\quad x^2+y^2\le 4,\quad z\ge 2.$
11. $z\le 5-\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\le 4,\quad z\ge -1.$
12. $z\le \sqrt{16-x^2-y^2},\quad x^2+y^2\le 9,\quad z\ge 0.$
13. $z\ge -\sqrt{16-x^2-y^2},\quad x^2+y^2\le 9,\quad z\le 1.$
14. $z\le x^2+y^2,\quad x^2+y^2\le 9,\quad z\ge -1.$
15. $x^2+y^2+z^2\le 25,\quad x^2+y^2\le 4,\quad z\ge 3.$
16. $z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\quad x^2+y^2\le 1,\quad z\ge -1.$
17. $z\le 6-x^2-y^2,\quad x^2+y^2\le 9,\quad z\ge -1.$
18. $z\le \sqrt{x^2+y^2}+6,\quad x^2+y^2\le 9,\quad z\ge 3.$
19. $z\le 7-\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\le 9,\quad z\ge 1.$

20. $z \le x^2 + y^2 + 1, \quad x^2 + y^2 \le 2, \quad z \ge 0.$

21. $z \ge -\sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 1, \quad z \le -1.$

22. $z \le 6 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 1, \quad z \ge 3.$

23. $z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 2, \quad z \ge 2.$

24. $z \le \sqrt{x^2 + y^2} + 1, \quad x^2 + y^2 \le 3, \quad z \ge -1.$

25. $z \ge -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 1, \quad z \le 0.$

26. $x^2 + y^2 + z^2 \le 9, \quad x^2 + y^2 \le 3, \quad z \ge 1.$

27. $z \le x^2 + y^2 + 1, \quad x^2 + y^2 \le 3, \quad z \ge 0.$

28. $z \le 4 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \le 2, \quad z \ge 1.$

29. $z \le \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 9, \quad z \ge 3.$

30. $z \le 2 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \le 1, \quad z \ge -2.$

Задание 12. Найти объем тела T, заданного следующими неравенствами, используя геометрический смысл тройного интеграла, с помощью перехода к ССК.

1. $T: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9, 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}, y \ge x.$

2. $T: 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16, z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}, y \le x.$

3. $T: 16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25, -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le 0, y \ge x.$

4. $T: 25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36, z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}, y \le x.$

5. $T: 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49, 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}, y \ge -\sqrt{3}x.$

6. $T: 49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, z \ge \sqrt{x^2 + y^2}, y \le -\sqrt{3}x.$

7. $T: 64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81, -\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 0,\ y \ge -\sqrt{3}x$.

8. $T: 81 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,\ z \ge -\sqrt{x^2 + y^2},\ y \le -\sqrt{3}x$.

9. $T: 100 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 121, -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}},\ y \ge x$.

10. $T: 121 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144, -\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{x^2 + y^2},\ y \le x$.

11. $T: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ 0 \le z \le \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)},\ y \ge 0,\ x \ge 0$.

12. $T: 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ z \ge \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)},\ y \ge 0,\ x \le 0$.

13. $T: 16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25, -\sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)} \le z \le 0,\ y \le 0,\ x \ge 0$.

14. $T: 25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36,\ z \ge -\sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)},\ y \le 0,\ x \le 0$.

15. $T: 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49,\ 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2},\ y \ge 0,\ x \ge 0$.

16. $T: 49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\ y \ge 0,\ x \le 0$.

17. $T: 64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81, -\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 0,\ y \le 0,\ x \ge 0$.

18. $T: 81 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,\ z \ge -\sqrt{x^2 + y^2},\ y \le 0,\ x \le 0$.

19. $T: 100 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 121,\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}},\ y \ge 0,\ x \ge 0$.

20. $T: 121 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,\ z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}},\ y \ge 0,\ x \le 0$.

21. $T: 144 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 169, -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le 0,\ y \le 0,\ x \ge 0$.

22. $T: 169 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 400,\ z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}},\ y \le 0,\ x \le 0$.

23. $T: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9, -\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, -x \le y \le x$.

24. $T: 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16, z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, 0 \le y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

25. $T: 16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25, z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le 0, -\sqrt{3}x \le y \le 0$.

26. $T: 25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36, z \ge -\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}, y \le -x$.

27. $T: 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49, z \le \sqrt{x^2+y^2}, y \ge -\sqrt{3}x, x \ge 0$.

28. $T: 49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, z \ge -\sqrt{x^2+y^2}, y \le -\sqrt{3}x, x \le 0$.

29. $T: 64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81, -\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)} \le z \le 0, y \ge x, x \le 0$.

30. $T: 81 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, z \ge -\sqrt{x^2+y^2}, y \le -x, x \ge 0$.

Задание 13. Вычислить криволинейный интеграл I рода.

1. $\int\limits_L (2x+5y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;5)$.
2. $\int\limits_L (3x-7y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(0;1)$ до точки $B(2;7)$.
3. $\int\limits_L (x+2y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;0)$ до точки $B(2;3)$.
4. $\int\limits_L (7x-4y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$.

5. $\int\limits_L (x+2y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;2)$ до точки $B(3;6)$.

6. $\int\limits_L (3x+8y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;4)$.

7. $\int\limits_L (x-6y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(2;1)$ до точки $B(3;5)$.

8. $\int\limits_L (4x+3y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-1;1)$ до точки $B(2;5)$.

9. $\int\limits_L (3y-5x)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;-1)$ до точки $B(2;3)$.

10. $\int\limits_L (3x-2y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-1;0)$ до точки $B(2;1)$.

11. $\int\limits_L (5x-3y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(0;-1)$ до точки $B(3;5)$.

12. $\int\limits_L (3x-y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-2;1)$ до точки $B(2;4)$.

13. $\int\limits_L (3y+8x)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;-3)$ до точки $B(2;0)$.

14. $\int\limits_L (5x-y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-1;-2)$ до точки $B(1;4)$.

15. $\int\limits_L (3y-8x)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;-3)$.

16. $\int\limits_L (3y-2x)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;0)$ до точки $B(3;-1)$.

17. $\int\limits_L (3x+4y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-1;-1)$ до точки $B(2;1)$.

18. $\int\limits_L (4x-2y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;-1)$ до точки $B(3;-2)$.

19. $\int\limits_L (6x+y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;-5)$.

20. $\int\limits_L (x+2y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-1;2)$ до точки $B(2;7)$.

21. $\int\limits_L (3y+2x)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;-1)$ до точки $B(2;-5)$.

22. $\int\limits_L (2y-5x)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-2;-3)$ до точки $B(1;3)$.

23. $\int\limits_L (5x+3y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-2;3)$ до точки $B(0;-2)$.

24. $\int\limits_L (3y-4x)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;1)$ до точки $B(4;-1)$.

25. $\int\limits_L (3x+4y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-4;1)$ до точки $B(1;3)$.

26. $\int\limits_L (3y+7x)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-3;-1)$ до точки $B(-2;2)$.

27. $\int\limits_L (9x-2y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;-1)$ до точки $B(3;7)$.

28. $\int\limits_L (3x-4y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;-3)$.

29. $\int\limits_L (3x+2y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-1;1)$ до точки $B(2;2)$.

30. $\int\limits_L (x+2y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(1;-2)$ до точки $B(3;3)$.

Задание 14. Вычислить криволинейный интеграл II рода $\int\limits_L P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(x_1,\ y_1)$ до точки $B(x_2,\ y_2)$.

1. $\int\limits_L (2x+5y)dx+(y-3x)dy$, $A(-1,3)$, $B(2,6)$.
2. $\int\limits_L (2y-x+1)dx+(3-x-y)dy$, $A(2,1)$, $B(6,3)$.
3. $\int\limits_L (x-4y+5)dx+(2y-x)dy$, $A(-5,1)$, $B(0,5)$.
4. $\int\limits_L (4y-3x)dx+(1+x-2y)dy$, $A(0,2)$, $B(4,7)$.
5. $\int\limits_L (2+x-3y)dx+(2-y+x)dy$, $A(5,5)$, $B(2,-7)$.
6. $\int\limits_L (4y-3x+1)dx+(3x+5y)dy$, $A(-4,-2)$, $B(0,8)$.
7. $\int\limits_L (3x+4y-5)dx+(2y-x)dy$, $A(6,1)$, $B(-2,3)$.
8. $\int\limits_L (7-x-y)dx+(2+y-4x)dy$, $A(-5,1)$, $B(3,8)$.
9. $\int\limits_L (11-x-3y)dx+(x+y)dy$, $A(-4,0)$, $B(6,6)$.
10. $\int\limits_L (4y-7x+1)dx+(x+5)dy$, $A(-4,4)$, $B(4,-4)$.
11. $\int\limits_L (2-3x+y)dx+(3-x-y)dy$, $A(5,2)$, $B(1,3)$.
12. $\int\limits_L (4y-5x-2)dx+(2x+y-3)dy$, $A(3,0)$, $B(1,-4)$.
13. $\int\limits_L (4x+y-3)dx+(2x+6y-1)dy$, $A(1,2)$, $B(4,5)$.
14. $\int\limits_L (y-7x+9)dx+(x-7y-9)dy$, $A(0,2)$, $B(-2,6)$.
15. $\int\limits_L (4x+2y)dx+(1-7y+x)dy$, $A(-4,1)$, $B(-1,2)$.

16. $\int\limits_L (x+y-3)\,dx+(2-y-4x)\,dy$, $A(4,3)$, $B(2,1)$.

17. $\int\limits_L (11-3x+3y)\,dx+(x+5y)\,dy$, $A(-5,4)$, $B(1,3)$.

18. $\int\limits_L (7+x+2y)\,dx+(x-3y+1)\,dy$, $A(1,-2)$, $B(2,4)$.

19. $\int\limits_L (7x-10y+1)\,dx+(x+y-2)\,dy$, $A(5,-2)$, $B(3,0)$.

20. $\int\limits_L (7y-x)\,dx+(2x-y+6)\,dy$, $A(4,-2)$, $B(3,3)$.

21. $\int\limits_L (6y-4x+2)\,dx+(x+y-1)\,dy$, $A(1,-3)$, $B(-2,7)$.

22. $\int\limits_L (y-x)\,dx+(2-y-3x)\,dy$, $A(-5,1)$, $B(4,-2)$.

23. $\int\limits_L (4-x+2y)\,dx+(6y-x+7)\,dy$, $A(1,-4)$, $B(-7,1)$.

24. $\int\limits_L (4-y+5x)\,dx+(x+2y-1)\,dy$, $A(7,-5)$, $B(1,-3)$.

25. $\int\limits_L (7x-2y)\,dx+(y+x)\,dy$, $A(5,-3)$, $B(3,11)$.

26. $\int\limits_L (8+y-x)\,dx+(2y+5x+3)\,dy$, $A(8,5)$, $B(4,10)$.

27. $\int\limits_L (11-x-3y)\,dx+(4x+y)\,dy$, $A(5,11)$, $B(8,-1)$.

28. $\int\limits_L (6-3x-y)\,dx+(4x+y)\,dy$, $A(-4,-2)$, $B(3,1)$.

29. $\int\limits_L (11-3y+x)\,dx+(4x+2y)\,dy$, $A(1,-4)$, $B(2,5)$.

30. $\int\limits_L (10+y+2x)\,dx+(x-2y)\,dy$, $A(0,-2)$, $B(2,4)$.

Задание 15. Вычислить криволинейный интеграл II рода (непосредственно и по формуле Грина).

1. $\oint\limits_L \left(1-x^2\right)dx+2xydy,$ где $L:\quad y=x,\quad y=2,\quad x=0.$
2. $\oint\limits_L xydx+\left(3+x^2\right)dy,$ где $L:\quad y=2x,\quad y=4,\quad x=0.$
3. $\oint\limits_L \left(1+y^2\right)dx+2xdy,$ где $L:\quad y=x,\quad y=0,\quad x=3.$
4. $\oint\limits_L \left(1+3x^2\right)dx+2x^2dy,$ где $L:\quad y=3x,\quad y=6,\quad x=0.$
5. $\oint\limits_L \left(1-4x^2\right)dx+2\left(y+1\right)xdy,$ где $L: y=3x,\ y=0,\ x=2.$
6. $\oint\limits_L \left(1+2y^2\right)dx+2xydy,$ где $L:\quad y=x,\quad y=0,\quad x=4.$
7. $\oint\limits_L \left(1-7x^2\right)dx+3xydy,$ где $L:\quad y=2x,\quad y=2,\quad x=0.$
8. $\oint\limits_L \left(1-2y^2\right)dx+3xydy,$ где $L:\quad y=\dfrac{x}{2},\quad y=1,\quad x=0.$
9. $\oint\limits_L \left(y^2-x^2\right)dx+xydy,$ где $L:\quad y=x,\quad y=5,\quad x=0.$
10. $\oint\limits_L \left(2y^2-3x^2\right)dx+6xydy,$ где $L:\quad y=4x,\quad y=0,\quad x=1.$
11. $\oint\limits_L xydx+2\left(1-x^2\right)dy,$ где $L:\quad y=\dfrac{x}{3},\quad y=1,\quad x=0.$
12. $\oint\limits_L 3y^2dx+2\left(1-y^2\right)dy,$ где $L:\quad y=3x,\quad y=0,\quad x=1.$
13. $\oint\limits_L \left(y^2-x^2\right)dx+4xydy,$ где $L:\quad y=x,\quad y=0,\quad x=-1.$
14. $\oint\limits_L \left(5-x^2\right)ydx+2xdy,$ где $L:\quad y=2x,\quad y=-2,\quad x=0.$
15. $\oint\limits_L 4xydx+\left(1-7x^2\right)dy,$ где $L:\quad y=-x,\quad y=2,\quad x=0.$

16. $\oint\limits_L \left(y-x^2\right)dx+xydy,$ где $L:\quad y=-2x,\quad y=0,\quad x=2.$

17. $\oint\limits_L \left(y+x\right)dx+xydy,$ где $L:\quad y=4x,\quad y=2,\quad x=0.$

18. $\oint\limits_L \left(y-5x\right)dx+3xydy,$ где $L:\quad y=-3x,\quad y=0,\quad x=-1.$

19. $\oint\limits_L \left(y+x^3\right)dx+2x^2ydy,$ где $L:\quad y=-x,\quad y=0,\quad x=-3.$

20. $\oint\limits_L \left(1+2x^2\right)dx+8xydy,$ где $L:\quad y=-2x,\quad y=0,\quad x=2.$

21. $\oint\limits_L \left(3y-4x^2\right)dx+5xydy,$ где $L:\quad y=-\dfrac{x}{2},\quad y=2,\quad x=0.$

22. $\oint\limits_L \left(y^2-x^2\right)dx-4xydy,$ где $L:\quad y=-4x,\quad y=0,\quad x=1.$

23. $\oint\limits_L 3xydx+5xdy,$ где $L:\quad y=\dfrac{x}{4},\quad y=1,\quad x=0.$

24. $\oint\limits_L \left(y+7x^2\right)dx+3xy^2dy,$ где $L:\quad y=-\dfrac{x}{3},\quad y=1,\quad x=0.$

25. $\oint\limits_L yx^2dx+x^3dy,$ где $L:\quad y=-\dfrac{x}{3},\quad y=-1,\quad x=0.$

26. $\oint\limits_L xydx-x^2dy,$ где $L:\quad y=-\dfrac{x}{2},\quad y=0,\quad x=-3.$

27. $\oint\limits_L \left(y-x^4\right)dx+5xydy,$ где $L:\quad y=x,\quad y=-4,\quad x=0.$

28. $\oint\limits_L \left(7y-x^3\right)dx+2xydy,$ где $L:\quad y=5x,\quad y=0,\quad x=-2.$

29. $\oint\limits_L \left(3y-x^3\right)dx-xydy,$ где $L:\quad y=-\dfrac{x}{4},\quad y=0,\quad x=-4.$

30. $\oint\limits_L \left(1+8x^2\right)dx-3xydy,$ где $L:\quad y=-2x,\quad y=0,\quad x=3.$

Задание 16. Вычислить криволинейный интеграл I рода по части L дуги окружности, ограниченной неравенством.

1. $\int\limits_L (3x+4y)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=4x, \quad y \ge -x.$

2. $\int\limits_L (2x-y)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=6y, \quad y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

3. $\int\limits_L (x+3y)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=-2x, \quad y \ge x.$

4. $\int\limits_L (x-4y)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=-4y, \quad y \le x.$

5. $\int\limits_L (3xy-y^2)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=1, \quad -x \le y \le 0.$

6. $\int\limits_L (3x+2y)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=8x, \quad y \ge \sqrt{3}x.$

7. $\int\limits_L (y-3x)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=10y, \quad y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

8. $\int\limits_L (2x+5y)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=-6x, \quad y \ge -x.$

9. $\int\limits_L (2y-5x)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=4y, \quad y \le x.$

10. $\int\limits_L (xy+2y^2)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=9, \quad 0 \le y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

11. $\int\limits_L (5x+3y)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=12x, \quad y \le -x.$

12. $\int\limits_L (y-4x)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=8y, \quad y \ge \sqrt{3}x.$

13. $\int\limits_L (3x+y)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=2y, \quad y \le x.$

14. $\int\limits_L (2x-y)\,dl, \quad L:\ x^2+y^2=-8x, \quad y \ge -x.$

15. $\int\limits_L \left(3xy + x^2\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \le y \le -x.$

16. $\int\limits_L \left(4x + 3y\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = -10x, \quad y \ge -x.$

17. $\int\limits_L \left(3y - 2x\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = 12y, \quad y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

18. $\int\limits_L \left(x + 2y\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = -4x, \quad y \ge -\sqrt{3}x.$

19. $\int\limits_L \left(y - x\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = -10y, \quad y \le x.$

20. $\int\limits_L \left(2x^2 + xy\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = 25, \quad x \le y \le -x.$

21. $\int\limits_L \left(3x - 4y\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = 2x, \quad y \ge \sqrt{3}x.$

22. $\int\limits_L \left(x - 5y\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = -6y, \quad y \le x.$

23. $\int\limits_L \left(4x + y\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = 12x, \quad y \ge -x.$

24. $\int\limits_L \left(3x^2 + 2xy\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = 16, \quad \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x.$

25. $\int\limits_L \left(y - 3x\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = -12x, \quad y \ge -x.$

26. $\int\limits_L \left(2x + y\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = -8y, \quad y \le x.$

27. $\int\limits_L \left(3y - 2x\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = 6x, \quad y \ge \sqrt{3}x.$

28. $\int\limits_L \left(2x + 7y\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = -2y, \quad y \ge x.$

29. $\int\limits_L \left(5y - 2x\right) dl, \quad L:\ x^2 + y^2 = 10x, \quad y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

30. $\int\limits_L \left(2xy+y^2\right)dl, \quad L: \ x^2+y^2=36, \quad -x \le y \le \sqrt{3}x.$

Задание 17. Вычислить криволинейный интеграл II рода по части L дуги эллипса, заданного в пространстве параметрически системой функций.

1. $\int\limits_L 3ydx+\left(z+2x\right)dy+2zdz,$

$$L: \begin{cases} x=4\cos t, \\ y=4\sin t, \\ z=\cos t, \end{cases} \quad t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

2. $\int\limits_L xdx-\left(3y+z\right)dy+(2x-z)dz,$

$$L: \begin{cases} x=\cos t, \\ y=\cos t+3\sin t, \\ z=\sin t, \end{cases} \quad t\in\left[0, \pi\right].$$

3. $\int\limits_L 3zdx+\left(x+y\right)dy+(z-x)dz,$

$$L: \begin{cases} x=3\cos t, \\ y=3\sin t, \\ z=2\sin t, \end{cases} \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

4. $\int\limits_L (2x+z)dx+2ydy-zdz,$

$$L: \begin{cases} x=5\cos t, \\ y=5\sin t, \\ z=\sin t, \end{cases} \quad t\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

5. $\int\limits_L 3xdx+(x+2y)dy+zdz,$

$$L:\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = \sin t - 2\cos t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

6. $\int\limits_L 2ydx + 3xdy + (3y - 2z)dz,$

$$L:\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

7. $\int\limits_L zdx + (2x + z)dy + 2ydz,$

$$L:\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin t, \\ z = \cos t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

8. $\int\limits_L (x + z)dx + (2y - z)dy + zdz,$

$$L:\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 2\cos t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

9. $\int\limits_L (2y + 3z)dx + 3xdy - 2ydz,$

$$L:\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 3\cos t - \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

10. $\int\limits_L (x + 2y)dx + zdy - (y + z)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 5\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

11. $\int\limits_L (3x - z)dx + 2xdy + ydz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t + \cos t, \\ z = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

12. $\int\limits_L (2x + y)dx + ydy + (2x + z)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 4\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

13. $\int\limits_L zdx - (x + y)dy + (x + z)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 8\cos t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

14. $\int\limits_L (2x + 3y)dx + xdy - 3zdz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 3\cos t + 2\sin t, \\ y = \sin t, \\ z = \cos t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

15. $\int\limits_L (3z - y)dx + (y - 3x)dy + xdz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

16. $\int\limits_L (2z-3x)dx + 3ydy - (x+y)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x = \cos t, \\ y = -3\sin t, \\ z = \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

17. $\int\limits_L ydx + 5xdy + (z-3x)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \\ z = 5\cos t + \sin t, \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

18. $\int\limits_L 2xdx - (x+z)dy + (y-x)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 2\cos t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

19. $\int\limits_L (2x+y)dx + zdy - xdz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 4\cos t + 3\sin t, \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

20. $\int\limits_L (z-x)dx - 3ydy + 2zdz,$

$$L:\ \begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t-\cos t, \\ z=\sin t, \end{cases} \quad t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].$$

21. $\int\limits_L 3ydx+(x+y)dy+(z-x)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x=4\cos t, \\ y=4\sin t, \\ z=-8\sin t, \end{cases} \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

22. $\int\limits_L 2zdx+(2x+y)dy-ydz,$

$$L:\ \begin{cases} x=5\cos t, \\ y=5\sin t, \\ z=\cos t+\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,\pi].$$

23. $\int\limits_L (3x-z)dx+ydy+(2z-y)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=-6\sin t, \end{cases} \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

24. $\int\limits_L 3zdx+(x+2y)dy+2xdz,$

$$L:\ \begin{cases} x=2\cos t-3\sin t, \\ y=\sin t, \\ z=\cos t, \end{cases} \quad t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].$$

25. $\int\limits_L (2y-x)dx-2zdy+3ydz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 6\cos t + \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

26. $\int\limits_L (x-y)dx + (2y+3z)dy + xdz,$

$$L:\ \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 5\cos t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

27. $\int\limits_L (2y+z)dx + xdy - 3zdz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 4\cos t - 2\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

28. $\int\limits_L 2xdx - (x+2y)dy + 2zdz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \\ z = 3\sin t + \cos t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

29. $\int\limits_L zdx + (2x+z)dy + (z-y)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 5\sin t, \\ z = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

30. $\int\limits_L (y+3z)dx + 3ydy + (x+2z)dz,$

$$L:\ \begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \qquad t \in [0, \pi]. \\ z = -2\sin t, \end{cases}$$

Задание 18. Вычислить поверхностный интеграл I рода, где S - часть плоскости P, ограниченная координатными плоскостями.

1. $\iint\limits_S (2z - 3x + y)ds, \qquad P:\ x - y - z = 2.$

2. $\iint\limits_S (2x + y - 3z)ds, \qquad P:\ 2x + y + z = 2.$

3. $\iint\limits_S (x + y + 3z)ds, \qquad P:\ x - 2y + 2z = 2.$

4. $\iint\limits_S (3y - x + 2z)ds, \qquad P:\ x + y + z = 4.$

5. $\iint\limits_S (z - x - 2y)ds, \qquad P:\ 3x - y + z = 6.$

6. $\iint\limits_S (2x + y + 3z)ds, \qquad P:\ x - y + z = 3.$

7. $\iint\limits_S (2x - 2y - z)ds, \qquad P:\ 2x + y + 2z = 4.$

8. $\iint\limits_S (3x + y + 2z)ds, \qquad P:\ x - 2y - 2z = 4.$

9. $\iint\limits_S (2y - 2x - 3z)ds, \qquad P:\ x + 2y + z = 6.$

10. $\iint\limits_S (2x + 2y - z)ds, \qquad P:\ 2x - 3y + z = 6.$

11. $\iint\limits_S (3x + 2y - 2z)ds, \qquad P:\ x + y - 3z = 6.$

12. $\iint\limits_{S}(2x-2y+z)ds,\qquad P:\ 2x+y-2z=4.$

13. $\iint\limits_{S}(3z-2x-2y)ds,\qquad P:\ 2x+2y+z=4.$

14. $\iint\limits_{S}(x+2y-z)ds,\qquad P:\ 2x-y+z=2.$

15. $\iint\limits_{S}(3x+y-z)ds,\qquad P:\ x+y+z=3.$

16. $\iint\limits_{S}(y-3x+z)ds,\qquad P:\ 3x+y-z=3.$

17. $\iint\limits_{S}(x+2y-2z)ds,\qquad P:\ 4x+2y+z=4.$

18. $\iint\limits_{S}(3x+2y+2z)ds,\qquad P:\ 2x-y+3z=6.$

19. $\iint\limits_{S}(2z-x-y)ds,\qquad P:\ 3x+3y+z=3.$

20. $\iint\limits_{S}(3x-2y+3z)ds,\qquad P:\ x-y-z=5.$

21. $\iint\limits_{S}(2y-3x-z)ds,\qquad P:\ x+y+z=6.$

22. $\iint\limits_{S}(x+2y+2z)ds,\qquad P:\ 3x-2y+z=6.$

23. $\iint\limits_{S}(3x-y+2z)ds,\qquad P:\ x+y+3z=3.$

24. $\iint\limits_{S}(x+3y-z)ds,\qquad P:\ 2x+4y+z=4.$

25. $\iint\limits_{S}(x+3y+2z)ds,\qquad P:\ x+3y-z=6.$

26. $\iint\limits_{S}(3z-x-2y)ds,\qquad P:\ x+y+z=2.$

27. $\iint\limits_S (x+2y-z)ds,\qquad P:\ x-y+2z=4.$

28. $\iint\limits_S (z-3x+y)ds,\qquad P:\ 2x-3y-3z=6.$

29. $\iint\limits_S (2x+y-2z)ds,\qquad P:\ 3x+3y+z=6.$

30. $\iint\limits_S (y-3x+z)ds,\qquad P:\ x-y-2z=2.$

Задание 19. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(x,y,z)=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$ через часть плоскости S, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz), двумя способами: 1) сведением к поверхностному интегралу I рода и 2) через сумму двойных интегралов.

1. $\overline{a}(x,y,z)=(3y+z)\overline{i}+2z\overline{j}+(3x-2y)\overline{k}$,

   $S:\ 3x+y+2z=6.$

2. $\overline{a}(x,y,z)=z\overline{i}+(2x+z)\overline{j}+(x+2y)\overline{k}$,

   $S:\ x+2y+z=4.$

3. $\overline{a}(x,y,z)=(x-3y)\overline{i}+3x\overline{j}+(y+3z)\overline{k}$,

   $S:\ x+3y+3z=3.$

4. $\overline{a}(x,y,z)=(y+2z)\overline{i}+(x-z)\overline{j}+2x\overline{k}$,

   $S:\ 2x+y+2z=4.$

5. $\overline{a}(x,y,z)=(2y+z)\overline{i}+(2y-x)\overline{j}+4z\overline{k}$,

   $S:\ x+2y+2z=2.$

6. $\overline{a}(x,y,z)=4x\overline{i}+(x+2z)\overline{j}+(x+2y)\overline{k}$,

   $S:\ 4x+y+z=4.$

7. $\bar{a}(x,y,z)=(2x+z)\bar{i}+2y\bar{j}+(z-x)\bar{k}$,
$S:\ 2x+2y+z=6.$

8. $\bar{a}(x,y,z)=(y-2z)\bar{i}+3x\bar{j}+(x+3y)\bar{k}$,
$S:\ 3x+y+2z=6.$

9. $\bar{a}(x,y,z)=2x\bar{i}+(3z-x)\bar{j}+(y+3z)\bar{k}$,
$S:\ x+y+3z=3.$

10. $\bar{a}(x,y,z)=(y+2z)\bar{i}+z\bar{j}+(4x+2y)\bar{k}$,
$S:\ 4x+2y+z=4.$

11. $\bar{a}(x,y,z)=3z\bar{i}+(2x+z)\bar{j}+(x-2y)\bar{k}$,
$S:\ x+2y+3z=6.$

12. $\bar{a}(x,y,z)=(3x+z)\bar{i}+y\bar{j}+(3x+2y)\bar{k}$,
$S:\ 3x+y+z=3.$

13. $\bar{a}(x,y,z)=(2y-z)\bar{i}+z\bar{j}+(2x+5y)\bar{k}$,
$S:\ 2x+y+z=2.$

14. $\bar{a}(x,y,z)=3y\bar{i}+(x+3z)\bar{j}+(3y+z)\bar{k}$,
$S:\ x+3y+z=3.$

15. $\bar{a}(x,y,z)=2x\bar{i}+(x+3y)\bar{j}+(y-2x)\bar{k}$,
$S:\ 2x+3y+z=6.$

16. $\bar{a}(x,y,z)=(3y-z)\bar{i}+4z\bar{j}+(3x+y)\bar{k}$,
$S:\ x+y+4z=4.$

17. $\bar{a}(x,y,z)=(3x+z)\bar{i}+(2y-z)\bar{j}+3y\bar{k}$,
$S:\ 3x+y+3z=3.$

18. $\bar{a}(x,y,z)=2x\bar{i}+(4y+z)\bar{j}+(2x+z)\bar{k}$,
$S:\ 2x+4y+z=4.$

19. $\overline{a}(x,y,z)=(3z-2y)\overline{i}+2y\overline{j}+(3x-5y)\overline{k}$,

$S:\ 3x+2y+z=6.$

20. $\overline{a}(x,y,z)=3z\overline{i}+(4x-2z)\overline{j}+(4x+y)\overline{k}$,

$S:\ 4x+y+2z=4.$

21. $\overline{a}(x,y,z)=(x+2z)\overline{i}+(x+3y)\overline{j}+x\overline{k}$,

$S:\ x+3y+2z=6.$

22. $\overline{a}(x,y,z)=(y+2z)\overline{i}+2x\overline{j}+(4x-3y)\overline{k}$,

$S:\ x+2y+2z=4.$

23. $\overline{a}(x,y,z)=y\overline{i}+(3z-x)\overline{j}+(x+3y)\overline{k}$,

$S:\ 2x+3y+2z=6.$

24. $\overline{a}(x,y,z)=(3y+z)\overline{i}+(4x+y)\overline{j}+4z\overline{k}$,

$S:\ 2x+y+4z=4.$

25. $\overline{a}(x,y,z)=(y-2z)\overline{i}+5x\overline{j}+(2y+z)\overline{k}$,

$S:\ x+2y+z=6.$

26. $\overline{a}(x,y,z)=(4y+z)\overline{i}+(x+3z)\overline{j}+3x\overline{k}$,

$S:\ 3x+3y+z=3.$

27. $\overline{a}(x,y,z)=4z\overline{i}+(4x+y)\overline{j}+(y-z)\overline{k}$,

$S:\ 4x+y+z=4.$

28. $\overline{a}(x,y,z)=(2x+y)\overline{i}+z\overline{j}+(x+2z)\overline{k}$,

$S:\ 2x+4y+z=4.$

29. $\overline{a}(x,y,z)=3y\overline{i}+(2x+z)\overline{j}+(z-2y)\overline{k}$,

$S:\ 2x+2y+z=2.$

30. $\overline{a}(x,y,z)=(x+3y)\overline{i}+(3y+2z)\overline{j}+4x\overline{k}$,

$S:\ x+3y+3z=6.$

Задание 20. Найти поток векторного поля $\overline{a}(x,y,z) = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя к замкнутой поверхности) по формуле Остроградского.

1. $\overline{a}(x,y,z) = (y^2 - 2xy)\overline{i} + (4y + 3xz)\overline{j} + (2yz + x^2)\overline{k}$,
   $S:\ x^2 + z^2 = 1,\ y = 1,\ y = 5,\ z \ge 0.$
2. $\overline{a}(x,y,z) = (3xy + x)\overline{i} + (x^2 - y^2)\overline{j} + (2z - yz)\overline{k}$,
   $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$
3. $\overline{a}(x,y,z) = (x^2 - yz)\overline{i} + (xy + 5y)\overline{j} + (z - 3xz)\overline{k}$,
   $S:\ x^2 = y^2 + z^2,\ x = 4.$
4. $\overline{a}(x,y,z) = (4xy + z^2)\overline{i} + (2y - 3y^2)\overline{j} + (2yz + z)\overline{k}$,
   $S:\ y = x,\ y = 2,\ z = 0,\ z = 2x.$
5. $\overline{a}(x,y,z) = (2x - xz)\overline{i} + (x^2 - yz)\overline{j} + (z^2 + 3z)\overline{k}$,
   $S:\ x^2 + y^2 = 25,\ z = -1,\ z = 3.$
6. $\overline{a}(x,y,z) = (yz + 3x)\overline{i} + (z^2 + 4y)\overline{j} + (xy - z)\overline{k}$,
   $S:\ y^2 = x^2 + z^2,\ y = 2,\ z \ge 0.$
7. $\overline{a}(x,y,z) = (z^2 - 2xz)\overline{i} + (4yz + y)\overline{j} + (y^2 - z^2)\overline{k}$,
   $S:\ x + y + 2z = 2,\ y = x,\ y = 0,\ z = 0.$
8. $\overline{a}(x,y,z) = (3x - xy)\overline{i} + (2y^2 + xz)\overline{j} + (z - 3yz)\overline{k}$,
   $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$
9. $\overline{a}(x,y,z) = (y^2 - x)\overline{i} + (xz + 3y)\overline{j} + (z + xy)\overline{k}$,
   $S:\ y^2 + z^2 = 9,\ x = -2,\ x = 0,\ y \ge 0.$
10. $\overline{a}(x,y,z) = (yz - x^2)\overline{i} + (xy + 2z)\overline{j} + (xz - 4z)\overline{k}$,
    $S:\ z^2 = 4(x^2 + y^2),\ z = -4.$
11. $\overline{a}(x,y,z) = (z^2 + 3x)\overline{i} + (2yz + y)\overline{j} + (2x - z^2)\overline{k}$,
    $S:\ y = x,\ y = 2x,\ x = 1,\ z = 0,\ z = 5.$
12. $\overline{a}(x,y,z) = (x + 5yz)\overline{i} + (3y - xz)\overline{j} + (4z + xy)\overline{k}$,

$S:\ x^2+y^2=2x,\ \ z=0,\ \ z=3.$

13. $\bar{a}(x,y,z)=(y^2-2xz)\bar{i}+(2y-x^2)\bar{j}+(y^2+z^2)\bar{k},$

$S:\ y+z=2,\ \ y=x,\ \ x=0,\ \ z=0.$

14. $\bar{a}(x,y,z)=(xz+3x)\bar{i}+(5y+yz)\bar{j}+(2z-z^2)\bar{k},$

$S:\ x^2+y^2+z^2=1,\ \ z\le 0,\ \ y\ge 0.$

15. $\bar{a}(x,y,z)=(3yz+2x)\bar{i}+(y-xz)\bar{j}+(2xy+3z)\bar{k},$

$S:\ x^2=y^2+z^2,\ \ x=-5,\ \ z\ge 0.$

16. $\bar{a}(x,y,z)=(4x+y^2)\bar{i}+(3y-z^2)\bar{j}+(z+2x^2)\bar{k},$

$S:\ x^2+z^2=16,\ \ y=-4,\ \ y=-1.$

17. $\bar{a}(x,y,z)=(3x^2+z)\bar{i}+(2y-4xy)\bar{j}+(y^2-2xz)\bar{k},$

$S:\ x+y+z=4,\ \ y=x,\ \ y=0,\ \ z=0.$

18. $\bar{a}(x,y,z)=(z^2-5x)\bar{i}+(xz+3y)\bar{j}+(x^2+3z)\bar{k},$

$S:\ x^2+y^2=4y,\ \ z=0,\ \ z=1.$

19. $\bar{a}(x,y,z)=(4xy+x)\bar{i}+(z^2-2y^2)\bar{j}+(3z-xy)\bar{k},$

$S:\ x^2+y^2+z^2=25,\ \ x\ge 0,\ \ z\le 0.$

20. $\bar{a}(x,y,z)=(z^2-7x)\bar{i}+(x^2+2y)\bar{j}+(2z-y^2)\bar{k},$

$S:\ z^2=9(x^2+y^2),\ \ z=9,\ \ x\ge 0.$

21. $\bar{a}(x,y,z)=(yz-x^2)\bar{i}+(xz+3y)\bar{j}+(x^2+2xz)\bar{k},$

$S:\ y^2+z^2=1,\ \ x=-3,\ \ x=2.$

22. $\bar{a}(x,y,z)=(3y^2+4x)\bar{i}+(z^2-2y)\bar{j}+(xy+4z)\bar{k},$

$S:\ z=y,\ \ y=3x,\ \ x=1,\ \ z=0.$

23. $\bar{a}(x,y,z)=(x-xy)\bar{i}+(x^2+y^2)\bar{j}+(z-yz)\bar{k},$

$S:\ x^2+y^2=-2x,\ \ z=0,\ \ z=1.$

24. $\bar{a}(x,y,z)=(5x+z^2)\bar{i}+(3y+xz)\bar{j}+(2z+x^2)\bar{k},$

$S:\ x^2+y^2+z^2=4,\ \ x\ge 0,\ \ z\ge 0.$

25. $\bar{a}(x,y,z)=(2x+3y^2)\bar{i}+(z^2-y^2)\bar{j}+(x+2yz)\bar{k},$

$S:\ y^2 = x^2 + z^2,\ \ y = -1.$

26. $\overline{a}(x,y,z) = (y^2 - 2x)\overline{i} + (z^2 - 3y)\overline{j} + (x^2 + 4z)\overline{k}$,

$S:\ x^2 + z^2 = 4,\ \ y = -5,\ \ y = -1.$

27. $\overline{a}(x,y,z) = (4x - xy)\overline{i} + (z^2 + x^2)\overline{j} + (5z + yz)\overline{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 36,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0.$

28. $\overline{a}(x,y,z) = (3xz + x)\overline{i} + (4y - yz)\overline{j} + (xy - z^2)\overline{k}$,

$S:\ x + y + z = 1,\ \ x + y - z = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0.$

29. $\overline{a}(x,y,z) = (y^2 + xz)\overline{i} + (3y + yz)\overline{j} + (x^2 - z^2)\overline{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = 9,\ \ z = 2,\ \ z = 3,\ \ y \ge 0.$

30. $\overline{a}(x,y,z) = (5x - 2xy)\overline{i} + (y + 2z^2)\overline{j} + (z + 2yz)\overline{k}$,

$S:\ z^2 = x^2 + y^2,\ \ z = 5.$

Задание 21. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(x,y,z) = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ вдоль замкнутой кривой L двумя способами: 1) непосредственно и 2) по формуле Стокса.

1. $\overline{a}(x,y,z) = (3y - z)\overline{i} + (2x + y)\overline{j} + (z - x)\overline{k}$,

   $L:\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ (z > 0).$

2. $\overline{a}(x,y,z) = (y + z)\overline{i} - (x + 2y)\overline{j} + (5x + z)\overline{k}$,

   $L:\ \ y = x^2 + z^2,\ \ x^2 + z^2 = 16.$

3. $\overline{a}(x,y,z) = (2x + y)\overline{i} + (3x + z)\overline{j} + (3y + z)\overline{k}$,

   $L:\ \ z^2 = x^2 + y^2,\ \ x^2 + y^2 = 1,\ \ (z < 0).$

4. $\overline{a}(x,y,z) = (x + 2z)\overline{i} + (z - 3y)\overline{j} - (x + y)\overline{k}$,

   $L:\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 10,\ \ y = 1.$

5. $\overline{a}(x,y,z) = (5x - y)\overline{i} + (x + 2z)\overline{j} + (3y - z)\overline{k}$,

   $L:\ \ x = y^2 + z^2 - 1,\ \ x = 7 - y^2 - z^2.$

6. $\overline{a}(x,y,z) = (x + 3z)\overline{i} - (x + 2y)\overline{j} + (3z - y)\overline{k}$,

   $L:\ \ z^2 = x^2 + y^2,\ \ z = 5.$

7. $\overline{a}(x,y,z)=(4x+z)\overline{i}+(3y-2z)\overline{j}+(x+2y)\overline{k}$,
$L:\quad x^2+y^2+z^2=2,\ x^2=y^2+z^2,\ (x>0).$

8. $\overline{a}(x,y,z)=(y-3z)\overline{i}-(x+y)\overline{j}-(2x+z)\overline{k}$,
$L:\quad y^2=x^2+z^2,\ x^2+z^2=4,\ (y<0).$

9. $\overline{a}(x,y,z)=(3x+z)\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(x+3z)\overline{k}$,
$L:\quad x^2=y^2+z^2,\ x=2.$

10. $\overline{a}(x,y,z)=(2y-z)\overline{i}+(2x+3z)\overline{j}+(x-2y)\overline{k}$,
$L:\quad x^2+y^2+z^2=2,\ x^2+z^2=1,\ (y<0).$

11. $\overline{a}(x,y,z)=(4x+y)\overline{i}+(2x-z)\overline{j}+(3z-y)\overline{k}$,
$L:\quad x^2+y^2=16,\ z^2=x^2+y^2,\ (z<0).$

12. $\overline{a}(x,y,z)=(x-y)\overline{i}+(3z+y)\overline{j}+(2x+z)\overline{k}$,
$L:\quad z=x^2+y^2,\ z=2-x^2-y^2.$

13. $\overline{a}(x,y,z)=(y+3z)\overline{i}-(2x+y)\overline{j}+(z-x)\overline{k}$,
$L:\quad y^2=x^2+z^2,\ y=3.$

14. $\overline{a}(x,y,z)=(x+2z)\overline{i}+(3y-x)\overline{j}+(y+4z)\overline{k}$,
$L:\quad x^2+y^2+z^2=8,\ z^2=x^2+y^2,\ (z>0).$

15. $\overline{a}(x,y,z)=(2x-3y)\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-2z)\overline{k}$,
$L:\quad x=y^2+z^2,\ y^2+z^2=1.$

16. $\overline{a}(x,y,z)=(4y-z)\overline{i}+(5x-2y)\overline{j}+(2x+z)\overline{k}$,
$L:\quad z^2=x^2+y^2,\ x^2+y^2=25,\ (z<0).$

17. $\overline{a}(x,y,z)=(x+3y)\overline{i}-(y+2z)\overline{j}-(x+z)\overline{k}$,
$L:\quad x^2+y^2+z^2=18,\ x^2+y^2=9,\ (z<0).$

18. $\overline{a}(x,y,z)=(2y-x)\overline{i}+(z-3x)\overline{j}+(2x+y)\overline{k}$,
$L:\quad y^2=x^2+z^2,\ y=4.$

19. $\overline{a}(x,y,z)=(4x+y)\overline{i}+(y-3z)\overline{j}+(x+3y)\overline{k}$,
$L:\quad z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=1.$

20. $\overline{a}(x,y,z)=(x-5y)\overline{i}+(z-2x)\overline{j}+(3y+z)\overline{k}$,
$L:\quad x^2+y^2+z^2=8,\ \ y^2+z^2=4,\ \ (x>0).$

21. $\overline{a}(x,y,z)=(2x+3y)\overline{i}+(2x+z)\overline{j}+(y-x)\overline{k}$,
$L:\quad z=10-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2=9.$

22. $\overline{a}(x,y,z)=(x+z)\overline{i}-(2y+3z)\overline{j}+(3x+2z)\overline{k}$,
$L:\quad x^2=y^2+z^2,\ \ x=5.$

23. $\overline{a}(x,y,z)=(x-2z)\overline{i}+(3y-x)\overline{j}+(x+4z)\overline{k}$,
$L:\quad x^2+y^2+z^2=10,\ \ y=3.$

24. $\overline{a}(x,y,z)=(5x+y)\overline{i}+(y+2z)\overline{j}+(x-3z)\overline{k}$,
$L:\quad z^2=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2=16,\ \ (z<0).$

25. $\overline{a}(x,y,z)=(z+y)\overline{i}-(x+y)\overline{j}+(x+3z)\overline{k}$,
$L:\quad z^2=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2+z^2=2,\ \ (z>0).$

26. $\overline{a}(x,y,z)=(4x+z)\overline{i}+(2y-x)\overline{j}+(y-z)\overline{k}$,
$L:\quad x^2=y^2+z^2,\ \ y^2+z^2=4,\ \ (x<0).$

27. $\overline{a}(x,y,z)=(x+3z)\overline{i}+(3y+2x)\overline{j}-(y+2z)\overline{k}$,
$L:\quad z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2=9.$

28. $\overline{a}(x,y,z)=(2x-z)\overline{i}-(x+2y)\overline{j}+(2x+z)\overline{k}$,
$L:\quad y^2=x^2+z^2,\ \ x^2+y^2+z^2=18,\ \ (y>0).$

29. $\overline{a}(x,y,z)=(2x-z)\overline{i}-(x+2y)\overline{j}+(y+3z)\overline{k}$,
$L:\quad x=y^2+z^2,\ \ x=16.$

30. $\overline{a}(x,y,z)=(y-z)\overline{i}+(3x+y)\overline{j}+(x+2z)\overline{k}$,
$L:\quad z^2=x^2+y^2,\ \ z=2-x^2-y^2,\ \ (z<0).$

Задание 22. Определить вид векторного поля $\overline{a}(x,y,z)=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$ (соленоидальное, потенциальное, гармоническое, произвольное).

1. $\overline{a}(x,y,z)=(3x^2+2y^2)\overline{i}+(4xy-6z^2)\overline{j}+(3z^2-12yz)\overline{k}$.
2. $\overline{a}(x,y,z)=(z^2-3y^2)\overline{i}+(x^2+2xy)\overline{j}+(z^2-xy)\overline{k}$.
3. $\overline{a}(x,y,z)=(4z-2x)\overline{i}+(xz+2y)\overline{j}+(x-y)\overline{k}$.
4. $\overline{a}(x,y,z)=(3yz+2z)\overline{i}+(3xz+2y)\overline{j}+(3xy+2x)\overline{k}$.
5. $\overline{a}(x,y,z)=(x^2+\cos z)\overline{i}+(z^2-\sin x)\overline{j}+(y^2-2xz)\overline{k}$.
6. $\overline{a}(x,y,z)=(yz+2x)\overline{i}+(xz+2y)\overline{j}+(xy-4z)\overline{k}$.
7. $\overline{a}(x,y,z)=(2xy-z^2)\overline{i}+(x^2+2yz)\overline{j}+(y^2-2xz)\overline{k}$.
8. $\overline{a}(x,y,z)=(xyz+y^2)\overline{i}+(y^2-3xz)\overline{j}-(2x^2+yz)\overline{k}$.
9. $\overline{a}(x,y,z)=(2y+2xz^2)\overline{i}+(z^2+2x)\overline{j}+(2yz+2x^2z)\overline{k}$.
10. $\overline{a}(x,y,z)=(yz+\cos y)\overline{i}-(xy+\sin x)\overline{j}+(\cos x+xz)\overline{k}$.
11. $\overline{a}(x,y,z)=(yz^2-3x^2)\overline{i}+(xz^2+3y^2)\overline{j}+2xyz\overline{k}$.
12. $\overline{a}(x,y,z)=(xz-3yz)\overline{i}-(yz+z^2)\overline{j}+(3x^2-xy)\overline{k}$.
13. $\overline{a}(x,y,z)=(2xy+yz)\overline{i}+(x^2+2z^2)\overline{j}+(xz+3yz)\overline{k}$.
14. $\overline{a}(x,y,z)=(5yz-2x)\overline{i}+(5xz-4y)\overline{j}+(6z+5xy)\overline{k}$.
15. $\overline{a}(x,y,z)=(z^4+6x^2y^2)\overline{i}+(4x^3y-3y^2z)\overline{j}+(4xz^3-y^3)\overline{k}$.
16. $\overline{a}(x,y,z)=(z^2-4x)\overline{i}+(2y+x^2)\overline{j}+(2z+y^2)\overline{k}$.
17. $\overline{a}(x,y,z)=(yz+ye^x)\overline{i}+(2yz+x^2)\overline{j}-(yze^x+z^2)\overline{k}$.
18. $\overline{a}(x,y,z)=(x^2y+4z)\overline{i}+(yz^2-2x)\overline{j}+(xz+y)\overline{k}$.
19. $\overline{a}(x,y,z)=(z^2+2xy)\overline{i}+(x^2+6yz)\overline{j}+(2xz+3y^2)\overline{k}$.
20. $\overline{a}(x,y,z)=(3x+yz)\overline{i}-(2y+4xz)\overline{j}-(z+x^2y)\overline{k}$.
21. $\overline{a}(x,y,z)=(2xz^2-7yz)\overline{i}+(3y^2-7xz)\overline{j}+(2x^2z-7yz)\overline{k}$.
22. $\overline{a}(x,y,z)=(2y-5z)\overline{i}+(2x+3z)\overline{j}+(3y-5x)\overline{k}$.
23. $\overline{a}(x,y,z)=(x^2-y^2)\overline{i}+(3y^2+z^2)\overline{j}+(2z^2+x^2)\overline{k}$.
24. $\overline{a}(x,y,z)=(yz^2-2xy^2z)\overline{i}+(xz^2-2x^2yz)\overline{j}+(2xyz-x^2y^2)\overline{k}$.
25. $\overline{a}(x,y,z)=(xz+2xy)\overline{i}-(yz+y^2)\overline{j}+(3xy+x^2)\overline{k}$.
26. $\overline{a}(x,y,z)=(2xz+x^2)\overline{i}-(2yz+z^2)\overline{j}-(2xz+y^3)\overline{k}$.

27. $\overline{a}(x,y,z)=(2y-6xz^2)\overline{i}+(2x+2yz)\overline{j}+(y^2-6x^2z)\overline{k}$.
28. $\overline{a}(x,y,z)=(y^2+xz)\overline{i}+(x^2+2z^2)\overline{j}+(xz+2y^2)\overline{k}$.
29. $\overline{a}(x,y,z)=(xy-xz)\overline{i}+(yz+y^2)\overline{j}+(x^2-3yz)\overline{k}$.
30. $\overline{a}(x,y,z)=(4x+3yz)\overline{i}+(2y+3xz)\overline{j}+(3xy-6z)\overline{k}$.

Решение задач нулевого варианта

Задание 1. Вычислить двумя способами двойной интеграл $\iint\limits_D \left(3x^2y^2+2x\right)dxdy$ по прямоугольной области $D:\ 1\le x\le 2$, $-1\le y\le 2$.

Решение. Преобразуем двойной интеграл в повторный. Пределы интегрирования известны.

I способ.

$$\iint\limits_D \left(3x^2y^2+2x\right)dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-1}^2\left(3x^2y^2+2x\right)dy=$$

$$=\int\limits_1^2 dx\left(3x^2\frac{y^3}{3}+2xy\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\int\limits_1^2 dx\left(\left(8x^2+4x\right)-\left(-x^2-2x\right)\right)=$$

$$=\int\limits_1^2\left(9x^2+6x\right)dx=\left(9\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\left(24+12\right)-\left(3+3\right)=30.$$

II способ.

$$\iint\limits_D \left(3x^2y^2+2x\right)dxdy=\int\limits_{-1}^2 dy\int\limits_1^2\left(3x^2y^2+2x\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^2 dy\left(3y^2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\int\limits_{-1}^2 dy\left(\left(8y^2+4\right)-\left(y^2+1\right)\right)=$$

$$=\int\limits_{-1}^2\left(7y^2+3\right)dy=\left(7\frac{y^3}{3}+3y\right)\Bigg|_{-1}^2=\left(\frac{56}{3}+6\right)-\left(-\frac{7}{3}-3\right)=30.$$

Ответ: 30.

Задание 2. Вычислить $\iiint\limits_T \left(x^2y^3z+3xy-yz\right)dxdydz$, где тело T задано неравенствами $1\le x\le 5, -2\le y\le 0, 2\le z\le 3$ (тело T – параллелепипед).

Решение. Так как в тройном интеграле $\iiint\limits_T f\left(x,\ y,\ z\right)dxdydz$ областью интегрирования является параллелепипед $a\le x\le b, c\le y\le d, e\le z\le g$, то для его вычисления можно использовать формулу:

$$\iiint\limits_T f\left(x, y, z\right)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_e^g f\left(x, y, z\right)dz .$$

Получим

$$\iiint\limits_T \left(x^2y^3z+3xy-yz\right)dxdydz=\int\limits_1^5 dx\int\limits_{-2}^0 dy\int\limits_2^3 \left(x^2y^3z+3xy-yz\right)dz=$$

$$=\int\limits_1^5 dx\int\limits_{-2}^0 \left.\left(x^2y^3\frac{z^2}{2}+3xyz-y\frac{z^2}{2}\right)\right|_2^3 dy=$$

$$=\int\limits_1^5 dx\int\limits_{-2}^0 \left(\left(x^2y^3\cdot\frac{9}{2}+3xy\cdot 3-y\cdot\frac{9}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(x^2y^3\cdot\frac{4}{2}+3xy\cdot 2-y\cdot\frac{4}{2}\right)\right)dy=$$

$$=\int\limits_1^5 dx\int\limits_{-2}^0 \left(\frac{5}{2}x^2y^3+3xy-\frac{5}{2}y\right)dy=$$

$$=\int\limits_1^5 \left.\left(\frac{5}{2}x^2\cdot\frac{y^4}{4}+3x\cdot\frac{y^2}{2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\right)\right|_{-2}^0 dx=$$

$$=\int\limits_1^5 \left(0-\left(\frac{5}{8}x^2\cdot 16+\frac{3}{2}x\cdot 4-\frac{5}{4}\cdot 4\right)\right)dx=\int\limits_1^5 \left(5-6x-10x^2\right)dx=$$

$$=\left(5x-3x^2-\frac{10}{3}x^3\right)\Bigg|_1^5=\left(25-75-\frac{1250}{3}\right)-\left(5-3-\frac{10}{3}\right)=$$

$$=-\frac{1396}{3}=-465\frac{1}{3}.$$

Замечание. В случае тройного интеграла по прямоугольной области пределы интегрирования можно расставлять в произвольном порядке. Всего существует 6 способов расстановки пределов, например можно использовать формулу

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_e^g dz\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y,z)\,dz.$$

Для заданного интеграла получим:

$$\iiint\limits_T\left(x^2y^3z+3xy-yz\right)dxdydz=\int\limits_2^3 dz\int\limits_1^5 dx\int\limits_{-2}^0\left(x^2y^3z+3xy-yz\right)dy=$$

$$=\int\limits_2^3 dz\int\limits_1^5\left(x^2\frac{y^4}{4}z+3x\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{2}z\right)\Bigg|_{-2}^0 dx=$$

$$=\int\limits_2^3 dz\int\limits_1^5\left(-4x^2z-6x+2z\right)dx=\int\limits_2^3\left(-4\frac{x^3}{3}z-3x^2+2zx\right)\Bigg|_1^5 dz=$$

$$=\int\limits_2^3\left(\left(-\frac{500}{3}z-75+10z\right)-\left(-\frac{4}{3}z-3+2z\right)\right)dz=$$

$$=\int\limits_2^3\left(-\frac{472}{3}z-72\right)dz=\left(-\frac{472}{6}z^2-72z\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=-\frac{236}{3}(9-4)-72(3-2)=-\frac{1396}{3}.$$

Ответ: $-465\frac{1}{3}$.

Задание 3. Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ в виде повторного по заданной области $D:\ -x+2y=3,\ y=x^2,\ y=0$. Привести два способа решения задачи (проекция на ось Ox и ось Oy).

Решение. Изобразим заданную область в системе координат Oxy (см. рис. 1).

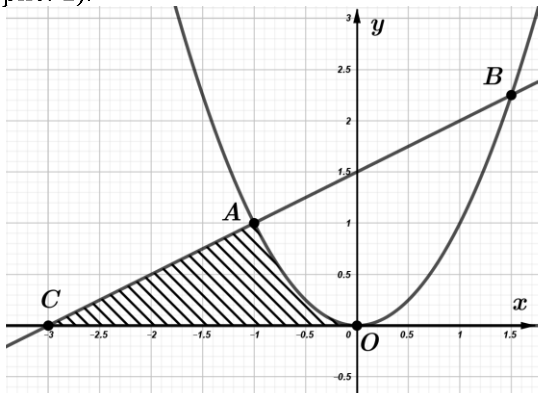


Рис. 1

График функции $y=x^2$ представляет собой параболу с вершиной в начале координат, которая пересекается с прямой $x+y=6$ в точках $A(-1;1)$ и $B\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$, с прямой $y=0$ в точке $O(0;0)$. Прямые $-x+2y=3$, $x+y=6$ и $y=0$ пересекаются в точке $C(-3;0)$. Таким образом, областью интегрирования является криволинейный треугольник *OAC*.

I способ (проекция на ось Ox).

Проекцией заданной области на ось Ox является отрезок $[-3;0]$. Нижней границей области является отрезок прямой $y=0$. Верхняя граница области не имеет единого аналитического выражения. При этом если $x\in[-3;-1]$, то верхней границей служит отрезок прямой $-x+2y=3$ (или $y=\dfrac{3+x}{2}$). Если же

$x \in [-1;0]$, то верхняя граница — парабола $y = x^2$. В результате получим, что при проецировании области на ось Ox двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ запишется в виде суммы повторных интегралов:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_0^{\frac{3+x}{2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy.$$

II способ (проекция на ось Oy).

Проекцией заданной области на ось Oy является отрезок $[0;1]$. Левой границей области является отрезок прямой $-x+2y=3$ (или $x=2y-3$). Правой границей служит парабола $y=x^2$, точнее её левая ветвь, которая задаётся формулой $x=-\sqrt{y}$. В результате получим, что при проецировании области на ось Oy двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ запишется в виде повторного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y-3}^{-\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

Ответ: $\int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_0^{\frac{3+x}{2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy,$

$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y-3}^{-\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$

Задание 4. Перейти от двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ к повторному, если область D задана графически (см. рис. 2). (В ответе указать два способа.)

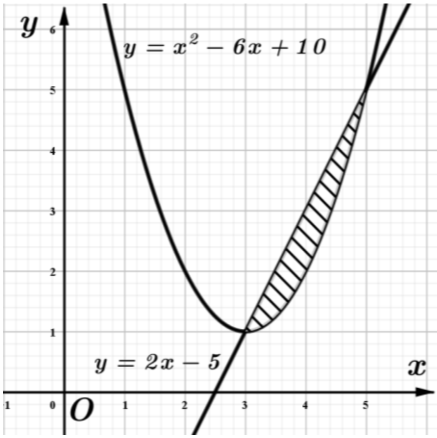


Рис. 2

Решение. Область D является правильной в направлении обеих осей Ox и Oy, поэтому рассмотрим два способа перехода к повторным интегралам.

I способ: спроектируем область D на ось Ox. При этом в области D для переменной x справедливо неравенство $3 \le x \le 5$, то есть переменная x изменяется в пределах от 3 до 5. Эти числа являются пределами внешнего интеграла.

Замечание. Если по чертежу найти точки пересечения графиков функций, являющихся границами области, трудно, то нужно решить систему уравнений [в данном случае система $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 10, \\ y = 2x - 5 \end{cases}$ имеет два решения: $(3,1)$ и $(5,5)$].

Чтобы определить пределы изменения переменной y, проведем через область D снизу вверх вертикальную прямую (параллельную оси Oy). Она сначала пересечет нижнюю границу области D (стрелка входит в область), а потом верхнюю границу (стрелка выходит из области). Нижняя граница области $y = x^2 - 6x + 10$ является нижним пределом внутреннего интеграла, в верхняя граница $y = 2x - 5$ – верхним пределом (см. рис. 3).

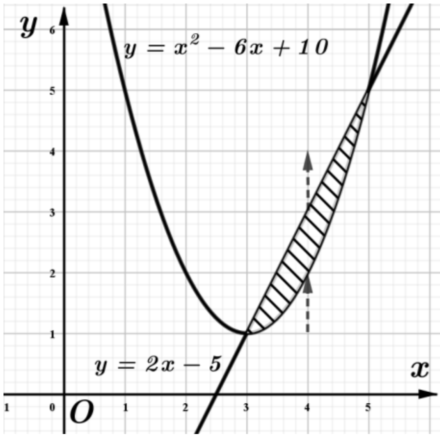


Рис. 3

Таким образом, получим

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_3^5 dx \int\limits_{x^2-6x+10}^{2x-5} f(x,y)\,dy\,.$$

II способ: спроектируем область D на ось Oy. При этом в области D для переменной y справедливо неравенство $1 \le y \le 5$, то есть переменная y изменяется в пределах от 1 до 5. Эти числа являются пределами внешнего интеграла.

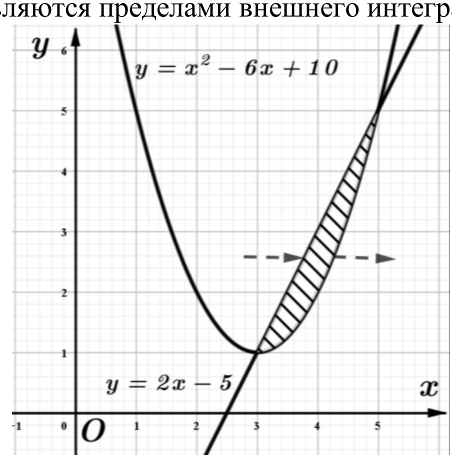


Рис. 4

Чтобы определить пределы изменения переменной x, проведем через область D слева направо горизонтальную прямую (параллельную оси Ox). Она сначала пересечет левую границу области D (стрелка входит в область), а потом правую границу (стрелка выходит из области), (см. рис. 4).

Левая граница области – $y = 2x - 5$. Выразим x через y, получим нижний предел внутреннего интеграла $x = \dfrac{y+5}{2}$.

Левая верхняя граница области – $y = x^2 - 6x + 10$. Выразим x через y: $y = (x-3)^2 + 1$, откуда $x = 3 \pm \sqrt{y-1}$. Так как у нас правая ветвь параболы, то берем $x = 3 + \sqrt{y-1}$.

Получили $x = 3 + \sqrt{y-1}$ – верхний предел внутреннего интеграла.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^5 dy \int\limits_{\frac{y+5}{2}}^{3+\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx.$$

Ответ: $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_3^5 dx \int\limits_{x^2-6x+10}^{2x-5} f(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_1^5 dy \int\limits_{\frac{y+5}{2}}^{3+\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx.$$

Задание 5. Вычислить двумя способами двойной интеграл $\iint\limits_D (2x+5y)dxdy$ по заданной области D: $y \ge 2x,\ y \le 4x,\ y \le 4.$

Решение. Изобразим заданную область в системе координат Oxy (см. рис. 5).

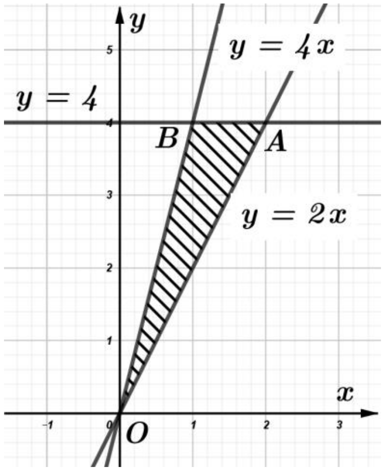


Рис. 5

Неравенство $y \geq 2x$ задаёт полуплоскость над прямой $y = 2x$. Неравенство $y \leq 4x$ — полуплоскость под прямой $y = 4x$. И неравенство $y \leq 4$ — полуплоскость под прямой $y = 4$. Прямые $y = 2x$ и $y = 4x$ пересекаются в точке $O\,(0;0)$, прямые $y = 2x$ и $y = 4$ — в точке $A\,(2;4)$, и прямые $y = 4x$ и $y = 4$ — в точке $B\,(1;4)$. Таким образом, областью интегрирования является треугольник OAB.

I способ (проекция на ось Ox).

Проекцией заданной области на ось Ox является отрезок $[0;2]$. Нижней границей области является отрезок прямой $y = 2x$. Верхняя граница области не имеет единого аналитического выражения. При этом если $x \in [0;1]$, то верхней границей служит отрезок прямой $y = 4x$. Если же $x \in [1;2]$, то верхняя граница — отрезок прямой $y = 4$. В результате получим, что при проецировании области на ось Ox двойной интеграл

$\iint\limits_D (2x+5y)dxdy$ запишется в виде суммы повторных интегралов:

$$\iint\limits_D (2x+5y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{4x} (2x+5y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x}^{4} (2x+5y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left(2xy + 5\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{2x}^{4x} + \int\limits_1^2 dx \left(2xy + 5\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{2x}^{4} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\left(8x^2 + 40x^2 \right) - \left(4x^2 + 10x^2 \right) \right) dx +$$

$$+ \int\limits_1^2 \left(\left(8x + 40 \right) - \left(4x^2 + 10x^2 \right) \right) dx = \int\limits_0^1 34x^2 dx +$$

$$+ \int\limits_1^2 \left(8x + 40 - 14x^2 \right) dx = 34\frac{x^3}{3} \Bigg|_0^1 + \left(8\frac{x^2}{2} + 40x - 14\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{34}{3} - 0 + \left(16 + 80 - \frac{112}{3} \right) - \left(4 + 40 - \frac{14}{3} \right) = \frac{92}{3}.$$

II способ (проекция на ось Oy).

Проекцией заданной области на ось Oy является отрезок $[0;4]$. Левой границей области является отрезок прямой $y = 4x$ (или $x = \dfrac{y}{4}$). Правой границей служит отрезок прямой $y = 2x$ (или $x = \dfrac{y}{2}$). В результате получим, что при проецировании области на ось Oy двойной интеграл $\iint\limits_D (2x+5y)dxdy$ запишется в виде повторного интеграла:

$$\iint\limits_D (2x+5y)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{4}}^{\frac{y}{2}} (2x+5y)\,dx = \int\limits_0^4 dy\left(2\frac{x^2}{2}+5xy\right)\Bigg|_{\frac{y}{4}}^{\frac{y}{2}} =$$

$$= \int\limits_0^4 \left(\left(\frac{y^2}{4}+5\frac{y^2}{2}\right)-\left(\frac{y^2}{16}+5\frac{y^2}{4}\right)\right)dy = \int\limits_0^4 \frac{23y^2}{16}dy = \frac{23y^3}{16\cdot 3}\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{92}{3} - 0 = \frac{92}{3}.$$

Ответ: $\frac{92}{3}$.

Задание 6. Найти массу плоской пластины D, если она ограничена заданными линиями $y=-2x,\ y=-\frac{x}{2},\ y=3$ и известна ее плотность $\mu(x,y)=1-4x+y-12xy$.

Решение. Масса плоской пластины D, если известна ее плотность $\mu(x,y)$, находится по формуле $m=\iint\limits_D \mu(x,\ y)\,dxdy$.

Изобразим пластину D на чертеже (см. рис. 6).

Так как пластина является правильной в направлении оси Ox, то проектируем ее на ось Oy. При этом $0 \le y \le 3$, то есть переменная y изменяется в пределах от 0 до 3.

Левой границей пластины D является прямая $y=-\frac{x}{2}$, откуда $x=-2y$. Правой границей пластины D является прямая $y=-2x$, откуда $x=-\frac{y}{2}$. Таким образом, $-2y \le x \le -\frac{y}{2}$.

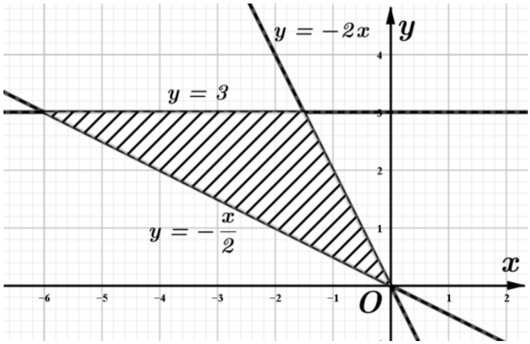


Рис. 6

Масса пластины D будет равна

$$m=\iint\limits_D (1-4x+y-12xy)\,dxdy=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{-2y}^{-y/2}(1-4x+y-12xy)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^3 \left(x-2x^2+yx-6x^2y\right)\Big|_{-2y}^{-y/2}dy=$$

$$=\int\limits_0^3\left(\left(-\frac{y}{2}-2\cdot\frac{y^2}{4}-y\cdot\frac{y}{2}-6\cdot\frac{y^2}{4}\cdot y\right)-\right.$$

$$\left.-\left(-2y-2\cdot 4y^2-y\cdot 2y-6\cdot 4y^2\cdot y\right)\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^3\left(\left(-\frac{y}{2}-y^2-\frac{3y^3}{2}\right)-\left(-2y-10y^2-24y^3\right)\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^3\left(\frac{3y}{2}+9y^2+\frac{45y^3}{2}\right)dy=\left(\frac{3y^2}{4}+3y^3+\frac{45y^4}{8}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\left(\frac{3\cdot 9}{4}+3\cdot 27+\frac{45\cdot 81}{8}\right)-0=\frac{4347}{8}=543\frac{3}{8}.$$

Ответ: $m=543\dfrac{3}{8}$.

Задание 7. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (3x-y)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 dxdy$ по заданной области D с помощью перехода к полярной системе координат, где $D:\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge \sqrt{3}x,\ x \ge 0$.

Решение. Строим окружности $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$. Это концентрические окружности с центром в начале координат. Первая окружность имеет радиус, равный 1, вторая — равный 2. Уравнения $y=\sqrt{3}x$ и $x=0$ задают прямые, проходящие через начало координат. Учитывая знаки неравенств, получаем область D, изображенную на рис. 7.

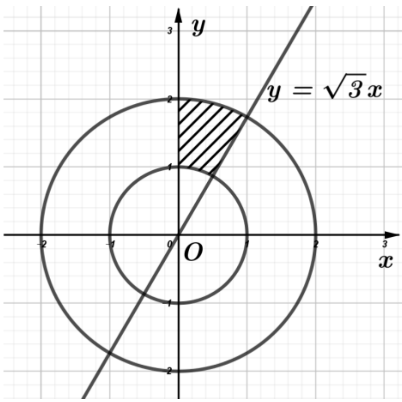


Рис. 7

Переходим к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Для удобства расстановки пределов сопоставим полярную систему координат с прямоугольной декартовой так, как показано на рис. 8.

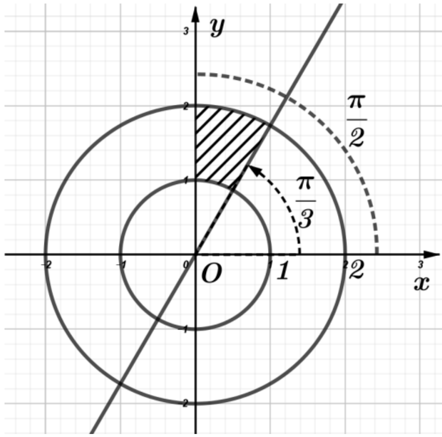


Рис. 8

Тогда область D будет задаваться системой неравенств

$$\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le r \le 2.$$

Подынтегральная функция примет вид

$$(3x-y)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 =$$

$$=(3r\cos\varphi - r\sin\varphi)\left(\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}\right)^3 =$$

$=(3\cos\varphi-\sin\varphi)r^4$, а $dxdy = rdrd\varphi$.

Воспользуемся формулой

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rdrd\varphi.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_D (3x-y)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 dxdy = \iint\limits_D (3\cos\varphi-\sin\varphi) r^5 drd\varphi =$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi \int\limits_1^2 r^5 dr = (3\sin\varphi+\cos\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^6}{6}\Big|_1^2 =$$

$$=\left(\left(3\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(3\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)\right)\cdot\left(\frac{2^6}{6}-\frac{1^6}{6}\right)=$$

$$=\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{64}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{21\left(5-3\sqrt{3}\right)}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{21\left(5-3\sqrt{3}\right)}{4}$.

Задание 8. Найти площадь фигуры D, ограниченной заданными неравенствами $-4y \le x^2+y^2 \le -10y,\ y \ge \sqrt{3}x,\ y \le x$.

Решение. Площадь фигуры D находится по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy.$$

Изобразим фигуру D на чертеже. Так как $x^2+y^2 \ge -4y$, то $x^2+y^2+4y \ge 0$ или $x^2+y^2+4y+4 \ge 4$. Отсюда получаем $x^2+\left(y+2\right)^2 \ge 4$, то есть фигура D расположена вне круга с центром в точке $\left(0,-2\right)$ и радиусом $R=2$.

Аналогично из неравенства $x^2+y^2 \le -10y$ получим $x^2+\left(y+5\right)^2 \le 25$, то есть фигура D расположена внутри круга с центром в точке $\left(0,-5\right)$ и радиусом $R=5$.

Неравенства $y \ge \sqrt{3}x,\ y \le x$ означают, что фигура D расположена выше прямой $y=\sqrt{3}x$ и ниже прямой $y=x$.

Таким образом, получаем заштрихованную область (см. рис. 9).

Так как область D ограничена окружностями, то для вычисления двойного интеграла $S=\iint\limits_D dxdy$ целесообразно перейти к полярной системе координат.

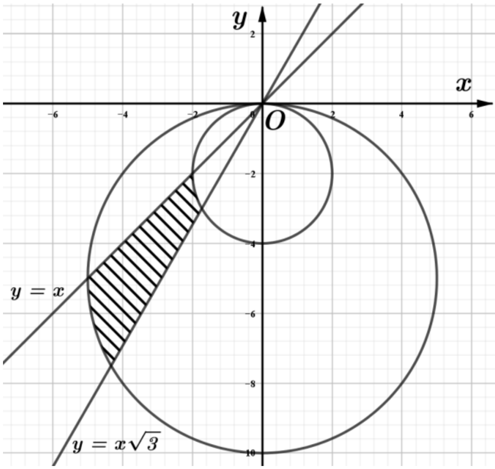


Рис. 9

Переход к полярной системе координат осуществляется по формулам $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi, \end{cases}$ причем

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho \cdot \cos\varphi, \rho \cdot \sin\varphi) \cdot \rho d\varphi d\rho,$$

где D^* – образ области D в полярной системе координат.

При вычислении площади фигуры D учтем, что $f(x, y) = 1,$ и используем формулу $S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D^*} \rho d\varphi d\rho$.

Определим, как выглядит область D^*, и вычислим интеграл. Подставим в неравенство $-4y \le x^2 + y^2 \le -10y$ выражения для x и для y через ρ и φ, получим

$$-4\rho \cdot \sin\varphi \le (\rho \cdot \cos\varphi)^2 + (\rho \cdot \sin\varphi)^2 \le -10\rho \cdot \sin\varphi,$$

откуда $-4\rho \cdot \sin\varphi \le \rho^2 \le -10\rho \cdot \sin\varphi$ или $-4\sin\varphi \le \rho \le -10\sin\varphi$.

Подставим в неравенства $y \ge \sqrt{3}x$ выражения для x и для y через ρ и φ, получим $\rho\sin\varphi \ge \sqrt{3}\rho\cos\varphi$. Откуда

$\sin\varphi \geq \sqrt{3}\cos\varphi$. Так как фигура D расположена в III четверти, то, разделив неравенство $\sin\varphi \geq \sqrt{3}\cos\varphi$ на $\cos\varphi < 0$, получим $\operatorname{tg}\varphi \leq \sqrt{3}$ и $\varphi \leq \dfrac{4\pi}{3}$.

Подставим в неравенства $y \leq x$ выражения для x и для y через ρ и φ, получим $\rho\sin\varphi \leq \rho\cos\varphi$, откуда $\varphi \geq \dfrac{5\pi}{4}$.

Таким образом, $\dfrac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{4\pi}{3}$.

Получили, что область D^* задана неравенствами $\dfrac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{4\pi}{3}$ и $-4\sin\varphi \leq \rho \leq -10\sin\varphi$ (см. рис. 10).

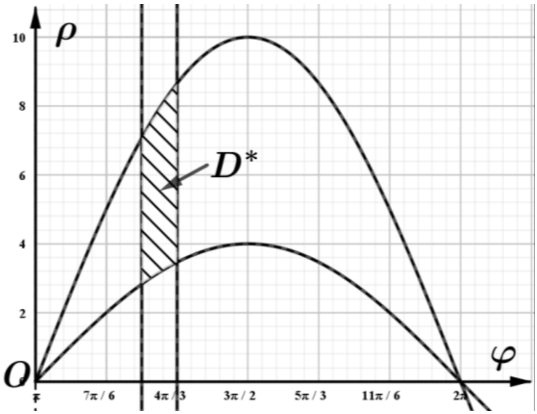


Рис. 10

Тогда

$$S = \iint\limits_{D^*} \rho\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_{5\pi/4}^{4\pi/3} d\varphi \int\limits_{-4\sin\varphi}^{-10\sin\varphi} \rho\, d\rho = \int\limits_{5\pi/4}^{4\pi/3} \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{-4\sin\varphi}^{-10\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{5\pi/4}^{4\pi/3} \frac{100\sin^2\varphi - 16\sin^2\varphi}{2}\, d\varphi = \int\limits_{5\pi/4}^{4\pi/3} 42\sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{5\pi/4}^{4\pi/3} 21(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = 21\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{5\pi/4}^{4\pi/3} =$$

$$= 21\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{3}\right) - 21\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{4}\right) = \frac{7\pi - 21\sqrt{3} + 42}{4}.$$

Ответ: $S = \dfrac{7\pi - 21\sqrt{3} + 42}{4}$.

Задание 9. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T \left(2y^2 + 2z\right) dxdydz,$ если тело T ограничено поверхностями $T:\ z = 2x^2 + 3y^2,\ \ x + y = 1,\quad x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$.

Решение. Тело ограничено сверху эллиптическим параболоидом T, снизу плоскостью $z = 0$ (плоскость Oxy), а боковыми поверхностями служат плоскости $x = 0$ (плоскость Oyz), $y = 0$ (плоскость Oxz) и плоскость $x + y = 1$ (см. рис. 11).

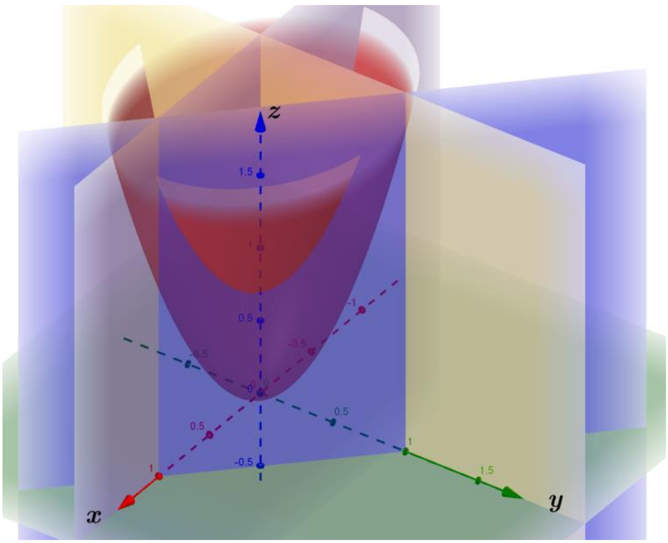


Рис. 11

Традиционно проектируем тело на плоскость Oxy, принимая полученную проекцию в качестве области D. Областью служит треугольник OAB (см. рис. 12).

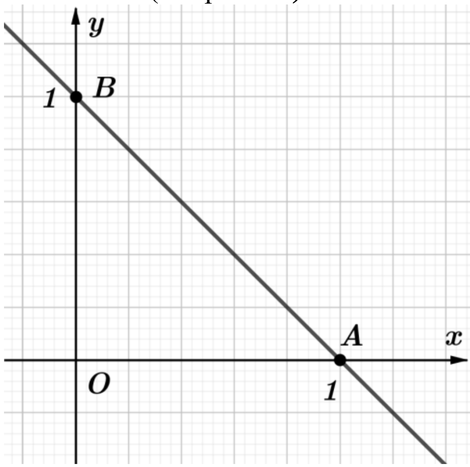


Рис. 12

Прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу тела в двух точках. Аппликата первой точки равна нулю (точка входа лежит на плоскости Oxy, т.е. $z=0$), аппликата точки выхода принадлежит эллиптическому параболоиду и равна $z=2x^2+3y^2$. Таким образом,

$$\iiint\limits_T \left(2y^2+2z\right)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{2x^2+3y^2}\left(2y^2+2z\right)dz=$$

$$=\iint\limits_D dxdy\left(2y^2z+z^2\right)\Big|_0^{2x^2+3y^2}=$$

$$=\iint\limits_D \left(2y^2\left(2x^2+3y^2\right)+\left(2x^2+3y^2\right)^2\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_D \left(4x^4+16x^2y^2+15y^4\right)dxdy.$$

Двойной интеграл приводим к повторному интегралу. Проекцией области на ось Ox служит отрезок $[0;1]$. Проводя прямую, параллельную оси Oy, видим, что точкой входа является точка с ординатой, равной нулю, а точка выхода принадлежит отрезку прямой $y=1-x$. В результате получим

$$\iiint_T \left(2y^2+2z\right)dxdydz = \iint_D \left(4x^4+16x^2y^2+15y^4\right)dxdy =$$

$$=\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(4x^4+16x^2y^2+15y^4\right)dy =$$

$$=\int_0^1 dx \left(4x^4y+16x^2\frac{y^3}{3}+3y^5\right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$=\int_0^1 \left(4x^4\left(1-x\right)+16x^2\frac{\left(1-x\right)^3}{3}+3\left(1-x\right)^5\right)dx =$$

$$=\int_0^1 \left(-\frac{37}{3}x^5+35x^4-46x^3+\frac{106}{3}x^2-15x+3\right)dx =$$

$$=\left(-\frac{37}{3}\frac{x^6}{6}+35\frac{x^5}{5}-46\frac{x^4}{4}+\frac{106}{3}\frac{x^3}{3}-15\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{13}{18}.$$

Ответ: $\frac{13}{18}$.

Задание 10. Найти массу пирамиды T, ограниченной плоскостью $P: 3x-y-2z=12$ и координатными плоскостями, если задана ее плотность $\mu\left(x,y,z\right)=2x-4y-z+1$.

Решение. Масса тела T, если известна его плотность $\mu\left(x,y,z\right)$, находится по формуле $m=\iiint_T \mu\left(x,y,z\right)dxdydz$.

Изобразим пирамиду T на чертеже (см. рис. 13). Она ограничена наклонной плоскостью $P: 3x - y - 2z = 12$ и координатными плоскостями.

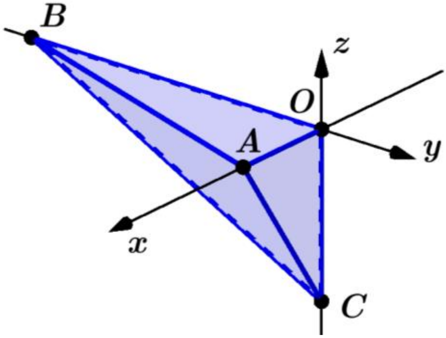


Рис. 13

То есть T – пирамида $OABC$, где $O(0, 0, 0)$ – начало координат, а $A(4, 0, 0)$, $B(0, -12, 0)$ и $C(0, 0, -6)$ – точки пересечения плоскости P с координатными осями.

Для вычисления интеграла $m = \iiint\limits_T (2x - 4y - z + 1)\,dxdydz$ спроектируем пирамиду на плоскость Oxz (проекцией является треугольник OAC). При этом переменная y будет изменяться от $y = 3x - 2z - 12$ (плоскость P) до $y = 0$ (см. рис. 14).

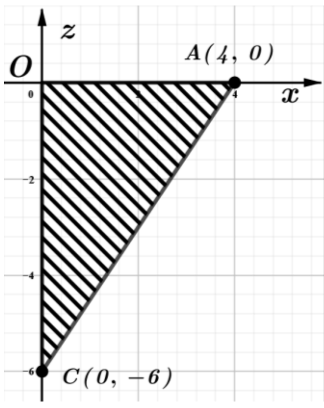


Рис. 14

Получим

$$m=\iiint\limits_{T}(2x-4y-z+1)\,dxdydz=$$

$$=\iint\limits_{OAC}dxdz\int\limits_{3x-2z-12}^{0}(2x-4y-z+1)\,dy=$$

$$=\iint\limits_{OAC}\left(2xy-2y^2-zy+y\right)\Big|_{3x-2z-12}^{0}dxdz=$$

$$=\iint\limits_{OAC}\begin{pmatrix}-2x(3x-2z-12)+2(3x-2z-12)^2+\\ \qquad +z(3x-2z-12)-(3x-2z-12)\end{pmatrix}dxdz=$$

$$=\iint\limits_{OAC}\left(12x^2-17xz-123x+6z^2+86z+300\right)dxdz.$$

Для вычисления полученного интеграла спроектируем треугольник OAC на ось Ox. При этом $0\le x\le 4$ и $\frac{3x-12}{2}\le z\le 0$. Получим

$$m=\iint\limits_{OAC}\left(12x^2-17xz-123x+6z^2+86z+300\right)dxdz=$$

$$=\int\limits_0^4dx\int\limits_{\frac{3x-12}{2}}^{0}\left(12x^2-17xz-123x+6z^2+86z+300\right)dz=$$

$$=\int\limits_0^4\left(12x^2z-\frac{17}{2}xz^2-123xz+2z^3+43z^2+300z\right)\Bigg|_{\frac{3x-12}{2}}^{0}dx=$$

$$=\int\limits_0^4\begin{pmatrix}-12x^2\left(\frac{3x-12}{2}\right)+\frac{17}{2}x\left(\frac{3x-12}{2}\right)^2+123x\left(\frac{3x-12}{2}\right)-\\ -2\left(\frac{3x-12}{2}\right)^3-43\left(\frac{3x-12}{2}\right)^2-300\left(\frac{3x-12}{2}\right)\end{pmatrix}dx=$$

$$=\int\limits_0^4\left(-\frac{45x^3}{8}+\frac{351x^2}{4}-432x+684\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{45x^4}{32}+\frac{117x^3}{4}-216x^2+684x\right)\Bigg|_0^4=792.$$

Ответ: $m=792$.

Задание 11. Найти объём тела T, заданного неравенствами $z\le 3\sqrt{x^2+y^2}+2,\quad x^2+y^2\le 3,\quad z\ge 1$, используя геометрический смысл тройного интеграла, с помощью перехода к ЦСК.

Решение. Тело T ограничено сверху конусом $z=3\sqrt{x^2+y^2}+2$, образующие которого направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $(0;0;2)$. Снизу тело ограничивает плоскость $z=1$. Боковой поверхностью служит круговой цилиндр $x^2+y^2=3$, ось которого совпадает с осью Oz (см. рис. 15).

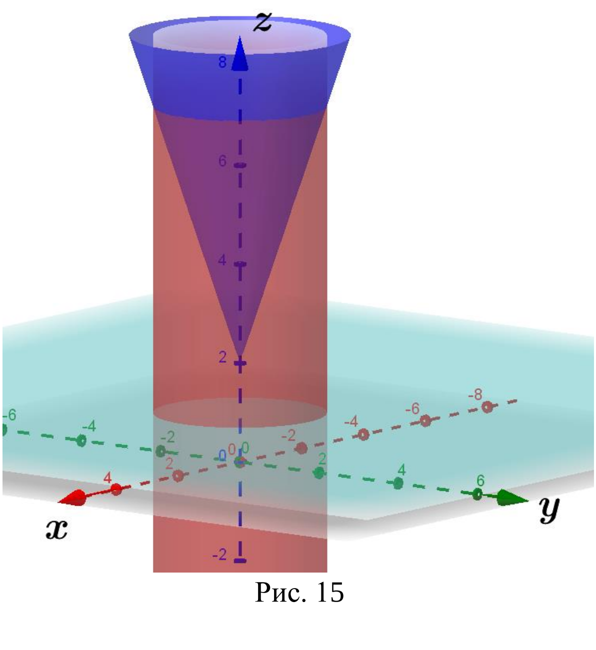


Рис. 15

В проекции на плоскость Oxy получим окружность с центром в начале координат радиусом $\sqrt{3}$ (см. рис. 16).

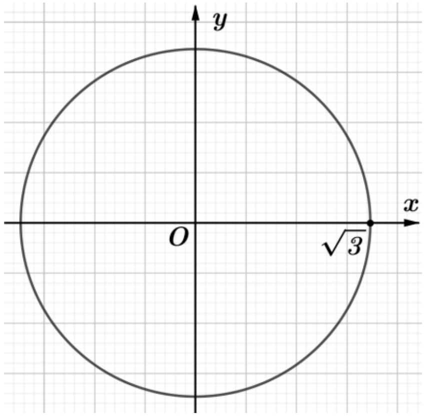


Рис. 16

Переходим к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Для вычисления объёма воспользуемся формулой

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_T rdrd\varphi dz.$$

Для заданного тела T: $0 \le r \le \sqrt{3}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $1 \le z \le r^2 + 2$. Таким образом,

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_T rdrd\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} rdr \int\limits_1^{r^2+2} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} rdr \left(z\right)\Big|_1^{r^2+2} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} rdr \left(r^2 + 2 - 1\right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(r^2 + 1\right) rdr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(r^3 + r\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{4} + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{15}{4} \varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{15}{4} \cdot 2\pi = \frac{15\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{15\pi}{2}$.

Задание 12. Найти объем тела T, заданного следующими неравенствами: $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100$, $-\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$, $y \ge x$, $x \ge 0$, используя геометрический смысл тройного интеграла, с помощью перехода к ССК.

Решение. Объем тела T вычисляется по формуле

$$V = \iiint_T dxdydz .$$

Для вычисления данного интеграла определим границы тела T.

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ задает сферу с центром в начале координат и радиусом $R = 6$. Аналогично, $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ – сфера с центром в начале координат и радиусом $R = 10$. Значит, $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100$ – шаровой слой между двумя сферами (см. рис. 17).

Уравнения $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ задают два конуса (см. рис. 18). Значит, тело T – часть шарового слоя, расположенная между этими конусами.

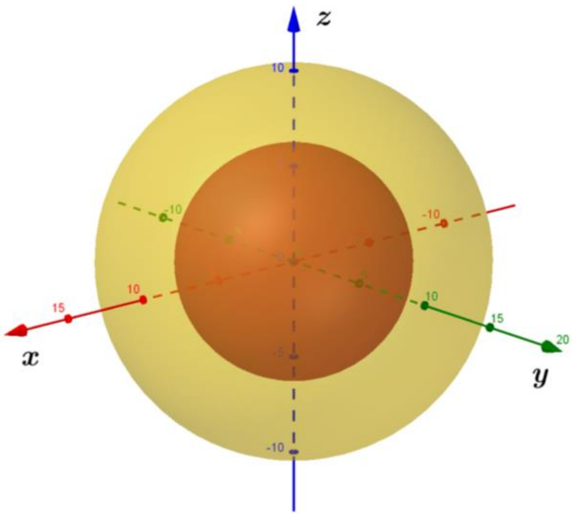


Рис. 17

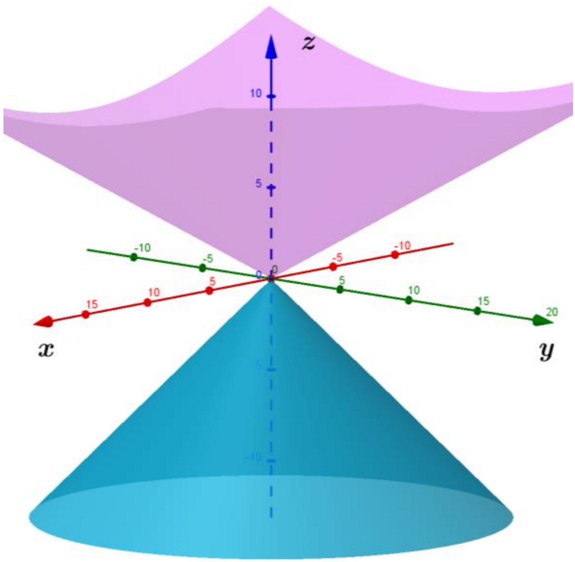


Рис. 18

Уравнения $y = x$ и $x = 0$ – уравнения плоскостей. Следовательно, неравенства $y \ge x$ и $x \ge 0$ задают часть пространства, расположенную между этими плоскостями (см. рис. 19).

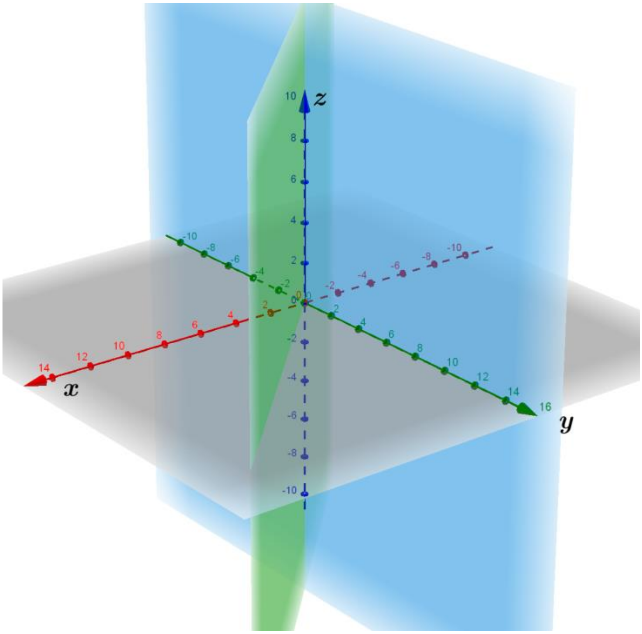


Рис. 19

Для большей наглядности изобразим также сечения тела T плоскостями $x = 0$ (см. рис. 20) и $z = 0$ (см. рис. 21).

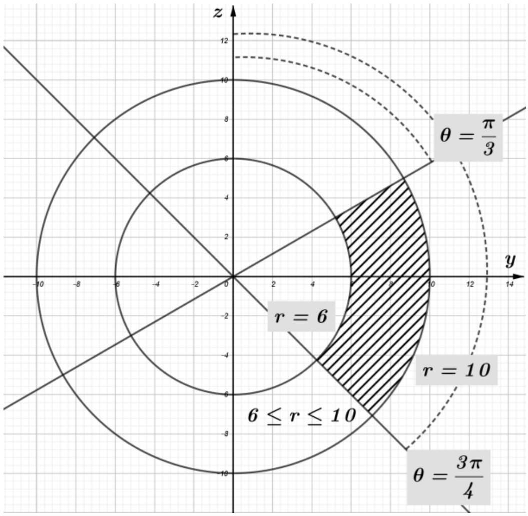

z
y
$\theta = \frac{\pi}{3}$
$r = 6$
$r = 10$
$6 \le r \le 10$
$\theta = \frac{3\pi}{4}$

Рис. 20

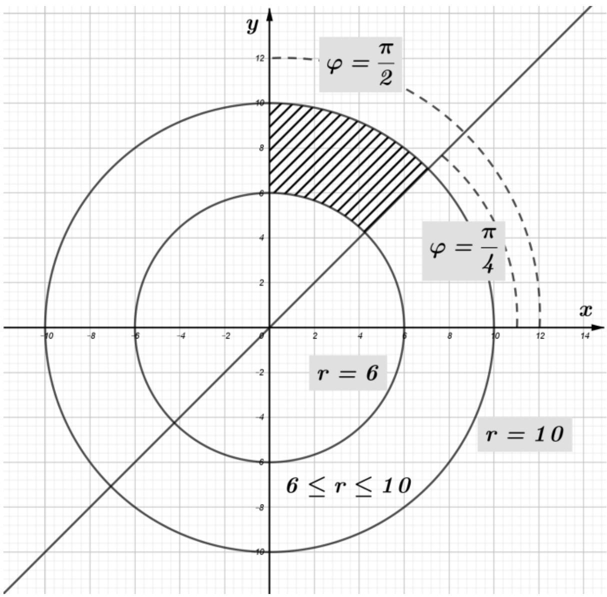

y
x
$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$\varphi = \frac{\pi}{4}$
$r = 6$
$r = 10$
$6 \le r \le 10$

Рис. 21

Так тело T ограничено сферами и конусами, то для вычисления его объема перейдем к сферической системе координат по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta, \\ y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta, \\ z = r\cdot\cos\theta, \end{cases} \qquad |I| = r^2\sin\theta.$$

Тогда для тройного интеграла будет справедлива формула

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{T^*} F(r,\varphi,\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta,$$

где $F(r,\varphi,\theta) = f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$.

При вычислении объема тела $f(x,y,z)=1$, поэтому

$$V = \iiint_T dxdydz = \iiint_{T^*} r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta.$$

Определим, как задается тело T^* в сферической системе координат. Из неравенства $36 \le x^2+y^2+z^2 \le 100$ следует, что $36 \le (r\cos\varphi\sin\theta)^2 + (r\sin\varphi\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2 \le 100$ или $36 \le r^2 \le 100$. Следовательно, в области T^* имеем $6 \le r \le 10$.

Из неравенства $-\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ следует, что $-\sqrt{r^2\sin^2\theta} \le r\cos\theta \le \sqrt{\dfrac{r^2\sin^2\theta}{3}}$. Откуда, учитывая, что $r \ge 0$ и $\sin\theta > 0$, получаем $-\sin\theta \le \cos\theta \le \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$.

Чтобы решить данное неравенство, разделим все его части на $\sin\theta > 0$: $-1 \le \operatorname{ctg}\theta \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ или (функция $\operatorname{ctg}\theta$ – убывающая!) $\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, в области T^* имеем $\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}$.

Из неравенств $x \geq 0$ и $y \geq x$ следует, что $r\cos\varphi\sin\theta \geq 0$ и $r\sin\varphi\sin\theta \geq r\cos\varphi\sin\theta$. Откуда $\cos\varphi \geq 0$ и $\operatorname{tg}\varphi \geq 1$, поэтому $\dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, тело T^* определяется неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 6 \leq r \leq 10, \\ \dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

и является параллелепипедом. Для параллелепипеда при переходе от тройного интеграла к трехкратному пределы интегрирования можно расставлять в любом порядке.

Для заданного тела объем будет равен

$$V = \iiint\limits_{T^*} r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{6}^{10} dr \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} r^2 \sin\theta d\theta =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int\limits_{6}^{10} r^2 dr \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta d\theta = \varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_{6}^{10} \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{10^3 - 6^3}{3} \cdot \left(-\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{784}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{2} = \frac{98\pi}{3}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Ответ: $V = \dfrac{98\pi}{3}\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Задание 13. Вычислить криволинейный интеграл I рода $\int\limits_L (3x-y)\,dl,$ где L - отрезок от точки $A(-2;0)$ до точки $B(1;6)$.

Решение. Зададим отрезок AB аналитически. L — отрезок прямой, которая имеет уравнение $y=kx+b$. Чтобы найти k и b, подставим координат точек A и B в уравнение. В результате получим систему:

$$\begin{cases} 0=-2k+b, \\ 6=k+b, \end{cases}$$

решая которую, получим: $k=2, b=4$.Таким образом, аналитическое выражение отрезка имеет вид $y=2x+4$, где $-2\le x\le 1$.

Для вычисления криволинейного интеграла I рода воспользуемся формулой

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Найдем дифференциал дуги dl для прямой $y=2x+4$. Имеем

$$y'=(2x+4)'=2,\quad dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\sqrt{5}dx.$$

Следовательно, данный интеграл равен

$$\int\limits_L (3x-y)\,dl=\int\limits_{-2}^{1}\left(3x-(2x+4)\right)\sqrt{5}dx=\sqrt{5}\int\limits_{-2}^{1}(x-4)\,dx=$$

$$=\sqrt{5}\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\sqrt{5}\left(\left(\frac{1}{2}-4\right)-(2+8)\right)=-\frac{27}{2}\sqrt{5}.$$

Ответ: $-\dfrac{27}{2}\sqrt{5}$.

Задание 14. Вычислить криволинейный интеграл II рода $I=\int\limits_L (3-y+5x)dx+(xy+5y)dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(1,\,2)$ до точки $B(3,-4)$.

Решение. Если функции $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$ непрерывны, а плоская кривая L задана явно уравнением $y=f(x)$, где $x\in[a,b]$ и функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную, то для вычисления криволинейного интеграла II рода используют формулу

$$\int\limits_L P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy=\left|\begin{array}{l} L:\begin{cases} x\in[a,b], \\ y=f(x), \end{cases} \\ dy=f'(x)dx \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_a^b \Big(P\big(x,\,f(x)\big)+Q\big(x,\,f(x)\big)\cdot f'(x)\Big)dx.$$

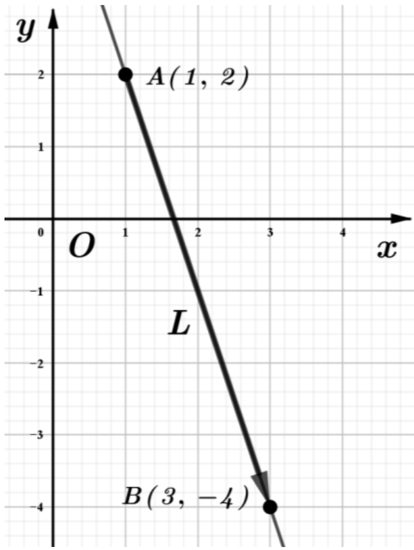


Рис. 22

Поэтому зададим отрезок прямой от точки $A(1,\,2)$ до точки $B(3,\,-4)$ явно уравнением $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{-4-2}$ или $y=-3x+5$, где $x\in[1,\,3]$ (см. рис. 22).

Тогда

$$I=\int\limits_L (3-y+5x)\,dx+(xy+5y)\,dy=\left|\begin{array}{c} x\in[1,3], \\ y=-3x+5, \\ dy=-3dx \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_1^3\Big(\big(3-(-3x+5)+5x\big)+\big(x(-3x+5)+5(-3x+5)\big)\cdot(-3)\Big)dx=$$

$$=\int\limits_1^3\Big(3+3x-5+5x-3\big(-3x^2+5x-15x+25\big)\Big)dx=$$

$$=\int\limits_1^3\big(8x-2+9x^2+30x-75\big)dx=\int\limits_1^3\big(9x^2+38x-77\big)dx=$$

$$=\left(3x^3+19x^2-77x\right)\Big|_1^3=76.$$

Ответ: $I=76$.

Задание 15. Вычислить криволинейный интеграл II рода $\oint\limits_L\left(xy^2+x^2\right)dx-\left(x^2y+y^2\right)dy,$ где $L:\quad y=x,\quad y=0,\quad x=1,$ непосредственно и по формуле Грина.

Решение. Путь интегрирования — треугольник *OAB* (см. рис. 23). Контур L обходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

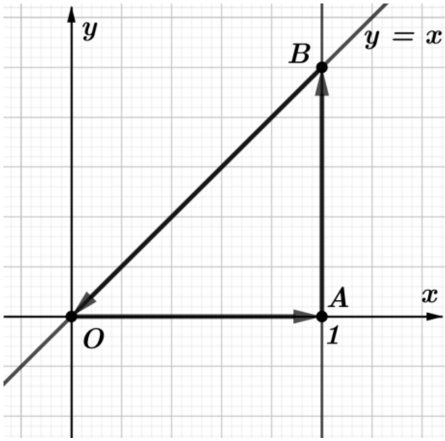


Рис. 23

I способ (непосредственно).

Используем свойство аддитивности, вычисляя интеграл по отрезкам OA, AB и BO:

а) для отрезка OA: $y=0, 0 \le x \le 1,$ т.е. $dy=0,$ откуда

$$\int\limits_{OA}\left(xy^2+x^2\right)dx-\left(x^2y+y^2\right)dy=\int\limits_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3};$$

б) для отрезка AB: $x=1,$ $0 \le y \le 1,$ т.е. $dx=0,$ откуда

$$\int\limits_{AB}\left(xy^2+x^2\right)dx-\left(x^2y+y^2\right)dy=$$

$$=-\int\limits_0^1\left(y+y^2\right)dx=-\left.\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^1=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{6};$$

в) для отрезка BO: $y=x,$ переменная x меняется от 1 до 0, $dy=dx,$ откуда

$$\int\limits_{BO}\left(xy^2+x^2\right)dx-\left(x^2y+y^2\right)dy=$$

$$\int\limits_1^0\left(x^3+x^2-x^3-x^2\right)dx=0.$$

Таким образом,

$$\oint\limits_L \left(xy^2+x^2\right)dx-\left(x^2y+y^2\right)dy=\frac{1}{3}-\frac{5}{6}+0=-\frac{1}{2}.$$

II способ (по формуле Грина).

Область D, ограниченная кривой L, является правильной, функции $P(x,y)=\left(xy^2+x^2\right)$ и $Q(x,y)=-\left(x^2y+y^2\right)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2xy$ непрерывны в области D. Следовательно, справедлива формула Грина

$$\oint\limits_L P(x,y)dx-Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Применим данную формулу для вычислений:

$$\oint\limits_L \left(xy^2+x^2\right)dx-\left(x^2y+y^2\right)dy=$$

$$=\iint\limits_D(-2xy-2xy)dxdy=-\iint\limits_D 4xydxdy=-4\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^x ydy=$$

$$=-4\int\limits_0^1 xdx\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x=-2\int\limits_0^1 x\left(x^2-0\right)dx=-2\int\limits_0^1 x^3dx=$$

$$=-2\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Задание 16. Вычислить криволинейный интеграл I рода $\int\limits_L (x-2y)dl$ по части L дуги окружности $x^2+y^2=2y$, ограниченной неравенством $y\geq-\sqrt{3}x$.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = 2y$ определяет окружность с центром в точке $(0,1)$ и радиусом 1, так как преобразовывается к виду $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1,\ x^2 + (y-1)^2 = 1.$

Перейдем в полярную систему координат, где $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ в ней уравнение окружности запишется как $(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = 2\rho\sin\varphi$, или $\rho(\varphi) = 2\sin\varphi$. Прямая $y = -\sqrt{3}x$ в полярной системе координат задается лучами $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$ и $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, таким образом, точкам дуги L соответствуют значения параметра интегрирования $\varphi \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ (см. рис. 24).

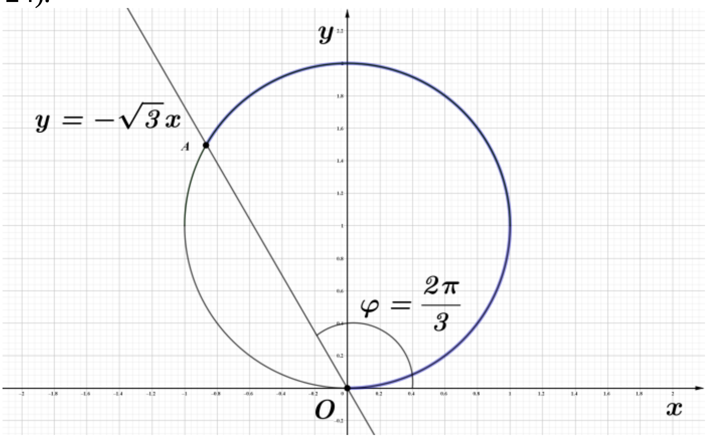


Рис. 24

По общей формуле

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi,$$

тогда $\displaystyle\int\limits_L (x - 2y)\,dl =$

$$= \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} (2\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi)\sqrt{4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin 2\varphi - 4\sin^2\varphi)\sqrt{4}\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin 2\varphi - 2(1-\cos 2\varphi))\,d\varphi =$$

$$= (-\cos 2\varphi - 4\varphi + 2\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{8\pi}{3} - \sqrt{3} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{8\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{3}{2} - \frac{8\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Задание 17. Вычислить криволинейный интеграл II рода $\int\limits_L (3x+z)dx + (2z-y)dy + 4xdz$ по части L дуги эллипса, заданного в пространстве параметрически системой функций

$$L: \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 2\cos t + \sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, \pi].$$

Решение. Так как $x = 3\cos t,$ $y = 3\sin t$ и $z = 2\cos t + \sin t,$ то их производные $x' = -3\sin t,$ $y' = 3\cos t$ и $z' = -2\sin t + \cos t.$ По общей формуле вычисления криволинейного интеграла II рода в случае, когда кривая интегрирования задана параметрически:

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt,$$

получим

$$\int_L (3x+z)dx+(2z-y)dy+4xdz=$$

$$=\int_0^{\pi}((9\cos t+2\cos t+\sin t)(-3\sin t)+$$

$$+(4\cos t+2\sin t-3\sin t)\cdot 3\cos t+12\cos t(-2\sin t+\cos t))dt=$$

$$=\int_0^{\pi}(-33\sin t\cos t-3\sin^2 t+12\cos^2 t-3\sin t\cos t-$$

$$-24\sin t\cos t+12\cos^2 t)dt=$$

$$=\int_0^{\pi}(24\cos^2 t-3\sin^2 t-60\sin t\cos t)dt=$$

$$=\int_0^{\pi}(12(1+\cos 2t)-\frac{3}{2}(1-\cos 2t)-30\sin 2t)dt=$$

$$=\int_0^{\pi}(\frac{21}{2}+\frac{27}{2}\cos 2t-30\sin 2t)dt=$$

$$=(\frac{21}{2}t+\frac{27}{4}\sin 2t+15\cos 2t)\Bigg|_0^{\pi}=10,5\pi.$$

Ответ: $10,5\pi.$

Задание 18. Вычислить поверхностный интеграл I рода $\iint\limits_S (3x-2y+z)ds,$ где S - часть плоскости $P:\ x-2y+z=4,$ ограниченная координатными плоскостями.

Решение. Плоскость P задается функцией $z=4-x+2y,$ $z'_x=-1,$ $z'_y=2.$ Проекцией части плоскости S на координатную плоскость Oxy является плоская область $D_{xy}:\ 0\le x\le 4,\ \frac{x}{2}-2\le y\le 0$ (см. рис. 25).

Для вычисления поверхностного интеграла I рода используем общую формулу

$$\iint\limits_{S} f\left(x,y,z\right)ds=\iint\limits_{D_{xy}} f\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

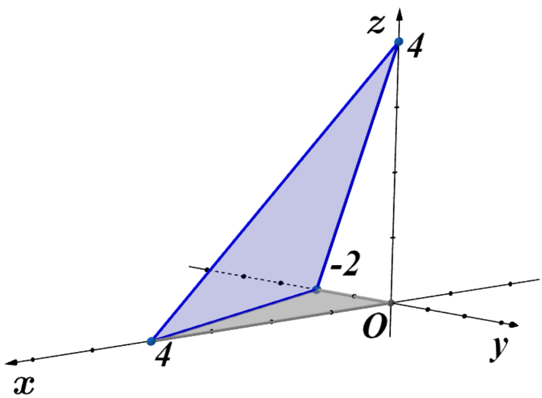


Рис. 25

Тогда

$$\iint\limits_{S}\left(3x-2y+z\right)ds=\iint\limits_{D_{xy}}\left(3x-y+4-x+2y\right)\sqrt{1+(-1)^2+2^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(2x+4\right)\sqrt{6}\,dxdy=\sqrt{6}\int\limits_{0}^{4}dx\int\limits_{\frac{x}{2}-2}^{0}(2x+4)dy=$$

$$=\sqrt{6}\int\limits_{0}^{4}(2x+4)y\Big|_{\frac{x}{2}-2}^{0}dx=\sqrt{6}\int\limits_{0}^{4}(2x+4)(2-\frac{x}{2})dx=$$

$$=\sqrt{6}\int\limits_{0}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\sqrt{6}(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x)\Big|_{0}^{4}=$$

$$=\sqrt{6}(-\frac{64}{3}+16+32)=\frac{80\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{80\sqrt{6}}{3}$.

Задание 19. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(x,y,z)=2y\overline{i}+(2x+z)\overline{j}+(y+2z)\overline{k}$ через часть плоскости $S:\ 2x+y+2z=6,$ расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz), двумя способами: 1) сведением к поверхностному интегралу I рода и 2) через сумму двойных интегралов.

Решение. 1. Сведение поверхностного интеграла II рода к поверхностному интегралу I рода.

Так как поток векторного поля – это поверхностный интеграл II рода:

$$\Pi=\iint_S \overline{a}(x,y,z)d\overline{s}=\iint_S 2ydydz+(2x+z)dxdz+(y+2z)dxdy,$$

то для нахождения потока векторного поля можно применить формулу

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy=$$

$$=\iint_S (P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)ds,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора нормали к выбранной стороне поверхности S. По условию задачи нормаль образует острый угол с осью Oz (см. рис. 26), поэтому вычислим направляющие косинусы по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{-z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}, \qquad \cos\beta=\frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$ $z=z(x,y)$ - уравнение поверхности S.

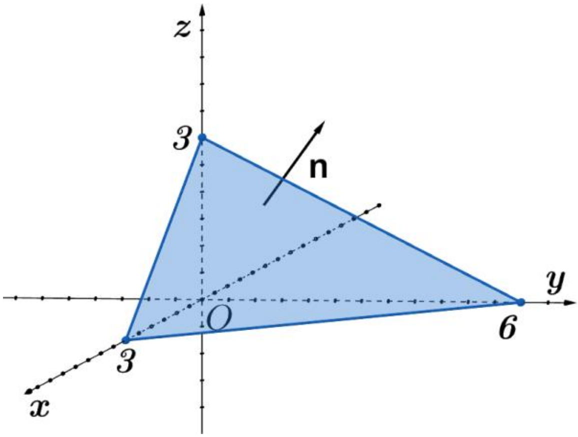


Рис. 26

Так как $S:\ z=3-x-\dfrac{y}{2}$, то $z'_x=-1$, $z'_y=-\dfrac{1}{2}$,

$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+(-1)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}$, $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{3}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$.

Проекцией поверхности S на координатную плоскость Oxy является треугольник D_{xy}, заданный неравенствами $0\le x\le 3,\ 0\le y\le 6-2x$ (см. рис. 27).

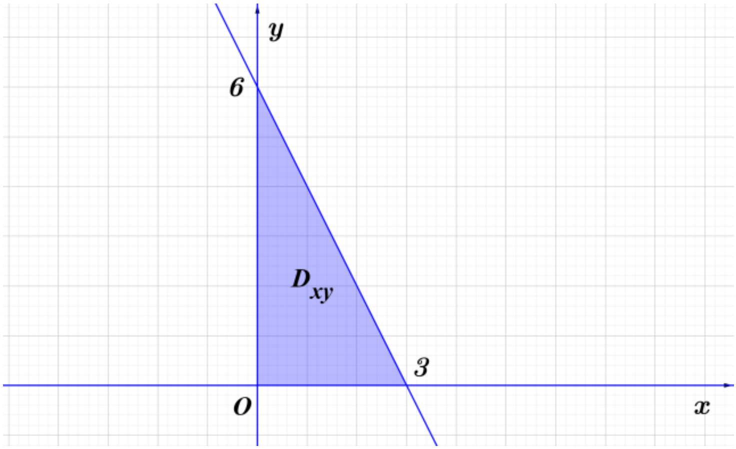


Рис. 27

Таким образом, поток векторного поля равен

$$\Pi = \iint_S 2ydydz + (2x+z)dxdz + (y+2z)dxdy =$$

$$= \iint_S (2y \cdot \frac{2}{3} + (2x+z) \cdot \frac{1}{3} + (y+2z) \cdot \frac{2}{3})ds = \iint_S (\frac{5}{3}z + \frac{2}{3}x + 2y)ds =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (\frac{5}{3}(3 - x - \frac{y}{2}) + \frac{2}{3}x + 2y) \cdot \frac{3}{2}dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (\frac{15}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}y)dxdy = \int_0^3 \left(\frac{15}{2}y - \frac{3}{2}xy + \frac{7}{8}y^2)\right|_0^{6-2x} dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{15}{2}y - \frac{3}{2}xy + \frac{7}{8}y^2)\right|_0^{6-2x} dx =$$

$$= \int_0^3 (\frac{15}{2}(6-2x) - \frac{3}{2}x(6-2x) + \frac{7}{8}(6-2x)^2)dx =$$

$$=\int_0^3 (45-24x+3x^2+\frac{7}{2}(x-3)^2)dx=$$

$$=(45x-12x^2+x^3+\frac{7}{6}(x-3)^3)\Big|_0^3 = 135-108+27+31{,}5=85{,}5.$$

2. Сведение поверхностного интеграла II рода к сумме двойных интегралов.

Вычислим поток векторного поля с помощью формулы

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy=$$

$$=\pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz\pm\iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz\pm$$

$$\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy,$$

в которой поверхность S можно задать функциями $z=z(x,y),\ x=x(y,z),\ y=y(x,z),$ они определены на соответствующих проекциях $D_{xy},\ D_{yz},\ D_{xz}$ поверхности S на координатные плоскости $Oxy,\ Oyz,\ Oxz.$ Знак «+» или «-» перед интегралом соответствует знаку направляющего косинуса вектора нормали к выбранной стороне поверхности.

В пункте 1 направляющие косинусы были вычислены: $\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=\frac{1}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3},$ поэтому перед двойными интегралами будем ставить знак «+». Проекции $D_{xy},\ D_{yz},\ D_{xz}$ поверхности S изображены на рис. 27, 28 и 29.

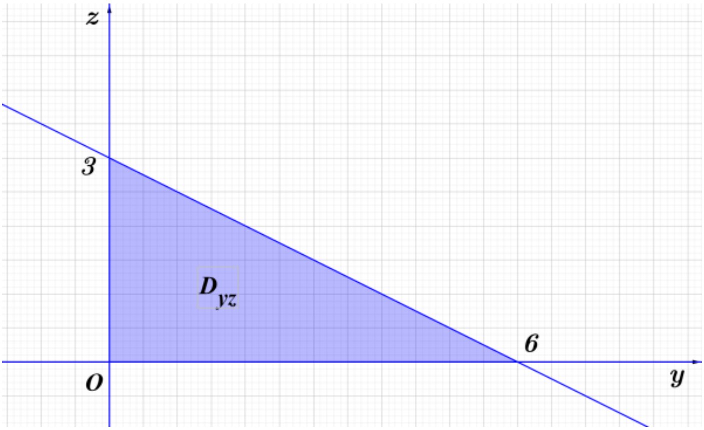


Рис. 28

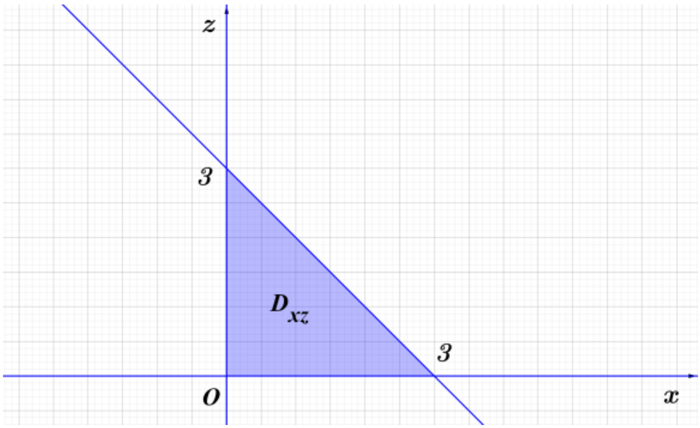


Рис. 29

Выразим поверхность S разными способами: на области D_{yz} $x = 3 - \frac{y}{2} - z,$ на области D_{xz} $y = 6 - 2x - 2z,$ на области D_{xy} $z = 3 - x - \frac{y}{2}.$ По рис. 27, 28 и 29 определяем неравенства, задающие области, $D_{yz}:\ 0 \le y \le 6,\ 0 \le z \le 3 - \frac{y}{2}$, $D_{xz}:\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le z \le 3 - x,\quad D_{xy}:\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 6 - 2x.$

Итак, $\Pi = \iint\limits_S 2ydydz + (2x + z)dxdz + (y + 2z)dxdy =$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} 2ydydz + \iint\limits_{D_{xz}} (2x + z)dxdz + \iint\limits_{D_{xy}} (y + (6 - 2x - y))dxdy =$$

$$= \int_0^6 dy \int_0^{3-\frac{y}{2}} 2ydz + \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2x + z)dz + \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} (6 - 2x)dy =$$

$$= \int_0^6 2yz\Big|_0^{3-\frac{y}{2}} dy + \int_0^3 (2xz + \frac{z^2}{2})\Big|_0^{3-x} dx + \int_0^3 (6y - 2xy)\Big|_0^{6-2x} dx =$$

$$= \int_0^6 (6y - y^2)dy + \int_0^3 (6x - 2x^2 + \frac{(x-3)^2}{2})dx + \int_0^3 (2x - 6)^2 dx =$$

$$= (3y^2 - \frac{y^3}{3})\Big|_0^6 + (3x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{(x-3)^3}{6})\Big|_0^3 + \frac{(2x-6)^3}{6}\Big|_0^3 =$$

$$= 108 - 72 + 27 - 18 + 4,5 + 36 = 85,5.$$

Ответ: $85,5$.

Задание 20. Найти поток векторного поля $\overline{a}(x, y, z) = (z^2 + 2x)\overline{i} + (2x^2 - y)\overline{j} + (y^2 + 3z)\overline{k}$ через замкнутую поверхность $S:\ z^2 = x^2 + y^2,\ z = 3$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности) по формуле Остроградского.

Решение. Вычислим дивергенцию векторного поля $\overline{a}(x, y, z)$:

$$div\,\overline{a} = \frac{\partial(z^2 + 2x)}{\partial x} + \frac{\partial(2x^2 - y)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2 + 3z)}{\partial z} = 2 - 1 + 3 = 4.$$

Для нахождения потока через замкнутую поверхность применим формулу Остроградского

$$\Pi = \oiint\limits_S \overline{a}(x,y,z)d\overline{s} = \iiint\limits_V div\,\overline{a}\,dxdydz.$$

Замкнутая поверхность $S:\ z^2 = x^2 + y^2,\ \ z = 3$ является границей конуса V (см. рис. 30).

В цилиндрической системе координат, где $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$

уравнение $z^2 = x^2 + y^2$ запишется как $z^2 = (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2$ или $z = \rho$, а сам конус V будет определяться неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 3,\ \ \rho \le z \le 3$ (см. рис. 30).

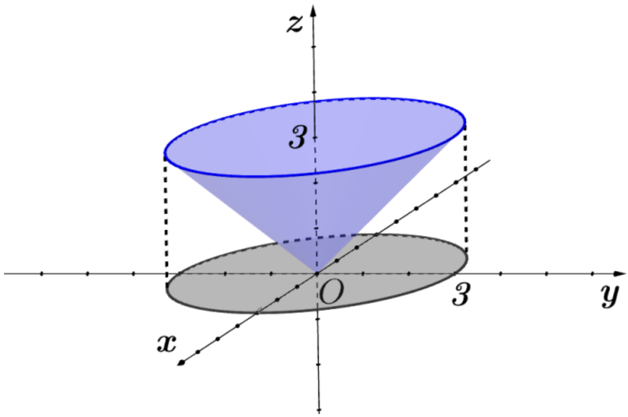


Рис. 30

Тогда по формуле Остроградского

$$\Pi = \oiint\limits_S (z^2 + 2x)dydz + (2x^2 - y)dxdz + (y^2 + 3z)dxdy =$$

$$=\iiint\limits_V 4dxdydz=4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3 d\rho\int\limits_\rho^3 \rho dz=4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3 \rho z\Big|_\rho^3 d\rho=$$

$$=4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3 \rho(3-\rho)d\rho=4\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^3 d\varphi=$$

$$=18\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=36\pi.$$

Так как $\iiint\limits_V dxdydz$ - это объем тела V , то можно воспользоваться школьной формулой нахождения объема конуса, $\iiint\limits_V dxdydz=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot 9\cdot 3=9\pi$ и $\Pi=4\iiint\limits_V dxdydz=36\pi.$

Ответ: 36π.

Задание 21. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(x,y,z)=(2x-3y)\overline{i}-(x+3z)\overline{j}+(2y+z)\overline{k}$ вдоль замкнутой кривой L: $x^2+y^2+z^2=20,\ z=x^2+y^2$, двумя способами: 1) непосредственно и 2) по формуле Стокса.

Решение. 1. Вычислим циркуляцию векторного поля непосредственно, для этого зададим кривую интегрирования L параметрически. Подставив $z=x^2+y^2$ в уравнение окружности $x^2+y^2+z^2=20,$ получим $(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)-20=0$, откуда $x^2+y^2=4$ и $z=4$. Любую окружность вида $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ можно записать с помощью параметрической системы $\begin{cases} x=a+R\cos t, \\ y=b+R\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,\ 2\pi]$, поэтому замкнутая кривая интегрирования $L:\ \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t,\ t \in [0,\ 2\pi]. \\ z = 4, \end{cases}$ По общей формуле вычисления криволинейного интеграла II рода

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt$$

находим циркуляцию векторного поля

$$Ц = \int\limits_L (2x-3y)dx - (x+3z)dy + (2y+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} ((4\cos t - 6\sin t)(-2\sin t) - (2\cos t + 12)\cdot 2\cos t +$$

$$+(4\sin t + 4)\cdot 0)dt = \int\limits_0^{2\pi} (-8\sin t\cos t + 12\sin^2 t - 4\cos^2 t -$$

$$-24\cos t)dt = \int\limits_0^{2\pi} (-4\sin 2t + 6(1-\cos 2t) - 2(1+\cos 2t) -$$

$$-24\cos t)dt = \int\limits_0^{2\pi} (-4\sin 2t + 4 - 8\cos 2t - 24\cos t)dt =$$

$$= (2\cos 2t + 4t - 4\sin 2t - 24\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi.$$

2. Вычислим циркуляцию векторного поля по формуле Стокса $Ц = \oint\limits_L \bar{a}(x,y,z)d\bar{l} = \iint\limits_S (rot\,\bar{a},\bar{n})ds.$ Найдем ротор векторного поля: $rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x-3y & -x-3z & 2y+z \end{vmatrix} =$

$$= \bar{i}\left(\frac{\partial(2y+z)}{\partial y} - \frac{\partial(-x-3z)}{\partial z}\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial(2y+z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x-3y)}{\partial z}\right) +$$

$$+\bar{k}\left(\frac{\partial(-x-3z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x-3y)}{\partial y}\right) = 5\bar{i} + 2\bar{k}.$$

В качестве поверхности S выберем плоский круг (часть плоскости $z=4$, параллельной координатной плоскости Oxy), ограниченный контуром L (см. рис. 31).

Вектор нормали к поверхности S имеет координаты $\bar{n} = (0,0,1)$, так как по теореме Стокса направление движения по кривой интегрирования согласовано со стороной поверхности, ограниченной кривой L, по умолчанию движение по контуру осуществляется против часовой стрелки, а значит, у поверхности S выбрана верхняя сторона.

Проекцией поверхности S на координатную плоскость Oxy является круг D_{xy} с границей $x^2+y^2=4$ (см. рис. 32). В полярной системе координат, где $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ область D_{xy} будет задаваться неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 2.$

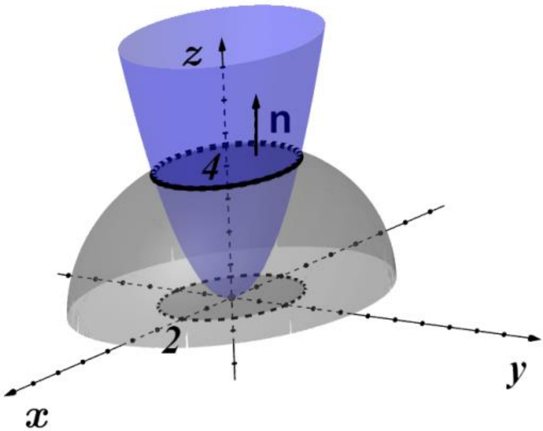


Рис. 31

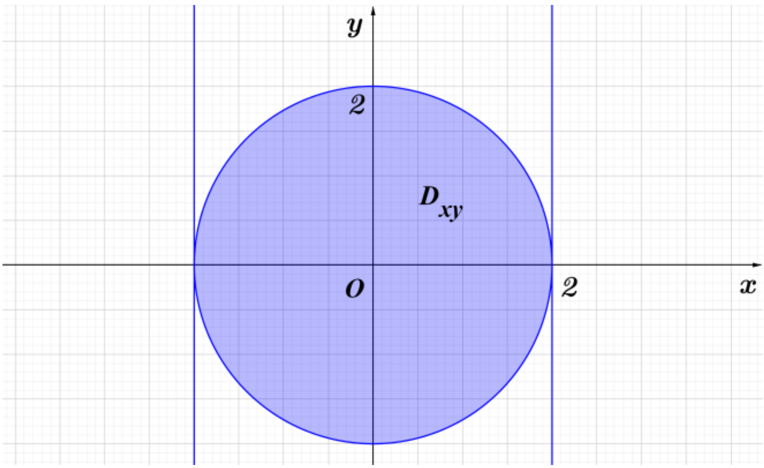


Рис. 32

По формуле Стокса

$$Ц=\iint\limits_S(rot\,\overline{a},\overline{n})ds=\iint\limits_S(5\cdot 0+0+2\cdot 1)ds=2\iint\limits_S ds=2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho = 2\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^2 d\varphi = 4\int_0^{2\pi} d\varphi = 8\pi.$$

Так как $\iint\limits_{D_{xy}} dxdy$ - площадь круга D_{xy}, то двойной интеграл можно было вычислить по школьной формуле: $\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \pi R^2 = 4\pi.$

Ответ: $8\pi.$

Задание 22. Определить вид векторного поля $\overline{a}(x,y,z) = (y^2 - 6xz)\overline{i} + (2xy + z^2)\overline{j} + (2yz - 3x^2)\overline{k}$ (соленоидальное, потенциальное, гармоническое, произвольное).

Решение. 1. Векторное поле $\overline{a}(x,y,z) = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ является соленоидальным, если $div\,\overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0.$

Так как в данной задаче

$$div\,\overline{a} = \frac{\partial(y^2 - 6xz)}{\partial x} + \frac{\partial(2xy + z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2yz - 3x^2)}{\partial z} =$$

$$= -6z + 2x + 2y \neq 0$$

в любой точке области определения векторного поля, то поле $\overline{a}(x,y,z)$ не является соленоидальным.

2. Векторное поле $\overline{a}(x,y,z) = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ является потенциальным, если $rot\,\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \overline{0}.$ Найдем ротор векторного поля:

$$rot\,\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-6xz & 2xy+z^2 & 2yz-3x^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\,(\frac{\partial(2yz-3x^2)}{\partial y}-\frac{\partial(2xy+z^2)}{\partial z})-$$

$$-\bar{j}\,(\frac{\partial(2yz-3x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2-6xz)}{\partial z})+$$

$$+\bar{k}\,(\frac{\partial(2xy+z^2)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2-6xz)}{\partial y})=$$

$$=(2z-2z)\bar{i}-(-6x+6x)\bar{j}+(2y-2y)\bar{k}=\bar{0},$$

значит, векторное поле $\bar{a}(x,y,z)$ потенциально.

3. Поле $\bar{a}(x,y,z)$ не является гармоническим, так как для этого необходимо выполнение двух условий: $div\,\bar{a}=0$ и $rot\,\bar{a}=\bar{0}$.

Ответ: потенциальное.

Библиографический список

1. Гаврилов В.Р., Иванова Б.Б., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. М.: МГТУ, 2003.
2. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика (Решебник). М., 2005.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001. Т. 4.
4. Опорные конспекты по высшей математике. Часть 3: учеб. пособие / К.В. Бухенский, Н.В. Елкина, Г.С. Лукьянова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т.–Рязань, 2011.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т2.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М., 2006.
7. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов. В 3 т. СПб., 2003.

Б о г а т о в а Светлана Викторовна
Л у к ь я н о в а Галина Сергеевна
Ц и п о р к о в а Ксения Андреевна

Расчетные задания по теме
«Кратные, криволинейные и поверхностные
интегралы. Теория поля»

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 20.06.21. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,25.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.