

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

«Теория функций комплексного переменного»

Практические задания

Задание 1. Дано число c . Найти $|c|$, $\arg c$ и записать число c в тригонометрической и показательной формах:

- 1) $\frac{20}{1+8i}$; 2) $\frac{2+i}{2-i}$; 3) $\frac{i-4}{i+4}$; 4) $\frac{4+5i}{3-4i}$; 5) $\frac{2-3i}{1+4i}$;
- 6) $\frac{-i+2}{1+i}$; 7) $\frac{2+3i}{\sqrt{3}+i}$; 8) $\frac{4-i}{1+i\sqrt{3}}$; 9) $\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}$; 10) $\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$;
- 11) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$; 12) $\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$; 13) $\frac{-2+2i}{\sqrt{3}-i}$; 14) $\frac{-2+2i}{-1+\sqrt{3}i}$;
- 15) $\frac{\sqrt{3}-i}{-2+2\sqrt{3}i}$; 16) $\frac{-2+2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$; 17) $\frac{-2+2\sqrt{3}i}{-3+3i}$; 18) $\frac{\sqrt{3}-i}{-2+2i}$;
- 19) $\frac{-4-4i}{-\sqrt{3}+i}$; 20) $\frac{-4-4i}{-3+3\sqrt{3}i}$; 21) $\frac{-\sqrt{3}+i}{-5+5\sqrt{3}i}$; 22) $\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}$;
- 23) $\frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$; 24) $\frac{\sqrt{3}-i}{-3+3\sqrt{3}i}$; 25) $\frac{-1+i}{2-2i}$; 26) $\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$;
- 27) $\frac{-1-i}{1+i}$; 28) $\frac{2+2\sqrt{3}i}{-3-3\sqrt{3}i}$; 29) $\frac{2-2\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}$; 30) $\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

Задание 2. Найти все значения $\sqrt[4]{c}$, где c – соответствующее число задания 1.

Задание 3. Вычислить c^4 , где c – соответствующее число задания 1.

Задание 4. Установить, какие множества комплексных чисел определяются следующими соотношениями:

- 1) $\operatorname{Re} z = 4$; 2) $\operatorname{Im} z = -2$; 3) $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3}$; 4) $|z - i| < 4$;
- 5) $|z - i| \geq 1$; 6) $|z - 2i| \geq 4$; 7) $1 \leq |z - 1 + i| \leq 3$; 8) $\operatorname{Re} z > 4$;
- 9) $\operatorname{Re} z^2 \geq 3$; 10) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 \geq 3$; 11) $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0$; 12) $|z + i| > 4$;
- 13) $\operatorname{Im}(1 - i)(z + 1) = 0$; 14) $\left| \frac{z - i}{z + i} \right| < 1$; 15) $|z + i| + |z - i| < 4$;
- 16) $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$; 17) $|z| = 8$; 18) $|z + 5 - 2i| = 1$; 19) $|z + i| = 5$;
- 20) $|z + i| + |z - 1| = 5$; 21) $\operatorname{Re} z = -2$; 22) $\operatorname{Im} z = 2$; 23) $\operatorname{Im} z^2 = 3$;
- 24) $|z| > 2$; 25) $|z - 1 - i| < 1$; 26) $1 < |z - 1 + 2i| < 3$; 27) $|z + i| + |z - 3| < 3$;
- 28) $\operatorname{Re} z < 2$; 29) $\operatorname{Im} z < 0$; 30) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 4$.

Задание 5. Какие линии заданы следующими уравнениями:

- 1) $z(t) = z_0 + ae^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, где z_0 – комплексное число, a – положительное число;
- 2) $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$;
- 3) $z = t(1+i)$, $t \in \mathbf{R}$;
- 4) $z = a \cos t - ib \sin t$, a и b – вещественные числа, $t \in \mathbf{R}$;
- 5) $z = t - \frac{i}{t}$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$;
- 6) $z = t^2 + it^4$, $t \in \mathbf{R}$;
- 7) $z = -t + i\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leq t \leq 0$;
- 8) $z = e^{i\varphi}$, $-\pi \leq \varphi \leq 0$;
- 9) $z = (1-i)t$;
- 10) $z = t + \frac{i}{t}$;
- 11) $z = a(\cos t + i \sin t)$, $a > 0$;
- 12) $z = 2 + i + 5e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
- 13) $z = 3e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
- 14) $z = t + it^2$, $0 \leq t \leq 3$;
- 15) $z = -t + it^2$, $0 \leq t \leq 3$;
- 16) $z = t - it^2$, $0 \leq t \leq 3$;
- 17) $z = -t - it^2$, $0 \leq t \leq 3$;
- 18) $z = -i + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$;
- 19) $z = -i + 2e^{it}$, $-\pi \leq t \leq 0$;
- 20) $z = 1 + e^{it}$;
- 21) $z = -1 + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$;
- 22) $z = a \cos t + ib \sin t$, $a > 0$, $b > 0$;
- 23) $z = a \cos t + ib \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $a > 0$, $b > 0$;
- 24) $z = a(t - \sin t + i(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$;
- 25) $z = t + it^3$;
- 26) $z = -t + it^3$, $-1 \leq t \leq 0$;
- 27) $z = 1 - i + 3e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$;
- 28) $z = -1 + i + 3e^{i\varphi}$;
- 29) $z = 3e^{i\varphi}$, $-\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;
- 30) $z = -t(1 + 3i)$, $0 \leq t \leq 5$.

Задание 6. Найти отображение линии ℓ , осуществляемое функцией $w = f(z)$ (см. таблицу).

№ №	ℓ	$f(z)$	№ №	ℓ	$f(z)$
1	$ z = 1$	$\frac{1}{z}$	16	$x = 0$	z^3
2	$x^2 + y^2 = 4$	$\frac{1}{z}$	17	$y = -1$	$\frac{1}{z}$
3	$y = x$	z^2	18	$x^2 + (y-1)^2 = 1$	z^2
4	$ z = 2$	z^2	19	$y = x^2 + 1$	$2z + 3$
5	$y = x$	z^3	20	$x^2 + y^2 = 9$	$\frac{1}{z}$
6	$ z = 2$	$z + 2$	21	$x = 1$	$\frac{1}{z}$
7	$y = 1$	$\frac{1}{z}$	22	$y = x^2$	z

8	$x^2 + y^2 = 1$	$\frac{z+3}{z+i}$	23	$y = x^2 + 2$	$\bar{z}$
9	$x = -2$	$\frac{1}{z}$	24	$y = -x$	z^2
10	$x = 2$	z^3	25	$y = 2x$	$z^2 + 2$
11	$(x-1)^2 + y^2 = 1$	z^2	26	$x = -1$	$z^2 + 2$
12	$y = -x$	$z^2 + 2$	27	$ z = 2$	$z^2 + 1$
13	$ z = 3$	$z^2 + 1$	28	$y = x^2$	$2z - 1$
14	$y = x^2 + 1$	z^2	29	$x = 0$	z^2
15	$y = 0$	z^3	30	$y = 0$	$z^2 - 1$

Задание 7. Проверить условия КРЭД (Коши-Римана-Эйлера-Даламбера) и, если они выполняются, найти производные функций:

- 1) $w = z^2 + \bar{z}$; 2) $w = 4z^2 - z$; 3) $w = z^3 + iz$; 4) $w = z \cdot \operatorname{Im} z$;
5) $w = \frac{z}{\bar{z}}$; 6) $w = xy - \frac{1}{2}i(x^2 - y^2)$; 7) $w = z^2$; 8) $w = z^3$; 9) $w = e^z$;
10) $w = \bar{z}$; 11) $w = \sin z$; 12) $w = \operatorname{ch} z$; 13) $w = |z|$; 14) $w = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$;
15) $w = \frac{\operatorname{Im} z}{z}$; 16) $w = \operatorname{Re} z$; 17) $w = \cos z$; 18) $w = \operatorname{sh} z$;
19) $w = z^2 - 2z + 1$; 20) $w = z^3 - 2z + 1$;
21) $w = \frac{az + b}{cz + d}$, a, b, c, d – комплексные числа;
22) $w = \bar{z} + z^3$; 23) $w = z^2 + \operatorname{Im} z$; 24) $w = z^3 + \operatorname{Re} z$;
25) $w = z^3 + \operatorname{Im} z$; 26) $w = x^2 + y^2 + 2xyi$; 27) $w = x^2 - y^2 + 2xyi$;
28) $w = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$; 29) $w = 3xy^2 - x^3 + i(3x^2y - y^3)$;
30) $w = 2xy + i(x^2 - y^2)$.

Задание 8. Найти аналитическую функцию $w = u + iv$, если:

- 1) $u = x^2 - y^2 + xy$, $w(0) = 0$. 2) $v = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $w(0) = 0$.
3) $u = x^2 - y^2 + x$, $w(0) = 2i$. 4) $u = x^3 - 3xy^2$, $w(0) = 0$.
5) $v = 2xy + 3x$, $w(0) = 0$. 6) $v = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$, $w(0) = 0,5$.
7) $u = x^2 - y^2 + 2x$, $w(i) = -1$. 8) $u = 2e^x \sin y$, $w(1) = 0$.
9) $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x > 0$. 10) $v = x^2 + y^2 - 2y$, $w(i) = 1 - i$.
11) $u = e^x \cos y$, $w(0) = 1$. 12) $v = e^x \sin y$, $w(0) = 1$.
13) $u = x^2 - y^2 + 3x + y - 4$, $w(1) = i$. 14) $v = 2e^x \cos y$, $w(0) = 2(1 + i)$.

$$15) u = x^3 - 3y^2x + 2, \quad w(0) = 2 + 3i.$$

$$16) u = x^2 - y^2 + 5x - y + \frac{y+4}{1+x^2+y^2}, \quad w(0) = 4 - i.$$

$$17) u = x^2 - y^2 - xy, \quad w(0) = i. \quad 18) v = 2xy, \quad w(0) = 0.$$

$$19) u = x^2 + y^2, \quad w(i) = 1 - i. \quad 20) u = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{1+x^2+y^2} \right), \quad w(0) = 0.$$

$$21) v = \frac{y}{2} \left(1 + \frac{1}{1+x^2+y^2} \right), \quad w(0) = 0. \quad 22) v = 3x^2y - y^3, \quad w(0) = 0.$$

$$23) u = x^2 + y^2 - 3x + 2y, \quad w(0) = i. \quad 24) u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad w(0) = 0.$$

$$25) v = -\cos x \operatorname{ch} y, \quad w(0) = -i. \quad 26) u = \cos x \operatorname{ch} y, \quad w(0) = 1.$$

$$27) v = \sin x \operatorname{sh} y, \quad w(0) = 0. \quad 28) u = -2xy - 2y, \quad w(1) = -i.$$

$$29) v = -2xy + x, \quad w(1) = 1 + i. \quad 30) u = -xy + x, \quad w(0) = 2i.$$

Задание 9. Вычислить интегралы:

$$1) \int_{\ell} z^3 dz, \text{ где } \ell - \text{ дуга параболы } x = y^2, \text{ соединяющая точки } z = 0 \text{ и } z = 1 + i.$$

$$2) \int_{\ell} (z + 2\bar{z}) dz, \text{ где } \ell - \text{ дуга окружности } |z| = 2, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$3) \int_{\ell} \operatorname{Im} z dz, \text{ если } \ell - \text{ прямолинейный отрезок, соединяющий точку } i \text{ с точкой } 2 + i.$$

$$4) \int_{\ell} |z| dz, \text{ если путь интегрирования – верхняя половина окружности } |z| = 1 \text{ от точки } z = 1 \text{ до точки } z = -1.$$

$$5) \int_{\ell} z \cdot |z| dz, \text{ если путь интегрирования – правая половина окружности } |z| = 1 \text{ от точки } z = i \text{ до точки } z = -i.$$

$$6) \int_{\ell^+} |z| \cdot \bar{z} dz, \text{ где } \ell^+ - \text{ замкнутый контур, состоящий из верхней половины окружности } |z| = 1 \text{ и отрезка } -1 \leq x \leq 1, \quad y = 0.$$

$$7) \int_{\ell} |z| dz, \text{ если } \ell - \text{ нижняя половина окружности } |z| = 1 \text{ от точки } z = -1 \text{ до точки } z = 1.$$

$$8) \int_{\ell} z \cdot \sin z dz, \text{ где } \ell - \text{ отрезок оси } Ox \text{ от точки } x = 0 \text{ до точки } x = 1.$$

$$9) \int_{\ell^+} |z - 1| dz, \text{ где } \ell^+ - \text{ окружность } |z| = 1.$$

$$10) \int_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) dz, \text{ где путь – отрезок прямой, соединяющий данные точки.}$$

$$11) \int_{\ell} z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz, \quad \ell: |z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi.$$

- 12) $\int_{\ell} \bar{z} dz$, где ℓ - треугольник с вершинами в точках $z = 0$, $z = 1$, $z = i$.
- 13) $\int_{\ell} |z| dz$, ℓ - полуокружность $|z| = 3$, $-\pi \leq \arg z \leq 0$.
- 14) $\int_{\ell} z dz$, где ℓ - радиус-вектор точки $z = 2 + i$.
- 15) $\int_{\ell^+} (z - a)^n dz$, где n - целое число, ℓ - окружность $|z - a| = R$.
- 16) $\int_{\ell} z^2 dz$, интегрирование ведется по нижней полуокружности $|z| = 1$ от точки $z = -1$ до точки $z = 1$.
- 17) $\int_{\ell} \frac{dz}{z}$, где ℓ - линия из упражнения 16.
- 18) $\int_{\ell} \operatorname{Im} z dz$, где ℓ состоит из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой i , и прямолинейного отрезка, соединяющего точку i с точкой $2 + i$.
- 19) $\int_0^{1+i} e^z dz$, если линией интегрирования является ломаная, состоящая из отрезков, граничные точки которых находятся в точках 0 , i , $1 + i$.
- 20) $\int_{\ell^+} \frac{dz}{z - a}$, $\ell: |z - a| = R$, a - число.
- 21) $\int_{\ell} \operatorname{Re} \ell z dz$, где ℓ - ломаная, состоящая из прямолинейных отрезков, соединяющих точки 0 , 1 , $1 + 3i$.
- 22) $\int_0^{1+i} (1 + i - 2z) dz$, если путем интегрирования является дуга параболы $y = x^2$.
- 23) $\int_{\ell} z |z| dz$, если путем интегрирования является левая половина окружности $|z| = 1$ от точки $z = i$ до точки $z = -i$.
- 24) $\int_{\ell} z |z| dz$, если путем интегрирования является правая половина окружности $|z| = 1$ от точки $z = -i$ до точки $z = i$.
- 25) $\int_{\ell^+} \frac{dz}{(z - a)^2}$, $\ell: |z - a| = R$.
- 26) $\int_{\ell^+} (2z + 3\bar{z}) dz$, где ℓ - контур, составленный из верхней полуокружности $|z| = 1$ и диаметра, на который она опирается.
- 27) $\int_{\ell^+} z \cdot \operatorname{Re} z dz$, $\ell: |z| = 1$.
- 28) $\int_{\ell^+} \operatorname{Re} z dz$, где ℓ - $\triangle ABC$ с вершинами в точках $z_A = 0$, $z_B = 2$, $z_C = 2 + i$.
- 29) $\int_{\ell} z dz$, где ℓ - дуга параболы $x = t$, $y = 2t^2$, $0 \leq t \leq 1$.

30) $\int_{\ell} e^z dz$, где ℓ - отрезок прямой, соединяющий точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1 + 2i$.

Задание 10. Вычислить интегралы, применяя формулу Коши, интегральную формулу Коши и формулу для производных любого порядка от аналитической функции (направление обхода пути интегрирования положительное):

1) $\int_{\ell} \frac{\cos z}{z - \pi} dz$, $\ell: |z - \pi| = 1$. 2) $\int_{\ell} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{3} z}{z^2 + 1} dz$, $\ell: x^2 + y^2 - 2y = 0$.

3) $\int_{\ell} \frac{e^z}{z^2 + 9} dz$, $\ell: |z| = 1$. 4) См. 3), где $\ell: |z - 3i| = 2$.

5) См. 3) где $\ell: |z + 3i| = 2$.

6) Почему к интегралу $\int_{\ell} ((x - 2y) + i(2x + y)) dz$ можно применять теорему Коши и утверждать, что он равен нулю, а к интегралу $\int_{\ell} ((x + 2y) + i(2x - y)) dz$ теорему Коши применять нельзя? (ℓ - кусочно-гладкий контур).

7) $\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z - 2)(z^2 + 1)}$. 8) $\int_{|z+2i|=2} \frac{\sin z}{(z + i)^2} dz$.

9) $\int_{|z-1|=2} \frac{z+1}{z^3(z-2)} dz$. 10) $\int_{|z-3|=0,5} \frac{\sin 2z}{z^2 - 5z + 6} dz$.

11) См. 10), где $\ell: |z - 2| = 0,5$. 12) См. 11), где $\ell: |z - 4| = 0,5$.

13) $\int_{\ell} \frac{dz}{(z^2 + 4)(z + 2)}$, где $\ell: |z - 2i| = 1$.

14) См. 13), где $\ell: |z + 2i| = 1$. 15) См. 13), где $\ell: |z + 2| = 1$.

16) См. 13), где $\ell: |z - 2| = 1$. 17) См. 13), где $\ell: |z| = 3$.

18) $\int_{\ell} \frac{e^z dz}{(z + 1)^3(z - 2)}$, $\ell: |z - 2| = 1$. 19) См. 18), где $\ell: |z + 1| = 1,5$.

20) См. 18), где $\ell: |z - 1 + i| = 2$. 21) См. 18), где $\ell: |z - 2 - i| = 0,5$.

22) $\int_{\ell} (z - a)^n dz$, n - натуральное число, $\ell: |z - 1| = 2$.

23) $\int_{\ell} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz$, $\ell: x^2 + y^2 + 6y = 0$. 24) $\int_{\ell} \frac{\sin z dz}{z^2 + 4}$, где $\ell: x^2 + y^2 - 6y = 0$.

25) $\int_{\ell} \frac{\sin z dz}{z^2 + 4}$, где $\ell: x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$. 26) $\int_{\ell} \frac{e^z dz}{(z - i)^3(z - 1)}$, $\ell: x^2 + y^2 - 2y = 0$.

27) $\int_{\ell} \frac{e^z dz}{(z - i)^3(z - 1)}$, $\ell: x^2 + y^2 = 4$. 28) $\int_{\ell} \frac{e^z dz}{(z - i)^3(z - 1)}$, $\ell: x^2 + y^2 - 2x = 0$.

29) $\int_{|z|=3} \frac{\sin z dz}{(z + 2i)^3}$. 30) $\int_{|z|=4} \frac{\sin z dz}{(z - 2i)^3}$.

Задание 11. Разложить функции в ряд Тейлора в окрестностях точки z_0 и найти радиус сходимости R :

1) $w = \frac{1}{z-a}, \quad z_0 = b \neq a.$

2) $w = \frac{z}{z^2+4}, \quad z_0 = 0.$

3) $w = \frac{z-1}{z^2-4}, \quad z_0 = 0.$

4) $w = e^{3z}, \quad z_0 = 0.$

5) $w = \sin z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$

6) $w = \sin 2z, \quad z_0 = 0$

7) $w = e^{az}, \quad z_0 = 0.$

8) $w = \cos z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$

9) $w = \cos 2z, \quad z_0 = 0.$

10) $w = \cos az, \quad z_0 = 0.$

11) $w = \operatorname{sh} 2z, \quad z_0 = 0.$

12) $w = \operatorname{ch} z, \quad z_0 = 0.$

13) $w = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = 0.$

14) $w = \frac{1}{(z+i)(z+2i)}, \quad z_0 = 4i.$

15) $w = \ln(5+z), \quad z_0 = 1.$

16) $w = \frac{z}{z+4}, \quad z_0 = -3.$

17) $w = \frac{z^2}{z^2-4}, \quad z_0 = -3.$

18) $w = \frac{z}{(z-1)(z-3)}, \quad z_0 = 5.$

19) $w = \frac{z^2}{(z-2)(z-4)}, \quad z_0 = -3.$

20) $w = \ln(z^2-5z+6), \quad z_0 = 7.$

21) $w = \frac{1}{\sin z}, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$

22) $w = \frac{1}{(z-1)(z+2)}, \quad z_0 = -3.$

23) $w = \frac{z}{(z+1)(z+4)}, \quad z_0 = 4.$

24) $w = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad z_0 = 0.$

25) $w = \frac{2}{(1+z)^3}, \quad z_0 = 0.$

26) $w = \frac{z(z+3)}{(3-z)^3}, \quad z_0 = 0.$

27) $w = \frac{1}{z^2+3}, \quad z_0 = 1.$

28) $w = \frac{1}{(1+z^2)^2}, \quad z_0 = 2.$

29) $w = \frac{1}{(z+1)(z-2)}, \quad z_0 = 0.$

30) $w = \frac{2z-5}{z^2-5z+6}, \quad z_0 = 0.$

Задание 12. Разложить функции в ряд Лорана.

1) $w = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}, \quad z_0 = i;$

2) $w = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}, \quad z_0 = 1;$

3) $w = e^{-z^2}, \quad z_0 = 0;$

4) $w = \cos \frac{1}{z+1}, \quad z_0 = -1;$

5) $w = \sin \frac{1}{(z-i)^2}, \quad z_0 = i;$

6) $w = (z+2) \sin \frac{1}{z+2}, \quad z_0 = -2;$

$$7) w = e^{\frac{1}{z-2}} (z-2)^3, \quad z_0 = 2;$$

$$8) w = (z-i)^2 \cos \frac{1}{z-i}, \quad z_0 = i;$$

$$9) w = \frac{1}{z(z-2)}, \quad z_0 = 2;$$

$$10) w = \frac{1}{z(z+2)}, \quad z_0 = -2;$$

$$11) w = \frac{1}{(z-a)^n}, \quad n \geq 0 - \text{целое}, \quad z_0 = a;$$

$$12) w = \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}, \quad z_0 = -1;$$

$$13) w = \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}, \quad z_0 = 2;$$

$$14) w = \frac{z-3}{z^2-3z+2}, \quad z_0 = 1;$$

$$15) w = \frac{z-3}{z^2-3z+2}, \quad z_0 = 2;$$

$$16) w = \frac{1}{(z-1)(z-3)} \text{ в области } 1 < |z| < 3;$$

$$17) w = \frac{1}{(z+1)(z+2)} \text{ в области } |z| > 2;$$

$$18) w = \frac{1}{z^2-5z+6} \text{ в области } 2 < |z| < 3;$$

$$19) w = \frac{1}{z^2-5z+6} \text{ в области } |z| > 3;$$

$$20) w = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)} \text{ в кольце } 0 < |z+1| < 3, \quad z_0 = -1;$$

$$21) w = \frac{1}{z(z-3)^2} \text{ в кольце } 1 < |z-1| < 2, \quad z_0 = 1;$$

$$22) w = \frac{1}{z^2(z^2-9)} \text{ в кольце } 1 < |z-1| < 2, \quad z_0 = 1;$$

$$23) w = \frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)} \text{ в области } |z| > 2, \quad z_0 = 0;$$

$$24) w = \frac{1}{z(1+z)^2} \text{ в кольце } 0 < |z| < 1, \quad z_0 = 0;$$

$$25) w = \frac{z-1}{z^2-z-6} \text{ в кольце } 2 < |z| < 3, \quad z_0 = 0;$$

$$26) w = \frac{z-1}{z^2-z-6} \text{ в области } |z| > 3, \quad z_0 = 0;$$

$$27) w = \frac{1}{(z-4)(z-6)} \text{ в кольце } 4 < |z| < 6, \quad z_0 = 2;$$

$$28) w = \frac{1}{(z-2)(z+4)} \text{ в области } 2 < |z| < 4, \quad z_0 = 0;$$

$$29) w = \frac{1}{z^2-4}, \quad z_0 = \infty;$$

$$30) w = \frac{1}{(z+3)(z+4)}, \quad z_0 = 7.$$

Задание 13. Найти вычеты во всех конечных особых точках функции $w = f(z)$:

- 1) $w = \frac{\sin 4z}{(z-3)^4}$;
- 2) $w = \frac{z^2}{(z-3)^2}$;
- 3) $w = \frac{z}{(z+i)(z-2i)}$;
- 4) $w = \frac{z}{(z+2)(z+3)}$;
- 5) $w = \frac{\sin(z-3)}{(z-1)^2(z+1)}$;
- 6) $w = \frac{z^3}{z^2+4}$;
- 7) $w = z \cos \frac{1}{z}$;
- 8) $w = \frac{1}{z(z+3)}$;
- 9) $w = \frac{1}{z^2(z+1)}$;
- 10) $w = \frac{1}{(z^2+1)(z-3)}$;
- 11) $w = \frac{1}{z^3(z^2+4)}$;
- 12) $w = \frac{\sin z}{z^2}$;
- 13) $w = \cos z / z^2$;
- 14) $w = e^z / (z-2)^2$;
- 15) $w = \frac{\sin z}{(z-1)^2(z+i)}$;
- 16) $w = \frac{1}{z-z^3}$;
- 17) $w = \frac{1}{z(z^2+1)}$;
- 18) $w = e^{1/(z-2)}$;
- 19) $w = \sin z / z^2(z+1)$;
- 20) $w = \frac{\cos z}{z^4(z+5)}$;
- 21) $w = \frac{z^4-1}{z^6-1}$;
- 22) $w = \frac{1}{z^2+z^3}$;
- 23) $w = \frac{1}{(z^2+1)^2}$;
- 24) $w = \frac{1}{z(z^2+9)}$;
- 25) $w = \frac{z^2}{(1+z)^3}$;
- 26) $w = \frac{1}{\sin z}$;
- 27) $w = \operatorname{th} z$;
- 28) $w = \frac{1}{e^z-1}$;
- 29) $w = \frac{\cos z}{(z-1)^2}$;
- 30) $w = \frac{1}{z^3(z-2)}$.

Задание 14. Вычислить интегралы по замкнутому контуру с помощью вычетов (направление обхода контуров является положительным).

- 1) $\oint_{|z|=4} \frac{\sin 5z dz}{(z-1)^2(z-2)(z-5)}$;
- 2) $\oint_{|z|=2} \frac{z^{12} dz}{z^8+1}$;
- 3) $\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^4 dz}{z^6-1}$;
- 4) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z-2}{z^3-z^2} dz$;
- 5) $\oint_{|z-2|=1} \frac{z dz}{(z-2)^2(z+i)}$;
- 6) $\oint_{|z|=1.5} \frac{z dz}{(z-2)^2(z+i)}$;
- 7) $\oint_{|z|=3} \frac{z dz}{(z-2)^2(z+i)}$;
- 8) $\oint_{|z+i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2}$;
- 9) $\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2}$;
- 10) $\oint_{|z|=1.5} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2}$;
- 11) $\oint_{|z-3+i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2}$;
- 12) $\oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2}$;
- 13) $\oint_{|z|=0.5} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2}$;
- 14) $\oint_{|z|=0.5} \frac{e^z dz}{(z-1)z^3}$;
- 15) $\oint_{|z-1|=0.5} \frac{e^z dz}{(z-1)z^3}$;
- 16) $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{(z-1)z^3}$;
- 17) $\oint_{|z|=1} \frac{z dz}{2\sin^2 z - 3}$;
- 18) $\oint_{|z|=2} \frac{z dz}{2\sin^2 z - 3}$;

$$19) \oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z+i)};$$

$$20) \oint_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^8 + 1};$$

$$21) \oint_{|z|=3} \frac{z^5 dz}{z^{10} - 1};$$

$$22) \oint_{|z|=3} \frac{\sin \pi z}{z^2 + 2z} dz;$$

$$23) \oint_{|z|=3} \frac{\cos \pi z}{z^2 + 2z} dz;$$

$$24) \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz;$$

$$25) \oint_{|z|=2} \frac{e^z + z}{z^2 + z} dz;$$

$$26) \oint_{|z|=3} \frac{z^2 dz}{z^3 - 8};$$

$$27) \oint_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{(z+1)^2(z+i)};$$

$$28) \oint_{|z+1|=1} \frac{z^3 dz}{(z+1)^2(z+i)};$$

$$29) \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(e^z - e)};$$

$$30) \oint_{|z-1-2\pi i|=1} \frac{dz}{z^2(e^z - e)}.$$

Задание 15. Вычислить интегралы (x – действительная переменная):

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3};$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(1 + x^2)^4};$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 4)};$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 25)(x^2 + 9)};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1};$$

$$6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(1 + 4x^2)^4};$$

$$7) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx;$$

$$8) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx;$$

$$9) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)^2} dx;$$

$$10) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 16} dx;$$

$$11) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(4 + x^2)^4};$$

$$12) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$13) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^2};$$

$$14) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx;$$

$$15) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 25)^2};$$

$$16) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 36} dx;$$

$$17) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx;$$

$$18) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - x}{x^4 + 1} dx;$$

$$19) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 25} dx;$$

$$20) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 9} dx;$$

$$21) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 49)^2} dx;$$

$$22) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 4} dx;$$

$$23) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x^2 + 1} dx;$$

$$24) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx;$$

$$25) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + 9} dx;$$

$$26) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^4 + 1} dx;$$

$$27) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$28) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos 3x}{x^2 + 9} dx;$$

$$29) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx;$$

$$30) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 2}{x^4 + 16} dx.$$

Задание 16. Вычислить интегралы, используя вычеты.

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t};$$

$$2) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2} + \cos t};$$

$$3) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2} + \sin t};$$

$$4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} + \sin t};$$

$$5) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} + \cos t};$$

$$6) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{10} + \cos t};$$

$$7) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{17 + \cos t}};$$

$$8) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{26 + \cos t}};$$

$$9) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{17 + \sin t}};$$

$$10) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{37 + \sin t}};$$

$$11) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2 \sin t};$$

$$12) \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{\sin t + 6};$$

$$13) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5 + 4 \cos t)^2};$$

$$14) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5/4 - \cos t};$$

$$15) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin t + \alpha}, \alpha > 0;$$

$$16) \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos t}{2 - \sin t} dt;$$

$$17) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}, |a| < 1;$$

$$18) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{26 + \sin t}};$$

$$19) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2}, a > b > 0;$$

$$20) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos^2 t)};$$

$$21) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + 2 \cos t)^2};$$

$$22) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin t + \cos t + 2};$$

$$23) \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt;$$

$$24) \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt;$$

$$25) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \sin^2 t};$$

$$26) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \cos^2 t};$$

$$27) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p \cos t + p^2}, 0 < p < 1;$$

$$28) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t dt}{1 - 2p \cos 2t + p^2}, 0 < p < 1;$$

$$29) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t dt}{1 - 2p \cos t + p^2}, p > 1;$$

$$30) \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{1 - 2p \sin t + p^2}, 0 < p < 1.$$

Кафедра Высшей математики