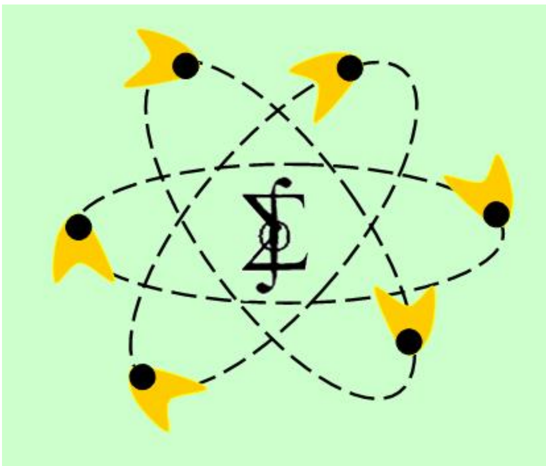
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.В. ДУБОВИКОВ,

К.А. ЦИПОРКОВА

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ



Рязань 2013

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

А.В. ДУБОВИКОВ,

К.А. ЦИПОРКОВА

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Учебное пособие

Рязань 2013

УДК 519.21

Вероятностные и статистические расчеты: учеб. пособие/ А.В. Дубовиков, К.А. Ципоркова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2013. 16 с.

Излагаются основные вопросы стандартной программы «Теория вероятностей и математическая статистика».

Рекомендуется студентам всех направлений и специальностей дневной и заочной форм обучения.

Табл. 7. Ил. 58. Библиогр.: 17 назв.

Вероятностное пространство, случайная величина, закон распределения, цепи Маркова, случайная функция, математическая статистика

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

Д у б о в и к о в Андрей Викторович
Ц и п о р к о в а Ксения Андреевна

Вероятностные и статистические расчеты

Редактор Н.А. Орлова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать . Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 10,25.
Тираж 100 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ВВЕДЕНИЕ

В основе теории вероятностей лежат понятия: ***опыт, событие, вероятность***. Пусть предсказать появление какого-либо события невозможно. Однако известно, что некоторые события появляются объективно чаще, чем другие. Для того чтобы количественно характеризовать степень уверенности объективного наблюдателя в том, что данное событие A произойдет, используется функция $A \mapsto P(A)$,называемая ***вероятностью события A***.

Исторически сложился ***частотный подход*** к определению вероятности. Если опыт повторяется n раз и каждый его исход не зависит от остальных, то частота появления события A (в серии из n независимых испытаний) определяется соотношением:

$$\omega_n(A) = \frac{n(A)}{n},$$

где n(A) – число опытов, приведших к появлению события A. Вероятностью события A в этом случае называют предельное значение его частоты при неограниченном увеличении числа опытов. Однако смысловое наполнение термина «предельное значение» остается неясным, так как $\{\omega_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ может меняться от одной серии опытов к другой. И, следовательно, привычное (из курса математического анализа) определение предела числовой последовательности здесь не применимо.

Еще раз следует подчеркнуть характерные черты ***случайного события.*** Если комплекс условий, учтенных при описании опыта (эксперимента), однозначно определяет его исход, то эксперимент, а также появляющиеся необходимо в результате события называются ***детерминированными***. Если же при осуществлении опыта вмешиваются неучтенные при его описании факторы и в результате исход его не может быть предсказан однозначно, то этот исход называют ***случайным*** событием. Отметим, что детерминированное событие можно рассматривать как вырожденное случайное, и так как его частота равна единице

($n(A)=n$), то естественно считать и его вероятность равной единице.

В опыте с подбрасыванием монеты его исход определяется стороной монеты, обращенной вверх (Г – герб, Ц – цифра). В этот классический пример опыта со случайным исходом, однако, могут быть внесены дополнения, которые сделают его исход детерминированным. Если точно задать начальные условия броска: начальное положение, начальные векторы скорости и угловой скорости; составить (и решить) уравнения движения (падения); описать момент удара о поверхность (пол) и последующие перемещения, то (по крайней мере, теоретически) возможно однозначно предсказать исход опыта. Но уже одно перечисление факторов, участвующих в «точной» модели, заставляет усомниться в возможности ее реализации.

Построение математической модели случайного опыта опирается на так называемое ***пространство элементарных событий***

$$\Omega = \{\omega\},$$

обладающее следующими свойствами:

1) Ω содержит все возможные исходы ω эксперимента;
2) элементы Ω – ***элементарные исходы*** ω должны быть взаимно исключающимися (несовместными);
3) элементарные исходы ω нельзя «расщепить» на более мелкие, т.е. все случайные события строятся из них, как из своего рода атомов. Поэтому любое случайное событие есть объединение приводящих к нему элементарных исходов.

Примеры

1. В случайном эксперименте с подбрасыванием монеты

$$\Omega = \{Г; Ц\}.$$

2. В опыте с двукратным подбрасыванием монеты

$$\Omega = \{(Г,Г); (Г,Ц); (Ц,Г); (Ц,Ц)\}.$$

Случайное событие A – выпала, по крайней мере, одна цифра:

$$A = \{(Г,Ц); (Ц,Г); (Ц,Ц)\}.$$

Легко представить себе опыт, состоящий из r-кратного подбрасывания монеты, каждый его элементарный исход представляет собой последовательность, содержащую r букв (Г или Ц). Количество элементарных исходов равно 2^r.

3. Бросается игральная кость (правильный куб с гранями, помеченными цифрами от 1 до 6). Пространство элементарных исходов содержит шесть элементов:

$$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}.$$

4. Из урны, содержащей N пронумерованных шаров (от 1 до N), случайным образом извлекается шар:

$$\Omega = \{1;2;...;N\}.$$

5. Вращение колеса рулетки. Угол остановки может принимать значение от 0 до 2π:

$$\Omega = \{\varphi : 0 \le \varphi < 2\pi\}.$$

6. Деталь, прошедшая технический контроль, может иметь размер $a \pm \delta$:

$$\Omega = \{x : x \in [a-\delta; a+\delta]\}.$$

7. Многократное включение прибора до выхода его из строя (наработка на отказ); число включений может принимать значения от 1 и (теоретически) до ∞:

$$\Omega = \{k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Множество Ω также является событием, но событием, которое обязательно происходит. Такое событие называется ***достоверным*** (сравните с определением детерминированного события). Событие, не имеющее ни одного благоприятствующего исхода, т.е. Ø, называется ***невозможным***. Введение этих двух последних объектов делает возможным оперирование со случайными событиями, как с любыми другими множествами.

1. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть есть основания (экспериментальные или общего порядка) считать, что исходы опыта несовместны, равновозможны и, следовательно, имеют одинаковую вероятность (примеры 1 – 4). В этом случае для расчетов может быть использована классическая ***модель Лапласа***, названная в $[1]$ схемой случаев.

Эта модель рассматривает пространство элементарных событий, состоящее из конечного числа исходов: $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_N\}$.

Для события $A = \{\omega_k\} \subset \Omega$ вероятность определяется формулой

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}, \tag{1}$$

$N(A)$ - количество элементов подмножества A, т.е. число элементарных исходов (случаев), благоприятствующих событию A.

В простых ситуациях, допускающих непосредственный подсчет как $N(A)$, так и N – общего числа случаев, применение формулы (1) не вызывает затруднений. Так, в примере 2 введения $N = 4$; $N(A) = 3$ и, следовательно, $P(A) = 0{,}75$.

Пример. Игральный кубик подбрасывается 2 раза. В этой ситуации пространство элементарных исходов содержит 36 элементов – пар $(i, j)_{i=\overline{1,6}}^{j=\overline{1,6}}$, где i – число очков, выпавших первый раз, j – второй. Требуется определить наиболее вероятное значение произведения ij и его вероятность. Следующая таблица дает значение произведения ij для всех элементарных исходов.

		i					
		1	2	3	4	5	6
j	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36

Простой анализ позволяет определить, что в этой таблице наибольшее число раз встречается 12 или 6: $N(12) = N(6) = 4$; $N = 36$;

$$P(6) = P(12) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Более сложные случаи требуют применения ***комбинаторных формул***, к рассмотрению которых переходим далее [5].

1. Выбор из различных групп. Имеется r групп различных предметов, например окрашенных в разные цвета шаров. В первой находится n_1 предметов (перенумерованных от 1 до n_1 красных шаров), во второй – n_2 предметов (n_2 перенумерованных зеленых шаров) и т.д. Наконец, в r-й группе – n_r предметов (n_r синих шаров). Опыт состоит в том, что из каждой группы последовательно извлекается один предмет. В результате образуется комбинация из r предметов. При подсчете числа таких комбинаций воспользуемся основным правилом комбинаторики – ***правилом умножения***. Это правило вытекает из простейших соображений: на каждый из n_1 способов извлечь предмет из первой группы приходится n_2 способов извлечь предмет из второй. Продолжая эту цепочку рассуждений, приходим к формуле

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r.$$

2. Выбор с возвращением. Имеется группа из n предметов. Опыт состоит в том, что на первом этапе извлекается предмет, фиксируется (в случае перенумерованных шаров – номер) и возвращается назад. На втором этапе мы, следовательно, имеем дело вновь с группой из n предметов и вновь вынимаем один предмет. Повторив это действие r раз, получим комбинацию $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$, где i_k – номер извлеченного на k-м этапе шара. Так как каждый этап имеет n различных исходов, то правило умножения дает:

$$N = n^r.$$

3. Выбор без возвращения. Опыт повторяет предыдущий за исключением того, что извлеченный на очередном этапе предмет не возвращается. Тогда первый этап реализуется n способами, второй – $(n-1)$, третий – $(n-2)$; … Окончательно правило умножения дает:

$$N = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

В частном случае, когда $r = n$, получаем

$N = n! = P_n$ – ***число перестановок*** из n элементов.

4. Число сочетаний. Повторяются условия предыдущего опыта. Однако комбинации, которые можно получить перестановкой элементов, считаются одинаковыми. Т.е. при $r = 3$ (a,b,c); (a,c,b);…; (c,a,b) – неразличимы. Отличие от предыдущего пункта состоит в том, что все извлеченные элементы не выстраиваются в порядке извлечения, а могут быть «перемешаны». Число таких комбинаций называется числом сочетаний из n по r и обозначается $C_n^r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$. Иными словами,

C_n^r – это число различных r-элементарных подмножеств n элементного множества. Легко заметить, что число сочетаний из n по r меньше числа комбинаций предыдущего пункта в r! раз (число способов упорядочить r-элементное подмножество):

$$N = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

5. Число разбиений на различные группы. Группа из n различных предметов разбивается на r подгрупп так, что в i подгруппе содержится n_i предметов:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_i + \ldots + n_r.$$

Первую подгруппу можно сформировать $C_n^{n_1}$ способами. Затем из оставшихся $n - n_1$ предметов формируется вторая подгруппа $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами и т.д. Правило умножения даёт:

$$N = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot 1 = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Пример. Опыт, который может иметь r различных исходов, повторяется n раз. Определить вероятность того, что при этом i-й исход осуществится n_i раз. Общее число случаев расчитывается по формуле п.2:

$$N = r^n .$$

Число случаев, благоприятствующих интересующему нас событию A

$$N(A) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} .$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!\cdot r^n} .$$

Пример. Экзамен сдают r студентов. Имеется n экзаменационных билетов. Определить вероятность того, что при случайном выборе всем студентам достанутся разные билеты.

Применение формулы (1) сводится к определению N и $N(A)$. В данном случае каждый из студентов может получить билет n способами (выбранный билет возвращается) и, следовательно, знаменатель (1) рассчитывается в соответствии с пунктом 2

$$N = n^r .$$

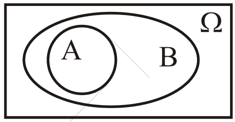
Для того чтобы событие A – билеты разные – осуществилось, следует учесть, что первый студент получает билет n способами, второй – $(n-1)$ и т.д., т.е. имеет место ситуация пункта 3

$$N(A) = \frac{n!}{(n-r)!} \;\Rightarrow\; P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{n!}{n^r(n-r)!} .$$

2. КОМБИНАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

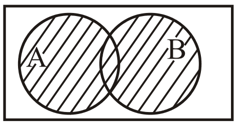
Рассматривая случайные события как множества элементарных исходов (подмножества пространства элементарных исходов Ω), введём основные операции над событиями.

Если из наступления события A следует наступление события B, то говорят, что ***A влечет B.*** Иными словами, A является подмножеством B: $A \subset B$. При этом $\varnothing \subset A, \forall A$. Для иллюстрации удобно пользоваться диаграммами Эйлера, на которых Ω будем изображать в виде прямоугольника, считая множество его точек элементарными исходами. Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

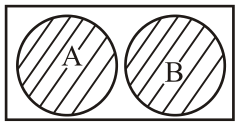


A⊂B

Объединением событий A и B называется событие C, которое состоит в том, что происходит либо событие A, либо событие B, либо оба они одновременно. Обозначается объединение $C = A \cup B$. В случае когда A и B не имеют общих точек (исходов), будем использовать обозначение $C = A + B$. Это определение легко распространить на случай объединения любого конечного или счетного числа событий: $\bigcup\limits_k A_k$ – событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из событий A_k. В случае когда события A_k не имеют общих элементарных исходов (множества A_k не пересекаются), используется обозначение $\sum\limits_k A_k$.

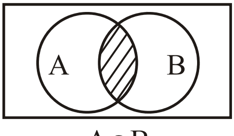


A∪B



A+B

Пересечением событий A и B называется событие C, которое состоит в том, что события A и B происходят одновременно.



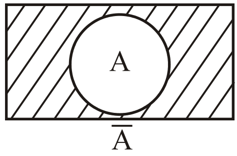
A∩B

Пересечение событий обозначается

$$C = A \cap B = AB.$$

Пересечение любого конечного или счетного числа событий A_k обозначается $\bigcap\limits_k A_k$.

События A и B называются несовместимыми, если $A \cap B = \varnothing$.



Событием, ***противоположным*** событию A, называется событие $\overline{A}$, которое состоит в том, что события A не происходит. Очевидно,

$$\overline{\Omega}=\varnothing;\qquad \overline{\varnothing}=\Omega;\qquad \left(\overline{\overline{A}}\right)=A.$$

Вероятность противоположного события

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{N\left(\overline{A}\right)}{N}=\frac{N-N(A)}{N}=1-P(A). \qquad (2)$$

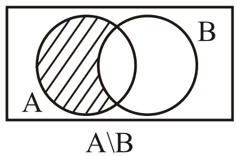
Формула, выражающая вероятность $A\cup B$ через вероятности A и B, называется ***формулой сложения вероятностей***. Если события A и B несовместны, то $N(A+B)=N(A)+N(B)$ и, следовательно,

$$P(A+B)=\frac{N(A+B)}{N}=\frac{N(A)}{N}+\frac{N(B)}{N}=P(A)+P(B). \qquad (3)$$

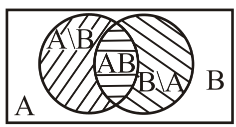
Если рассматриваются n несовместимых событий A_k, $k=\overline{1,n}$, то имеет место обобщение формулы (3):

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k), \qquad (3')$$

т.е. вероятность суммы (объединения) несовместимых событий равна сумме вероятностей.



Рассмотрение случая совместных событий предварим введением еще одной операции: разность случайных событий A\B представляет собой событие, которое состоит в том, что событие A происходит, а событие B не происходит. Анализ диаграммы Эйлера позволяет записать следующие соотношения:



$$A=A\backslash B+A\cap B;$$

$$B=B\backslash A+A\cap B;$$

$$A\cup B=A\backslash B+B\backslash A+A\cap B.$$

Воспользовавшись правилом (3) сложения вероятностей, получим:

$$P(A)=P(A\backslash B)+P(AB);$$

$$P(B)=P(B\backslash A)+P(AB);$$
$$P(A\cup B)=P(A\backslash B)+P(B\backslash A)+P(AB).$$

Исключив из этих соотношений $P(A\backslash B)$ и $P(B\backslash A)$, имеем:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{4}$$

Формула (4) сложения вероятностей совместных событий обобщается на случай объединения n событий следующим образом:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=P_1-P_2+\ldots+(-1)^{n-1}P_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}P_k\,, \tag{4'}$$

где $P_1=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$ – сумма вероятностей всех событий A_k;

$P_2=\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$ – сумма вероятностей всех попарных пересечений несовпадающих событий A_i, A_j $(i\ne j)$;

……………………………………………………..

$P_k=\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k})$ – сумма вероятностей всех возможных пересечений каких-либо k несовпадающих событий $A_{i_1}, A_{i_2},\ldots, A_{i_k}$ (всего в этой сумме $C_n^{\,k}$ слагаемых);

………………………………………………………

$P_n=P(A_1A_2\ldots A_n)$ – вероятность пересечения всех n событий.

Соотношение легко проверяется для $n=2$, переходя в (4); доказать его можно методом математической индукции.

В качестве примера рассмотрим ***задачу о совпадениях***: каждый из n студентов выучил один из n экзаменационных билетов. Определить вероятность того, что при случайном распределении билетов хотя бы одному из n студентов достанется «свой» билет.

Обозначив A_k – студенту с номером k достался «свой» билет, получим $A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ – хотя бы одному студенту достался «свой» билет, тогда

$$P(A)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}P_k\ ,$$

где $P_k=\sum\limits_{1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_k\le n}P\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right)$. Так как событие $A_{i_1},A_{i_2},\ldots,A_{i_k}$ состоит в том, что k студентам с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_k$ достались «свои» билеты, то

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right)=\frac{N\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right)}{N}=\frac{(n-k)!}{n!}\,,$$

где $N=n!$ – число способов распределить n билетов;
$N\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right)=(n-k)!$ – число способов распределить $(n-k)$ билетов, оставшихся после того, как студенты с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_k$ получили свои билеты.

Существенно то, что все слагаемые суммы, определяющей P_k, равны и не зависят от индексов $i_1,i_2,\ldots,i_k$. Поэтому

$$P_k=C_n^{\ k}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{1}{k!}\,.$$

Тогда искомая вероятность

$$P(A)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\,.$$

Анализ этой формулы при $n\to\infty$ в сопоставлении со стандартным разложением функции e^x в степенной ряд (ряд Маклорена) при $x=-1$

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{k!}+\ldots$$

позволяет заключить:

$$P(A)\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\frac{1}{e}\approx 0{,}63\,.$$

Для того чтобы записать формулу умножения вероятностей, необходимо введение нового понятия – ***условной вероятности***.

Условной вероятностью события A при условии B называется вероятность A, найденная в вероятностном пространстве

Ω_B, измененном тем, что событие B произошло. Опираясь на схему случаев, получаем формулу условной вероятности $P(A/B)$. Так как событие B произошло, то общее число случаев уже не N, а N(B). Из них N(AB) благоприятствуют осуществлению события A (теперь A может произойти лишь совместно с B). Поэтому

$$P(A/B)=\frac{N(AB)}{N(B)}=\frac{N(AB)/N}{N(B)/N}=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{5}$$

Формула (5) обычно используется для строгого определения условной вероятности. Однако при решении практических задач обычно условная вероятность находится другим путем и используется затем для вычисления вероятности произведения:

$$P(AB)=P(B)P(A/B). \tag{6}$$

Если в качестве условия рассматривать A, то

$$P(AB)=P(A)P(B/A). \tag{6'}$$

Формула (6) легко обобщается на случай пересечения n событий и называется ***формулой умножения вероятностей***:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1\cap(A_2A_3...A_n))=$$
$$=P(A_1)P(A_2A_3...A_n/A_1)=P(A_1)P(A_2\cap(A_3...A_n)/A_1)=$$
$$=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3...A_n/A_1A_2)=...=$$
$$=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}). \tag{6''}$$

Записанные выше преобразования состоят в том, что на каждом шаге одно из событий (следующее по номеру) переводится в разряд условий. Содержание этой формулы очевидно, если представить, что события совершаются последовательно во времени: первое, произойдя, меняет условия опыта; в этих измененных условиях происходит второе; третье происходит в условиях, измененных первыми двумя и т.д.

Пример. Имеются 6 карточек с буквами **А А З И Л Н**. Опыт состоит в том, что карточки образуют случайную последовательность (раскладываются случайным образом). Определить вероятность того, что получится слово **АНАЛИЗ**.

Рассмотрим события: A_1 – на первом месте **А**; A_2 – на втором месте **Н**; A_3 – на третьем – **А**; A_4 – на четвертом – **Л**; A_5 – на пятом – **И**; A_6 – на шестом – **З**. Тогда

$$A = A_1A_2A_3A_4A_5A_6 \Rightarrow P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\times$$
$$\times P(A_4/A_1A_2A_3)P(A_5/A_1A_2A_3A_4)P(A_6/A_1A_2A_3A_4A_5).$$

Очевидно, $P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Условная вероятность $P(A_2/A_1)$ вычисляется исходя из того, что осталось всего 5 карточек и среди них одна **Н**: $P(A_2/A_1) = \frac{1}{5}$. Даже $P(A_3/A_1A_2) = \frac{1}{4}$, значения остальных сомножителей легко определяются. В результате

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{360}.$$

Событие А называется независимым от события В, если

$$P(A/B) = P(A),$$

т.е. осуществление события В не изменяет вероятность события А.

Аналогично В не зависит от А, если

$$P(B/A) = P(B).$$

Справедливо утверждение: если А не зависит от В, то В не зависит от А.

Действительно,

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B),$$

поэтому события А и В будем называть взаимно независимыми, считая условием такой независимости выполнение равенства

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B). \tag{7}$$

Пример. В урне 10 белых и 10 черных перенумерованных шаров (от 1 до 10). Наудачу извлекается один шар. А – шар белый, В – шар имеет номер 7. Являются ли эти события независимыми?

Следует проверить условие независимости (7). AB – белый шар с номером 7.

$$P(AB) = \frac{1}{20};\ P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2};$$

$$P(B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

События A и B независимы.

Из независимости событий A, B следует независимость следующих пар: $\overline{A}$ и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; A и $\overline{B}$.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются независимыми в совокупности, если $\forall i_1, i_2, ..., i_k$ $(k \le n)$ выполняется соотношение

$$P\left(A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) ... P\left(A_{i_k}\right).$$

Следует помнить, что из попарной независимости всех возможных пар A_i, A_j из рассматриваемых n событий не следует в общем случае их независимости в совокупности.

Часто решение упрощается переходом к расчету вероятности противоположного события. При этом полезными могут оказаться формулы де Моргана:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \overline{\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k};\quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k}.$$

Пример. r-разрядное число формируется случайным выбором девяти цифр от 1 до 9. Определить вероятность того, что при этом в записи числа присутствует хотя бы одна единица.

A_k – k-я цифра – единица. Тогда интересующее нас событие $A = \bigcup_{k=1}^{r} A_k$.

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{r} A_k\right) = P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{r} \overline{A}_k}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{r} \overline{A}_k\right) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^r,$$

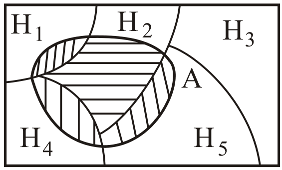
так как $P\left(\overline{A}_k\right) = \frac{8}{9}$ для любого k.

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть имеет место соотношение

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} H_k = H_1 + H_2 + \ldots + H_n,$$

т.е. пространство элементарных исходов представлено объединением несовместных событий H_k $\left(H_i \cap H_j = \varnothing, i \neq j\right)$.



Тогда $\quad A = A \cdot \Omega = A \sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n} AH_k$.

Тем самым событие A также разбивается на n непересекающихся частей. На диаграмме $n = 5$ и $AH_3 = \varnothing$. Формулы сложения и умножения вероятностей дают

$$P(A) = P\left(\sum_{k=1}^{n} AH_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(AH_k) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A/H_k). \qquad (8)$$

Соотношение (8) называется ***формулой полной вероятности***, а события H_k носят название гипотез. Удобство применения этой формулы связано с тем, что ее компоненты – вероятности гипотез H_k и условные вероятности $P(A/H_k)$ – рассчитываются достаточно просто.

Пример. Имеются две урны с шарами. В первой – 4 белых и 3 черных, во второй – 5 белых и 4 черных. Опыт: из первой урны во вторую случайным образом перекладывают 3 шара; затем из второй урны наудачу извлекается шар. Определить вероятность того, что он белый.

Решение. ***Первый способ***. Рассмотрим следующие гипотезы:

H_0 – все три шара черные, $P(H_0) = \dfrac{C_3^{\,3}}{C_7^{\,3}} = \dfrac{1}{35}$;

H_1 – один шар белый и два черных, $P(H_1) = \dfrac{C_4^{\,1} \cdot C_3^{\,2}}{C_7^{\,3}} = \dfrac{12}{35}$;

H_2 –два шара белые и один черный, $P(H_2) = \frac{C_4^{\,2} \cdot C_3^{\,1}}{C_7^{\,3}} = \frac{18}{35}$;

H_3 – все три шара белые, $P(H_3) = \frac{C_4^{\,3}}{C_7^{\,3}} = \frac{4}{35}$.

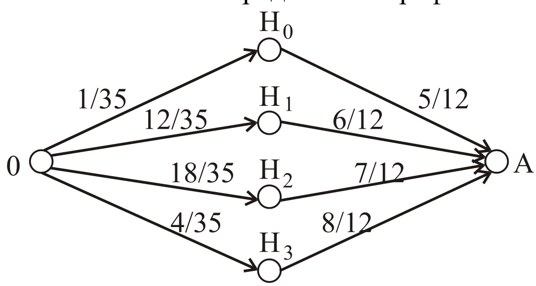
Реализация каждой из гипотез меняет состав второй урны соответствующим образом. Общее количество шаров становится равным 12, а число белых соответственно 5, 6, 7, 8 (в порядке перечисления гипотез). Поэтому

$$P(A/H_0) = \frac{5}{12};\; P(A/H_1) = \frac{6}{12};\; P(A/H_2) = \frac{7}{12};\; P(A/H_3) = \frac{8}{12}.$$

Подставляя найденные вероятности в формулу (8), получаем

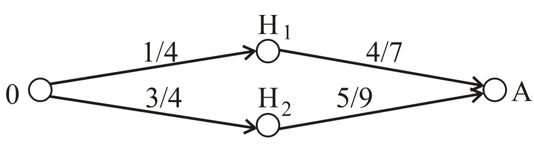
$$P(A) = P(H_0)P(A/H_0) + P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) +$$
$$+ P(H_3)P(A/H_3) = \frac{1}{35}\cdot\frac{5}{12} + \frac{12}{35}\cdot\frac{6}{12} + \frac{18}{35}\cdot\frac{7}{12} + \frac{4}{35}\cdot\frac{8}{12} = \frac{47}{84}.$$

Удобно приведенные выше вычисления представить графически.



Здесь вероятности гипотез и условные вероятности представляют собой коэффициенты передачи ветвей графа; при последовательном соединении они умножаются, при параллельном – складываются.

Второй способ. Гипотезы: H_1 – извлеченный шар принадлежит первой урне, H_2 – второй урне. Так как после добавления во вторую урну 3 шаров из первой она содержит 3 шара из первой и 9 из второй, то $P(H_1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $P(H_2) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. В этом случае



$P(A/H_1)=\dfrac{4}{7}$ – вероятность извлечь белый шар из первой урны;

$P(A/H_2)=\dfrac{5}{9}$ – вероятность извлечь белый шар из второй урны.

$P(A)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{47}{84}$.

Формула Байеса является следствием формулы умножения вероятностей

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B).$$

Отсюда

$$P(B/A)=\frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}. \qquad (9)$$

Если в качестве события B рассматривать одну из гипотез H_m, то

$$P(H_m/A)=\frac{P(A/H_m)P(H_m)}{P(A)}=\frac{P(A/H_m)P(H_m)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A/H_k)P(H_k)}. \qquad (9')$$

Таким образом, числитель формулы ($9'$) представляет собой одно из (а именно, m-е) слагаемых знаменателя. Условная вероятность H_m при условии A равна доле m-го слагаемого в сумме, стоящей в знаменателе.

Пример. В рамках предыдущей задачи получим ответы на следующие вопросы. Пусть извлечен белый шар, т.е. событие A совершилось: а) найти вероятность того, что все переложенные из первой урны шары – черные; б) найти вероятность того, что извлеченный белый шар изначально находится в первой урне.

1. В рамках первого способа решения нас интересует вероятность

$$P(H_0/A)=\frac{P(A/H_0)P(H_0)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{35}\cdot\frac{5}{12}}{\frac{47}{84}}=\frac{1}{47}.$$

2. Здесь для получения результата используется второй способ и искомая вероятность есть

$$P(H_1/A)=\frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{47}{84}}=\frac{12}{47}.$$

4. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Исходным моментом построения вероятностного пространства является задание пространства элементарных событий Ω. Далее рассматривается множество $F=\{A : A\subset\Omega\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\Omega\in F$;

2) $\forall A, B\in F\mapsto \overline{A}, \overline{B}, A\cup B, A\cap B\in F$

$$\left(A_k\in F\mapsto \bigcup_k A_k\in F, \bigcap_k A_k\in F\right).$$

Такое множество (множество подмножеств Ω) называется алгеброй событий. И, наконец, на множестве F строится функция

$$\forall A\in F\mapsto P(A) -$$

вероятность события, удовлетворяющая условиям:

1) $P(A)\ge 0$;

2) $P(\Omega)=1$;

3) $P\left(\sum\limits_k A_k\right)=\sum\limits_k P(A_k)$.

Тройка $\langle\Omega, F, P\rangle$ называется вероятностным пространством. При таком способе задания открытым остается вопрос о соответствии этой математической модели реальной ситуации. Возможны два варианта: либо элементы вероятностной модели строятся для решения конкретной задачи, либо применяемая модель подлежит верификации.

Дискретное вероятностное пространство

$\Omega = \{\omega_k\}$ и число элементарных исходов либо конечно, либо счетно. F состоит из всех возможных подмножеств Ω. Пусть $\forall \omega_k \in \Omega \xrightarrow{P} p_k = p(\omega_k)$, т.е. каждому элементарному исходу поставлено в соответствие число, [иными словами, на Ω определена функция $p(\omega)$] такое, что

$$1)\ 0 \le p_k \le 1; \qquad 2)\ \sum p_k = 1.$$

Определим вероятность события $A \in F$ формулой

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k . \tag{10}$$

В частном случае, когда число элементарных исходов конечно и равно n, при $p_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{1,n}$ получаем классическую модель Лапласа (раздел 1). Выполнение аксиом вероятности для (10) проверяется элементарно.

Пример 1. В примере 7 введения ω_k – отказ при k-м включении $p_k = P(\omega_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_{k-1})P(\overline{A}_k)$, где A_i – срабатывание при i-м включении. Если прибор выходит из строя при очередном включении с вероятностью p, т.е. $P(A_1) = ... = P(A_{k-1}) = p$, $P(\overline{A}_k) = 1 - p = q$. Окончательно

$$p_k = q^{k-1} \cdot p .$$

Пример 2. $\Omega = \{\omega_k\}_{k=1}^n$ и p_k – обратно пропорциональна 2^k. Так как $p_k = \alpha \cdot 2^{-k}$, где α – коэффициент пропорциональности и

$$\sum_{k=1}^n p_k = \alpha \sum_{k=1}^n 2^{-k} = \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}\right) = \alpha \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= \alpha \frac{2^n - 1}{2^n} = 1, \text{ то } \alpha = \frac{2^n}{2^n - 1} \text{ и } p_k = \frac{2^{n-k}}{2^n - 1} .$$

При $n \to \infty$ $p_k = 2^{-k}$.

Непрерывное вероятностное пространство

$\Omega = R^n$ – n-мерное арифметическое пространство. F состоит из всех возможных подмножеств Ω (т.е. ω – точка n-мерного пространства). $\forall \omega \in R^n \to f(\omega)$ – функция n переменных такая, что 1) $f(\omega) \geq 0$; 2) $\int\limits_{R^n} f(\omega) d\omega = 1$. Вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = \int\limits_A f(\omega) d\omega. \tag{11}$$

В зависимости от размерности пространства интеграл в (11) представляет собой обычный определенный интеграл (интеграл Римана) при $n = 1$; двойной интеграл при $n = 2$; тройной – при $n = 3$ и т.д.

В простейшем случае

$$f(\omega) = \begin{cases} c, \ \omega \in \Omega_0; \\ 0, \ \omega \overline{\in} \Omega_0. \end{cases}$$

Причем $c \geq 0$;

$$\int\limits_{\Omega_0} c d\omega = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\int\limits_{\Omega_0} d\omega} = \frac{1}{\text{mes}\Omega_0} = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{длина } \Omega_0}, n = 1; \\ \dfrac{1}{\text{площадь } \Omega_0}, n = 2; \\ \dfrac{1}{\text{объем } \Omega_0}, n = 3. \end{cases}$$

Поэтому

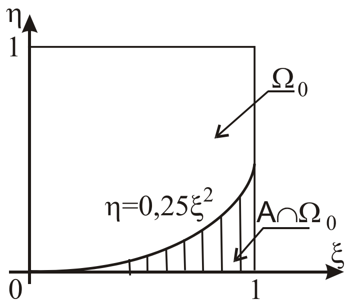
$$P(A) = \int\limits_{A \cap \Omega_0} c d\omega = \frac{\text{mes}(A \cap \Omega_0)}{\text{mes}\Omega_0}. \tag{12}$$

Вероятности, рассчитанные по последней формуле, называются ***геометрическими***. Эта формула предполагает «равноправие» точек Ω_0 и так как их количество несчетно, то в качестве меры (mes) их количества используются соответственно длина, площадь, объем.

Пример 1. В примере 5 введения все значения угла φ из $[0;2\pi)$ равновероятны. Вероятность значения φ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$ рассчитывается по формуле (12) $(n=1)$:

$$P\left(\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\text{длина}\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]}{\text{длина}\left[0;2\pi\right]}=\frac{\pi/6}{2\pi}=\frac{1}{12}.$$

Пример 2. В единичный квадрат $\{(\xi,\eta): 0\le\xi\le 1; 0\le\eta\le 1\}$ наудачу «брошена» точка, ее координаты (ξ,η). Определить вероятность того, что уравнение $x^2+\xi x+\eta=0$ имеет действительные корни.



Ω_0 – единичный квадрат. Событие A – существуют действительные корни – содержит точки (ξ,η), для которых

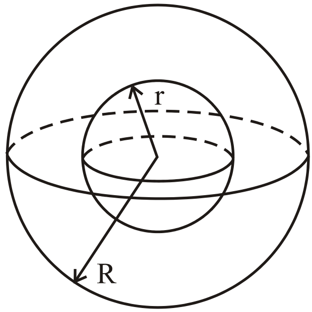
$$D=\xi^2-4\eta\ge 0.$$

Таким образом, $A=\left\{(\xi,\eta): \eta\le\frac{\xi^2}{4}\right\}$. Формула (12) дает

$$P(A)=\frac{\text{пл.}A\cap\Omega_0}{\text{пл.}\Omega_0}=\frac{1}{12},$$

Так как $\text{пл.}A\cap\Omega_0=\int_0^1 0{,}25x^2dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{12}$; $\text{пл.}\Omega_0=1$.

Пример 3. В шаре радиусом R случайным образом выбирается точка. Определить вероятность того, что ее расстояние от центра сферы будет больше r.



Ω_0 – шар радиусом R. A (см. рисунок) – множество точек, заключенных между сферами радиусами r и R. В этом случае $n = 3$ и

$$P(A) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

5. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Пусть проводятся n независимых одинаковых опытов. Классические примеры такой ситуации: n-кратное бросание монеты, игральной кости; испытание одинаковых приборов; повторение в одних и тех же условиях некоторой коммерческой операции и т.п. Испытания называются независимыми, если результаты любой группы испытаний не влияют на вероятность событий в других испытаниях. Например, при бросании монеты k-й раз вероятность выпадения герба равна 0,5 вне зависимости от исхода предыдущих $(k-1)$ испытаний. В результате каждого из испытаний может появиться случайное событие A (выпадает герб, выпадает пять очков на игральной кости; испытываемый прибор выйдет из строя; коммерческая операция приведёт к потере вложенных средств). Если в некотором опыте событие A произошло, то говорят об «успехе» опыта; в противном случае – о «неудаче». При этом термин «успех» никак не связан с содержанием опыта (действительно, трудно говорить об «успехе» в случае срыва коммерческой операции).

Далее, пусть вероятность успеха в каждом отдельном испытании равна $p = P(A)$, а вероятность неудачи $q = P(\overline{A}) = 1 - p$. Требуется найти вероятность того, что в серии из n независимых испытаний произойдет ровно k успехов – $p_n(k)$. Элементарный исход в данном опыте, состоящем в проведении серии из n независимых испытаний, обозначим набором нулей и единиц

$$(x_1; x_2; ...; x_n), \ x_k = 0;1.$$

Присутствие единицы на k-м месте означает успех k-го испытания, нуля – неудачу:

$$x_k = \begin{cases} 1 \text{ в случае успеха } k\text{-го испытания,} \\ 0 \text{ в случае неудачи.} \end{cases}$$

Уместно называть x_k – индикатором успеха k-го испытания. Вероятность исхода $(x_1; x_2; ...; x_n)$ вследствие независимости испытаний вычисляется по формуле умножения вероятностей

$$P(x_1; x_2; ...; x_n) = P(x_1)P(x_2)...P(x_n) = p^k q^{n-k},$$

так как нас интересует набор, содержащий ровно k единиц. Отметив, что вероятность одного исхода, благоприятствующего интересующему нас событию, не зависит от расположения единиц и нулей, а также то, что таких исходов ровно $C_n^{\ k}$, получим

$$p_n(k) = C_n^{\ k} p^k q^{n-k} \tag{13}$$

(формула Бернулли). Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, получим:

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{\ k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1,$$

т.е., как и следовало ожидать, сумма вероятностей всех исходов опыта равна единице.

6. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

В приложениях обычно интерес представляет количественная характеристика случайного опыта – случайная величина: например, число очков на игральной кости, число успехов в серии из n испытаний, величина изменения цены товара за некоторый период, величина изменения процентной ставки по кредиту и т.п. Наряду с одной случайной величиной можно рассматривать систему из двух, трех и более случайных величин: например, рост и вес случайного прохожего; температура, давление и влажность воздуха на фиксированную дату; цены на определенные акции на каких-либо n площадках и т.п.

Так как любые возможные исходы эксперимента «укладываются» в пространство $\Omega = \{\omega\}$ элементарных событий, то случайную величину можно рассматривать как функцию, определенную на Ω:

$$\forall\omega \in \Omega \mapsto \xi(\omega). \tag{14}$$

В (14) рассматривается «одномерная» случайная величина. Но то же самое определение применимо и к двумерным, трехмерным и т.д. случайным величинам (случайным векторам). Обозначая случайные величины греческими буквами $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, принимаемые ими значения будем обозначать латинскими x, y, z,… соответственно.

Закон распределения случайной величины (с.в.) считается заданным, если с его помощью можно определить вероятность попадания случайной величины в любую область пространства соответствующей размерности. Так, для одномерной случайной величины $P\{\xi \in [a; b]\}$, для двумерной – $P\{(\xi, \eta) \in D\}$. В основу закона распределения (а значит, и способа вычисления указанных вероятностей) кладется ***функция распределения вероятностей:***

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ для одномерной случайной величины;

$F_{\xi\eta}(x; y) = P\{(\xi < x) \cap (\eta < y)\}$ для двумерной случайной величины;

………………………………

$F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1; x_2; \ldots; x_n) = P\left\{\bigcap\limits_{k=1}^{n}(\xi_k < x_k)\right\}$ для n-мерной случайной величины.

7. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Если случайная величина может принимать либо конечное, либо счетное число значений, то она называется ***дискретной***.

Если обозначить возможные значения случайной величины x_k, то

$$p_k = P\{\xi = x_k\} -$$

– вероятности, с которыми эти значения принимаются.

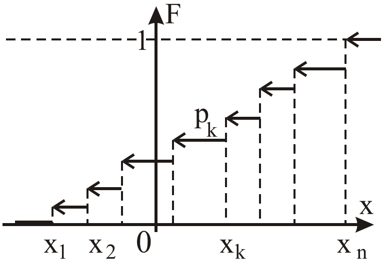
Таблица

ξ	x_1	x_2	…	x_k	…
p	p_1	p_2	…	p_k	…

называется рядом распределения случайной величины ξ. Набор $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям:

$$p_k \geq 0; \qquad \sum_k p_k = 1,$$

последнее условие называется ***условием нормировки***.



Функция распределения дискретной случайной величины связана с рядом распределения очевидным соотношением

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{x_k < x} p_k,$$

что позволяет построить ее график в виде ступенчатой кривой со скачками в точках x_k величиной p_k. Причем, в точках разрыва $F_\xi(x)$ непрерывна слева:

$$\lim_{x \to x_k - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_k).$$

На представленном графике x_k, $k = \overline{1,n}$, перенумерованы в порядке возрастания. Отметим здесь свойства функции распределения, справедливые не только для дискретной случайной величины, но и в общем случае:

1) $F_\xi(-\infty) = 0$; 2) $F_\xi(+\infty) = 1$;

3) $F_\xi(x)$ – не убывает на все области определения.

Доказательство этих свойств элементарно следует из определения $F_\xi(x)$ и предоставляется читателю.

По известной функции распределения легко восстановить ряд распределения:

$p_k = F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k)$ (= величине скачка при $x = x_k$).

Вычисление вероятности попадания ξ на полуоткрытый интервал $[a; b)$ производится по формуле

$$P\{a \le \xi < b\} = \sum_{a \le x_k < b} p_k = F(b) - F(a).$$

В качестве упражнения предлагается написать формулу для $P\{a \le \xi \le b\}$.

Примеры. 1. Производятся испытания прибора «на отказ»: прибор многократно включается до появления первого «отказа». Приняв вероятность отказа при каждом из независимых включений равной p, рассмотрим случайную величину ξ – число включений до первого отказа. Рассматриваемая случайная величина (с.в.) может принимать значения $\xi = k = 1;2;...;k;...$ (от единицы и теоретически до бесконечности). $p_k = P\{\xi = k\}$ представляет собой вероятность того, что первые $(k-1)$ раз отказа не было, а при k-м включении произошел отказ. Обозначив A_k отказ при k-м включении, на основании независимости исходов различных включений и формулы умножения вероятностей получим геометрический закон распределения

$$p_k = P(\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_{k-1}A_k) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_{k-1}) \cdot P(A_k) =$$

$$= q^{k-1} \cdot p, \quad q = 1 - p.$$

Условия нормировки:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p\frac{1}{1-q} = 1.$$

2. В схеме независимых испытаний (раздел 5) ξ – число успехов в серии из n независимых испытаний.

$p_k = P\{\xi = k\} = C_n{}^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$, – биномиальный закон распределения.

3. В условиях предыдущего примера положим $n \to \infty$, $np = a$ $\left(p = \frac{a}{n} \to 0\right)$. Тогда

$$p_n(k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^k\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} = \frac{a^k}{k!}1\cdot\frac{n-1}{n}\times$$

$$\times\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{a^k}{k!}e^{-a},$$

так как

$$\frac{n-1}{n},\ \frac{n-2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-k+1}{n},\ \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} \to 1,$$

а

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n} \to e^{-a}.$$

Полученный результат называется теоремой Пуассона, а предельный вид распределения

$$p(k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a},\ k = 0,1,\ldots,$$

называется распределением Пуассона.

Закон Пуассона дает хорошее приближение к биномиальному закону при p, близком к нулю или единице:

$$p_n(k) \approx \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}. \qquad (15)$$

В случае когда p имеет значение из окрестности 0.5, удобно пользоваться приближенной формулой

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}. \qquad (16)$$

Этот результат носит название локальной теоремы Муавра-Лапласа.

В случае когда интерес представляет вероятность попадания ξ – числа успехов в серии из n испытаний на отрезок $[a;b]$, удобна в применении следующая приближенная формула:

$$P\{a \le \xi \le b\} \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (17)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, для которой существуют таблицы (как правило, для $x \ge 0$). При $x < 0$ вычисления основаны на формуле

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$

Формула (17) имеет название интегральной формулы Муавра-Лапласа.

Соотношения (16), (17) являются частными случаями более общего результата, называемого центральной предельной теоремой. Она будет сформулирована и доказана в разделе 21.

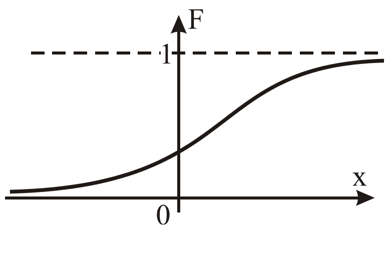
8. НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Непрерывной случайная величина называется, если ее возможные значения сплошь заполняют некоторое множество (в случае одномерной случайной величины – промежуток конечный или бесконечный). Примеры непрерывной случайной величины: ошибка измерения некоторой физической величины; продолжительность времени безотказной работы прибора и т.д.

Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины

$$F_\xi(x) = P(\xi < x)$$

является непрерывной монотонно возрастающей функцией со следующими свойствами:



1) $F_\xi(-\infty) = P(\xi < -\infty) = 0$;

2) $F_\xi(+\infty) = P(\xi < +\infty) = 1$;

3) $F_\xi(x)$ монотонно возрастает, так как $\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$ при $x_1 < x_2$ и, следовательно, $P\{\xi < x_1\} \le P\{\xi < x_2\}$.

Поскольку события $\{\xi < a\}$ и $\{a \le \xi < b\}$ несовместны, то

$$P\{\xi < a\} + P\{a \le \xi < b\} = P\{(\xi < a) \cup (a \le \xi < b)\} = P\{\xi < b\}$$

и, следовательно,

$$P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

(Сравните с формулами предыдущего раздела!)

Существенным для непрерывной случайной величины является

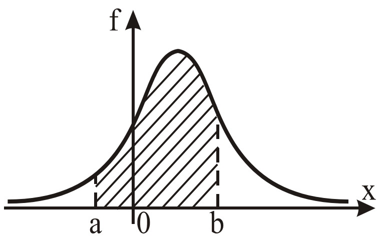
$$P\{\xi = x\} = \lim_{\Delta x \to 0} P\{x \le \xi < x + \Delta x\} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(F_\xi(x + \Delta x) - F_\xi(x)\right) =$$
$$= F_\xi(x + 0) - F(x) = 0,$$

т.е. вероятность того, что непрерывная случайная величина примет какое-либо конкретное значение x, равна нулю.

Рассмотрев предел (неопределенность $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_\xi(x + \Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x} =$$
$$= F'_\xi(x) = f_\xi(x) \qquad (18)$$

в предположении, что он существует, получим характеристику непрерывной случайной величины, ***называемую плотностью распределения вероятностей***. Поскольку для $f_\xi(x)$ функция распределения $F_\xi(x)$ является первообразной, то справедлива формула



$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x) dx. \qquad (19)$$

Свойства $f_\xi(x)$:

1) $f_\xi(x) \ge 0$, так как $F_\xi(x)$ монотонна;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = F_\xi(+\infty) - F_\xi(-\infty) = 1;$

3) $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int\limits_a^b f_\xi(x)dx$.

Типичный вид кривой плотности распределения вероятностей представлен на рисунке. Площадь заштрихованной фигуры равна вероятности попадания ξ на отрезок $[a;b]$. При этом площадь бесконечной фигуры под кривой $f_\xi(x)$ равна единице (условие нормировки).

Примеры. ***1. Равномерное распределение.*** На отрезке $[a;b]$ случайным образом выбирается точка. Ее координата ξ – случайная величина. Закон распределения может быть получен с использованием модели геометрической вероятности:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \frac{\text{длина}[a;x]}{\text{длина}[a;b]} = \frac{x-a}{b-a},\ x \in [a;b].$$

Очевидно,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

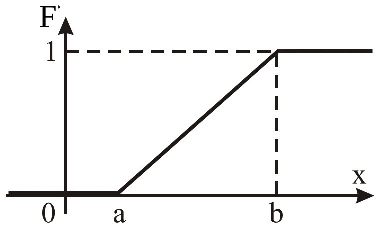
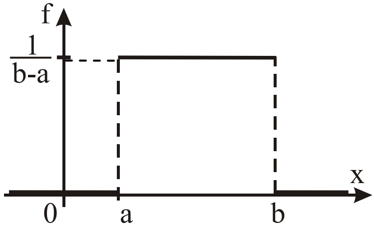


График этой функции распределения представлен на рисунке. На этом же рисунке (ниже) изображен график

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x),$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a;b), \\ 0, & x \notin [a;b]. \end{cases}$$

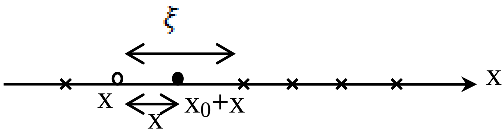


Слово «равномерный» в названии закона распределения подчеркивает «равноправие» точек отрезка $[a;b]$.

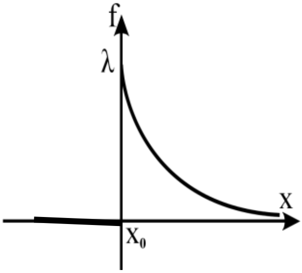
2. Показательное распределение. На числовой оси случайным образом расположены точки так, что вероятность попадания m точек на отрезок длины *l* не зависит от расположения этого отрезка на оси, от количества точек вне отрезка и определяется формулой Пуассона

$$p_l(k)=\frac{(\lambda l)^k}{k!}e^{-\lambda l},\ \lambda>0.$$

Случайная величина ξ – это расстояние от фиксированной точки оси x_0 до ближайшей справа случайной точки $(\xi\geq 0)$. На рисунке крестиками отмечены случайные точки.



$$F_\xi(x)=P(\xi<x)=1-P(\xi\geq x).$$



Здесь $P(\xi\geq x)$ – вероятность того, что на отрезке $[x_0;x_0+x]$ нет ни одной случайной точки. Эта вероятность есть $p_x(0)$. Поэтому

$F_\xi(x)=1-e^{-\lambda x},\ x\geq 0$

($F_\xi(x)=0,\ x<0$).

Плотность распределения

$$f_\xi(x)=F'_\xi(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0\ \ (f_\xi(x)=0,\ x<0).$$

9. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Математическим ожиданием случайной величины называется числовая характеристика (неслучайная), которая определяется соотношением:

$$M[\xi]=m_\xi=\begin{cases}\sum\limits_k x_k p_k, \text{ если } \xi-\text{дискретная с.в.},\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx, \text{ если } \xi-\text{непрерывная с.в.}\end{cases}$$

Свойства математического ожидания (м.о.):

1) $M[C]=C$;

2) $M[C\xi]=CM[\xi]$;

3) $M[\xi+\eta]=M[\xi]+M[\eta]$;

4) $M[\xi\cdot\eta]=M[\xi]\cdot M[\eta]$ ***лишь для независимых*** случайных величин ξ и η;

5) $\xi\geq\eta\Rightarrow M[\xi]\geq M[\eta]$.

Доказательство свойств математического ожидания (для дискретной случайной величины).

1. Неслучайная величина C есть частный случай случайной величины, ряд распределения которой содержит один единственный столбец $p_1=P(\xi=C)=1$. Поэтому $M[C]=C\cdot 1=C$.

2. Рассмотрим новую случайную величину $\eta=C\xi$ с возможными значениями $y_k=Cx_k$: $P(\eta=y_k)=P(\xi=x_k)=p_k$. Следовательно,

$$M[C\xi]=M[\eta]=\sum_k y_kp_k=\sum_k Cx_kp_k=C\sum_k x_kp_k=CM[\xi].$$

3. Пусть $\zeta=\xi+\eta$. Тогда возможные значения ζ: $z_{ij}=x_i+y_j$ с вероятностями p_{ij}.

$$M[\xi+\eta]=M[\zeta]=\sum_i\sum_j(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_i x_i\sum_j p_{ij}+\sum_j y_j\sum_i p_{ij}=$$

$$=\sum_i x_ip_i+\sum_j y_jp_j=M[\xi]+M[\eta].$$

($\sum\limits_j p_{ji}=p_i=P\{\xi=x_i\}$; $\sum\limits_i p_{ji}=p_j=P\{\eta=y_j\}$, подробнее см. р.14)

4. Пусть $\zeta=\xi\eta$ – новая случайная величина с возможными значениями $z_{ij}=x_i+y_j$:

$$M[\xi\eta]=M[\zeta]=\sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij}=\sum_i x_ip_i\cdot\sum_j y_jp_j=M[\xi]\cdot M[\eta],$$

так как $p_{ij}=p_ip_j$ вследствие независимости случайных величин ξ и η.

Примеры. ***1. Равномерный (дискретный) закон распределения.***

$$p_k=P(\xi=x_k)=\frac{1}{n},\ k=\overline{1,n}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad M[\xi] = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ – среднее арифметическое возможных значений случайной величины ξ.

2. Биномиальный закон распределения.

Пусть $\xi_k = \begin{cases} 1 \text{ с вероятностью } p, \\ 0 \text{ с вероятностью } q \end{cases}$ – индикатор успеха k-го испытания. Тогда $M[\xi_k] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, $\forall k$. Следовательно,

$$M[\xi] = M\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] = \sum_{k=1}^{n} M[\xi_k] = np.$$

3. Закон распределения Пуассона.

$$M[\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{a^k}{k!} e^{-a} = ae^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = ae^{-a} \cdot e^{a} = a.$$

4. Равномерный (непрерывный) закон распределения.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \ x \in (a;b), \\ 0, \ x \overline{\in} [a;b]. \end{cases} \Rightarrow M[\xi] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{a+b}{2} \text{ – середина отрезка } [a;b].$$

5. Экспоненциальный закон распределения.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \ x \ge 0, \\ 0, \ x < 0. \end{cases} \Rightarrow M[\xi] = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Неравенство Маркова

Пусть ξ – неотрицательная случайная величина. Построим новую случайную величину η по правилу

$$\eta = \begin{cases} 0, \ \xi \le \varepsilon, \\ \varepsilon, \ \xi > 1. \end{cases}$$

Следовательно, η – дискретная случайная величина, имеющая два возможных значения:

$y_1 = 0$ с вероятностью $p_1 = P(\eta = 0) = P(\xi \le \varepsilon)$;

$y_2 = \varepsilon$ с вероятностью $p_2 = P(\eta = \varepsilon) = P(\xi > \varepsilon)$.

Очевидно, $\eta \le \xi \Rightarrow M[\eta] \le M[\xi]$: $0 \cdot p_1 + \varepsilon \cdot p_2 \le M[\xi]$.

Окончательно $p_2 = P(\xi > \varepsilon) \le \dfrac{M[\xi]}{\varepsilon}$, т.е. вероятность «слишком больших» значений случайной величины ξ ограничена, и эта граница прямо пропорциональна математическому ожиданию.

Итак,

$$P\{\xi > \varepsilon\} \le \frac{m_\xi}{\varepsilon} \text{ – неравенство Маркова.}$$

Рассмотренные примеры позволяют определить содержательный смысл математического ожидания как ***среднего ожидаемого значения случайной величины***.

Условное математическое ожидание

Как и при получении формулы полной вероятности, рассмотрим систему гипотез $H_i : \sum_i H_i = \Omega$. Элементы ряда распределения рассчитаем по этой формуле:

$$p_k = P\{\xi = x_k\} = \sum_i P\{\xi = x_k / H_i\} \cdot P\{H_i\}.$$

Тогда для м.о. получим

$$M(\xi] = \sum_k x_k p_k = \sum_k x_k \sum_i P\{\xi = x_k / H_i\} \cdot P\{H_i\} =$$

$$= \sum_i \left(\sum_k x_k P\{\xi = x_k / H_i\} \cdot P(H_i) = \sum_i M[\xi / H_1] \cdot P(H_i) \right),$$

где $M[\xi / H_i] = M_{H_i}[\xi]$ – условное м.о., т.е. м.о., найденное при условии реализации гипотезы H_i. Условное м.о. представляет собой с.в., значение которой суть $M_{H_i}[\xi]$ принимаем с вероятностями $P(H_i)$.

В случае непрерывной с.в. плотность распределения вероятностей рассчитывается по формуле

$$f_\xi(x) = \sum_i f_\xi(x/H_i)P(H_i),$$

а математическое ожидание

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_i f_\xi(x/H_i)P(H_i)dx = \sum_i \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf_\xi(x/H_i)dx \right) P(H_i) =$$
$$= \sum_i M[\xi/H_i]P(H_i),$$

где $M[\xi/H_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_\xi(x/H_i)dx$ – условное м.о.

Оба рассмотренных случая объединены формулой

$$M[\xi] = M\left[M_{H_i}[\xi]\right],$$

где «внешнее» м.о. вычисляется по распределению $\{P(H_i)\}$.

Применение этой формулы часто облегчает решение задачи нахождения математического ожидания.

10. ДИСПЕРСИЯ

Дисперсией случайной величины называется ее ***неслучайная*** числовая характеристика, которая определяется формулой:

$$D_\xi = D[\xi] = M\left[(\xi - m_\xi)^2\right] =$$
$$= \begin{cases} \sum_k (x_k - m_\xi)^2 p_k \text{ для дискретной с.в.,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi)^2 f_\xi(x)dx \text{ для непрерывной с.в.} \end{cases}$$

Свойства дисперсии:

1) $D[C] = 0$;
2) $D[C\xi] = C^2 D[\xi]$;
3) $D[\xi + \eta] = D[\xi] + D[\eta]$ ***лишь для независимых случайных величин*** ξ и η.

Доказательство свойств дисперсии для дискретной случайной величины осуществляется так же, как в предыдущем разделе доказывались свойства математического ожидания.

Часто при вычислении дисперсии ее формулу преобразуют следующим образом

$$D_\xi = M\left[(\xi - m_\xi)^2\right] = M\left[\xi^2 - 2m_\xi \xi + m_\xi^2\right] =$$

$$= M\left[\xi^2\right] - 2m_\xi M[\xi] + m_\xi^2 = M\left[\xi^2\right] - 2m_\xi^2 + m_\xi^2 = M\left[\xi^2\right] - m_\xi^2 .$$

Здесь $M\left[\xi^2\right] = \begin{cases} \sum\limits_k x_k^2 p_k & \text{для дискретной с.в.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx & \text{для непрерывной с.в.} \end{cases}$ – среднее квадратическое значение случайной величины ξ.

Вероятностный смысл дисперсии проясняет решение следующей задачи: найти значение параметра a, доставляющее минимум выражению $M\left[(\xi - a)^2\right]$ $\left(a_0 = \arg\min\limits_a M\left[(\xi - a)^2\right]\right)$.

Записав очевидные преобразования,

$$M\left[(\xi - a)^2\right] = M\left[\xi^2\right] - 2aM[\xi] + a^2 = M\left[\xi^2\right] - m_\xi^2 + m_\xi^2 -$$

$$- 2am_\xi + a^2 = M\left[\xi^2\right] - m_\xi^2 + (a - m_\xi)^2 \ge M\left[\xi^2\right] - m_\xi^2 .$$

Т.е. минимальное значение достигается при $a = m_\xi$ и равно D_ξ.

Примеры

1. Равномерный (дискретный) закон распределения.

$$M\left[\xi^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{k1}^{n} x_k^2 \Rightarrow D_\xi = \frac{1}{n}\sum_{k1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k1}^{n} x_k\right)^2 .$$

2. Биномиальный закон распределения.

$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i – индикатор успеха i-го испытания.

$$D[\xi_i] = M\left[(\xi_i - p)^2\right] = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q = pq;$$

$$D[\xi] = D\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[\xi_i] = npq .$$

3. Закон распределения Пуассона.

$$M\left[\xi^2\right]=\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \sum_{k=1}^{\infty}\left((k-1)k+k\right)\frac{a^k}{k!} e^{-a} =$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{(k-2)!} e^{-a} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{(k-1)!} e^{-a} = a^2 e^{-a} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^{k-2}}{(k-2)!} +$$

$$+ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = a^2 + a \Rightarrow D_\xi = M\left[\xi^2\right] - a^2 = a \ .$$

4. Равномерный (непрерывный) закон распределения.

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-m_\xi\right)^2 f_\xi(x)dx = \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx =$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\right|_a^b = \frac{(b-a)^2}{12} \ .$$

5. Экспоненциальный закон распределения.

$$M\left[\xi^2\right]=\int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow D_\xi = M\left[\xi^2\right] - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \ .$$

Неравенство Чебышева

Заменим в неравенстве Маркова ξ на $\left(\xi-m_\xi\right)^2$. Тогда

$$P\left\{\left(\xi-m_\xi\right)^2 > \varepsilon^2\right\} = P\left\{\left|\xi-m_\xi\right| > \varepsilon\right\} \le \frac{M\left[\left(\xi-m_\xi\right)^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{D_\xi}{\varepsilon^2} \ .$$

Окончательно

$$P\left\{\left|\xi-m_\xi\right| > \varepsilon\right\} \le \frac{D_\xi}{\varepsilon^2} \quad \text{– неравенство Чебышева.}$$

Таким образом, вероятность большого $(>\varepsilon)$ уклонения случайной величины от ее математического ожидания ограничена и граница пропорциональна дисперсии.

Анализ свойств дисперсии, а также рассмотрение примеров и неравенства Чебышева позволяют заключить, что дисперсия характеризует ***степень разброса случайной величины вокруг ее математического ожидания***.

Наряду с дисперсией вводится характеристика случайной величины, называемая ***средним квадратическим отклонением*** (с.к.о.)

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}\ ,$$

имеющая размерность, совпадающую с размерностью случайной величины ξ.

Правило «3σ»: если в неравенстве Чебышева подставить $\varepsilon = 3\sigma$, то оно примет вид:

$$P\left\{\left|\xi - m_\xi\right| > 3\sigma\right\} \le \frac{1}{9},$$

что означает: вероятность отклонения случайной величины от ее математического ожидания больше чем на три средних квадратических отклонения весьма мала. На практике для реальных законов распределения эта вероятность много меньше $\frac{1}{9}$ [так, для равномерного (непрерывного) закона распределения она равна нулю]. Поэтому при решении практических задач часто пользуются «правилом 2σ», считая, что отклонение от математического ожидания более чем на 2σ уже достаточно мало. В качестве упражнения предлагается посчитать вероятности отклонения больше 3σ и 2σ для рассмотренных выше примеров.

11. МОМЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Начальный момент n-го порядка случайной величины ξ определяется формулой

$$\alpha_n = M\left[\xi^n\right] = \begin{cases} \sum\limits_k x_k^n p_k & \text{для дискретной с.в.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\xi(x)dx & \text{для непрерывной с.в.} \end{cases}$$

Центральный момент n-го порядка вычисляется по формуле

$$\mu_n = M\left[\left(\xi - m_\xi\right)^n\right] = = \begin{cases} \sum\limits_k \left(x_k - m_\xi\right)^n p_k \text{ для дискретной с.в.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_\xi\right)^n f_\xi(x)dx \text{ для непрерывной с.в.} \end{cases}$$

Любой центральный момент выражается через начальные следующим образом:

$$\mu_s = M\left[\left(\xi - m_\xi\right)^n\right] = M\left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i m_\xi^i \xi^{n-i}\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i m_\xi^i M\left[\xi^{n-i}\right] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \alpha_1^i \alpha_{n-i} . \qquad (20)$$

Аналогично все начальные моменты (кроме α_1 !) можно выразить через центральные. Легко проверяются следующие соотношения:

$$\alpha_1 = M[\xi];\ \alpha_2 = M\left[\xi^2\right];\ \mu_1 = 0;\ \mu_2 = D_\xi\ (\alpha_0 = \mu_0 = 1).$$

Также $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \Rightarrow \alpha_2 \ge \alpha_1^2$:

$\sum\limits_k x_k^2 p_k \ge \left(\sum\limits_k x_k p_k\right)^2$ – для дискретной случайной величины.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx \ge \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx\right)^2$ – для непрерывной случайной величины.

Ниже будет показано, что полный набор (множество) начальных моментов задает закон распределения случайных величин.

12. ПРОИЗВОДЯЩАЯ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Если дискретная случайная величина принимает лишь целочисленные значения $\xi = 0;1;2;...;\ k;...$, то ей в соответствие может быть поставлена ***производящая функция:***

$$\Phi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \ . \qquad (21)$$

Анализ структуры (21) позволяет сформулировать следующие утверждения:

1) $\Phi_\xi(s)$ определена как степенной ряд (ряд Маклорена) с коэффициентами p_k, $k = 0;1;\ldots$, который очевидно сходится при $s = 1$ (так как $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$). Поэтому (теорема Абеля) он сходится при $|s| < 1$;

2) ряд распределения $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ может быть найден как набор коэффициентов степенного ряда

$$p_k = \frac{\Phi_\xi^{(k)}(0)}{k!};$$

3) сумму в (22) можно интерпретировать как математическое ожидание s^ξ:

$$\Phi_\xi(s) = M\left[s^\xi\right] . \qquad (21')$$

Для непрерывной случайной величины используется характеристическая функция:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) e^{-ixt} dx \ . \qquad (22)$$

Так как формула (22) определяет преобразование Фурье функции $f_\xi(x)$, то справедлива также формула обратного преобразования Фурье

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\xi(t) e^{ixt} dt \ ,$$

позволяющая восстановить плотность распределения вероятностей по известной характеристической функции. Формулу (21) можно написать так:

$$\varphi_\xi(t) = M\left[e^{-it\xi}\right] . \qquad (22')$$

Сравнение (22) с (21) позволяет сделать вывод: производящая функция переходит в характеристическую при $s = e^{-it}$. Поэтому часто термин «производящая функция» не используется. Здесь мы также ограничимся далее рассмотрением характеристической функции.

Из определения (22) следует: $\varphi_\xi(0) = 1$. Продифференцировав (22) n раз, получим:

$$\varphi_\xi^{(n)}(t) = M\left[(-i)^n \xi^n e^{-it\xi}\right] \Rightarrow \varphi^{(n)}(0) = (-i)^n M\left[\xi^n\right] = (-i)^n \alpha_n .$$

Следовательно, знание характеристической функции позволяет определить все начальные моменты случайной величины ξ

$$\alpha_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{(-i)^n}, \ n = 1;2;\ldots \ .$$

И, обратно, знание всех α_n дает возможность построить $\varphi_\xi(t)$ в виде степенного ряда:

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n \alpha_n}{n!} t^n .$$

Наиболее употребимы следующие соотношения:

$$m_\xi = \alpha_1 = i\varphi'_\xi(0);$$

$$M\left[\xi^2\right] = \alpha^2 = -\varphi''_\xi(0); \ D_\xi = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = -\varphi''_\xi(0) + \left[\varphi'_\xi(0)\right]^2 .$$

В заключение отметим следующий факт: так как между плотностью распределения вероятностей, характеристической функцией и полным набором начальных моментов существует взаимно однозначное соответствие, то каждая из этих трех характеристик

$$f_\xi(x) \leftrightarrow \varphi_\xi(t) \leftrightarrow \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$$

задает закон распределения случайной величины.

13. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Нормальным (Гауссовым) распределением называется распределение случайных величин, задаваемое плотностью распределения вероятностей:

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ \sigma>0. \qquad (23)$$

Формула (23) содержит параметры m и σ, поэтому факт нормального распределения фиксируется так: $\xi \sim N(m,\sigma^2)$. В силу (23) математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M[\xi]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{matrix}\dfrac{x-m}{\sigma}=t\\ dx=\sigma dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+m\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right).$$

Первый из интегралов равен нулю (интеграл от нечетной функции на симметричном отрезке); второй равен m (почему?). Итак, $m=m_\xi$. Дисперсия

$$D_\xi=\sigma_\xi^2=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\sigma^2\Rightarrow\sigma=\sigma_\xi.$$

Интеграл берется по частям: $u=t$; $dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt\mapsto\ v=-e^{-\frac{t^2}{2}}$. Особую роль играет нормальный закон при $m=0$, $\sigma=1$, называемый стандартным ($\xi\sim N(0,1)$).

Докажем следующее утверждение: если $\xi\sim N(m,\sigma^2)$, то $\xi=m+\sigma\xi^0$, где ξ^0 – стандартная нормальная случайная величина ($\xi^0\sim N(0,1)$). Справедливо также обратное утверждение, которое мы сейчас и докажем:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{m + \sigma\xi^0 < x\} = P\left\{\xi^0 < \frac{x-m}{\sigma}\right\} =$$

$$= F_{\xi^0}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right);$$

$$f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi_0}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = F'_{\xi^0}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}} \Rightarrow \xi \sim N(m, \sigma^2).$$

Для характеристической функции $\varphi_\xi(t)$ получим

$$\varphi_\xi(t) = M\left[e^{-it(m+\sigma\xi^0)}\right] = e^{-itm} M\left[e^{-i(t\sigma)\xi^0}\right] = e^{-itm}\varphi_{\xi^0}(\sigma t).$$

Поэтому достаточно найти характеристическую функцию стандартной нормальной величины:

$$\varphi_{\xi^0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+it)^2 - \frac{t^2}{2}} e^{-itx} dx =$$

$$\stackrel{\tau = x+it}{=} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

При вычислении этого интеграла следует воспользоваться соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Окончательно

$$\varphi_\xi(t) = e^{-itm} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Помня о связи, существующей между начальными и центральными моментами, а также что $\alpha_1 = m$, получим формулу вычисления центральных моментов:

$$\mu_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^n e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{\frac{x-m}{\sigma}=t}{=} \frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2^2}} dt =$$

$$= \frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{n-1} \cdot t e^{-\frac{t^2}{2^2}} dt.$$

Интегрируя по частям ($u = t^{n-1}$, $dv = te^{-\frac{t^2}{2}}$), получаем

$$\mu_n = \frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} \left(-t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + (n-1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{n-2} \cdot t e^{-\frac{t^2}{2^2}} dt \right) =$$

$$= (n-1)\sigma^2 \mu_{n-2},$$

так как внеинтегральное слагаемое равно нулю (неопределенность $\frac{t^{n-1}}{e^{-\frac{t^2}{2}}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ следует раскрыть по правилу Лопиталя).

Далее, зная, что $\mu_1 = 0$, получаем

$$\mu_3 = 2\sigma^2 \mu_1 = 0, \quad \mu_5 = \mu_7 = \ldots = \mu_{2m\text{-}1} = 0.$$

Т.е. все нечетные моменты равны нулю.

$$\mu_2 = \sigma^2; \;\; \mu_4 = 3\sigma^2 \mu_2 = 3\sigma^4; \;\; \mu_6 = 5\sigma^2 \mu_4 = 15\sigma^6 \;; \ldots;$$

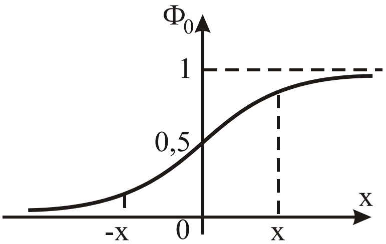
$$\mu_{2m} = (2m-1)!!\sigma^{2m},$$

где $(2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)$ – произведение всех нечетных чисел от 1 до $(2m-1)$.

Вычисление вероятности попадания нормальной случайной величины на отрезок связано с функцией

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ – функция Лапласа,}$$

которая представляет собой функцию распределения вероятностей стандартной нормальной случайной величины. Этот интеграл не берется в элементарных функциях, относясь к так называемым специальным функциям. Для него имеются таблицы



значений, составленные, как правило, для $x > 0$ ($\Phi_0(0) = \frac{1}{2}$). При $x < 0$ следует пользоваться формулой

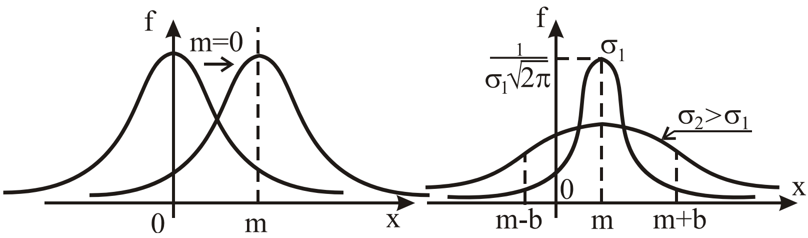
$$\Phi_0(x) = 1 - \Phi_0(-x).$$

На рисунке представлен график $\Phi_0(x)$, симметричный относительно точки $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

При вычислении вероятности попадания на отрезок поступают следующим образом:

$$P(a \le \xi \le b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \le \frac{\xi - m}{\sigma} \le \frac{b-m}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left\{\frac{a-m}{\sigma} \le \xi^0 \le \frac{b-m}{\sigma}\right\} = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$



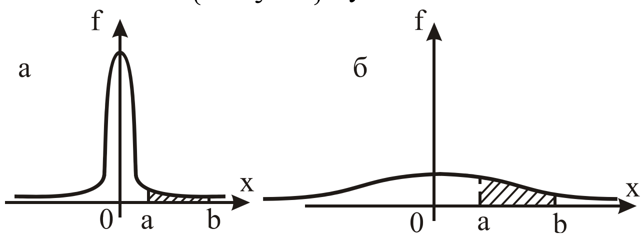
В заключение этого раздела приведем графики нормальной плотности распределения для различных m и σ. При изменении m происходит смещение графика плотности по оси x. Изменение σ приводит к деформации кривой: увеличение σ уменьшает максимум кривой и увеличивает ее «ширину». Используя обычные методы исследования функций, легко показать, что

1) кривая имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, в точке $x = m$;

2) точки перегиба кривой имеют координаты $m \pm \sigma$; расстояние между ними, равное 2σ, определяет «ширину» кривой.

Примеры. 1. Найти вероятность $P\{|\xi - m_\xi| > 2\sigma_\xi\}$ при $\xi \sim N(m, \sigma^2)$. Искомая вероятность равна $1 - P\{|\xi - m| \le 2\sigma\} =$
$= 1 - P\{m - 2\sigma \le \xi < m + 2\sigma\} = 1 - \Phi_0(2) + \Phi_0(-2) =$
$= 2 - 2\Phi_0(2) \approx 0{,}05$.

2. Пусть $\xi \sim N(0, \sigma^2)$; $0 < a < b$. При каком значении σ вероятность события $\{a \le \xi \le b\}$ будет наибольшей?



На рисунке представлены две предельные ситуации: а) σ близка к нулю; б) σ достаточно велика. В обоих случаях интересующая нас вероятность (площадь заштрихованной фигуры) близка к нулю. В пределе (как при $\sigma \to 0$, так и при $\sigma \to +\infty$) она равна 0. Следовательно (теорема Ролля), существует $\sigma^* \in (0; +\infty)$, доставляющее максимум этой вероятности:

$$p(\sigma) = P\{a \le \xi \le b\} = \Phi_0\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right);$$

$$p'(\sigma) = \Phi_0'\left(\frac{b}{\sigma}\right) \cdot \left(-\frac{b}{\sigma^2}\right) - \Phi_0'\left(\frac{a}{\sigma}\right)\left(-\frac{a}{\sigma^2}\right) = \frac{a}{\sigma^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} -$$

$$-\frac{b}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left(a e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} - b e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} a e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\left(e^{\frac{b^2 - a^2}{2\sigma^2}} - \frac{b}{a}\right) = 0.$$

Решив последнее уравнение, находим точку максимума σ^*:

$$\frac{b^2-a^2}{2\sigma^2}=\ln\frac{b}{a}\Rightarrow\sigma^{*2}=\frac{b^2-a^2}{2\ln\frac{b}{a}}.$$

3. Зная вероятности $P\{\xi\ge 10\}=0{,}1$; $P\{\xi\le 6\}=0{,}4$ и считая $\xi\sim N\left(m,\sigma^2\right)$, найти $P\{5\le\xi\le 7\}$.

Чтобы получить решение, следует на начальном этапе найти параметры нормального закона m и σ:

$$P\{\xi\ge 10\}=\Phi_0(+\infty)-\Phi_0\left(\frac{10-m}{\sigma}\right)=1-\Phi_0\left(\frac{10-m}{\sigma}\right)=0{,}1;$$

$$P\{\xi\le 6\}=\Phi_0\left(\frac{6-m}{\sigma}\right)-\Phi_0(-\infty)=\Phi_0\left(\frac{6-m}{\sigma}\right)=0{,}4.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0\left(\frac{10-m}{\sigma}\right)&=0{,}9\\ \Phi_0\left(\frac{6-m}{\sigma}\right)&=0{,}4\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{10-m}{\sigma}=\arg\Phi_0(0{,}9)\cong 1{,}25;\\ \dfrac{6-m}{\sigma}=\arg\Phi_0(0{,}4)=-0{,}25.\end{cases}$$

Следовательно, для определения m и σ имеем систему:

$$\begin{cases}m+1{,}25\sigma=10,\\ m-0{,}25\sigma=6\end{cases}\Rightarrow\begin{aligned}m&=\frac{20}{3},\\ \sigma&=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Тогда искомая вероятность равна

$$P\{5\le\xi\le 7\}=\Phi_0\left(\frac{7-\frac{20}{3}}{\frac{8}{3}}\right)-\Phi_0\left(\frac{5-\frac{20}{3}}{\frac{8}{3}}\right)=$$

$$=\Phi_0\left(\frac{1}{8}\right)-\Phi_0\left(-\frac{5}{8}\right)=\Phi_0\left(\frac{1}{8}\right)+\Phi_0\left(\frac{5}{8}\right)-1=$$

$$=0{,}55+0{,}73-1=0{,}28.$$

В последней задаче при использовании таблиц функции Лапласа по известному ее значению находились значения ее аргумента, т.е. использовалась функция, обратная функции Лапласа. Если $\Phi_0(x) = p$, то $x = \arg\Phi_0(p)$ называется ***квантилью порядка p*** и обозначается x_p. Квантиль порядка 0,5 называется ***медианой***: $x_{0,5} = \mathrm{med}\,\xi$. Это название обусловлено тем, что точка $x_{0,5}$ делит фигуру под кривой плотности на две равновеликие части площадью 0,5 каждая.

14. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Простейшая, но важная для дальнейшего изложения система двух случайных величин упоминается в разделе 6. Там же введена функция распределения двух случайных величин (ξ, η):

$$F_{\xi\eta}(x; y) = P\{(\xi < x) \cap (\eta < y)\}, \tag{24}$$

которая обладает следующими свойствами.

1^0. $F_{\xi\eta}(x; y)$ не убывает по каждому из своих аргументов. Так, при $\Delta x > 0$

$$(\xi < x) \cap (\eta < y) \subset (\xi < x + \Delta x; \eta < y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\{(\xi < x) \cap (\eta < y)\} \le P\{(\xi < x + \Delta x) \cap (\eta < y)\}.$$

2^0. $F_{\xi\eta}(+\infty; +\infty) = 1$; $F_{\xi\eta}(-\infty; y) = F(x; -\infty) = 0$.

3^0. $F_{\xi\eta}(x; +\infty) = P\{(\xi < x) \cap (y < +\infty)\} = P\{\xi < x\} = F_\xi(x)$.

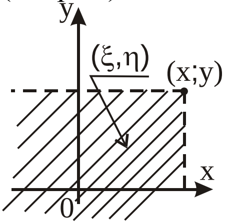
Аналогично $F_{\xi\eta}(+\infty; y) = F_\eta(y)$.

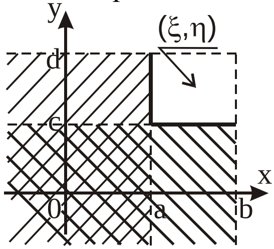
Функция распределения вероятностей позволяет находить вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ, η) в прямоугольник $a \le \xi < b$, $c \le \eta < d$:

$$P\{(a \le \xi < b) \cap (c \le \eta < d)\} =$$
$$= F_{\xi\eta}(b, d) - F_{\xi\eta}(b, c) - F_{\xi\eta}(a, d) + F_{\xi\eta}(a, c).$$

Эта формула получается из следующих соображений: $F_{\xi\eta}(x; y)$ представляет собой вероятность попадания в квадрант $\xi < x$,

$\eta < y$. Прямоугольник $a \le \xi < b$, $c \le \eta < d$ легко «сложить» (см. рис.) из подобных квадрантов.





Если случайные величины ξ, η имеют дискретный характер, то вместо совместной функции распределения можно рассмотреть таблицу,

ξ \ η	y_1	y_2	…	y_j	…
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…
…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…
…	…	…	…	…	…

где $p_{ij} = P\{(\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)\}$. Такая таблица называется матрицей (конечной или бесконечной) распределения. Данные матрицы распределения позволяют легко вычислить значения функции распределения

$$F_{\xi\eta}(x;y) = \sum_{\substack{x_i < x \\ y_j < y}} p_{ij}\ , \ (\sum_i \sum_j p_{ij} = 1),$$

а также законы (ряды) распределения компонент двумерной случайной величины

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = \sum_j p_{ij}\ ;\ \ p_j = P\{\eta = y_i\} = \sum_i p_{ij}\ .$$

Сравните эти формулы с формулой полной вероятности. Что представляют собой гипотезы в каждом из двух случаев?

Условные вероятности могут быть получены по формуле Байеса:

$$p_{i/j} = P\{\xi = x_i / \eta = y_j\} = \frac{P\{(\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)\}}{P\{\eta = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}};$$

$$p_{j/i} = P\{\eta = y_j / \xi = x_i\} = \frac{P\{(\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)\}}{P\{\xi = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_j p_{ij}}.$$

Для непрерывных случайных величин аналогом матрицы распределения является совместная плотность распределения вероятностей

$$f_{\xi\eta}(x;y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\{(x \le \xi < x + \Delta x) \cap (y \le \eta < y + \Delta y)\}}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$

$$= F''_{\xi\eta}(x;y) \ge 0, \qquad (25)$$

так как $F_{\xi\eta}(x;y)$ не убывает.

Вероятность попадания точки (ξ, η) со случайными координатами в некоторую область D определяется формулой

$$P\{(\xi, \eta) \in D\} = \iint_D f_{\xi\eta}(x;y)dxdy. \qquad (26)$$

В частности,

$$F_{\xi\eta}(x;y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(x;y)dxdy. \qquad (27)$$

Используя свойство 2^0 функции распределения, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x;y)dxdy = 1 \qquad (28)$$

- условие нормировки. Далее, из формулы (26) и свойства 3^0 следует

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x;y)dxdy; \quad F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(x;y)dxdy.$$

Продифференцировав последние соотношения по x и по y, соответственно получим

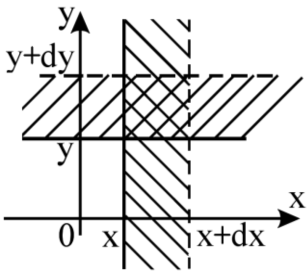
$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x;y)dy; \; f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x;y)dx. \qquad (29)$$

Вероятностный смысл совместной плотности распределения проясняется из соотношения

$$P\{(x \le \xi < x + dx) \cap (y \le \eta < y + dy)\} = f_{\xi\eta}(x; y)dxdy .$$

Аналогично

$$P\{x \le \xi < x + dx\} = f_{\xi}(x)dx ;\ P\{y \le \eta < y + dy\} = f_{\eta}(y)dy .$$



На рисунке изображены соответствующие области координатной плоскости (x, y). На основании приведенных геометрических соображений легко получить формулы для условных плотностей распределения: $f_{\xi/\eta}(x/y) = \dfrac{f_{\xi\eta}(x; y)}{f_{\eta}(y)}$ – плотность распределения случайной величины ξ при условии, что случайная величина $\eta = y$;

$f_{\eta/\xi}(y/x) = \dfrac{f_{\xi\eta}(x; y)}{f_{\xi}(x)}$ – плотность распределения случайной величины η при условии, что случайная величина $\xi = x$.

Условие независимости случайных величин ξ и η может быть записано в следующем виде:

$$f_{\xi\eta}(x; y) = f_{\xi}(x)f_{\eta/\xi}(y/x) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y), \qquad (30)$$

так как для независимых случайных величин условия плотности распределения равны безусловным

$$f_{\eta/\xi}(y/x) = f_{\eta}(y);\ f_{\xi/\eta}(x/y) = f_{\xi}(x).$$

Как выглядит условие независимости в дискретном случае?

Для системы n случайных величин $(\xi_1; \xi_2; ...; \xi_n)$ вводятся совместная функция распределения

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1; x_2; ...; x_n) = P\left\{\bigcap_{k=1}^{n}(\xi_k < x_k)\right\},$$

а также совместная плотность распределения

$$f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1;x_2;\ldots;x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1;x_2;\ldots;x_n).$$

Вероятность попадания n-мерной случайной величины в некоторую область G n-мерного пространства определяется n-кратным интегралом:

$$P\{(\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n)\in G\}=\int\limits_G\int\ldots\int f_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}dx_1dx_2\ldots dx_n\ .$$

Причем в качестве плотности распределения может выступать любая функция $f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$, удовлетворяющая условиям:

1^0. $f(x_1;x_2;\ldots;x_n)\geq 0$;

2^0. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x_1;x_2;\ldots;x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n=1.$

15. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Ограничившись здесь системой двух случайных величин, запишем формулу вычисления математического ожидания функции $\zeta=Z(\xi;\eta)$:

$$m_\zeta=M[\zeta]=\begin{cases}\sum\limits_{i,j}Z(x_i;y_j)p_{ij} & \text{для дискретной с.в.;}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(x;y)f_{\xi\eta}(x;y)dxdy & \text{для непрерывной с.в.}\end{cases}$$

Сравнив эту формулу с аналогичной из раздела 9, видим, что они имеют одинаковую структуру. А именно, для дискретной случайной величины вычисляется сумма произведений возможных значений на их вероятности. В непрерывном случае суммирование заменяется интегрированием по всем возможным значениям.

Для дисперсии случайной величины ζ имеем:

$$D_\zeta = \sigma_\zeta^2 = M\left[(\zeta - m_\zeta)^2\right] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{i,j} \left(z(x_i; y_j) - m_\zeta\right)^2 p_{ij} \text{ для дискретной с.в.;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(z(x; y) - m_\zeta\right)^2 f_{\xi\eta}(x; y) dxdy \text{ для непрерывной с.в.} \end{cases}$$

Сохраняются свойства математического ожидания и дисперсии, приведенные в разделах 9,10.

Формулы вычисления начальных и центральных моментов обобщаются на случай двумерной случайной величины так:

$$\alpha_{l,m}[\zeta] = M\left[\xi^l \cdot \eta^m\right] \; ; \quad \mu_{l,m}[\zeta] = M\left[(\xi - m_\zeta)^l \cdot (\eta - m_\eta)^m\right].$$

Из этого определения следует:

$$\alpha_{1,0} = m_\xi; \;\; \alpha_{0,1} = m_\eta; \;\; \alpha_{2,0} = M\left[\xi^2\right] \; ; \;\; \alpha_{0,2} = M\left[\eta^2\right] \; ;$$

$$\alpha_{1,1} = M[\xi\eta]; \;\; \mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0; \;\; \mu_{2,0} = D_\xi; \;\; \mu_{0,2} = D_\eta .$$

Особую роль играет центральный момент

$$\mu_{1,1} = M\left[(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)\right] = M\left[\xi^0\eta^0\right] ,$$

где $\xi^0 = \xi - m_\xi$; $\eta^0 = \eta - m_\eta$ – центрированные случайные величины. Этот центральный момент называется ***ковариационным моментом*** или, короче, ***ковариацией*** случайных величин ξ и η:

$$\mu_{1,1} = K_{\xi\eta} = \operatorname{cov}(\xi, \eta).$$

Наряду с ковариацией рассматривается безразмерная характеристика, называемая ***коэффициентом корреляции***:

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

Основное свойство ковариации $\left|K_{\xi\eta}\right| \le \sigma_\xi\sigma_\eta$ и вытекающее из него очевидным образом свойство корреляции $\left|r_{\xi\eta}\right| \le 1$ доказываются следующим образом:

$$M\left[\left(s\cdot\xi^0+\eta^0\right)^2\right]=s^2M\left[\xi^{0^2}\right]+2sM\left[\xi^0\eta^0\right]+M\left[\eta^{0^2}\right]=$$

$$=D_\xi\cdot s^2+2K_{\xi\eta}\cdot s+D_\eta\geq 0.$$

Условием неотрицательности квадратного трехчлена (относительно s) является неположительность дискриминанта (старший коэффициент $D_\xi > 0$):

$$K_{\xi\eta}^2-D_\xi D_\eta\leq 0\Rightarrow\left|K_{\xi\eta}\right|\leq\sqrt{D_\xi}\sqrt{D_\eta}=\sigma_\xi\sigma_\eta.$$

Доказанное свойство является частным случаем неравенства Коши - Буняковского: $(x, y)^2\leq(x, x)\cdot(y, y)$, так как ковариационный момент обладает всеми свойствами скалярного произведения центрированных случайных величин: $K_{\xi\eta}=\left(\xi^0,\eta^0\right)$.

Дальнейшее рассмотрение свойств ковариации и коэффициента корреляции оформим в виде следующих утверждений.

Утверждение 1. Если случайные величины ξ и η независимы, то $K_{\xi\eta}=0$.

Действительно, $K_{\xi\eta}=M\left[\xi^0\cdot\eta^0\right]=M\left[\xi^0\right]\cdot M\left[\eta^0\right]=0$, так как $M\left[\xi^0\right]=M\left[\xi-m_\xi\right]=M[\xi]-m_\xi=0$.

Утверждение 2. Если $\eta=a\xi+b$, то $r_{\xi\eta}=\pm 1$. Так как $m_\eta=am_\xi+b$, $\eta^0=a\xi^0$. Поэтому

$$K_{\xi\eta}=M\left[\xi^0\eta^0\right]=aD_\xi.$$

Также $D_\eta=a^2D_\xi$ и $\sigma_\eta=|a|\sigma_\xi$. Подставив найденные характеристики в формулу для коэффициента корреляции, получим

$$r_{\xi\eta}=\frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}=\frac{aD_\xi}{\sigma_\xi\cdot|a|\sigma_\xi}=\frac{a}{|a|}=\pm 1=\operatorname{sign} a$$

($\operatorname{sign} a=\begin{cases}1, & a>0,\\ -1, & a<0\end{cases}$ – знаковая функция).

Изучение свойств ковариации и коэффициента корреляции продолжим в следующем разделе.

16. ЗАДАЧА О НАИЛУЧШЕМ ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Имея дело с системой двух случайных величин (ξ, η) и зная её закон распределения (матрица распределения в случае дискретной случайной величины или же плотность распределения в случае непрерывной случайной величины), установим приближенную связь между ξ и η:

$$\eta \approx C_1\xi + C_2 .$$

При этом возникает задача определения C_1, C_2 «наилучшим» образом. Качество приближения будем характеризовать квадратическим показателем близости левой и правой частей приближенной формулы:

$$Y = M\left[(\eta - C_1\xi - C_2)^2\right] \to \min_{C_1, C_2} .$$

Выполнив возведение в квадрат и применив оператор $M[\cdot]$ к каждому из слагаемых, получим

$$Y(C_1, C_2) = M\left[\eta^2\right] + M\left[\xi^2\right]\cdot C_1 + C_2^2 + 2M[\xi]C_1C_2 - \\ - 2M[\xi\eta]C_1 - 2M[\eta]C_2 -$$

функцию двух переменных C_1 и C_2. Необходимое условие экстремума (минимума) состоит в равенстве нулю частных производных

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial C_1} &= 2M\left[\xi^2\right]C_1 + 2M[\xi]C_2 - 2M[\xi\eta] = 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial C_2} &= 2M[\xi]C_1 + 2C_2 - 2M[\eta] = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\left[\xi^2\right]C_1 + M[\xi]C_2 = M[\xi\eta], \\ M[\xi]C_1 + C_2 = M[\eta]. \end{cases}$$

Последнее из уравнений системы означает равенство математических ожиданий (средних ожидаемых значений) левой и правой частей приближенного соотношения.
Решив систему, получим

$$C_1 = \frac{M[\xi\eta] - M[\xi]\cdot M[\eta]}{M[\xi^2] - M^2[\xi]} = \frac{K_{\xi\eta}}{D_\xi};$$

$$C_2 = M[\eta] - M[\xi]C_1 = M[\eta] - M[\xi]\frac{K_{\xi\eta}}{D_\xi}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в правую часть приближенного соотношения, получим формулу наилучшего линейного приближения:

$$\eta \approx m_\eta + \frac{K_{\xi\eta}}{D_\xi}(\xi - m_\xi) = m_\eta + r_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - m_\xi). \qquad (31)$$

Соотношение (31) называют ***уравнением регрессии***.

Минимальное значение $Y(C_1, C_2)$ найдем, подставив C_1, C_2:

$$Y_{min} = M\left[\left((\eta - m_\eta) - r_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - m_\xi)\right)^2\right] = D_\eta(1 - r_{\xi\eta}^2) \geq 0.$$

Отсюда следует $|r_{\xi\eta}| \leq 1$. Причем если $r_{\xi\eta} = \pm 1$, то существует линейная связь между ξ и η. Знак $r_{\xi\eta}$ означает возрастающую линейную функцию в случае «+» и убывающую – в случае «–». Очевидно, чем ближе $|r_{\xi\eta}|$ к единице, тем сильнее проявляется эта линейная связь.

Таким образом, величина модуля коэффициента корреляции характеризует ***степень линейной зависимости*** между случайными величинами.

Замечание. В случае когда зависимость между случайными величинами очевидным образом нелинейна (например, квадратическая, экспоненциальная и т.д.), коэффициент корреляции «не реагирует» на подобную связь между случайными величинами и может быть равен нулю.

17. ДВУМЕРНЫЙ НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Двумерная случайная величина (случайный вектор) (ξ,η) распределена по ***нормальному закону***, если совместная плотность распределения описывается формулой

$$f_{\xi\eta}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}, \qquad (32)$$

причем $\sigma_1,\sigma_2>0$, $m_1,m_2\in(-\infty;+\infty)$, $|r|<1$.

Плотности распределения компонент случайного вектора

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi\eta}(x;y)dy=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\};$$
$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi\eta}(x;y)dx=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}. \qquad (33)$$

Условные плотности распределения

$$f_{\eta/\xi}(y/x)=\frac{f_{\xi\eta}(x;y)}{f_\xi(x)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_2^2(1-r^2)}\left[y-m_2-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)\right]^2\right\}; \qquad (34)$$

$$f_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{f_{\xi\eta}(x;y)}{f_\eta(y)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)}\left[x - m_1 - r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)\right]^2\right\}.$$

Анализируя (32) и (33), приходим к следующим выводам:

1) $\xi \sim N(m_1;\sigma_1^2)$; $\eta \sim N(m_2;\sigma_2^2)$, т.е. $m_1 = M[\xi]$; $m_2 = M[\eta]$;
   $\sigma_1^2 = D_\xi$; $\sigma_2^2 = D_\eta$;
2) условные плотности распределения представляют собой плотности нормального закона, параметры которого называются - условные математические ожидания

$$M[\eta/\xi] = m_2 - r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1), \quad M[\xi/\eta] = m_1 - r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$$

и условные дисперсии $D[\eta/\xi] = \sigma_2^2(1 - r^2)$, $D[\xi/\eta] = \sigma_1^2(1 - r^2)$.

Непосредственно вычислением находим

$$K_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_1)(y - m_2)f_{\xi\eta}(x;y)dxdy = r\sigma_1\sigma_2 \Rightarrow r_{\xi\eta} = r.$$

Легко убедиться в том, что

$$f_{\xi\eta}(x;y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y) \Leftrightarrow r = 0 \; (K_{\xi\eta} = 0).$$

Поэтому в случае нормального закона распределения понятия независимости и некоррелированности случайных величин совпадают. С другой стороны, этот факт свидетельствует о том, что связь между нормальными случайными величинами может быть ***только линейной***.

Для практических целей очень важным является следующее утверждение: результатом воздействия линейного оператора на нормальные случайные величины является также нормальная случайная величина, закон распределения которой зависит лишь от двух параметров – математического ожидания и дисперсии, которые легко рассчитать.

Например, $\zeta = \xi + \eta$. Система (ξ, η) распределена по нормальному закону (34). Тогда $M[\zeta] = M[\xi] + M[\eta] = m_1 + m_2$;

$$D_\zeta = M\left[\left(\xi+\eta-(m_1+m_2)\right)^2\right] = M\left[\left((\xi-m_1)+(\eta-m_2)\right)^2\right] =$$
$$= \sigma_1^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2.$$

В результате

$$f_\zeta(z) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+2r\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}\cdot 2\pi}\cdot\exp\left\{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2\left(\sigma_1^2+2r\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2\right)}\right\}.$$

Задача. В упаковке 10 единиц товара. Вес единицы товара есть случайная величина, распределенная по нормальному закону $\xi_k \sim N(10;4)$, т.е. $m_{\xi_k}=10$, $\sigma_{\xi_k}=2$. Вес упаковки – 15 единиц. Определить вероятность того, что вес упаковки с товаром превысит 120 единиц.

Обозначив вес упаковки с товаром η, получим

$$\eta = 15+\sum_{k=1}^{10}\xi_k;\quad m_\eta = 15+\sum_{k=1}^{10}M[\xi_k]=115;$$

$$D_\eta = \sum_{k=1}^{10}\sigma_{\xi_k}^2 = 40 \Rightarrow \eta\sim N(115;40).$$

Следовательно (см. раздел 13),

$$P\{\eta>120\} = 1-\Phi\left(\frac{120-115}{2\sqrt{10}}\right) = 1-\Phi(0{,}79) = 1-0{,}785 = 0{,}215.$$

Применение приведенных выше формул основано на независимости случайных величин ξ_k и неслучайном характере веса упаковки.

18. n-МЕРНЫЙ НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Система n случайных величин распределена по нормальному закону, когда совместная плотность распределения задана формулой

$$f_{\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n}(x_1;x_2;\ldots;x_n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\Delta}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-M)^T R^{-1}(X-M)\right\}, \qquad (35)$$

где $X = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$; $M = (m_1; m_2; ...; m_n)^T$, $m_k = M[\xi_k]$; $R = \{R_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – матрица ковариаций, $R_{ij} = \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)$; $\Delta = |R| \neq 0$.

В двумерном случае, описанном в предыдущем разделе,

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Самостоятельно проверить, что при $n = 2$ (35) переходит в (34).Условием независимости нормальной системы случайных величин является их попарная некоррелированность: $R_{ij} = 0$, $i \neq j$. В этом случае

$$f_{\xi_1;\xi_2;...;\xi_n}(x_1; x_2; ...; x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\}, \qquad (36)$$

т.е. совместная плотность распределения равна произведению одномерных плотностей.

19. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А) $\eta = \varphi(\xi)$ и известен закон распределения случайной величины ξ. В дискретном случае возможными значениями случайной величины η являются $\varphi(x_k)$, которые принимаются с вероятностями $p_k = P\{\xi = x_k\}$. Т.е. ряд распределения случайной величины η выглядит так:

η	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_k)$	…
p	p_1	p_2	…	p_k	…

На основании ряда распределения рассчитываются моментные характеристики:

$$\alpha_l(\eta) = \sum_k \varphi^l(x_k) p_k$$

$$\mu_l(\eta) = \sum_k (\varphi(x_k) - m_\eta)^l p_k ,$$

в частности, $m_\eta = \sum_k \varphi(x_k) p_k$; $D_\eta = \sum_k (\varphi(x_k) - m_\eta)^2 p_k$.

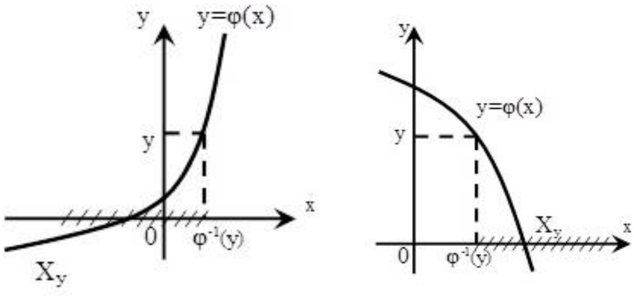
В непрерывном случае функция распределения случайной величины η

$$F_\eta(y) = P\{\varphi(x) < y\} = P\{\xi \in X_Y\} = \int_{X_y} f_\xi(x) dx ,$$

где $X_y = \{x : \varphi(x) < y\}$ – решение неравенства $\varphi(x) < y$.

Далее плотность распределения находится как производная $F_\eta(y)$. Расчеты легко довести до конца, если $\varphi(x)$ – строго монотонна. Тогда

$$X_y = \begin{cases} \{x : x < \varphi^{-1}(y)\}, \text{ если } \varphi(\cdot) \text{ возрастает,} \\ \{x : x > \varphi^{-1}(y)\}, \text{ если } \varphi(\cdot) \text{ убывает.} \end{cases}$$



На рисунках множество X_Y выделено штриховкой.

Следовательно,

$$F_\eta(y) = \begin{cases} \int\limits_{\varphi^{-1}(y)}^{+\infty} f_\xi(x) dx, \text{ если } \varphi(\cdot) \text{ убывает,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\varphi^{-1}(y)} f_\xi(x) dx, \text{ если } \varphi(\cdot) \text{ возрастает.} \end{cases}$$

С учетом правил дифференцирования интеграла по переменному пределу и дифференцирования сложной функции, получаем:

$$f_\eta(y)=\frac{dF_\eta(y)}{dy}=\begin{cases}-f_\xi\left(\varphi^{-1}(y)\right)\dfrac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}, \text{если } \varphi(\cdot) \text{ убывает,}\\ f_\xi\left(\varphi^{-1}(y)\right)\dfrac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}, \text{если } \varphi(\cdot) \text{ возрастает.}\end{cases}$$

С учетом правила дифференцирования обратной функции и знака производной окончательно получим

$$f_\eta(y)=f_\xi\left(\varphi^{-1}(y)\right)\frac{1}{\left|\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right|}. \qquad (37)$$

Пример. $\eta=\xi^3$; $f_\xi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (т.е. $\xi\sim N\left(0;\sigma^2\right)$).

Так как $\varphi^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$, то

$$f_\eta(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{2/3}}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{3y^{2/3}}.$$

Б) $\zeta=\varphi(\xi,\eta)$ и известен закон распределения системы случайных величин (ξ,η). В дискретном случае ряд распределения случайной величины ζ выглядит так:

ζ	$\cdots$	$\varphi(x_i,y_i)$	$\cdots$
p	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$

Моментные характеристики определяются формулами:

$$\alpha_l(\zeta)=\sum_{i,j}\varphi^l\left(x_i,y_j\right)p_{ij},$$

в частности, $m_\zeta=\alpha_1(\zeta)=\sum\limits_{i,j}\varphi\left(x_i,y_j\right)p_{ij}$;

$$\mu_l(\zeta)=\sum_{i,j}\left(\varphi\left(x_i,y_j\right)-m_\zeta\right)^l p_{ij},$$

в частности, $D_\zeta=\mu_2(\zeta)=\sum_{i,j}\left(\varphi\left(x_i,y_j\right)-m_\zeta\right)^2 p_{ij}$.

В непрерывном случае

$$F_\zeta(z)=P\{\varphi(x;y)<z\}=P\{(x;y)\in D_z\}=\iint_{D_z} f_{\xi\eta}(x;y)dxdy,$$

где $D_z=\{(x;y):\varphi(x;y)<z\}$ – область координатной плоскости XOY, в которой выполняется неравенство $\varphi(x;y)<z$. Плотность распределения вычисляется как производная от $F_\zeta(z)$.

Пример. $\zeta=\xi^2+\eta^2$ и случайные величины ξ, η – независимы и распределены по нормальному закону ξ, $\eta\sim N\left(0;\sigma^2\right)$

$$f_{\xi\eta}(x;y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

В рассматриваемом случае $D_z=\left\{(x;y):x^2+y^2<z\right\}$ представляет собой при $z>0$ круг радиусом $\sqrt{z}$. Поэтому

$$F_\zeta(z)=\iint_{x^2+y^2<z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy.$$

Перейдя к полярным координатам ($x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$), получаем

$$F_\zeta(z)=\iint_{\rho<\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\cdot\rho d\varphi d\rho=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{z}}\rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\rho=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot 2\pi\cdot\left.\left(-\sigma^2 e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\right)\right|_0^{\sqrt{z}}=1-e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}.$$

Продифференцировав по z, получим

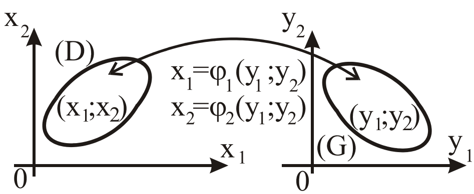
$$f_\zeta(z)=\frac{dF_\zeta(z)}{dz}=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{z}{2\sigma^2}},\ z>0\quad (f_\zeta(z)=0,\ z<0).$$

Т.е. случайная величина ζ распределена по экспоненциальному закону.

В) Между двумя системами случайных величин существует взаимно однозначное соответствие

$$(\xi_1;\xi_2)\underset{\substack{\xi_1=\varphi_1(\eta_1,\eta_2)\\ \xi_2=\varphi_2(\eta_1,\eta_2)}}{\Leftrightarrow}(\eta_1;\eta_2)$$

и известен закон распределения системы случайных величин (ξ_1,ξ_2), в непрерывном случае – совместная плотность распределения $f_{\xi_1,\xi_2}(x_1;x_2)$.



Пусть при рассматриваемом взаимно однозначном соответствии область D плоскости (x_1,x_2) отображается на область G плоскости (y_1,y_2). Обозначив искомую плотность распределения системы случайных величин (η_1,η_2) $f_{\eta_1\eta_2}(y_1,y_2)$, получим:

$$P\{(\eta_1;\eta_2)\in G\}=\iint_G f_{\eta_1\eta_2}(y_1;y_2)dy_1dy_2=P\{(\xi_1;\xi_2)\in D\}=$$

$$=\iint_D f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\begin{vmatrix} x_1=\varphi_1(y_1,y_2)\\ x_2=\varphi_2(y_1,y_2)\end{vmatrix}=$$

$$=\iint_G f_{\xi_1\xi_2}(\varphi_1(y_1,y_2);\varphi_2(y_1,y_2))|I(y_1;y_2)|dy_1dy_2,$$

где

$$I(y_1;y_2)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}$$ – якобиан преобразования координат.

Этот результат позволяет заключить, что

$$f_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = f_{\xi_1\xi_2}(\varphi_1(y_1, y_2); \varphi_2(y_1, y_2))|I(y_1, y_2)|. \qquad (38)$$

Пример. $\xi_1 = \eta_1 \cos\eta_2$; $\xi_2 = \eta_1 \sin\eta_2$ [$\eta_1 \geq 0$, $0 \leq \eta_2 < 2\pi$ – полярные координаты точки (ξ_1, ξ_2)]. Пусть ξ_1, ξ_2 – независимы и распределены по нормальному закону $\xi_1, \xi_2 \sim N(0;1)$, т.е.

$$f_{\xi_1\xi_2}(x_1; x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Как известно, якобиан перехода от декартовых прямоугольных координат равен

$$I(y_1, y_2) = y_1.$$

Тогда применение формулы (38) дает:

$$f_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2 \cos^2 y_2 + y_1^2 \sin^2 y_2}{2}} \cdot y_1 = \frac{y_1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2}{2}}.$$

В этом примере представляют интерес одномерные плоскости распределения случайных величин η_1 и η_2:

$$f_{\eta_1}(y_1) = \int_0^{2\pi} \frac{y_1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2}{2}} dy_2 = y_1 e^{-\frac{y_1^2}{2}};$$

$$f_{\eta_2}(y_2) = \int_0^{+\infty} \frac{y_1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2}{2}} dy_1 = \frac{1}{2\pi}.$$

Таким образом, случайная величина η_2 (угол) распределена равномерно на $[0;2\pi]$. Закон распределения случайной величины η_1 (расстояние) называется законом Рэлея.

Г) $\eta = \varphi(\xi_1; \xi_2; ...; \xi_n)$ и известен закон распределения системы случайных величин $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ – совместная плотность распределения $f_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1; x_2; ..; x_n)$. Функция распределения случайной величины η определяется соотношением

$$F_\eta(y) = P\{\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) < y\} =$$

$$= \underset{D_Y}{\int\int} ... \int f_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n ,$$

где $D_Y = \{(x_1; x_2; ...; x_n) : \varphi(x_1; x_2; ...; x_n) < y\}$. Плотность распределения находится как производная: $f_\eta(y) = F'_\eta(y)$.

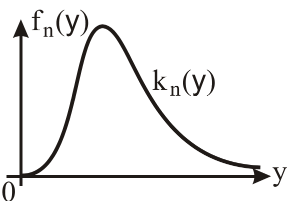
Пример. $\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2$, где $\{\xi_i\}_1^n$ – независимые случайные величины, распределенные по стандартному нормальному закону: $\xi_i \sim N(0;1)$. В этом случае

$$F_\eta(y) = \underset{x_1^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 < y}{\int\int ... \int} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{x_1^2 + x_1^2 + ... + x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 ... dx_n .$$

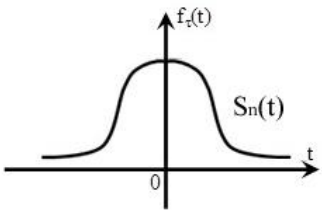
Опустив вычисления, запишем формулу плотности распределения

$$f_\eta(y) = k_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}}, \ x > 0, \qquad (39)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция. Этот закон распределения называется законом $\chi^2(n)$. Сама же случайная величина η также обозначается χ_n^2.

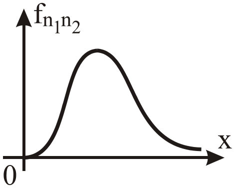


Пример. $\tau = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$, где $\xi \sim N(0;1)$; ξ и χ_n^2 – независимы.



$$f_\tau(t)=s_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} - \qquad (40)$$

распределение Стьюдента.



Пример. $\varphi=\dfrac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2}$ и случайные величины $\chi^2_{n_1}$, $\chi^2_{n_2}$ – независимы.

$$f_\varphi(x)=f_{n_1 n_2}(x)=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \qquad (41)$$

– распределение Фишера $x>0$.

20. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

В этом разделе появляется необходимость во введении новых понятий, связанных с особенностями сходимости случайных последовательностей.

Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет интересовать нас здесь с точки зрения существования ее предела. Предел случайной последовательности может быть определен одним из следующих способов.

1. Сходимость с вероятностью единица или «почти наверное»:

$$\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi:\ P\{\omega:\xi_k(\omega)\not\to\xi\}=0,$$

т.е. все элементарные исходы, за исключением, быть может, какого-то их множества, имеющего вероятность, равную нулю, порождают случайную последовательность, сходящуюся к случайной величине ξ.

2. Сходимость по вероятности:

$$\xi_k \xrightarrow{\text{P.}} \xi: \ P\{|\xi_k - \xi| > \delta\} \to 0$$

для любого положительного δ. Т.е. вероятность отклонения ξ_k от ξ больше, чем на δ стремится к нулю.

3. Сходимость в среднеквадратическом (смысле):

$$\xi_k \xrightarrow{\text{ср.кв.}} \xi:$$

$M\left[(\xi_k - \xi)^2\right] \to 0$, т.е. среднее квадратическое значение разности $(\xi_k - \xi)$ стремится к нулю.

4. Слабая сходимость:

$$\xi_k \xrightarrow{\text{f.}} \xi:$$

$f_{\xi_k}(x) \to f_\xi$ в точках непрерывности.

Имеет место следующая связь между этими типами сходимости:

$$\begin{array}{l} \xi_k \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \ \searrow \\ \xi_n \xrightarrow{\text{ср. кв.}} \xi \ \nearrow \end{array} \ \xi_k \xrightarrow{\quad P \quad} \xi \Longrightarrow \xi_k \xrightarrow{\quad f \quad} \xi.$$

Докажем лишь одно из выше оформленных графически утверждений, а именно:

$$\xi_k \xrightarrow{\text{ср.кв.}} \xi \Rightarrow \xi_k \xrightarrow{\text{P}} \xi,$$

т.е. из сходимости в среднеквадратическом смысле следует сходимость по вероятности.

Доказательство. $\xi_k \xrightarrow{\text{ср.кв.}} \xi$. В силу определения 3 имеем

$$M\left[(\xi_k - \xi)^2\right] \to 0.$$

Поэтому, применив неравенство Чебышева, получим

$$P\{|\xi_k - \xi| > \delta\} \le \frac{M\left[(\xi_k - \xi)^2\right]}{\delta^2} \to 0,$$

что и означает в силу определения 2 сходимость по вероятности.

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, независимых и одинаково распределенных так, что

$$M[\xi_k] = m; \quad D[\xi_k] = \sigma^2, \forall k,$$

а также связанную с ней последовательность

$$\left\{\eta_n : \eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\}.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины η_n соответственно равны:

$$M[\eta_n] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M[\xi_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}m = \frac{1}{n}\cdot(n\cdot m) = m;$$

$$D[\eta_n] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D[\xi_k] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\cdot\left(n\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Далее, так как

$$M\left[(\eta_n - m)^2\right] = D[\eta_n] = \frac{\sigma^2}{n} \to 0,$$

то $\eta_n \xrightarrow{\text{ср.кв.}} m$ и, следовательно, $\eta_n \xrightarrow{P} m$.

Это свойство среднего арифметического часто используется на практике для повышения точности измерений: переход от «единичных» измерений к их среднему арифметическому уменьшает дисперсию в n раз (с.к.о. уменьшается в $\sqrt{n}$ раз).

Полученный результат легко применяется к схеме последовательных испытаний, так как частота успехов представляется в виде среднего арифметического индикаторов успеха (см. раздел 11)

$$\omega_n = \frac{\xi}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{n}.$$

Поэтому $M[\omega_n] = M[\xi_k] = p = P(A)$; $D[\omega_n] = \dfrac{D[\xi_k]}{n} = \dfrac{pq}{n}$.

А следовательно,

$$P\{|\omega_n - P(A)| > \delta\} \le \frac{pq}{n\delta^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

что означает

$$\omega_n \xrightarrow{P} P(A).$$

Это утверждение и составляет содержание ***закона больших чисел.***

21. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Как и в предыдущем разделе, рассматриваются последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – независимых и одинаково распределенных случайных величин, а также последовательность случайных величин

$$\left\{\eta_n : \eta_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - m)}{\sigma\sqrt{n}}\right\}, \text{ где } m = M[\xi_k];\ \sigma^2 = D[\xi_k].$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины η_n:

$$M[\eta_n] = M\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - m)}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} M[\xi_k - m] =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(M[\xi_k] - m) = 0;$$

$$D[\eta_n] = D\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - m)}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{k=1}^{n} D[\xi_k - m] = \frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2 n} \cdot \sigma^2 \cdot n = 1.$$

Таким образом, для любого n математическое ожидание и дисперсия равны 0 и 1 соответственно.

Обозначив характеристическую функцию каждой из случайных величин ξ_k через $\varphi(t)$, найдем характеристическую функцию случайной величины η_n и ее предельный вид при $n \to \infty$:

$$\varphi_{\eta_n}(t) = M\left[e^{-i\eta_n t}\right] = M\left[e^{-i\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - m)}{\sigma\sqrt{n}}t}\right] = \prod_{k=1}^{n} M\left[e^{-i\frac{\xi_k - m}{\sigma\sqrt{n}}t}\right] =$$

$$= M^n\left[e^{-i\frac{\xi_k - m}{\sigma\sqrt{n}}t}\right],$$

поскольку характеристические функции $\dfrac{\xi_k - m}{\sigma\sqrt{n}}$, как и плотности распределения вероятностей, одинаковы. Далее

$$T(t) = M\left[e^{-i\frac{\xi_k - m}{\sigma\sqrt{n}}t}\right] = T(0) + T'(0)t + \frac{T''(0)}{2}t^2 + 0\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right),$$

где

$$T'(0) = M\left[-i \cdot \frac{\xi_k - m}{\sigma\sqrt{n}}\right] = -\frac{i}{\sigma\sqrt{n}} M[\xi_k - m] = 0,$$

$$T''(0) = M\left[-\frac{(\xi_k - m)^2}{\sigma^2 n}\right] = \frac{-1}{\sigma^2 n} M\left[(\xi_k - m)^2\right] = -\frac{1}{\sigma^2 n} \cdot \sigma^2 = -\frac{1}{n},$$

$$T(0) = 1.$$

В результате

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}} -$$

характеристическая функция стандартного нормального закона (см. раздел 13).

Основываясь на свойствах характеристической функции как преобразования Фурье плотности распределения вероятностей, приходим к выводу:

$$\eta_n \xrightarrow{f} \xi^0 \sim N(0;1),$$

т.е. имеет место слабая сходимость последовательности случайных величин $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ к случайной величине, распределенной по стандартному нормальному закону.

Приведенная простейшая формулировка ***центральной предельной теоремы*** может быть усложнена. Различные способы ее усложнения могут быть обобщены следующим образом: сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых в пределе распределена по нормальному закону. Частный вариант центральной предельной теоремы составляют теоремы Муавра - Лапласа (раздел 7).

Практическое использование результата, полученного в этом разделе, основывается на том, что при достаточно больших n сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ распределена по нормальному закону:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sim N\left(nm; n\sigma^2\right).$$

А следовательно, все расчеты вероятностей, связанные с этой суммой, можно вести с использованием функции Лапласа.

Примеры. 1. Каждая из системы независимых случайных величин $\{\xi_k\}$ распределена по одному и тому же закону с математическим ожиданием, равным m, и дисперсией, равной σ^2. Сколько слагаемых должна содержать сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, чтобы выполнялось соотношение

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k > a\right\} = \alpha \text{ ?}$$

Так как $\sum_{k=1}^{n}\xi_k \sim N\left(nm; n\sigma^2\right)$, то

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k > a\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{a - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right).$$

Приравняв правую часть приближенного равенства α, получим

$$\frac{a - nm}{\sqrt{n}\sigma} = \Phi^{-1}(1-\alpha) = \arg\Phi(1-\alpha).$$

Поэтому n можно найти, решив квадратное уравнение

$$m\tau^2 + \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma \cdot \tau - a = 0 \; (\sqrt{n} = \tau)$$

и использовав его положительный корень $n = \tau^2$.

2. В условиях предыдущего примера ξ_k распределены равномерно на $[0;2\alpha]$. При каком значении α вероятность

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k < a\right\} = \beta \text{ ?}$$

Использовав результаты примера 1 раздела 8, получим

$$M\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right] = \sum_{k=1}^{n}M[\xi_k] = n\alpha\,;\; D\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right] = \sum_{k=1}^{n}D[\xi_k] = \frac{n\alpha^2}{3}.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{n}\xi_k \sim N\left(n\alpha; \frac{n\alpha^2}{3}\right)$. Поэтому, заменив вероятность ее приближенным значением

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k < a\right\} \approx \Phi\left(\frac{a - n\alpha}{\alpha\sqrt{\frac{n}{3}}}\right),$$

получим уравнение

$$\Phi\left(\frac{a-n\alpha}{\alpha\sqrt{\frac{n}{3}}}\right)=\beta\Rightarrow\frac{a-n\alpha}{\alpha\sqrt{\frac{n}{3}}}=\Phi^{-1}(\beta).$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\alpha=\frac{a}{n+\Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\frac{n}{3}}}.$$

Упражнения

1. Вокруг круглого стола рассаживаются случайным образом n человек. Определить вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

   Ответ. $\frac{2}{n-1}$.

2. Определить вероятность того, что в лотерее «5 из 36» будут угаданы k номеров, $k=\overline{0,5}$.

   Ответ. $p_0\approx0{,}451$; $p_1\approx0{,}417$; $p_2\approx0{,}119$; $p_3\approx0{,}0123$; $p_4\approx4{,}11\cdot10^{-4}$; $p_5\approx2{,}65\cdot10^{-6}$.

3. n шаров случайным образом размещаются по m ящикам. Найти вероятность того, что в первом ящике будет ровно k шаров ($k\le n$).

   Ответ. $\frac{C_n^k(m-1)^{n-k}}{m^n}$.

4. Через станцию метро каждые 5 минут проходит поезд, время стоянки которого 0,5 мин. Определить вероятность того, что пассажир, пришедший на станцию в случайный момент времени, будет ожидать более 2,5 мин.

   Ответ. $\frac{5}{11}$.

5. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a наудачу бросается монета радиусом r ($2r < a$). Найти вероятность того, что
   а) монета целиком попадет внутрь одного квадрата;
   б) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

Ответ. а) $\dfrac{(a-2r)^2}{a^2}$; б) $\dfrac{a^2-4r^2}{a^2}$.

6. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, наудачу последовательно извлекают 2k шаров ($k \le \min\{m, n\}$). Найти вероятность того, что цвета извлекаемых шаров будут чередоваться (т.е. за белым следует черный, за черным – белый).

Ответ.

$$\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n}{m+n-1}\cdot\frac{m-1}{m+n-2}\cdot\frac{n-1}{m+n-2}\cdots\frac{m-k+1}{m+n-2k+2}\times$$

$$\times\frac{n-k+1}{m+n-2k+2}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n-1}\cdot\frac{n-1}{m+n-2}\cdot\frac{m-1}{m+n-3}\cdot\ldots\times$$

$$\times\frac{n-k+1}{m+n-2k+2}\cdot\frac{m-k+1}{m+n-2k+2}=2\,\frac{[(m+n-2k)!]^2\cdot n!\cdot m!}{[(m+n)!]^2(n-k)!(m-k)!}.$$

7. В магазин поступают одинаковые изделия от трех поставщиков, причем первый поставляет 30 %, второй – 50 %, третий – 20 %. В партии от первого поставщика 3 % брака, от второго – 5 %, от третьего – 4 %. а) Определить вероятность того, что наудачу купленное изделие окажется бракованным. б) Купленное изделие оказалось бракованным; определить вероятность того, что оно поступило от первого поставщика.

Ответ. а) $0{,}047$; б) $\approx 0{,}214$.

8. Производится 5000 выстрелов по цели. Вероятность попадания при каждом – 0,001. Найти вероятность двух и более попаданий тремя способами: а) по закону Бернулли; б) по закону Пуассона; в) по формуле Муавра - Лапласа.

Ответ. а) $1-p_0(5000)-p_1(5000)\approx 0{,}9608$;

б) $\approx 0{,}9596$;

в) $\approx 0{,}7881$.

Объясните высокую точность б) и низкую в).

9. Бросаются 10 игральных костей. Определить математическое ожидание, дисперсию и с.к.о. суммарного числа выпавших очков.

Ответ. $m = 35$; $D = 29{,}2$; $\sigma \approx 1{,}7$.

10. Цена покупки одного случайного покупателя – случайная величина, распределенная по нормальному закону с $m = 200$, $\sigma = 50$. Сколько покупателей должен обслужить магазин, чтобы вероятность дневной выручки не менее 20000 была равна 0,9.

Ответ. Число покупателей больше 103.

22. ЦЕПИ МАРКОВА. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА

Производится последовательность испытаний, в результате каждого из которых может произойти одно из несовместных событий $A_k^{(i)}$, где i – номер испытания. Эта последовательность образует ***цепь Маркова***, если выполнено условие

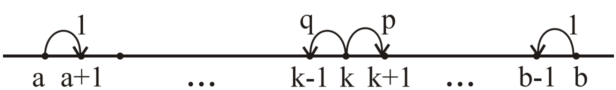
$$P\left(A_k^{(i+1)} \middle/ A_j^{(i)}, A_l^{(i-1)}, \ldots\right) = P\left(A_k^{(i+1)} \middle/ A_j^{(i)}\right),$$

т.е. условная вероятность события A_k в $(i+1)$-м испытании зависит лишь от того, каким был результат i испытания и не зависит от исхода более ранних испытаний (при осуществлении очередного испытания на его исход влияет только результат предыдущего и «забываются» результаты предшествующих испытаний).

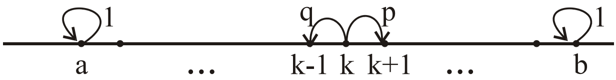
Имея в виду технические приложения, используют другую терминологию: имеется система, которая может находиться в одном из состояний A_k; при изменении состояния вероятность перейти в новое зависит только от предыдущего, но не от более ранних.

В качестве примера рассмотрим задачу о случайном блуждании частицы по прямой.

Модель случайного блуждания 1. Частица может находиться в точках с целочисленными координатами $a; a+1; \ldots; b$. Частица, находящаяся в положении k ($a < k < b$), перемещается вправо с вероятностью p и влево с вероятностью q; из положения a частица перемещается в положение $a+1$; из положения b – в положение $b-1$ (***отражающие границы***). Схематически эта ситуация иллюстрируется следующим графиком:



Модель случайного блуждания 2. Ситуация совпадает с описанной в модели 1 за исключением того, что, попав в граничные точки a или b, частица остается в этих точках (***поглощающие границы***).



Далее рассматриваются лишь ***однородные цепи Маркова***, для которых

$$P\left(A_j^{(l+1)} \big/ A_i^{(l)}\right) = p_{ij},$$

т.е. не зависит от l – номера испытания. p_{ij} называется ***вероятностью перехода***, а матрица

$$\Pi = \{p_{ij}\} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} -$$

матрицей перехода (конечной или бесконечной). Элементы матрицы перехода удовлетворяют условию (условие нормировки):

$$\sum_j p_{ij} = \sum_j P\left(A_j / A_i\right) = 1,$$

т.е. сумма элементов строки равна единице.

Возвращаясь к описанию случайного блуждания, получаем:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ для модели 1 и}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ для модели 2.}$$

Определим вероятность перехода из состояния $A_i^{(l)}$ в состояние $A_j^{(l+m)}$, обозначив ее через $P_{ij}(m)$. Рассмотрев «промежуточное» испытание с номером $l+k$ $(k<m)$ с возможными исходами $A_s^{(l+k)}$, запишем формулу полной вероятности

$$P_{ij}(m)=\sum_s P_{is}(k)\cdot P_{sj}(m-k), \qquad (42)$$

где состояния $A_s^{(l+k)}$ играют роль гипотез с вероятностями $P_{is}(k)$.

Обозначив

$$\Pi_m=\{P_{ij}(m)\}$$

матрицу перехода через m испытаний, запишем для нее формулу

$$\Pi_m=\Pi_k\cdot\Pi_{m-k} \text{ – уравнение Колмогорова - Чэпмена.} \qquad (43)$$

Обоснованием этого матричного соотношения служит формула (42), которая в данном случае интерпретируется как правило умножения матриц «строка на столбец».

В частности,

$$\Pi_1=\Pi;\ \Pi_2=\Pi_1\cdot\Pi_1=\Pi^2;\ \ldots;\ \Pi_n=\Pi_{n-1}\cdot\Pi=\Pi^n.$$

При этом условие $\sum_j P_{ij}(n)=1$ сохраняет силу.

23. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть в момент k система пребывает в каждом из состояний A_i с вероятностью $p_i(k)$. Совокупность $p_i(k)$ представляет собой ряд распределения: $P(k)=(p_1(k); p_2(k);\ldots; p_i(k);\ldots)$ - матрица-строка, для которого, очевидно, $\sum_i p_i(k)=1$.

Формула полной вероятности позволяет найти вероятность $p_j(k+1)$ пребывания системы в состоянии A_j в следующий $(k+1)$-й момент:

$$p_j(k+1)=\sum_i p_i(k)\cdot p_{ij}.$$

Это соотношение может быть переписано в матричной форме:

$$P(k+1) = P(k) \cdot \Pi, \qquad (44)$$

и, таким образом, формула (44) позволяет производить расчет вектора-строки $P(k)$ последовательно для любого k. Если задано распределение вероятностей $P(0)$ в начальный момент, то

$$P(k) = P(0) \cdot \Pi^k.$$

Представляет несомненный интерес вопрос о существовании предельного распределения

$$P^* = \lim_{k\to\infty} P(k) = P(0) \lim_{k\to\infty} \Pi^k = P(0)\Pi^*,$$

который сводится к вопросу о существовании предела

$$\Pi_k = \Pi^k.$$

Ответ на этот вопрос дает ***эргодическая теорема***.

Теорема. Если для некоторого s все элементы матрицы перехода Π_s отличны от нуля, то имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = p_j^*, \forall j,$$

т.е. в пределе все элементы столбца одинаковы и равны p_j^*.

В этом случае

$$P^* = P(0) \cdot \Pi^* = P(0) \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* & \dots & p_j^* & \dots \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_j^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_j^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} =$$

$$= (p_1^*; p_2^*; \dots; p_j^*; \dots),$$

т.е. набор $\{p_j^*\}$ представляет собой предельное распределение.

Строка P^*, называемая стационарным или инвариантным распределением вероятностей, удовлетворяет соотношению:

$$P^* = P(0) \lim \Pi^k = \left(P(0) \lim \Pi^{k-1}\right) \cdot \Pi = P^* \Pi, \qquad (45)$$

которое в сочетании с условием нормировки позволяет найти предельное распределение вероятностей. Привлечение условия нормировки необходимо, так как система уравнений

$$P*(\Pi - E) = 0 \qquad (45')$$

вырожденна (определитель матрицы $\Pi - E$ равен нулю), так как сумма столбцов матрицы $\Pi - E$ равна нулевому столбцу.

Примеры. 1. Пусть имеется однородная марковская цепь с двумя состояниями A_1 и A_2 и матрицей переходов

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix},$$

причем $p_{11} + p_{12} = p_{21} + p_{22} = 1$. Тогда марковское уравнение ($45'$) дает систему:

$$\begin{cases} p_{11} \cdot p_1{*} + (1 - p_{22})p_2{*} = p_1{*}, \\ (1 - p_{11}) \cdot p_1{*} + p_{22}p_2{*} = p_2{*} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p_{11} - 1) \cdot p_1{*} + (1 - p_{22})p_2{*} = 0, \\ (1 - p_{11}) \cdot p_1{*} + (p_{22} - 1)p_2{*} = 0. \end{cases}$$

Эта система содержит единственное независимое уравнение, поэтому добавляется условие нормировки и в результате получается система:

$$\Rightarrow \begin{cases} (p_{11} - 1) \cdot p_1{*} - (1 - p_{22})p_2{*} = 0, \\ p_1{*} + p_2{*} = 1. \end{cases}$$

Ее решение $p_1{*} = \dfrac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}}$; $p_2{*} = \dfrac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}}$ дает предельное (стационарное) распределение вероятностей.

2. Рассмотрим модель 1 случайного блуждания (отражающие границы). Система уравнений ($45'$) имеет вид

$$\begin{cases} -p_1{*}+qp_2{*}=0, \\ p_1{*}-p_2{*}+qp_3{*}=0, \\ p\cdot p_2{*}-p_3{*}+qp_4{*}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p\cdot p_{k-1}{*}-p_k{*}+qp_{k+1}{*}=0, (3\le k\le n-2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p\cdot p_{n-2}{*}-p_{n-1}{*}+p_n{*}=0, \\ p\cdot p_{n-1}{*}-p_n{*}=0. \end{cases}$$

Так как сумма всех уравнений системы дает тождество, то одно из уравнений является следствием остальных и его необходимо заменить условием нормировки. Здесь отрезок содержит n целочисленных точек, т.е. $b-a=n-1$.

Выразим все неизвестные через $p_1{*}$. Начиная с первого уравнения и переходя далее ко второму, третьему и т.д., получаем

$$p_2{*}=\frac{1}{q}p_1{*};\ p_3{*}=\frac{p}{q^2}p_1{*};\ldots;\ p_k{*}=\frac{p^{k-2}}{q^{k-1}}p_1{*};\ldots;$$

$$p_{n-1}{*}=\frac{p^{n-3}}{q^{n-2}}p_1{*};\ p_n{*}=\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}p_1{*}.$$

Причем из последнего и предпоследнего уравнений получаются одинаковые результаты для $p_n{*}$. Это свидетельствует о том, что последнее уравнение есть следствие остальных. Подставив найденные выражения в условие нормировки, получим

$$p_1{*}+p_2{*}+\ldots+p_n{*}=$$

$$=\left(1+\left(\frac{1}{q}+\frac{p}{q^2}+\ldots+\frac{p^{k-2}}{q^{k-1}}+\ldots+\frac{p^{n-3}}{q^{n-2}}\right)+\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}\right)p_1{*}=$$

$$=\left(1+\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}+\frac{\dfrac{p^{n-2}}{q^{n-1}}-\dfrac{1}{q}}{\dfrac{p}{q}-1}\right)p_1{*}=\frac{2\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)}{q^{n-2}(p-q)}p_1{*}=1\,.$$

Отсюда

$$p_1{*}=\frac{q^{n-2}(p-q)}{2\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)};\ p_2{*}=\frac{q^{n-3}(p-q)}{2\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)};\ldots;$$

$$p_k{*}=\frac{p^{k-2}q^{n-k-1}(p-q)}{2\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)};\ldots;\ p_n{*}=\frac{p^{n-2}(p-q)}{2\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)}.$$

3. Фирма может работать в трех режимах: 1 – благоприятный с рентабельностью 100 %; 2 – нормальный с рентабельностью 60 %; 3 – неблагоприятный с рентабельностью 20 %. Цепочка переходов от одного режима к другому представляет марковскую цепь с матрицей переходов

$$\Pi=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5\end{bmatrix}.$$

Определить среднюю рентабельность по истечении длительного времени работы фирмы.

Найдем предельное распределение, составив систему ($45'$) и добавив к ней условие нормировки:

$$\begin{cases}-0{,}5p_1{*}+0{,}3p_2{*}+0{,}1p_3{*}=0,\\ 0{,}4p_1{*}-0{,}5p_2{*}+0{,}4p_3{*}=0,\\ 0{,}1p_1{*}+0{,}2p_2{*}-0{,}5p_3{*}=0,\\ p_1{*}+p_2{*}+p_3{*}=1.\end{cases}$$

Третье уравнение системы есть следствие первых двух. Выразив $p_2{*}, p_3{*}$ через $p_1{*}$ из первых двух уравнений, подставим в условие нормировки

$$\begin{cases} 0{,}3p_2^* + 0{,}1p_3^* = 0{,}5p_1^*, \\ -0{,}5p_2^* + 0{,}4p_3^* = -0{,}4p_1^* \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p_2^* = \dfrac{24}{17}p_1^* \\ p_3^* = \dfrac{13}{17}p_1^* \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{24}{17} + \frac{13}{17}\right)p_1^* = 1.$$

Отсюда

$$p_1^* = \frac{17}{54}; \quad p_2^* = \frac{24}{54}; \quad p_3^* = \frac{13}{54}.$$

Средняя рентабельность (математическое ожидание) равна

$$\overline{Q} = 100 \cdot \frac{17}{54} + 60 \cdot \frac{24}{54} + 20 \cdot \frac{13}{54} \approx 63\%.$$

24. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ИСПЫТАНИЙ. МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим последовательность испытаний, в каждом из которых может появиться событие А, отказавшись на этот раз от условия независимости. Модель зависимых испытаний представляет собой цепь Маркова. Матрица переходов составляется исходя из предположения, что исход k-го испытания влияет на вероятность исхода $(k+1)$-го. Обозначим

$$P\left(A^{(k+1)} / A^{(k)}\right) = \alpha; \quad P\left(A^{(k+1)} / \overline{A}^{(k)} = \beta\right),$$

т.е. вероятность появления успеха в $(k+1)$ испытании при условии успеха k-го испытания равна α, а вероятность успеха $(k+1)$-го испытания при условии неуспеха k-го равна β.

Присвоив «успеху» индекс 1, а «неудаче» – 2, запишем переходную матрицу в виде:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \alpha & (1-\alpha) \\ \beta & (1-\beta) \end{bmatrix}.$$

Так как для первого испытания предшествующее отсутствует, то зададим p_1 – вероятность успеха первого испытания,

$q_1 = 1 - p_1$ – вероятность противоположного события. При таких начальных значениях найдем вероятность события $A^{(k)}$, т.е. успеха k-го испытания:

$$P\left(A^{(k)}\right) = p_k = \alpha p_{k-1} + \beta q_{k-1},\ q_{k-1} = 1 - p_{k-1}.$$

Отсюда $p_k = (\alpha-\beta)p_{k-1} + \beta = (\alpha-\beta)((\alpha-\beta)p_{k-2} + \beta) + \beta = \ldots =$

$$= (\alpha-\beta)^{k-1} p_1 + \beta\left(1 + (\alpha-\beta) + \ldots + (\alpha-\beta)^{k-2}\right) =$$

$$= (\alpha-\beta)^{k-1} p_1 + \beta \frac{(\alpha-\beta)^{k-1} - 1}{\alpha-\beta-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\beta}{1-\alpha+\beta},$$

так как $|\alpha-\beta| < 1$.

$p^* = \dfrac{\beta}{1-\alpha+\beta}$; $q^* = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}$ – предельные значения вероятностей успеха и неудачи. С использованием этих обозначений

$$p_k = p^* + (p_1 - p^*)(\alpha-\beta)^{k-1}.$$

Обозначим $P_j^{(i)}$ вероятность $P\left(A^{(j)}/A^{(i)}\right)$ – вероятность появления события A при j-м испытании, если оно появилось в i-м испытании. Произведя преобразования, аналогичные изложенным, получаем формулу

$$P_j^{(i)} = p^* + q^*(\alpha-\beta)^{j-i}.$$

Пример. Последовательность коммерческих операций, совершаемых фирмой, обладает свойством: вероятность успеха очередной операции зависит от результата предыдущей. При успехе предыдущей она равна 0,9, а при неудаче – 0,5. Прибыль успешной операции составляет S_1, убыток при неудаче – S_2. Определить среднюю прибыль от одной операции при условии длительной работы.

Математическое ожидание прибыли определяется стандартной формулой $(\alpha = 0{,}9; \beta = 0{,}5)$:

$$\overline{S} = M[S] = S_1 \cdot p^* + (-S_2)q^*,$$

где $p^* = \dfrac{0{,}5}{1-0{,}9+0{,}5} = \dfrac{5}{6}$; $q^* = \dfrac{1-0{,}9}{1-0{,}9+0{,}5} = \dfrac{1}{6}$.

Окончательно

$$\overline{S} = \frac{5}{6}S_1 - \frac{1}{6}S_2 .$$

Вопрос о числе успехов в серии из n последовательных испытаний может быть разрешен следующим образом. Обозначим $P_k^{(1)}(n)$ – вероятность k успехов в n испытаниях при условии, что в первом испытании имелся успех; $P_k^{(0)}(n)$ – вероятность k успехов из n при неудаче первого испытания. Тогда формула полной вероятности дает:

$$P_k(n) = p_1 P_k^{(1)}(n) + q_1 P_k^{(0)}(n) = p_1 P_{k-1}(n-1) + q_1 P_k(n-1).$$

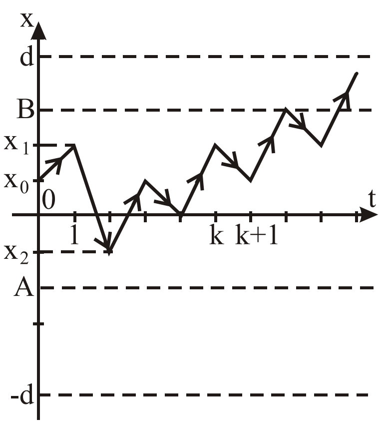
При этом

$$P_1(1) = p_1; \;\; P_0(1) = q_1; \;\; P_0(n) = q_1(1-\beta)^{n-1}; \;\; P_1(n) = p_1\alpha^{n-1}.$$

Эти соотношения играют роль граничных условий.

25. ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫХОДА НА ГРАНИЦУ

Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ образует цепь Маркова. Каждая из случайных величин принимает значения $0;\pm1;\pm2;...;\pm d$. Рассмотрим два целых числа A и B: $-d \le A < 0 < B \le d$. Графически поведение такой последовательности можно представить в виде ломаной линии (назовем ее траекторией). Если в начальный момент значение $\xi_0 = x_0$ принадлежит отрезку $[A;B]$, то можно поставить вопрос о первом выходе за границу отрезка, который может осуществиться либо через нижнюю границу A, либо через верхнюю. В первом из случаев случайная величина оказывается во множестве



$$\{A-1; A-2;...;-d\},$$

во втором – во множестве

$$\{B+1; B+2;...; d\}.$$

Обозначим через $\beta_n(x_0)$ вероятность того, что первый выход случайной последовательности $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ состоится через верхнюю границу при условии $\xi_0 = x_0$.

Тогда

$$\beta_n(x_0) = \sum_{x_1} p_{x_0 x_1} \beta_{n-1}(x_1),$$

где $p_{x_0 x_1}$ – вероятность перехода из состояния x_0 в состояние x_1. При этом $\beta_n(x_0) = 1$ при $x_0 = B, B+1, \ldots, d$ и $\beta_n(x_0) = 0$ при $x_0 = -d, \ldots, A$. Аналогичным образом получают уравнение для $\alpha_n(x_0)$ – вероятность выхода через нижнюю границу:

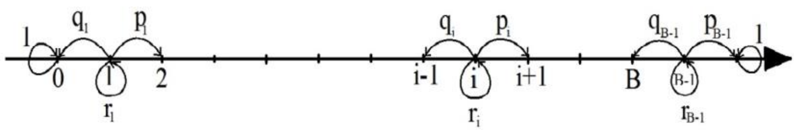
$$\alpha_n(x_0) = \sum_{x_1} p_{x_0 x_1} \alpha_{n-1}(x_1),$$

причем

$$\alpha_n(x_0) = 0 \text{ при } x_0 = B, B+1, \ldots, d \text{ и } \alpha_n(x_0) = 1 \text{ при } x_0 = -d, \ldots, A.$$

В качестве примера рассмотрим марковскую цепь с возможными состояниями $\{0;1;\ldots;B\}$ и переходными вероятностями

$$p_{00} = 1; \;\; p_{BB} = 1; \;\; p_{ij} = \begin{cases} p_i, \; j = i+1 \\ r_i, \; j = i \\ q_i, \; j = i-1 \end{cases}; \;\; p_{ij} = 0, \; |j-i| \geq 2;$$



$p_i + r_i + q_i = 1$.

Состояния 0 и B – поглощающие границы. В любом отличном от них состоянии точка перемещается на единицу вправо с вероятностью p_i, на единицу влево с вероятностью q_i, остается на месте с вероятностью r_i. Найдем вероятность

$$\alpha(x)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x) -$$

предельную вероятность того, что точка, начавшая движение из положения $x\in\{1;2;...;B-1\}$, достигнет левой границы раньше, чем правой. Осуществив предельный переход в уравнении для $\alpha_n(x)$, получим

$$\alpha(i)=q_i\alpha(i-1)+r_i\alpha(i)+p_i\alpha(i+1).$$

Очевидно, $\alpha(0)=1$, $\alpha(B)=0$. Так как $r_i=1-p_i-q_i$, то

$$p_i(\alpha(i+1)-\alpha(i))=q_i(\alpha(i)-\alpha(i-1)).$$

Отсюда получаем

$$\alpha(i+1)-\alpha(i)=\frac{q_i}{p_i}(\alpha(i)-\alpha(i-1))=$$

$$=\frac{q_i}{p_i}\cdot\frac{q_{i-1}}{p_{i-1}}(\alpha(i-1)-\alpha(i-2))=...=\rho_i(\alpha(1)-1),$$

где $$\rho_i=\frac{q_iq_{i-1}...q_1}{p_ip_{i-1}...p_1}\quad(\rho_0=1).$$

Так как $$\alpha(i+1)-1=\sum_{j=0}^{i}(\alpha(j+1)-\alpha(j)),$$

то $$\alpha(i+1)-1=(\alpha(1)-1)\sum_{j=0}^{i}\rho_j.$$

Если $i=B-1$, то $\alpha(i+1)=\alpha(B)=0$, а значит,

$$\alpha(1)-1=-\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{B\text{-}1}\rho_i}.$$

И, следовательно,

$$\alpha(1)=\frac{\sum\limits_{j=1}^{B-1}\rho_j}{\sum\limits_{j=0}^{B-1}\rho_j};\quad \alpha(i)=\frac{\sum\limits_{j=i}^{B-1}\rho_j}{\sum\limits_{j=0}^{B-1}\rho_j},\quad j=\overline{1,B}.$$

Обозначим через $m_n(x_0)$ – математическое ожидание времени выхода на границу (любую). Действуя так же, как при получении уравнений для α и β, записываем рекуррентные уравнения

$$m_n(x_0) = 1 + \sum_{x_1} p_{x_0 x_1} m_{n-1}(x_1),$$

при этом $m_n(x_0) = 0$, если $x_0 \overline{\in} [A, B]$. Обозначив

$$m(x) = \lim_{n \to \infty} m_n(x),$$

получим

$$m(x_0) = 1 + \sum_{x_1} p_{x_0 x_1} \cdot m(x_1).$$

Для рассматриваемого примера

$$m(i) = 1 + q_i m(i-1) + r_i m(i) + p_i m(i+1).$$

Обозначив $\mu_i = m(i) - m(i-1)$, преобразуем последнее уравнение к виду:

$$p_i \mu_{i+1} = q_i \mu_i - 1,\ i = \overline{1, B-1}.$$

Применив это рекуррентное соотношение i раз, получим

$$\mu_{i+1} = \rho_i \mu(1) - R_i,$$

где

$$R_i = \frac{1}{p_i}\left(1 + \frac{q_i}{p_{i-1}} + \ldots + \frac{q_i \ldots q_2}{p_{-1} \ldots p_1}\right).$$

Следовательно, $(m(0) = m(B) = 0)$,

$$m(i) = m(i) - m(0) = \sum_{j=0}^{i-1} \mu_{j+1} = m(1)\sum_{j=0}^{i-1} \rho_j - \sum_{j=0}^{i-1} R_j .$$

Подставив в полученную формулу $i = B$, получим:

$$m(B) = m(1)\sum_{j=0}^{B-1} \rho_j - \sum_{j=0}^{B-1} R_j = 0 .$$

Отсюда

$$m(1)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{B-1} R_j}{\sum\limits_{j=0}^{B-1} \rho_j}; \quad m(i)=\sum_{j=0}^{-1} \rho_j \frac{\sum\limits_{i=0}^{B-1} R_i}{\sum\limits_{i=0}^{B-1} \rho_i}-\sum_{j=0}^{i-1} R_j, \ i=\overline{1,B}.$$

26. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ (НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ)

В предыдущих разделах рассматривалась модель с дискретным временем: переход из одного состояния в другое происходит только в определенные моменты времени. Если переходы возможны в любой момент времени, мы говорим о ***марковском процессе с непрерывным временем***.

Для марковского процесса с дискретным множеством состояний и непрерывным временем можно составить систему линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим далее марковский процесс, который играет важную роль при решении многих практических задач. Пусть некоторое событие происходит в случайные моменты времени. $\xi(t)$ – число появлений этого события за отрезок времени от 0 до t. Пусть рассматриваемый процесс удовлетворяет следующим условиям:

1) стационарность. Это означает, что вероятность $p_k([a;b])$ того, что на отрезке $[a;b]$ событие произойдет ровно k раз, не зависит от расположения этого отрезка на числовой оси, а зависит лишь от его длины;

2) отсутствие последствия означает, что вероятность $p_k([a;b])$ не зависит от того, сколько раз событие произошло при $t<a$, т.е. ранее. В частности, это означает взаимную независимость появления того или иного числа событий на непересекающихся отрезках времени;

3) ординарность представляет собой условие невозможности появления двух и более событий одновременно. Формально это условие можно описать соотношением

$$P_{>1}(\Delta t)=0(\Delta t).$$

Задача состоит в нахождении вероятностей $P_k(t)$ того, что на отрезке $[0;t]$ произойдут k событий. Для этого разобьем отрезок длиной t на n равных частей, длина каждой – $\frac{1}{n}$. При достаточно больших значениях n вследствие условия ординарности на каждой из частей разбиения может произойти лишь одно событие. При подсчете общего числа событий на отрезке $[0;t]$ мы оказываемся в условиях схемы Бернулли (см. раздел 5). Для завершения расчетов необходимо определить вероятность p успеха, т.е. обнаружения события в рассматриваемой части разбиения. Зная, что математическое ожидание числа успехов равно $n \cdot p$ и вычисляя среднее число успехов как λt, где λ – средняя интенсивность успехов, получаем

$$p = \frac{\lambda t}{n}.$$

Даже перейдя к пределу (как в примере 3 раздела 7), получаем

$$P_k(t) = C_n^k \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0,1,\ldots$$

Последнюю формулу можно получить в виде решения системы дифференциальных уравнений, описывающих данный марковский процесс. Исходя из изложенных выше соображений и обозначив $\Delta t = \frac{t}{n}$, получим $p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t$. Тогда из условия нормировки

$$P_0(\Delta t) + P_1(\Delta t) + P_{>1}(\Delta t) = 1$$

следует $$P_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + 0(\Delta t).$$

Определим вероятность $P_k(t + \Delta t)$ – вероятность того, что за время $t + \Delta t$ событие наступит ровно k раз. Воспользовавшись для этого формулой полной вероятности, рассмотрим гипотезы:

H_0 – за время t наступает k событий, $P(H_0) = P_k(t)$;

H_1 – за время t наступает $k-1$ событий, $P(H_1) = P_{k-1}(t)$;

……………………..

H_k – за время t событие не наступит ни одного раза,

$$P(H_k) = P_0(t).$$

Вследствие условия отсутствия последствия условные вероятности наступления некоторого числа событий на отрезке $[t; t+\Delta t]$ равны безусловным. Тогда

$P_k(t+\Delta t / H_j) = P_{k-j}(\Delta t)$ – вероятность того, что на отрезке длиной Δt наступят «недостающие» $k-j$ событий. При этом

$P_{k-j}(\Delta t) = 0(\Delta t),\ k-j > 1$ – ординарность.

В описанных условиях формула полной вероятности выглядит так:

$$P_k(t+\Delta t) = P_0(\Delta t)P_k(t) + P_1(\Delta t)P_{k-1}(t) + 0(\Delta t) =$$

$$= (1-\lambda\Delta t + 0(\Delta t))P_k(t) + \lambda\Delta t P_{k-1}(t) + 0(\Delta t).$$

После очевидных преобразований получим

$$\frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t) + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переход к пределу при $\Delta t \to 0$ дает

$P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t),\ k = 1;2;...;\ \ P_k(0) = 0$;

$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \Rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t}$, т.к. $P_0(0) = 1$.

Решение последней системы легко найти посредством замены

$P_k(t) = e^{-\lambda t} v_k(t)$: $v_k' = \lambda v_{k-1}(t),\ v_k(0) = 0$, $k = 1,2,...$

Так как $v_0(t) = 1$,

то $v_1(t) = \lambda t$; $v_2(t) = \dfrac{\lambda^2 t^2}{2}$;…; $v_k(t) = \dfrac{\lambda^k t^k}{k!}$;…

Отсюда $P_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. В этой формуле легко узнать закон распределения Пуассона $(a = \lambda t)$. Поэтому марковский процесс, удовлетворяющий условиям стационарности, отсутствия после-действия и ординарности, называется ***пуассоновским процессом***.

Введенная здесь математическая (вероятностная) модель пригодна для описания многих природных и технических процессов. Например, число вызовов, поступивших на телефонную станцию; число распадов атомов радиоактивного вещества; число отказавших элементов сложной схемы; число клиентов, обратившихся в фирму, и т.п.

Случайная величина τ – промежуток времени, прошедший между двумя последовательными появлениями события. Функция распределения (см. пример 2 раздела 8)

$$F_\tau(t) = P\{\tau < t\} = 1 - P(\tau \geq t) = 1 - e^{-\lambda t},\ t \geq 0.$$

Плотность распределения $f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Пример. От каждого проданного цветка киоск получает прибыль 10 рублей; каждый непроданный дает убыток – 3 рубля. Моменты обращения покупателей образуют пуассоновский поток с $\lambda = 0{,}1\ \text{ч}^{-1}$. Пусть продолжительность работы киоска составляет t часов. Определить число цветов n, которое выставляется на продажу так, чтобы средняя прибыль за время t была максимальной. Построить график зависимости $n_{max}(t)$.

Рассматриваются гипотезы H_k – за время t обратились k покупателей: $P(H_k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. При осуществлении гипотезы H_k прибыль составляет $S_k = 10k - 3(n-k)$ при $k \leq n$ и $S_k = 10n$ при $k > n$. Понимая под средней прибылью ее математическое ожидание, получаем (случайная величина σ – прибыль)

$$\overline{S}_n = M[\sigma_n] = \sum_{k=0}^{n} (13k - 3n) P(H_k) + 10n \sum_{k=n+1}^{\infty} P(H_k).$$

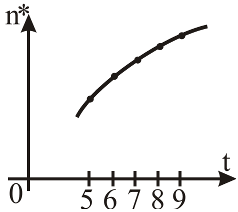
Для выявления n_{max} исследуем знак $\Delta\overline{S}_n = \overline{S}_{n+1} - \overline{S}_n =$

$$=10\sum_{k=n+1}^{\infty}P(H_k)-3\sum_{k=0}^{n+1}P(H_k)=10-10\sum_{k=0}^{n}P(H_k)-3\sum_{k=0}^{n+1}P(H_k).$$

Вычисления сведем в таблицу:

	n								
t	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	n*
5	1,52	-0,18	—	—	—	—	—	—	6
6	—	1,58	0,05	-1,26	—	—	—	—	8
7	—	—	1,84	0,2	-1,0	—	—	—	9
8	—	—	—	1,94	0,37	-0,92	—	—	10
9	—	—	—	—	1,97	0,5	-0,64	—	11

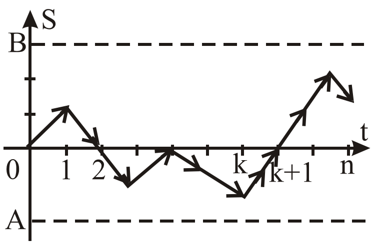
Расчеты данной таблицы опираются на значения функции $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$, где $a=\lambda t$, имеющиеся в литературе.



27. СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ ПО ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_i\}$, принимающих два возможных значения: 1 и –1:

$$P\{\xi_i=1\}=p\,;\ P\{\xi_i=-1\}=q$$
$$(p+q=1).$$



Пусть $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i$, $S_0=0$. Последовательность $\{S_k\}$ можно рассматривать как траекторию случайного блуждания. При этом $S_{k+1}=S_k+\xi_{k+1}$, т.е. если в момент k частица находится в точке S_k, то в момент $k+1$ она перемещается либо на единицу вверх (с вероятностью p), либо на единицу вниз (с вероятностью q). Одна из популярных задач, связанных со случайным блужданием, состоит в нахождении вероятности того, что частица за n шагов выйдет за пределы интервала $(A;B): A \le 0 \le B$. При этом интерес представляет вопрос о том, в какой из двух точек (A или B) произойдет выход. Вероятность траектории, изображенной на рисунке, равна $p^{\nu}q^{n-\nu}$, где ν – число перемещений частицы вверх $(\nu = 6)$.

Возможна игровая интерпретация: имеются два игрока с начальными капиталами B и $-A$. Если $\xi_i = 1$, то первый игрок платит единицу второму; если же $\xi_i = -1$, то второй платит первому. Таким образом, S_k – величина выигрыша второго игрока у первого. В момент, когда впервые $S_k = B$, капитал первого игрока становится равным нулю (происходит разорение первого игрока).

Обозначим $\alpha_k(x)$ и $\beta_k(x)$ вероятности выхода частицы из интервала $(A;B)$ за время k соответственно в точках A и B, x – начальная координата, $A < x < B$. Очевидно, $\alpha_0(x) = \beta_0(x) = 0$. Формула полной вероятности использует две гипотезы $H_1 : \xi_1 = 1$; $H_2 : \xi_1 = -1$:

$$\beta_k(x) = p\beta_{k-1}(x+1) + q\beta_{k-1}(x-1);\ \beta_k(B) = 1,\ \beta_k(A) = 0.$$

Аналогично

$$\alpha_k(x) = p\alpha_{k-1}(x+1) + q\alpha_{k-1}(x-1);\ \alpha_k(B) = 0,\ \alpha_k(A) = 1.$$

Эти рекуррентные соотношения позволяют найти $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$. Так как $\beta_k(x) \le \beta_{k+1}(x) \le 1$, $\alpha_k(x) \le \alpha_{k+1}(x) \le 1$, то существуют предельные значения:

$$\beta(x) = \lim_{k\to\infty} \beta_k(x); \quad \alpha(x) = \lim_{k\to\infty} \alpha_k(x).$$

Переход к пределу в рекуррентных соотношениях дает

$$\begin{aligned}\beta(x) &= p\beta(x+1) + q\beta(x-1); \beta(B) = 1 : \beta(A) = 0. \\ \alpha(x) &= p\alpha(x+1) + q\alpha(x-1); \alpha(B) = 0 : \alpha(A) = 1.\end{aligned} \tag{46}$$

Метод решения этих уравнений достаточно прост. Будем искать решение первого из них в виде

$$\beta(x) = b^x \Rightarrow b^x = pb^{x+1} + qb^{x-1}.$$

После упрощения получаем $pb^2 - b + q = 0$.

Решение этого квадратного уравнения имеет вид

$$b_1 = 1,\ b_2 = \frac{q}{p} \text{ при } p \neq q;\ b_1 = b_2 = 1 \text{ при } p = q.$$

В свою очередь, общее решение первого из уравнений (46) будем искать в виде линейной комбинации:

$$\beta(x) = \begin{cases} c_1 + c_2\left(\dfrac{q}{p}\right)^x, p \neq q, \\ c_1 + c_2 x, p = q. \end{cases}$$

Читателю предлагается сопоставить этот подход с методом Эйлера решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Подстановка граничных условий приводит к системе

$$\begin{cases} c_1 + c_2\left(\dfrac{q}{p}\right)^B = 1, \\ c_1 + c_2\left(\dfrac{q}{p}\right)^A = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1 + c_2 B = 1; \\ c_1 + c_2 A = 0. \end{cases}$$

И в результате

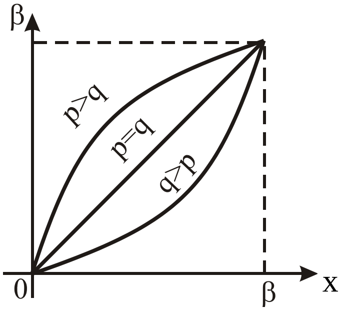
$$\beta(x) = \frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^x - \left(\dfrac{q}{p}\right)^A}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^B - \left(\dfrac{q}{p}\right)^A} \text{ при } p \neq q;\ \beta(x) = \frac{x - A}{B - A} \text{ при } p = q.$$

Аналогично

$$\alpha(x)=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{A}}\ \text{при}\ p\neq q\,;\ \alpha(x)=\frac{B-x}{B-A}\ \text{при}\ p=q\,.$$

Возвращаясь к игровой интерпретации, назовем $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ вероятностями разорения соответственно второго и первого игроков, когда начальный капитал второго есть $x-A$, а первого – $B-x$.

Положим $A=0$, $0\leq x\leq B$. Тогда



$$\beta(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{B},\ p=q=0{,}5;\\[2ex] \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{B}-1},\ p\neq q.\end{cases}$$

На рисунке представлен график $\beta(x)$.

При $q>p$ игра является неблагоприятной для второго игрока. Его предельная вероятность разорения $\alpha=\alpha(0)$ определяется формулой

$$\alpha=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{B}-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{A}}\,.$$

Изменим условия игры: сохранив капиталы игроков B и $(-A)$, уменьшим вдвое цену партии (0,5 вместо 1). Предельная вероятность разорения второго игрока

$$\alpha_{1/2} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{2B} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{2B} - \left(\frac{q}{p}\right)^{2A}} = \alpha \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} + 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} + \left(\frac{q}{p}\right)^{A}} > \alpha .$$

Т.е. увеличение ставки в два раза уменьшает вероятность разорения. При получении последней формулы вместо уменьшения ставки в два раза увеличили в два раза масштаб по оси x.

Средняя длительность случайного блуждания $m_k(x)$ – математического ожидания момента первого достижения границы, удовлетворяет уравнению

$$m_k(x) = p \cdot m_{k-1}(x+1) + q \cdot m_{k-1}(x-1) + 1,$$

где $m_0(x) = 0$; $m_k(A) = m_k(B) = 0$.

Это рекуррентное соотношение позволяет рассчитать $m_k(x)$. Так как последовательность $\{m_k(x)\}$ не убывает, то существует предел

$$m(x) = \lim_{k \to \infty} m_k(x),$$

удовлетворяющий уравнению

$$m(x) = pm(x+1) + qm(x-1) + 1$$

с граничными условиями $m(A) = m(B) = 0$. Решение этого неоднородного уравнения имеет вид:

$$m(x) = \begin{cases} \frac{1}{p-q}\left(B\beta(x) + A\alpha(x) - x\right) \text{при } p \neq q, \\ (B-x)(x-A) \text{при } p = q. \end{cases}$$

В симметричном случае $p = q$, $B = -A$ имеем $m(0) = B^2$, т.е. среднее время до разорения одного из игроков достаточно велико.

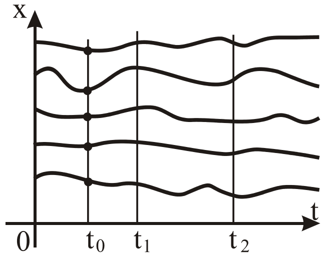
Пример. Фирма совершает однотипные многократные операции, получая в каждой из них прибыль, равную 1, с вероятностью p и неся убытки, равные 1, с вероятностью q. Минимальный капитал фирмы – A. Определить вероятность разорения фирмы при условии, что ее начальный капитал равен a, а при достижении ее капиталом величины B она меняет род деятельности. Записать решение при $q << p$, $A << B$.

Формула для $\alpha(a)$ при $\frac{q}{p} << 1$, $A << B$ имеет вид

$$\alpha(a) \approx \left(\frac{q}{p}\right)^{a-A}.$$

28. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ: ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Случайной функцией называется $\xi = \xi(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, т.е. функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, заранее неизвестный. Конкретный вид $x(t)$, принимаемый функцией в результате опыта, называется ***реализацией*** случайной функции. В соответствии с данным определением случайная функция представляет собой функцию двух переменных: случайной ω и неслучайной t. Если «зафиксирована» случайная переменная, то говорят о реализации случайной функции. При условии же $t = t_0 = \mathrm{const}$ мы имеем дело со случайной величиной $\xi_0 = \xi(t_0, \omega)$, называемой ***сечением случайной функции***. На рисунке представлены реализации случайной функции, а набор их значений при $t = t_0$ дает представление о случайной величине ξ_0. Закон распределения случайной величины ξ_0 называется законом распределения случайной функции. Двумерным законом распределения называется закон распределения двух случайных величин $\xi_1 = \xi(t_1, \omega)$ и $\xi_2 = \xi(t_2, \omega)$. Далее можно говорить о трехмерных и в общем случае о n-мерных законах распределения, рассматривая при этом соответствующее число сечений.



Если множество значений T неслучайной переменной дискретно (состоит из конечного либо счетного числа значений), то будем называть такую случайную функцию ***случайной последовательностью***. Если же T представляет собой интервал (или совокупность интервалов), то мы будем говорить о ***случайном процессе***. Как правило, в приложениях аргумент t отождествляется со временем.

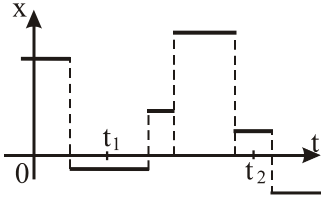
Из определений, сформулированных выше, следует, что одномерный закон (плотность) распределения зависит от двух переменных x и t, двумерный закон – от четырех x_1, x_2 и t_1, t_2 и, наконец, n-мерный – от 2n переменных.

Так как множество значений, принимаемых данным сечением, может быть непрерывным или дискретным, то закон распределения задается соответственно плотностью или рядом распределения. Приняв за основу функцию распределения (в одномерном случае)

$$F_\xi(x,t) = P\{\xi(t) < x\},$$

получим для непрерывного случая $f_\xi(x,t) = \dfrac{d}{dx} F_\xi(x,t)$ – плотность распределения вероятностей и для дискретного – $p_k(t) = F_\xi(x_k + 0, t) - F_\xi(x_k, t)$ – ряд распределения.

Наиболее часто употребимые модели случайных последовательностей описаны в разделах 23 – 27.



Пример 1. Ордината (значение) случайного процесса меняется скачками в случайные моменты времени, образующие пуассоновский процесс (см. раздел 26) с постоянной λ. Значение ординаты случайного процесса после очередного скачка

является случайной величиной, не зависящей от предыдущего значения, с плотностью распределения $f(x)$. Найти двумерную плотность распределения.

Рассмотрим два сечения случайного процесса $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$. Относительно их взаимного расположения сформулируем две гипотезы: H_0 – между моментами t_1 и t_2 не произошло ни одного скачка, $P(H_0) = e^{-\lambda|t_2 - t_1|}$ – вероятность того, что на отрезке длиной $|t_2 - t_1|$ не произошло ни одного события пуассоновского процесса; H_1 – произошел по крайней мере один скачок,

$$P(H_1) = 1 - P(H_0) = 1 - e^{-\lambda|t_2 - t_1|}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F_\xi(x_1, x_2/t_1, t_2) &= P\{(\xi(t_1) < x_1) \cap (\xi(t_2) < x_2)\} = \\ &= P\{(\xi(t_1) < x_1) \cap (\xi(t_2) < x_2)/H_0\} P(H_0) + \\ &+ P\{(\xi(t_1) < x_1) \cap (\xi(t_2) < x_2)/H_1\} P(H_1). \end{aligned}$$

Здесь

$$P\{(\xi(t_1) < x_1) \cap (\xi(t_2) < x_2)/H_0\} =$$
$$= P\{\xi(t_1) < \min\{x_1, x_2\}\} = F_\xi(\min\{x_1, x_2\}) -$$

функция (одномерная) распределения. Она не зависит от t_1, так как для любого сечения закон распределения один и тот же.

$$P\{(\xi(t_1) < x_1) \cap (\xi(t_2) < x_2)/H_1\} = P\{\xi(t_1) < x_1\} \cdot P\{\xi(t_1) < x_2\} =$$
$$= F_\xi(x_1) \cdot F_\xi(x_2),$$

так как $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ – независимые (при H_1) случайные величины.

Окончательно $\qquad F_\xi(x_1, x_2/t_1, t_2) =$

$$= F_\xi(\min\{x_1, x_2\}) e^{-\lambda|t_2 - t_1|} + F_\xi(x_1) \cdot F(x_2)\left(1 - e^{-\lambda|t_2 - t_1|}\right).$$

Совместная плотность распределения

$$f_\xi(x_1, x_2/t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_\xi(x_1, x_2/t_1, t_2) =$$

$$= e^{-\lambda|\tau|} f(x_1)\delta(x_2 - x_1) + \left(1 - e^{-\lambda|\tau|}\right) f(x_1) f(x_2),$$

где $\tau = t_2 - t_1$; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Рекомендуется самостоятельно найти вторую смешанную производную от $F_\xi(\min\{x_1, x_2\})$.

Математическим ожиданием случайной функции $\xi(t)$ называется неслучайная функция

$$m_\xi(t) = M[\xi(t)] = \begin{cases} \sum\limits_k x_k p_k(t) \text{ для дискретной с.в.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x, t) dx \text{ для непрерывной с.в.} \end{cases}$$

Ковариационной функцией случайной функции $\xi(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов

$$R_\xi(t_1, t_2) = M\left[\left(\xi(t_1) - m_\xi(t_1)\right) \cdot \left(\xi(t_2) - m_\xi(t_2)\right)\right].$$

При $t_1 = t_2 = t$ $R_\xi(t, t) = D_\xi(t)$ – дисперсия случайной функции.

Свойства ковариационной функции:

1) $R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2, t_1)$;

2) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} R_\xi(t_i, t_j) x_i x_j \ge 0$;

3) $R_\xi(t, t) \ge 0$;

4) $R_\xi^2(t_1, t_2) \le D_\xi(t_1) D_\xi(t_2)$;

5) $\eta(t) = \xi(t) + g(t) \Rightarrow R_\eta(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2)$;

6) $\eta(t) = g(t)\xi(t) \Rightarrow R_\eta(t_1, t_2) = g(t_1) g(t_2) R_\xi(t_1, t_2)$.

Докажем свойство 2) [остальные представляют собой известные из раздела 15 свойства ковариационного момента случайных величин $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$]. Пусть $\eta = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi^0(t_i)$, где $\xi^0(t_i) = \xi(t_i) - m_\xi(t_i)$. Тогда

$$0 \le M[\eta^2] = M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \xi^0(t_i)\xi^0(t_j)\right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j M[\xi^0(t_i)\xi^0(t_j)] = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j R_\xi(t_i, t_j).$$

Пример 2. В условиях предыдущего примера 1 $m_\xi(t) = 0$, $D_\xi(t) = \sigma^2$.

$$R_\xi(t_1, t_2) = M[\xi^0(t_1)\xi^0(t_2)] = M[\xi^0(t_1)\xi^0(t_2)/H_0]P(H_0) +$$
$$+ M[\xi^0(t_1)\xi^0(t_2)/H_1]\ P(H_1).$$

Так как при условии H_0 $\xi^0(t_1) = \xi^0(t_2)$, то

$$M[\xi^0(t_1)\xi^0(t_2)/H_0] = M\left[(\xi^0(t_1))^2\right] = \sigma^2.$$

В соответствии с условием задачи $\xi^0(t_1)$ и $\xi^0(t_2)$ – независимые случайные величины, если реализуется гипотеза H_1. Поэтому $M[\xi^0(t_1)\xi^0(t_2)/H_1] = 0$. Следовательно,

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}.$$

Рекомендуется этот результат получить с использованием формулы совместной плотности распределения, полученной в предыдущем примере.

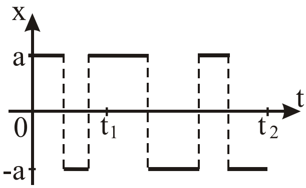
Пример 3. Случайный процесс $\xi(t)$, $t > 0$, $\xi(0) = a$ может принимать только два значения a и $-a$. Моменты перемены знака образуют пуассоновский процесс с постоянной λ. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию.

Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 – на отрезке $[0; t]$ произошло четное число перемен знака.

$$P(H_1) = p_0(t) + p_2(t) + \ldots + p_{2k}(t) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda t} =$$

$$= e^{-\lambda t} \operatorname{ch} \lambda t = \frac{1 + e^{-2\lambda t}}{2} .$$

H_2 – на отрезке $[0; t]$ знак менялся нечетное число раз.



$$P(H_2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \operatorname{sh} \lambda t = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2} .$$

С учетом этого

$$M[\xi(t)] = M[\xi(t)/H_1]P(H_1) + M[\xi(t)/H_2]P(H_2) =$$

$$= a\frac{1 + e^{-2\lambda t}}{2} + (-a)\frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2} = ae^{-2\lambda t} ,$$

так как $\xi(t) = \begin{cases} a \text{ при условии } H_1, \\ -a \text{ при условии } H_2. \end{cases}$

При определении ковариационной функции рассматриваются гипотезы:

H_1 – на отрезке, ограниченном точками t_1 и t_2, произошло четное число перемен знака, т.е. $\xi(t_1) = \xi(t_2)$;

H_2 – на этом отрезке знак менялся нечетное число раз, т.е. $\xi(t_1) = -\xi(t_2)$.

$$P(H_1) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda\tau} = \frac{1 + e^{-2\lambda\tau}}{2};$$

$$P(H_2) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda\tau} = \frac{1 - e^{-2\lambda\tau}}{2}; \ \tau = |t_2 - t_1| .$$

Тогда

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\left[\xi^0(t_1)\xi^0(t_2)\right] - m_\xi(t_1)m_\xi(t_2);$$

$$M\left[\xi^0(t_1)\xi^0(t_2)\right] = M\left[\xi^0(t_1)\xi^0(t_2)/H_1\right] P(H_1) +$$

$$+ M\left[\xi^0(t_1)\xi^0(t_2)/H_2\right] P(H_2) =$$

$$= a^2\frac{1+e^{-2\lambda\tau}}{2} - a^2\frac{1-e^{-2\lambda\tau}}{2} = a^2 e^{-2\lambda\tau}.$$

Окончательно

$$R_\xi(t_1,t_2) = a^2(e^{-2\lambda|t_2-t_1|} - e^{-2\lambda(t_1+t_2)});$$

$$D_\xi(t) = R_\xi(t,t) = a^2(1-e^{-4\lambda t}).$$

Пример 4. $\{\xi_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с дисперсией σ^2. $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ – набор из n чисел $\alpha_i > 0, \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ (весовые коэффициенты).

$$\eta_t = \alpha_1\xi_{t+1} + \alpha_2\xi_{t+2} + \ldots + \alpha_n\xi_{t+n} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_{t+i} \text{ -}$$

случайная последовательность, называемая скользящим средним. Найти ковариационную функцию, в частности при

$$\alpha_i = \frac{1}{n}, i = \overline{1,n}.$$

Так как $M[\eta_t] = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i M[\xi_{t+i}] = m_\xi\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = m_\xi$, то

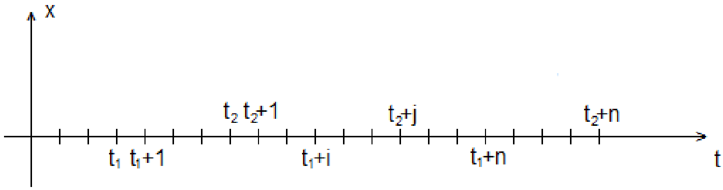
$$\eta_t^0 = \eta_t - m_\eta = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_{t+i} - m_\xi\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\xi_{t+i} - m_\xi) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_{t+i}^0.$$

И для ковариационной функции получим

$$R_n(t_1,t_2) = M\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_{t_1+i}^0\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\xi_{t_2+j}^0\right] = \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j M\left[\xi_{t_1+i}^0\xi_{t_2+j}^0\right] = \sum_{1\le i=j+k\le n}\alpha_i\alpha_{i+k}\sigma^2,$$

где $k = |t_2 - t_1|$, так как при суммировании отличны от нуля (равны σ^2) лишь те слагаемые, для которых $t_2 + j = t_1 + i$ или $j = i + (t_2 - t_1)$ (см. рисунок). Окончательно

$$R_n(t_1, t_2) = \begin{cases} \sigma^2 \sum\limits_{j=1}^{n-k} \alpha_j \alpha_{j+k}, \text{если } k = 0,1,\ldots,n-1; \\ 0, \qquad\qquad \text{если } k \geq n. \end{cases}$$



При $\alpha_i = \dfrac{1}{n}$ получим

$$R_\eta(t_1, t_2) = \begin{cases} \sigma^2 \dfrac{n-k}{n}, k = \overline{0, n-1}; \\ 0, \qquad\quad k \geq n. \end{cases}$$

29. ДЕЙСТВИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА НА СЛУЧАЙНУЮ ФУНКЦИЮ

Оператор $L[\xi(t)]$ называется линейным, если он удовлетворяет условию:

$$L[\alpha\xi(t) + \beta\eta(t)] = \alpha L[\xi(t)] + \beta L[\eta(t)].$$

Этому условию удовлетворяет широкий круг операторов, применяемых при решении практических задач, например операторы дифференцирования, интегрирования и т.д.

Ограничив свои интересы расчетом математического ожидания и ковариационной функции, примем без доказательства следующие правила:

$$\eta(t) = L[\xi(t)] \Rightarrow \begin{array}{l} m_\eta(t) = L[m_\xi(t)]\ ; \\ R_\eta(t_1, t_2) = \underset{t_2}{L}\left[\underset{t_1}{L}[R_\xi(t_1, t_2)]\right]. \end{array} \qquad (47)$$

Здесь $\underset{t}{L}$ означает применение оператора по переменной t.

Пример1. $\eta(t) = \xi'(t);\ m_\xi(t) = 3t^2;$

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}.$$

Найти $m_\eta(t), R_n(t_1, t_2), D_n(t).$

Применение формул (47) дает $m_\eta(t) = m'_\xi(t) = 6t;$

$$R_\eta(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2}\frac{\partial}{\partial t_1} R_\xi(t_1, t_2) = 2\alpha\sigma^2\left(1 - 2\alpha(t_2 - t_1)e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}\right).$$

Пример 2. $\eta(t) = \int\limits_0^t \xi(t)dt;$

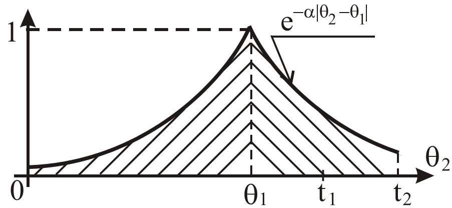
$$m_\xi(t) = m_0 = \text{const};\ R_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha|t_2 - t_1|}.$$

Найти $m_\eta(t),\ R_n(t_1, t_2),\ D_n(t)$.

Очевидно, $m_\eta(t) = \int\limits_0^t m_0 dt = m_0 t;$

$$R_\eta(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1} d\theta_1 \int\limits_0^{t_2} \sigma^2 e^{-\alpha|\theta_2 - \theta_1|} d\theta_2 .$$

Вычисление внутреннего интеграла (по θ_2) произведем для случая $t_1 \le t_2$:



$$\int\limits_0^{t_2} e^{-\alpha|\theta_2 - \theta_1|} d\theta_2 = \int\limits_0^{\theta_1} e^{\alpha(\theta_2 - \theta_1)} d\theta_2 + \int\limits_{\theta_1}^{t_2} e^{-\alpha(\theta_2 - \theta_1)} d\theta_2 =$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha(\theta_2-\theta_1)}\Big|_0^{\theta_1}-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha(\theta_2-\theta_1)}\Big|_{\theta_1}^{t_2}=\frac{1}{\alpha}\left(2-e^{-\alpha\theta_1}-e^{-\alpha(t_2-\theta_1)}\right).$$

Вычисление внешнего интеграла уже не требует разбиения интервала интегрирования на части:

$$\int_0^{t_1}\frac{1}{\alpha}\left(2-e^{-\alpha\theta_1}-e^{-\alpha t_2}e^{\alpha\theta_1}\right)d\theta_1=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left(2t_1+\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha t_1}+e^{-\alpha t_2}\right)-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha(t_2-t_1)}-\frac{1}{\alpha}\right).$$

Если же условие $t_1\le t_2$ заменить на противоположное, то это приведет лишь к перестановке в последней формуле t_1 и t_2. Поэтому окончательный результат можно записать в следующем виде:

$$R_\eta(t_1,t_2)=\frac{\sigma^2}{\alpha}\left(2\min(t_1,t_2)+\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha t_1}+e^{-\alpha t_2}\right)-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha|t_2-t_1|}-\frac{1}{\alpha}\right).$$

Отсюда

$$D_\eta(t)=R_\eta(t,t)=\frac{2\sigma^2}{\alpha^2}\left(\alpha t+e^{-\alpha t}-1\right).$$

30. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

В приложениях часто имеют дело со случайными функциями, вероятностные свойства которых не зависят от начала отсчета. Такие случайные функции называются стационарными. Ограничиваясь по-прежнему анализом математического ожидания и ковариационной функции, будем рассматривать лишь требования, предъявляемые к этим характеристикам.

Случайная функция называется стационарной (в широком смысле), если

1) $m_\xi(t)=m_0=\text{const};$
2) $R_\xi(t_1,t_2)=R_\xi(t_2-t_1)=R_\xi(\tau),\tau=t_2-t_1$.

В соответствии с этим определением трансформируются свойства ковариационной функции:

1) $R_\xi(-\tau) = R(\tau)$;

2) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} R_\xi(t_i - t_j)x_i x_j \geq 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^\infty R_\xi(\tau)\cos\omega\tau \geq 0$;

3) $R_\xi(0) = D_\xi = \sigma_\xi^2$;

4) $\left|R_\xi(\tau)\right| \leq R_\xi(0) = D_\xi$.

Ковариационная функция производной $\eta(t) = \xi'(t)$ определяется соотношением

$$R_\eta(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} R_\xi(t_2 - t_1) = -R''_\xi(\tau),$$

так как $\dfrac{\partial}{\partial t_1} = -\dfrac{d}{d\tau}; \dfrac{\partial}{\partial t_2} = \dfrac{d}{d\tau}$. Так как к тому же $m_\eta(t) = \dfrac{d}{dt} m_0 = 0$, то производная стационарного случайного процесса есть также стационарный случайный процесс (если эта производная существует).

Ковариационная функция интеграла $\eta(t) = \int\limits_0^t \xi(\theta)d\theta$ может быть преобразована к виду

$$R_\eta(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_2} (t_2 - \theta) R_\xi(\theta)d\theta +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} (t_1 - \theta) R_\xi(\theta)d\theta - \int\limits_0^{t_2 - t_1} (t_2 - t_1 - \theta) R_\xi(\theta)d\theta.$$

Поэтому в общем случае интеграл не является стационарной случайной функцией [хотя бы потому, что $m_\eta(t) = m_0 \cdot t$]. Дисперсия интеграла равна

$$D_\eta(t) = 2\int\limits_0^t (t - \theta) R_\xi(\theta)d\theta,$$

и уже это говорит о нестационарности интеграла.

Пример 1. Случайная функция

$$\xi(t) = \eta\cos\omega t + \zeta\sin\omega t,$$

где η, ζ – независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Доказать ее стационарность.

Так как

$$M[\xi(t)] = M[\eta]\cos\omega t + M[\zeta]\sin\omega t = 0;$$

$$R_\xi(t_1, t_2) = M[(\eta\cos\omega t_1 + \zeta\sin\omega t_1)(\eta\cos\omega t_2 + \zeta\sin\omega t_2)] =$$

$$= M[\eta^2]\ \cos\omega t_1\cos\omega t_2 + M[\zeta^2]\sin\omega t_1\sin\omega t_2 = \sigma^2\cos\omega(t_2 - t_1),$$ то

процесс стационарен.

Пример 2. Пусть $\xi(t)$ – стационарная случайная функция: $m_\xi(t) = 0$, $R_\xi(\tau)$; φ – случайная величина, распределенная равномерно на $[-\pi;\pi]$; a,ω – неслучайные величины. Доказать стационарность случайного процесса

$$\eta(t) = a\xi(t)\cos(\omega t + \varphi).$$

Найдем математическое ожидание и ковариационную функцию:

$$M[\eta(t)] = aM[\xi(t)]M[\cos(\omega t + \varphi)] = 0;$$

$$R_\eta(t_1, t_2) = M[\eta(t_1)\eta(t_2)] =$$

$$= a^2 M[\xi(t_1)\xi(t_2)]M[\cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi)] =$$

$$= a^2 R_\xi(t_2 - t_1)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega t_1 + x)\cos(\omega t_2 + x)\frac{1}{2\pi}dx =$$

$$= a^2 R_\xi(t_2 - t_1)\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\omega(t_2 - t_1) + \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2x))dx =$$

$$= \frac{a^2}{2}R_\xi(\tau)\cos\omega\tau, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

И, следовательно, условия стационарности выполнены.

31. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Спектральная плотность стационарного случайного процесса определяется соотношением

$$S_\xi(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \ - \qquad (48)$$

преобразованием Фурье ковариационной функции. Справедлива (в точках непрерывности) также формула обратного преобразования

$$R_\xi(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \qquad (48')$$

Свойства спектральной плотности:

1) $S_\xi(\omega)\ge 0;$

2) $S_\xi(-\omega)=S_\xi(\omega);$

3) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega)d\omega=R_\xi(0)=D_\xi$ –

следуют из определения спектральной плотности и свойств ковариационной функции. Наряду с формулами (48), (48’) можно использовать формулы косинус-преобразования:

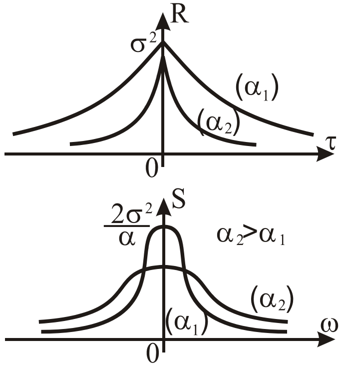
$$S_\xi(\omega)=2\int\limits_0^{\infty} R_\xi(\tau)\cos\omega\tau d\tau; R_\xi(\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} S_\xi(\omega)\cos\omega\tau d\tau.$$

Переменная ω обычно интерпретируется как частота.

Пример 1. Пусть $R_\xi(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, тогда

$$S_\xi(\omega)=\sigma^2\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}d\tau+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}d\tau\right)=$$

$$=\frac{2\alpha\sigma^2}{\omega^2+\alpha^2}.$$



Анализ графиков $R_\xi(\tau)$ и $S_\xi(\tau)$ (см. рисунок) позволяет сделать вывод: чем «шире» кривая $S_\xi(\omega)$, тем «уже» кривая $R_\xi(\omega)$. Этот эффект характерен для функций, связанных преобразованием Фурье, и носит название ***принципа неопределенности***. Это имеет простое физическое истолкование. Чем «уже», т.е. быстрее убывает ковариационная функция, тем «свободнее» ведет себя сечение в момент $t+\tau$ и, следовательно, тем больше доля высоких частот в спектральной плотности.

Пример 2. Пусть $R_\xi(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$, тогда $S_\xi(\omega)=\sigma^2=\text{const}$. Такой случайный процесс называется ***белым шумом***. Название порождается аналогией с белым светом, у которого спектральный состав однороден.

Пример 3. Случайный процесс задан выражением:

$$\xi(t)=\eta_1\cos\zeta t+\eta_2\sin\zeta t,$$

где η_1,η_2,ζ – система независимых случайных величин такая, что

$$M[\eta_1]=M[\eta_2]=0;\;\; D[\eta_1]=D[\eta_2]=\sigma^2;$$

$f_\zeta(z)$ – плотность распределения случайной величины ζ (четная функция). Математическое ожидание этого процесса равно нулю, а его ковариационная функция (см. пример 2 разд.30)

$$R_\xi(t_1,t_2)=\sigma^2 M[\cos\zeta(t_2-t_1)]=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\cos z\tau\cdot f_\zeta(z)dz.$$

Сравнивая это соотношение с формулой косинус преобразования для $S_\xi(\omega)$, делаем вывод:

$$S_\xi(\omega)=2\pi\sigma^2 f_\xi(\omega).$$

Поскольку

$$D_\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}S_\xi(\omega)d\omega=2\pi\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(z)dz=2\pi\sigma^2$$

определяет суммарную (интегральную) мощность случайного процесса, то спектральная плотность $S_\xi(\omega)$ характеризует распределение мощности процесса по частотам.

Ковариационная функция производной случайного процесса

$$R_{\xi'}(\tau) = -\frac{d^2 R_\xi(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{d^2}{d\tau^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2 S_\xi(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega,$$

откуда следует

$$S_{\xi'}(\omega) = \omega^2 S_\xi(\omega). \qquad (49)$$

Формула (49) позволяет определить условие дифференцируемости стационарного случайного процесса:

$$D[\xi'] = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2 S_\xi(\omega)d\omega < +\infty.$$

Формула ***спектральной плотности К-й производной*** случайного процесса получается аналогично (49):

$$S_{\xi^{(k)}}(\omega) = \omega^{2k} S_\xi(\omega)$$

при условии, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{2k} S_\xi(\omega)d\omega$ сходится.

При условии стационарности интеграла от случайного процесса ***спектральная плотность интеграла***

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(\theta)d\theta$$

определяется соотношением

$$S_\eta(\omega) = \frac{S_\xi(\omega)}{\omega^2}$$

(при условии сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_\xi(\omega)}{\omega^2}d\omega$).

В важном частном случае, когда спектральная плотность является рациональной функцией частоты

$$S_\xi(\omega) = \frac{H_m(\omega^2)}{G_n(\omega^2)},$$

где H_m и G_n – соответственно многочлены степеней m и n, условие существования К-й производной можно записать в виде

$$n>m+k.$$

Пример 4. Найти дисперсию производной случайного процесса со спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega)=\frac{3}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}.$$

Так как спектральная плотность производной равна $\omega^2 S_\xi(\omega)$, то ее дисперсия вычисляется в соответствии со свойством 3:

$$D[\xi'(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_\xi(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\omega^2 d\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{4}{\omega^2+4}-\frac{1}{\omega^2+1}\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2}-\operatorname{arctg}\omega\right)_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\pm\infty=\pm\frac{\pi}{2}\right).$$

Для того чтобы существовал интеграл от стационарного случайного процесса, требуется выполнение двух условий:

– $m_\xi(t)=0$;

– $S_\xi(\omega)=\omega^2 S_\eta(\omega),\quad S(0)=S_0<+\infty,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}S_\eta(\omega)d\omega<+\infty$.

Последнее условие обеспечивается сходимостью интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_\xi(\omega)}{\omega^2}d\omega.$$

В приложениях часто приходится иметь дело со случайной функцией на выходе линейной динамической системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$b_n\eta^{(n)}+b_{n-1}\eta^{(n-1)}+\ldots+b_1\eta'+b_0\eta=$$

$$=a_m\xi^{(m)}+a_{m-1}\xi^{(m-1)}+\ldots+a_1\xi'+a_0\xi.$$

Введя оператор дифференцирования $p = \dfrac{d}{dt}$ и обозначив

$$A_m(p) = a_m p^m + \ldots + a_1 p + a_0\,; B_n = b_n p^n + \ldots + b_1 p + b_0\,,$$

перепишем дифференциальное уравнение в виде

$$B_n(p)\eta(t) = A_m(p)\xi(t)\,.$$

Здесь $\xi(t)$ (с известными характеристиками) - стационарный случайный процесс на входе линейной динамической системы.

Спектральная плотность случайного процесса $\eta(t)$ на выходе определяется соотношением

$$S_\eta(\omega) = \left|\frac{A_m(i\omega)}{B_n(i\omega)}\right|^2 S_\xi(\omega) = \left|K(i\omega)\right|^2 S_\xi(\omega),$$

где $K(i\omega) = \dfrac{A_m(i\omega)}{B_n(i\omega)}$ – ***передаточная функция*** системы. Условие существования стационарного случайного процесса на выходе принимает вид

$$D[\eta(t)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|K(i\omega)\right|^2 S_\xi(\omega) d\omega < +\infty\,.$$

Пример 5. Линейная динамическая система описывается уравнением: $\eta'' + \omega_0^2 \eta = \xi(t)$.

Подобная модель часто встречается в приложениях, связанных с расчетом склонных к колебаниям систем, находящихся под случайным воздействием. В рассматриваемом случае

$$A_0(p) = 1; B_2(p) = p^2 + \omega_0^2,$$

что приводит к следующему результату:

$$K(i\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2} \Rightarrow S_\eta(\omega) = \frac{S_\xi(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\,.$$

Дисперсия процесса на выходе

$$D_\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_\xi(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} d\omega$$

вычисляется как несобственный интеграл второго рода (имеется разрыв при $\omega = \omega_0$) и может оказаться конечной лишь при выполнении условия $S_\xi(\omega_0) = 0$. В противном случае интеграл расходится и поэтому процесс на выходе не является стационарным ($D_\eta(t) \to +\infty, t \to +\infty$). Подобное явление называется ***стохастическим резонансом***.

Если спектральная плотность случайного процесса представляет собой рациональную функцию

$$S_\eta(\omega) = \frac{H_m(\omega^2)}{B_n(\omega^2)} = \frac{A_m(i\omega)A_m(-i\omega)}{B_n(i\omega)B_n(-i\omega)} = \left|\frac{A_m(i\omega)}{B_n(i\omega)}\right|^2,$$

то можно считать $\eta(t)$ процессом на выходе линейной динамической системы с передаточной функцией $K(i\omega) = \dfrac{A_m(i\omega)}{B_n(i\omega)}$, на вход которой подается белый шум со спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = 1$. Такая система называется ***формирующим фильтром***.

Пример 6. Записать уравнение формирующего фильтра для случайного процесса со спектральной плотностью $S_\eta(\omega) = \dfrac{2\alpha\sigma^2}{\omega^2 + \alpha^2}$ (см. пример 1 настоящего раздела).

Так как $\dfrac{2\alpha\sigma^2}{\omega^2 + \alpha^2} = \left|\dfrac{\sqrt{2\alpha}\sigma}{i\omega + \alpha}\right|^2$, $A_0 = \sqrt{2\alpha}\sigma$, $B_1 = p + \alpha$, то уравнение формирующего фильтра имеет вид $\eta' + \alpha\eta = \sqrt{2\alpha}\sigma\xi(t)$.

32. НОРМАЛЬНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Случайная функция $\xi(t)$ называется нормальной (или гауссовой), если при любом n и любых $t_1; t_2; ...; t_n$ совместное распределение сечений $\xi(t_1); \xi(t_2); ...; \xi(t_n)$ является нормальным. То есть совместная плотность распределения этих сечений имеет вид

$$f(x_1; x_2; ...; x_n \setminus t_1; t_2; ... t_n) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta (2\pi)^n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (X - M)^T R^{-1} (X - M) \right\},$$

где $X = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$ – столбец аргументов;

$M = (m_\xi(t_1); ...; m_\xi(t_n))^T$ – столбец математических ожиданий данных сечений;

$R = [R_{ij}]_{i,j=1}^n (R_{ij} = M[\xi^0(t_i)\xi^0(t_j)])$ – ковариационная матрица;

$\Delta = \det R \neq 0.$

При n=1

$$f(x(t)) = \frac{1}{\sigma_\xi(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_\xi(t))^2}{2\sigma_\xi^2(t)}}.$$

При n=2

$$f(x_1; x_2(t_1; t_2)) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)\sqrt{1 - r(t_1, t_2)}} \times$$
$$\times e^{-\frac{1}{2(1 - r^2(t_1, t_2))}\left(\frac{(x_1 - m_\xi(t_1))^2}{\sigma_\xi^2(t)} - 2r(t_1 t_2)\frac{(x_1 - m_\xi(t_1))(x_2 - m_\xi(t_2))}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)} + \frac{(x_2 - m_\xi(t_2))^2}{\sigma_\xi^2(t_2)}\right)},$$

где

$$r_\xi(t_1, t_2) = \frac{R_\xi(t_1, t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)}, \quad \sigma_\xi(t) = \sqrt{R_\xi(t, t)}.$$

Существенным является тот факт, что при любом n совместная плотность распределения зависит лишь от математического ожидания $m_\xi(t)$ и ковариационной функции $R_\xi(t_1, t_2)$. И так как эти две характеристики могут быть выражены через двумерную плотность распределения, то все семейство плотностей распределения нормального случайного процесса может быть выражено через двумерную плотность распределения.

Отметим следующие важные свойства нормального случайного процесса.

1. Стационарность нормального случайного процесса обеспечивает независимость любой совместной плотности распределения от начала отсчета. Это свойство называется стационарностью в узком смысле.

2. Некоррелированность двух сечений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ нормального случайного процесса означает одновременно их независимость.

3. Линейное преобразование системы нормальных случайных процессов дает также нормальный случайный процесс. Поэтому закон распределения результата такого преобразования определяется лишь его математическим ожиданием и ковариационной функцией.

Пример 1. $\xi(t)$ – нормальный стационарный случайный процесс. Найти ковариацию $\operatorname{cov}(\xi(t), \xi'(t))$ процесса и его производной в совпадающие моменты времени. Так как

$$\operatorname{cov}(\xi(t), \xi'(t)) = M\left[\xi(t), \xi'(t)\right] = \frac{d}{dt} M\left[\xi^0(t)\xi^0(t)\right] = \frac{d}{dt} R_\xi(0),$$

а также существование производной $\xi'(t)$ предполагает существование производной (и даже второй производной) четной функции $R_\xi(\tau)$ (см. разд.29;30), то $R'_\xi(0) = 0.$ Это означает некоррелированность, а следовательно, и независимость $\xi(t)$ и $\xi'(t)$.

Пример 2. Стационарный нормальный случайный процесс имеет ковариационную функцию $R_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta^2\tau^2}$. Найти $P\left\{\xi'(t) > a\right\}.$

Используя результат, полученный в примере 1 разд. 29, имеем

$$R_{\xi'}(\tau) = 2\beta^2\sigma^2\left(1 - 2\beta^2\tau\right)e^{-\beta^2\tau^2} .$$

Поэтому дисперсия производной определяется формулой

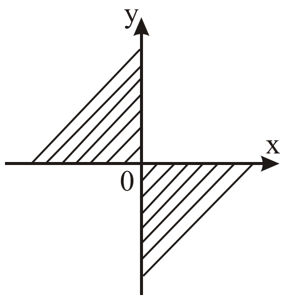
$$D_{\xi'} = R_{\xi'}(0) = 2\beta^2\sigma^2; \;\; \sigma_{\xi'} = \sqrt{D_{\xi'}} = \beta\sigma\sqrt{2} .$$

Следовательно, $\xi^{'}(t) \sim N(0;2\beta^2\sigma^2)$ и

$$P\left\{\xi^{'}(t) > a\right\} = 1 - \Phi(\frac{a}{\beta\sigma\sqrt{2}}).$$

Пример 3. Пусть $\left\{\xi_k\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – стационарная нормальная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $R(i) = M\left[\xi_k\xi_{k+i}\right]$. Найти вероятность того, что два последовательных элемента ξ_k и ξ_{k+1} будут иметь значения разных знаков.

Обозначив через $r = \dfrac{R(1)}{R(0)}$ коэффициент корреляции случайной величины ξ_k и ξ_{k+1},запишем формулу совместной плотности распределения



$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2\sigma^2(1-r^2)}},$$

$$\sigma = \sqrt{R(0)}.$$

Вероятность разных знаков представляет собой на координатной плоскости XY интеграл по области D, состоящей из второго и четвертого квадрантов. Поэтому

$$P\left\{\xi_k\xi_{k+1} < 0\right\} = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \left|\begin{matrix} x=\cos\varphi, y=\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\varphi d\rho \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} d\varphi\right)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho^2\frac{1-r\sin 2\varphi}{2\sigma^2(1-r^2)}} \cdot \rho d\rho =$$

$$=\frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\varphi}{1-r\sin 2\varphi}+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-r\sin 2\varphi}\right)=\frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\varphi}{1-r\sin 2\varphi}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\mathrm{tg}\varphi=t;d\varphi=\frac{dt}{1+t^2}\\ \sin 2\varphi=\frac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{1-2rt+t^2}=\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{t-r}{\sqrt{1-r^2}}\Big|_{-\infty}^{0}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\right)=\frac{1}{\pi}\mathrm{arcctg}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Таким образом, эта вероятность зависит лишь от коэффициента корреляции. Полученный результат можно использовать для нахождения коэффициента корреляции по экспериментальным данным.

В частности, при r=0 вероятность равна 0,5, что вполне естественно для независимых случайных величин ξ_k и ξ_{k+1}. При $r\to 1$ вероятность стремится к нулю, что объясняется сохранением знака «соседних» случайных величин при сильной положительной корреляции. И, наконец, при $r\to -1$ вероятность стремится к единице вследствие жесткой отрицательной корреляции, когда значения случайных величин оказываются различными.

33. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математические модели теории вероятностей строятся на основе вероятностного пространства $\langle\Omega,\mathcal{F},P\rangle$ (разд. 4), где P=P(A) – вероятность, заданная на $\mathcal{F}$-алгебре событий. Основной задачей теории вероятностей является нахождение вероятностей различных сложных событий. На практике же вероятностная мера P часто неизвестна (в лучшем случае неизвестна полностью). Как правило, известен класс Φ, которому принадлежит вероятность. В этом случае возникает статистическая модель $\langle\Omega,\mathcal{F},\Phi\rangle$.

Например, в схеме последовательных независимых испытаний неизвестна вероятность успеха θ (здесь изменено обозначение в соответствии с традицией). Тогда вероятность данного исхода, описываемая набором индикаторов успеха x_i, равна

$$P_\theta(\omega) = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

В случае нормального закона распределения с неизвестными параметрами плотность распределения описывается формулой

$$f_0(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^{\,2}}}, \qquad -\infty < \theta_1 < +\infty,\ \theta_2 > 0.$$

В каждом из рассмотренных примеров класс Φ распределений задан с точностью до параметра θ (быть может, векторного), принадлежащего некоторому заданному множеству.

Традиционно к основным задачам математической статистики относят следующие.

1. Восстановление неизвестного закона распределения.
2. Оценивание параметров закона распределения.
3. Проверка статистических гипотез.

Решение этих задач использует в качестве исходного материала результат наблюдений некоторой совокупности независимых и одинаково распределенных случайных величин $\bar{\xi} = (\xi_1;...;\xi_n)$, характеризующий исход опыта. Совокупность наблюдаемых случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ называется ***выборкой***, случайные величины ξ_k – ***элементами выборки***, n – ***объёмом выборки***. Реализация выборки обозначается $\bar{x} = (x_1;...;x_n)$, $X = \{\bar{x}\}$ – множество возможных значений случайного вектора $\bar{\xi}$ называется ***выборочным пространством***. Имея в виду, что на множестве X задана совокупность (алгебра) $\mathcal{F}$ случайных событий, назовем ***статистической моделью*** опыта $\langle X, \Phi \rangle$, где Φ – класс допустимых распределений случайной величины X. Обычно закон распределения описывается функцией распределения вероятностей, поэтому $\Phi = \{F_{\bar{\xi}}(\bar{x})\}$.

В стандартной для математической статистики ситуации случайные величины ξ_k независимы и распределены одинаково (так же, как некоторая случайная величина ξ). Эта модель описывает эксперимент, в котором производятся повторные независимые наблюдения (измерения) случайной величины ξ. В этом случае $F_{\xi_i}(x_i) = F_{\xi}(x_i)$ и $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi}(x_1)...F_{\xi}(x_n)$; $\bar{\xi}$ - выборка из одинаково распределенных случайных величин ξ_i. Множество «копий» случайной величины ξ с распределением $F_{\xi}(x)$ называют ***генеральной совокупностью***.

Если функция распределения генеральной совокупности из класса Φ задана с точностью до значений некоторого параметра θ, то такую модель будем обозначать $\Phi = \{F(x, \theta)\}$ и называть ***параметрической***. Эта модель может быть как дискретной, так и непрерывной (см. приведенные выше в данном разделе примеры). Числовые характеристики случайной величины, найденные при данном θ, помечаются индексом θ. Так, $M_{\theta}[\xi], D_{\theta}[\theta]$ – соответственно математическое ожидание и дисперсия при данном θ.

34. ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД. ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ

Элементы любой реализации $\bar{x}$ случайной величины $\bar{\xi}$ можно расположить в порядке возрастания: $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$. Обозначим через $\xi_{(k)}$ случайную величину, которая в данном эксперименте принимает значение $x_{(k)}$. В результате получим совокупность случайных величин $\xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le ... \le \xi_{(n)}$, называемую ***вариационным рядом***; $\xi_{(k)}$ называется k-й порядковой статистикой.

Функция распределения k-й порядковой статистики $F_{\xi_{(k)}}(x)$ определяется как вероятность события $\{\xi_{(k)} < x\}$, которое наступает в том случае, когда не менее К случайных величин ξ_i (элементов выборки) окажутся меньше x. Это происходит с вероятностью $F_\xi(x)$. Рассматривая попадание случайной величины ξ_i в область (-∞; x) как результат i-го испытания в серии из n независимых испытаний с вероятностью $p = F_\xi(x)$ ($q = 1 - F_\xi(x)$), получаем для $F_{\xi_{(k)}}(x)$ формулу:

$$F_{\xi_{(k)}}(x) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m F_\xi^m(x)(1 - F_\xi(x))^{n-m}.$$

Плотность распределения $\xi_{(k)}$ может быть получена формальным дифференцированием этого соотношения или же путем следующих рассуждений. Вероятность

$$P\{\xi_{(k)} \in dx\} = f_{\xi_{(k)}}(x)dx,$$

где под событием $\{\xi_{(k)} \in dx\}$ понимается $x \le \xi < x + dx.$ Это событие осуществляется лишь тогда, когда один из элементов выборки $\bar{\xi}$ попадает на интервал (x, x+dx), а остальные распределяются так: k-1 элемент выборки попадает на интервал (-∞, x), а остальные n-k – на интервал (x; +∞). Так как элемент для (x, x+dx) можно выбрать n способами, а k-1 элементов для (-∞; x) C_{n-1}^{k-1} способами, то вероятность

$$P\{\xi_{(k)} \in dx\} = nf_\xi(x)dx \cdot C_{n-1}^{k-1} F_\xi^{k-1}(x)(1 - F_\xi(x))^{n-k}.$$

Отсюда получаем

$$f_{\xi_{(k)}}(x) = nC_{n-1}^{k-1} F_\xi^{k-1}(x)(1 - F_\xi(x))^{n-k} f_\xi(x).$$

Пример. Пусть генеральная совокупность распределена по равномерному закону на отрезке [0;1]

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1, x \in [0;1]; \\ 0, x \notin [0;1] \end{cases} \Rightarrow F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ x, 0 \le x \le 1; \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Тогда плотность распределения K-й порядковой статистики определяется соотношением:

$$f_{\xi_{(k)}}(x) = nC_{n-1}^{k-1} x^{k-1}(1 - x)^{n-k}, \quad 0 < x < 1,$$

и $f_{\xi_{(k)}}(x)=0,$ вне отрезка [0;1].

Выборочной квантилью уровня p называют порядковую статистику $\xi_{[np]+1}$ ([a] – целая часть числа a) – элемент упорядоченной выборки, левее которого находятся [np] наблюдений из n. В частности, $\xi_{[0.5n]+1}$ называется выборочной медианой.

При больших значениях n квантиль распределена приближенно по нормальному закону

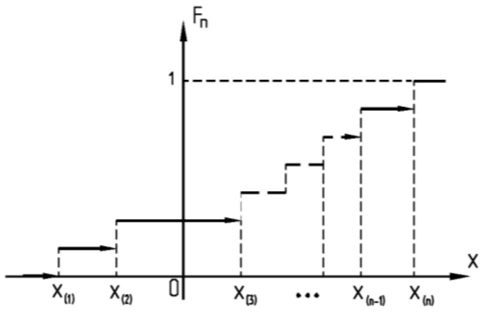
$$\xi_{[np]+1} \sim N\left(x_p; \frac{p(1-p)}{nf_\xi^2\left(x_p\right)}\right).$$

Это приближение хорошо описывает поведение средних членов вариационного ряда и неприменимо к крайним.

35. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Располагая лишь реализацией выборки $\overline{x}=(x_1;...;x_n)$, исследователь вправе сделать предположение о том, что случайная величина ξ может принимать только значения x_k, $k=\overline{1,n}$, с равными вероятностями $\frac{1}{n}$. Подобный равномерный ряд распределения порождает функцию распределения вероятностей

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h(x-x_k),$$



где $h(x)=\begin{cases}1, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$ – функция Хевисайда (функция единичного скачка). $F_n(x)$ называется ***эмпирической функцией распределения.*** Ее график, изображенный на рисунке, представляет собой ступенчатую кривую, ордината которой изменяется от нуля до единицы. При увеличении числа испытаний происходит сближение эмпирической функции распределения с теоретической $F_{\xi}(x)$.

Действительно, определенная выше $F_n(x)$ является относительной частотой появления события $\{\xi < x\}$ в серии из n независимых испытаний (схема Бернулли). В соответствии с законом больших чисел (разд.20)

$$F_n(x) \xrightarrow{P} P\{\xi < x\} = F_{\xi}(x) .$$

Следовательно, при большом объеме выборки значение эмпирической функции распределения может служить приближенным значением (оценкой) теоретической функции распределения.

Равномерный эмпирический ряд распределения служит основой для вычисления эмпирических (выборочных) характеристик.

Выборочный начальный момент ℓ -го порядка обозначим A_k:

$$A_{\ell} = A_{\ell}[\xi] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\ell}.$$

При $\ell = 1$ величина A_1 называется ***выборочным средним***

$$A_1 = \tilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i .$$

В соответствии с законом больших чисел $A_{\ell} \xrightarrow{P} \alpha_{\ell} = M\left[\xi^{\ell}\right]$.

Выборочным центральным моментом ℓ -го порядка называют

$$M_{\ell} = M_{\ell}[\xi] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \tilde{m}\right)^{\ell} .$$

Между центральным и начальным моментами сохраняются те же соотношения, что и между теоретическими моментами μ_{ℓ} и α_{ℓ} (разд. 11). Так же, как и начальные выборочные моменты, M_{ℓ} сходятся по вероятности к μ_{ℓ}. Отдельно отметим, что и A_{ℓ}, и M_{ℓ} ***являются случайными величинами***. Поэтому возникает вопрос о вычислении их характеристик. Математическое ожидание и дисперсия выборочного среднего фактически уже найдены в разделе 20:

$$M[\tilde{m}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right] = m_\xi; \;\; D[\tilde{m}] = \frac{\sigma_\xi^2}{n}.$$

При нахождении этих характеристик ***выборочной дисперсии***

$$S^2 = M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \tilde{m})^2$$

следует принять во внимание тот факт, что центральные выборочные моменты не зависят от начала отсчета. Действительно, легко убедиться, что замена ξ_i на $\xi_i - c$ не изменяет формул для M_ℓ. Поэтому можно сказать, что $\alpha_1 = m_\xi = 0$. (В противном случае следует перейти к случайной величине $\xi - m_\xi$, перенеся тем самым начало отсчета в точку m_ξ.) Далее, используя известную формулу

$$S^2 = A_2 - A_1^2,$$

получаем

$$M[S^2] = M[A_2] - M[A_1^2] = \mu_2 - \frac{\mu_2}{n} = \frac{n-1}{n}\mu_2.$$

Не приводя здесь вывода формулы дисперсии S^2, запишем ее асимптотический вид при больших значениях n:

$$D[S^2] \approx \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \mu_2^2\right).$$

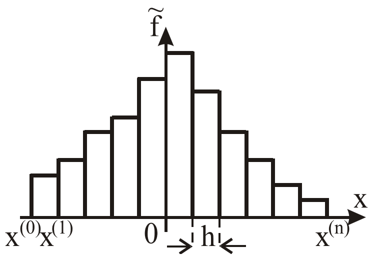
Начальные выборочные моменты при больших значениях n оказываются распределенными приближенно по нормальному закону:

$$A_\ell \sim N\left(\alpha_\ell; \frac{\alpha_{2\ell} - \alpha_\ell^2}{n}\right).$$

Такое же утверждение справедливо и для центральных выборочных моментов, например

$$M_2 = S^2 \sim N\left(\mu_2; \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}\right).$$

При больших значениях n эмпирический ряд распределения заменяют при решении практических задач ***гистограммой распределения***, которая может интерпретироваться как эмпирическая плотность распределения.



При построении гистограммы область значений случайной величины ξ разбивают на равные интервалы и для заданной реализации $\bar{x} = (x_1;...;x_n)$ подсчитывают число наблюдений x_i, попавших в соответствующие интервалы. На каждом из интервалов, как на основании, строят прямоугольник с высотой ν / nh, где h – длина интервала, ν – число точек, попавших в данный интервал. Площадь каждого такого прямоугольника равна ν / n, т.е. относительной частоте попадания выборочных значений в соответствующий интервал. Сумма площадей всех прямоугольников равна единице (выполнено условие нормировки). Аналитическое выражение для ступенчатой функции, изображенной на рисунке, имеет вид:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\upsilon_k}{nh}, x \in \left[x^{(k-1)}; x^{(k)}\right], k = \overline{1,n}.$$

Так как площадь k-го прямоугольника равна частоте события $\left\{x^{(k-1)} \le \xi \le x^{(k)}\right\}$, то в соответствии с законом больших чисел

$$\frac{\upsilon_k}{n} \xrightarrow{P} P\left\{x^{(k-1)} \le \xi \le x^{(k)}\right\} = \int_{x^{(k-1)}}^{x^{(k)}} f_\xi(x)dx \approx f_\xi\left(x^{(k)}\right)h$$

при условии малости h. Таким образом,

$$\tilde{f}(x^{(k)}) \approx f_\xi(x_k)$$

и $\tilde{f}(x)$ может служить оценкой $f_\xi(x)$ – плотности распределения.

36. ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть имеется параметрическая модель $\Phi = \{F(x;\theta)\}$ и имеется выборка $\overline{\xi} = (\xi_1;...;\xi_n)$. Задача состоит в нахождении такой функции выборки $\hat{\theta} = T_n(\overline{\xi})$, которая «приближенно равна» θ. $\hat{\theta}$ называют точечной оценкой параметра θ.

Уровень, на котором определяется степень «приближенного равенства» оценки $\hat{\theta}$ параметру θ, задается следующими характеристиками.

1. Несмещенность. Оценка $\hat{\theta} = T_n(\overline{\xi})$ называется несмещенной, если

$$M_\theta\left[T_n\left(\overline{\xi}\right)\right] = \theta.$$

Для оценок, не удовлетворяющих этому условию, можно ввести характеристику, называемую смещением: $M_\theta\left[T_n\left(\overline{\xi}\right)\right] - \theta.$ Требование несмещенности означает, что в среднем несмещенная оценка приводит к желаемому результату. Для несмещенной оценки критерием ее точности является ее дисперсия:

$$D_\theta\left[T_n\left(\overline{\xi}\right)\right] = M_\theta\left[\left(T_n\left(\overline{\xi}\right) - \theta\right)^2\right].$$

Из результатов предыдущего раздела следует, что среднее выборочное является несмещенной оценкой математического ожидания, а выборочная дисперсия таковой оценкой дисперсии не является.

Пример. Случайная величина распределена по закону Пуассона $p_k(\theta) = \dfrac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$ с неизвестным параметром $\tau = \dfrac{1}{\theta}$. Производится одно измерение этой случайной величины. Требование несмещенности оценки $T(\xi)$ означает выполнение равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} T(k)\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta} = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} T(k)\frac{\theta^{k+1}}{k!} = e^{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}, \;\; \forall\theta \in (0;+\infty).$$

Отсюда следует, что функции $T(k)$, удовлетворяющей этому равенству (и не зависящей от θ), не существует.

2. Состоятельность. Оценка $T_n(\bar{\xi})$ параметра θ называется состоятельной, если

$$T_n(\bar{\xi}) \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} \theta .$$

Как правило, для исследования состоятельности оценок проверяют выполнение достаточного условия:

$$M\left[\left(T_n(\bar{\xi}) - \theta\right)^2\right] \to 0,\ n \to \infty.$$

Для несмещенной оценки это условие можно записать так: $D_\theta\left[T_n(\bar{\xi})\right] \to 0,\ n \to \infty$.

Условие состоятельности является асимптотическим (при $n \to \infty$) и не связано со свойствами оценки при данном объеме выборки. Возвращаясь вновь к результатам предыдущего раздела, отметим, что среднее выборочное и выборочная дисперсия являются состоятельными оценками математического ожидания и дисперсии соответственно.

3. Эффективность. Несмещенная оценка T^* называется эффективной, если

$$D_\theta\left[T_n^*\right] \le D_\theta[T_n], \forall T_n .$$

Т.е. эффективность означает, что оценка обладает минимально возможной дисперсией и, следовательно, является наилучшей. Исследование эффективности оценки производится, как правило, с помощью ***неравенства Рао - Крамера***.

37. НЕРАВЕНСТВО РАО - КРАМЕРА

Пусть $f(x,\theta)$ - плотность распределения вероятностей наблюдаемой случайной величины ξ (или ряд распределения в дискретном случае). $\bar{\xi} = (\xi_1;\ldots;\xi_n)$ – выборка объема n; $\bar{x} = (x_1;\ldots;x_n)$ – ее реализация. Функция

$$L(\bar{x},\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \ldots f(x_n;\theta),$$

рассматриваемая как функция параметра θ (при фиксированном $\overline{x}$), называется ***функцией правдоподобия***.

Случайная величина

$$U(\overline{\xi},\theta)=\frac{\partial \ln L(\overline{\xi},\theta)}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(\xi_i;\theta)}{\partial\theta}$$

называется ***вкладом (функцией вклада) выборки***.

Слагаемое $\dfrac{\partial \ln f(\xi_i;\theta)}{\partial\theta}$ называется ***вкладом*** i ***-го наблюдения***.

Так как всегда $(*)$ $\int L(\overline{x},\theta)d\overline{x}=1$ (условие нормировки), ($d\overline{x}=dx_1dx_2...dx_n$), то, продифференцировав это соотношение по θ, получим

$$\int\frac{\partial L(\overline{x},\theta)}{\partial\theta}d\overline{x}=\int\frac{\partial \ln L(\overline{x},\theta)}{\partial\theta}L(\overline{x},\theta)d\overline{x}=M_\theta\left[U(\overline{\xi},\theta)\right]=0,$$

поскольку $L(\overline{x},\theta)$ как функция $\overline{x}$ представляет собой совместную плотность распределения.

Введем далее ***информацию Фишера*** о параметре θ, содержащуюся в выборке $\overline{\xi}$:

$$i_n(\theta)=D_\theta\left[U(\overline{\xi},\theta)\right]=M_\theta\left[U^2(\overline{\xi},\theta)\right]=ni_1(\theta).$$

При этом величина

$$i_1(\theta)=M_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f(x_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$$

представляет собой количество информации Фишера, содержащейся в одном наблюдении.

Продифференцировав дважды соотношение типа (*) по θ, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\theta)dx=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}f(x,\theta)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2}f(x,\theta)dx_1+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x,\theta)dx=0.$$

Так как второе слагаемое есть $i_1(\theta)$, а первое равно

$$M_\theta\left[\frac{\partial^2 \ln f(\xi,\theta)}{\partial\theta^2}\right],$$

то для $i_1(\theta)$ справедлива формула

$$i_1(\theta) = -M_\theta\left[\frac{\partial^2 \ln f(\xi,\theta)}{\partial\theta^2}\right].$$

Ограничившись классом несмещенных оценок, запишем

$$M_\theta\left[T_n\left(\bar{\xi}\right)\right] = \int T_n\left(\bar{x}\right)L\left(\bar{x},\theta\right)d\bar{x} = \theta.$$

Продифференцировав это соотношение по θ, получим

$$1 = \int T_n\left(\bar{x}\right)\frac{\partial \ln L\left(\bar{x},\theta\right)}{\partial\theta}L\left(\bar{x},\theta\right)d\bar{x} = M_\theta\left[T_n\left(\bar{\xi}\right)U\left(\bar{\xi},\theta\right)\right] -$$

ковариацию случайной величины $T_n(\bar{\xi})$ и $U(\bar{\xi},\theta)$.

Воспользовавшись неравенством Коши - Буняковского

$$\operatorname{cov}^2(\xi,\eta) \le D_\xi D_\eta,$$

а также формулой $\operatorname{cov}(T_n(\bar{\xi}), U(\bar{\xi},\theta)) = 1,$ можем записать неравенство

$$D_\theta\left[T_n\left(\bar{\xi}\right)\right]D_\theta\left[U\left(\bar{\xi},\theta\right)\right] \ge 1.$$

Разрешив последнее неравенство относительно дисперсии оценки, получим неравенство Рао - Крамера:

$$D_\theta\left[T_n\left(\bar{\xi}\right)\right] \ge \frac{1}{i_n(\theta)}.$$

Причем это неравенство обращается в равенство лишь в случае, когда (см. раздел 16) между $T_n(\bar{\xi})$ и $U(\bar{\xi},\theta)$ существует линейная зависимость.

Таким образом, $i_n^{-1}(\theta)$ представляет собой нижнюю грань дисперсии несмещенной оценки. Если существует оценка T_n^*, для которой эта нижняя грань достигается, то она и будет эффективной оценкой параметра θ.

Пример. Рассмотрим нормальную случайную величину с неизвестным математическим ожиданием θ, т.е.

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Найдем информацию Фишера. Так как

$$i_1(\theta)=M_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f(\xi,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]=M_\theta\left[\frac{(\xi-\theta)^2}{\sigma^4}\right]=\frac{1}{\sigma^2},$$

то $i_n=ni_1(\theta)=\frac{n}{\sigma^2}$ и неравенство Рао - Крамера в данной ситуации имеет вид

$$D_\theta[T(\bar{\xi})]\ge\frac{\sigma^2}{n}.$$

И так как среднее выборочное имеет дисперсию, равную $\frac{\sigma^2}{n}$, то

$$\tilde{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

представляет собой эффективную оценку математического ожидания.

38. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК

Одним из наиболее часто применяемых для решения практических задач методов оценивания параметров распределения является метод максимального правдоподобия. Оценкой максимального правдоподобия называется $\hat{\theta}$, доставляющая максимум функции правдоподобия

$$\hat{\theta}=\arg\max L(\bar{x},\theta).$$

Таким образом, $\hat{\theta}$ выбирается из условия максимума совместной плотности распределения, вычисленной для данной реализации $\bar{x}$ выборки.

Если максимум $L(\bar{x},\theta)$ достигается во внутренней точке множества значений параметра θ, то $\hat{\theta}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial L(\overline{x},\theta)}{\partial\theta}=0 \text{ или } \frac{\partial L(\overline{x},\overline{\theta})}{\partial\theta_j}=0,\ j=\overline{1,m}\text{, если } \overline{\theta} \text{ – вектор.}$$

(необходимое условие экстремума).

Пример 1. Имеется выборка размером n из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием θ_1 и дисперсией θ_2^2. Функция правдоподобия

$$L(\overline{x};\theta_1;\theta_2)=\frac{1}{\theta_2^n(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\sum\limits_{-1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}.$$

Уравнения правдоподобия в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1}=\dfrac{1}{{\theta_2}^n(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\sum(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}\cdot\dfrac{\sum(x_i-\theta_1)}{\theta_2^2}=0;\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial\theta_2}=\dfrac{-n}{\theta_2^{n+1}(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\sum(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}+\dfrac{1}{\theta_2^n(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\sum(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}\cdot\dfrac{\sum(x_i-\theta_1)^2}{\theta_2^3}.\end{cases}$$

Решение этой системы дает:

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ;\quad \hat{\theta}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\theta}_1)^2,$$

т.е. оценками максимального правдоподобия в этом случае являются среднее выборочное и выборочная дисперсия соответственно.

Однако воспользоваться необходимым условием экстремума удается далеко не всегда.

Пример 2. На основании выборки размером n из генеральной совокупности, распределенной равномерно на $[\theta_1;\theta_2]$, найти оценки максимального правдоподобия параметров θ_1,θ_2. Функция правдоподобия

$$L(\overline{x},\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_2-\theta_1}; \quad (\theta_1 \le x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)} \le \theta_2)$$

достигает максимального значения, когда разность $\theta_2-\theta_1$ минимальна. При условии $\theta_1 \le x_{(1)}, \theta_2 \ge x_{(n)}$ это значение достигается при $\hat{\theta}_1 = x_{(1)}, \hat{\theta}_2 = x_{(n)}$. И, наконец, сформулируем асимптотические свойства (при $n \to \infty$) оценок максимального правдоподобия.

1. Оценка максимального правдоподобия является состоятельной оценкой, т.е. $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$.

2. Оценка максимального правдоподобия асимптотически нормальна при весьма общих предположениях, т.е. $\hat{\theta}_n \sim N(\theta; \frac{\sigma_\theta^2}{n})$, где $\sigma_\theta^2 = \frac{1}{i_1(\theta)}$.

3. Оценка максимального правдоподобия является асимптотически эффективной оценкой, т.е. $\sigma_{\hat{\theta}_n}^2 \to \frac{1}{ni_1(\theta)}$.

Замечание. Из свойства 2 следует также асимптотическая несмещенность оценки максимального правдоподобия $\left(M\left[\hat{\theta}_n\right] \to \theta\right)$.

Наряду с методом максимального правдоподобия для решения практических задач широко применяется ***метод моментов*** (подстановки). Его обоснование опирается на свойство выборочных моментов $A_k \xrightarrow{P} \alpha_k$, где $\alpha_k = \alpha_k(\theta)$ – теоретическое [т.е. выведенное из закона распределения $F(x,\theta)$] значение k-го начального момента. Приравнивая теоретические значения эмпирическим, получаем

$$\alpha_k(\overline{\theta}) = A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,k} .$$

Очевидно, число уравнений должно совпадать с числом оцениваемых параметров (компонент вектора $\overline{\theta}$).

Пример 3. По имеющейся выборке объемом n из генеральной совокупности, распределенной по закону Пуассона, найти оценку параметра a. Используя первый начальный момент, получаем:

$$\alpha_1 = M[\xi] = a = A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \hat{a} = \tilde{m}.$$

Два описанных метода считаются традиционно основными для получения точечных оценок. Также широкое распространение получил ***метод минимума хи-квадрат***, основанный на следующих соображениях. Разобьем множество значений наблюдаемой величины X на N непересекающихся подмножеств: $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Пусть ν_i – число элементов выборки $\bar{\xi}$, попавших в подмножество X_i ($\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_N = n$). Обозначим через p_i вероятность попадания случайной величины в подмножество X_i:

$$p_i(\theta) = P_\theta\{\xi \in X_i\}.$$

Относительная частота $\frac{\nu_i}{n}$ попадания наблюдений в X_i является состоятельной оценкой p_i. В качестве величины, измеряющей степень отклонения выборочных данных от теоретических значений вероятностей, используем

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{n}{p_i(\theta)}\left(\frac{\nu_i}{n} - p_i(\theta)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i^{\,2}}{np_i(\theta)} - n.$$

Оценку параметра θ найдем как точку минимума χ^2:

$\sum_{i=1}^{N} \frac{\nu_i^{\,2}}{np_i(\theta)} - n \to \min \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{\nu_i^{\,2}}{p_i^{\,2}(\theta)} \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta} = 0$ в случае скалярного параметра θ и

$\sum_{i=1}^{N} \frac{\nu_i^{\,2}}{p_i^{\,2}(\bar{\theta})} \frac{\partial p_i(\bar{\theta})}{\partial \theta_j} = 0, j = \overline{1, m}$ в случае векторного параметра $\bar{\theta} = (\theta_1; \theta_2; ...; \theta_m)$.

Отметим здесь относительную сложность решения таких уравнений, что требует применения в основном численных методов.

39. ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Возможен подход к оцениванию неизвестного параметра распределения, отличный от только что рассмотренного и базирующийся на следующей идее. Поставим задачу нахождения такого интервала (области в случае векторного параметра), внутри которого с высокой вероятностью γ находится точное значение оцениваемого параметра θ. Границы этого интервала

$$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) = \left(T_1(\bar{\xi}), T_2(\bar{\xi})\right)$$

представляют собой случайные величины, зависящие от выборки. Интервал $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ называется γ-доверительным интервалом, число γ - доверительной вероятностью (значения γ выбирают близкими к единице). При заданном γ доверительный интервал должен, разумеется, иметь минимальную длину, т.е.

$$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 \to \min, \quad P\left\{\theta \in (\hat{\theta}_1; \hat{\theta}_2)\right\} = \gamma.$$

Пример 1. По выборке объемом n построить доверительный интервал для неизвестного математического ожидания θ нормального закона распределения. Так как случайная величина

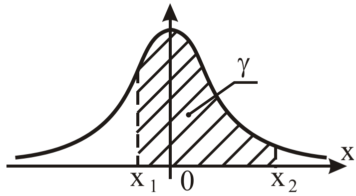
$$\eta = \sqrt{n}\,\frac{\tilde{m} - \theta}{\sigma} \sim N(0:1),$$

то $P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\} = P\left\{\sqrt{n}\,\frac{\tilde{m} - \hat{\theta}_2}{\sigma} < \eta < \sqrt{n}\,\frac{\tilde{m} - \hat{\theta}_1}{\sigma}\right\} =$

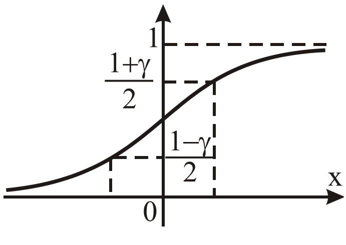
$$= \Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{\tilde{m} - \hat{\theta}_1}{\sigma}\right) - \Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{\tilde{m} - \hat{\theta}_2}{\sigma}\right) = \gamma.$$

На рисунке представлена плотность стандартной нормальной случайной величины ($\xi^0 \sim N(0:1)$); симметричный характер кривой позволяет заключить, что $x_2 - x_1 \to \min$ при $x_1 = -x_2$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned}\Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{\tilde{m}-\hat{\theta}_2}{\sigma}\right)=\frac{1-\gamma}{2}\\ \Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{\tilde{m}-\hat{\theta}_1}{\sigma}\right)=\frac{1+\gamma}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{n}\,\dfrac{\tilde{m}-\hat{\theta}_2}{\sigma}=\arg\Phi\left(\dfrac{1-\gamma}{2}\right)=-\arg\Phi\left(\dfrac{1+\gamma}{2}\right);\\ \sqrt{n}\,\dfrac{\tilde{m}-\hat{\theta}_1}{\sigma}=\arg\Phi\left(\dfrac{1+\gamma}{2}\right)=u_{\frac{\gamma}{2}}.\end{cases}$$



Отсюда $\theta_1=\tilde{m}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\gamma}{2}};$

$$\theta_2=\tilde{m}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\gamma}{2}},$$

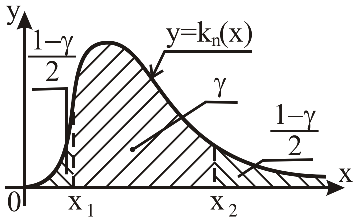
где $u_{\frac{\gamma}{2}}$ – квантиль уровня $\dfrac{1+\gamma}{2}$ стандартного нормального распределения.

Пример 2. В условиях примера 1 случайная величина $\xi\sim N(\mu;\theta^2)$. Построить доверительный интервал для дисперсии θ^2. Так как случайная величина

$$\eta=\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2$$

(см. пример 2 разд. 19) распределена по закону $\chi^2(n)$, то

$$P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2}{\theta_2{}^2}<\eta<\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2}{\theta_1{}^2}\right\}=\int_{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2}{\theta_2{}^2}}^{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2}{\theta_1{}^2}}k_n(x)=\gamma.$$



Этот результат иллюстрируется рисунком. На практике обычно отказываются от решения задачи минимизации длины доверительного интервала и ограничиваются условием симметрии:

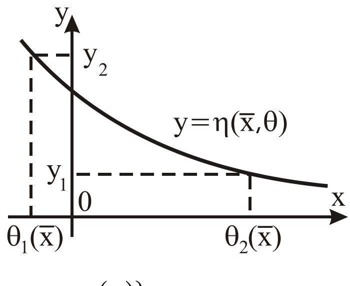
$$\int_0^{x_1} k_n(x)dx = \int_{x_2}^{+\infty} k_n(x)dx = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Поэтому $x_1 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}; x_2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили распределения $\chi^2(n)$ уровней $\frac{1-\gamma}{2}$, $\frac{1+\gamma}{2}$ соответственно. Следовательно,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mu)^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}}; \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mu)^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}}.$$

Процедура построения доверительного интервала, использованная в примерах 1,2, может быть обобщена следующим образом. Пусть $\eta = \eta(\bar{\xi}, \theta)$ – случайная величина, функция распределения которой $G(y) = P\{\eta < y\}$ не зависит от θ. Кроме того, потребуем монотонность η по θ. Выберем y_1 и y_2 так, чтобы

$$P\{y_1 < \eta < y_2\} = G(y_2) - G(y_1) = \gamma.$$



Решив уравнение $\eta(\bar{x}, \theta) = y_{1,2}$ относительно θ, отобразим интервал (y_1 ; y_2) в интервал ($\theta_1; \theta_2$), как это показано на рисунке. Тогда, так как

$$P\{y_1 < \eta < y_2\} = P\{\theta_1(\bar{x}) < \theta < \theta_2(\bar{x})\} = \gamma,$$

то $(\theta_1(\bar{x}); \theta_2(\bar{x}))$ является γ-доверительным интервалом для θ. Вопрос минимизации длины доверительного интервала

$$\theta_2(\overline{x}) - \theta_1(\overline{x}) \to \min_{y_1, y_2}$$

рассматривается в каждой ситуации отдельно.

Пример 3. Неизвестны оба параметра нормального распределения $N\left(\theta_1, \theta_2^2\right)$. При построении доверительного интервала для θ_2^2 используется случайная величина $\eta = {nS^2\left(\overline{\xi}\right)}\big/{\theta_2^2}$, распределенная по закону $\chi^2(n-1)$. Действия, аналогичные произведенным в примере 2, дают доверительный интервал

$$\left(\frac{nS^2(\overline{\xi})}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}} ; \frac{nS^2(\overline{\xi})}{\chi^2_{\frac{1\gamma}{2}}} \right).$$

Доверительный интервал для θ_1 строится на основании случайной величины

$$\eta = \sqrt{n-1}\,\frac{\tilde{m} - \theta_1}{S(\overline{\xi})},$$

распределенной по закону Стъюдента с n-1 степенями свободы. (см. пример 3 разд.19.) Вследствие симметрии плотность распределения, как и в примере 1, доверительный интервал симметричен относительно $\tilde{m}$:

$$\left(\tilde{m} - \frac{S(\overline{\xi})}{\sqrt{n-1}}\, t_{\frac{1+\gamma}{2}} ; \tilde{m} + \frac{S(\overline{\xi})}{\sqrt{n-1}}\, t_{\frac{1+\gamma}{2}} \right).$$

Здесь $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантиль уровня $\dfrac{1+\gamma}{2}$ распределения Стъюдента с $n-1$ степенями свободы.

40. ЗАДАЧА ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Статистической гипотезой называется любое утверждение о виде или свойствах распределения случайной величины. Например, гипотеза H_0: $F_\xi(x) = F(x)$ (либо $F_\xi(x) \in \Phi$). Если проверяемая гипотеза состоит в предположении о значении параметра закона распределения, то такая гипотеза называется ***параметрической***. Критерии проверки, согласуются ли статистические данные с гипотезой H_0, называются ***критериями согласия***. Если H_0 однозначно определяет закон распределения наблюдений, то она называется простой. Так, гипотеза $F_\xi(x) = F(x)$ – простая, а гипотеза $F_\xi(x) \in \Phi$ –сложная.

Высказав некоторую гипотезу H_0 о распределении генеральной совокупности, сформируем случайную величину $T(\overline{\xi})$ (***статистику***), характеризующую отклонение эмпирических данных $\overline{x}$ от теоретических, соответствующих гипотезе H_0. Распределение случайной величины $T(\overline{\xi})$ известно (точно или приближенно). Обозначив множество значений $T(\overline{\xi})$ через Γ, определим для данного (достаточно малого) числа $\alpha > 0$ подмножество $\Gamma_{1\alpha} \subset \Gamma : P\{T(\overline{\xi}) \in \Gamma_{1\alpha} / H_0\} \le \alpha$. Тогда если $t = T(\overline{x}) \in \Gamma_{1\alpha}$, то в предположении справедливости H_0 произошло маловероятное (с вероятностью α) событие и гипотеза H_0 должна быть отвергнута. В противном случае, когда $T(\overline{x}) \in \Gamma \setminus \Gamma_{1\alpha} = \Gamma_{0\alpha}$, считают, что наблюдения не противоречат гипотезе H_0 (согласуются с ней). Случайная величина $T(\overline{x})$ называется ***статистикой критерия***, а $\Gamma_{1\alpha}$ – ***критической областью*** для гипотезы H_0. Число α – ***уровень значимости критерия***, его можно считать вероятностью ложного отклонения гипотезы H_0.

Распределения наблюдаемой случайной величины, отличающейся от гипотетического (соответствующего H_0), образуют ***альтернативу***. Совокупность всех таких распределений называют альтернативной гипотезой H_1.

$$w(F) = w(\Gamma_{1\alpha}; F) = P\{T(\overline{\xi}) \in \Gamma_{1\alpha} / F\}$$

называют ***функцией мощности критерия***, определенной на множестве всех допустимых распределений $\{F\}$. Ясно, что критерий тем лучше, чем больше его мощность при альтернативных распределениях, т.е. $w(F)$ при $F \in H_1$ характеризует вероятность принятия правильного решения, когда гипотеза H_0 ложна.

Рассмотрим критерии проверки простой гипотезы H_0

$$F_\xi(x) = F(x).$$

Статистикой ***критерия согласия Колмогорова*** является случайная величина

$$S_n = S_n(\bar{\xi}) = \sup|F_n(x) - F(x)|,$$

представляющая собой максимальное отклонение эмпирической функции распределения $F_n(x)$ от гипотетической $F(x)$. Так как

$$F_n(x) \xrightarrow{P} F(x),$$

то критическую область зададим в виде $\Gamma_{1\alpha} = \{t : t \geq t_\alpha\}$.

Распределение статистики S_n не зависит от вида функции $F(x)$ и при достаточно больших n $(n \geq 20)$

$$P(\sqrt{n}S_n \leq t) \cong K(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i e^{-2i^2t^2},$$

отсюда следует, что $t_\alpha = \dfrac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$, где $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$ – квантиль распределения Колмогорова уровня $1-\alpha$. Действительно,

$$P\left\{S_n \geq \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}\right\} = P\left\{\sqrt{n}S_n \geq \lambda_\alpha\right\} \cong 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha.$$

Таким образом, процедура проверки гипотезы H_0 состоит в определении λ_α и проверке неравенства $\sqrt{n}t \geq \lambda_\alpha$ (t – значение статистики Колмогорова). Если неравенство выполняется, гипотезу H_0 отвергают. В противном случае считают, что H_0 не противоречит статистическим данным.

Статистика ***критерия хи-квадрат Пирсона*** формулируется следующим образом (см. также разд. 38). Обозначим $\bar{\nu} = (\nu_1; ...; \nu_N)$ – вектор частот попадания наблюдений в соответствующие интервалы $\varepsilon_1; \varepsilon_2; ...; \varepsilon_N$ $(\nu_1 + ... + \nu_N = n)$ $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = X$ –

множество значений ξ, $\overline{p}^0 = \left(p_1^0;...;p_N^0\right)$, где $p_i^0 = P\{\xi \in \varepsilon_i / H_0\}$ – вектор вероятностей попадания случайной величины ξ в интервалы ε_i. В качестве статистики критерия, характеризующей отклонение выборочных данных от соответствующих теоретических значений (ν_i от np_i^0), примем случайную величину

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\nu_i - np_i^0\right)^2}{np_i^0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\nu_i^2}{np_i^0} - n,$$

распределенную при достаточно больших n по закону $\chi^2(N-1)$. Критическую область зададим в виде $\Gamma_{1\alpha} = \{t : t \geq t_\alpha\}$. В этом случае $t_\alpha = \chi^2_{1-\alpha,N-1}$ – квантиль распределения $\chi^2(N-1)$ уровня $1-\alpha$.

Тогда при заданном n и уровне значимости α (обычно $n \geq 50, \nu_j \geq 5$) находим значения t статистики η_n и проверяем выполнение неравенства $t \geq \chi^2_{1-\alpha,N-1}$. Если это неравенство выполняется, гипотезу H_0 отвергаем. В противном случае H_0 не противоречит экспериментальным данным.

Критерий согласия χ^2 применяется, когда в каждом опыте может произойти одно из N несовместных событий A_i $(i = \overline{1,n})$ и известны частоты появления этих событий, $p_i^0 = P(A_i / H_0)$. В описанной ситуации $A_i = \{\xi \in \varepsilon_i\}$. Однако природа событий A_i может быть совершенно произвольной. В частности, критерий χ^2 применим при проверке гипотез относительно распределения многомерной (векторной) случайной величины.

Пример. При n=1000 бросаний монеты 540 раз выпал герб и 460 – цифра. Совместимы ли эти данные с гипотезой H_0: монета симметрична, т.е. Р(Г)=Р(Ц)=0,5. В условиях этого примера N=2;

$$p_1^0 = p_2^0 = 0.5; \quad \nu_1 = 0.54; \quad \nu_2 = 0.46;$$

$$t = \frac{(540-500)^2}{500} + \frac{(460-500)^2}{500} = 6.4;$$

$$t_\alpha = \chi^2_{1-\alpha,1} = \begin{cases} 3.84, \alpha = 0.05, \\ 6.63, \alpha = 0.001, \end{cases}$$

т.е. гипотеза о симметрии должна быть отвергнута при уровне значимости 0,05 и считается непротиворечивой при уровне значимости 0,001.

Исследуя поведение мощности критерия при $n \to \infty$, введем понятие ***состоятельности критерия***:

$$w_n(F) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \forall F \in H_1.$$

Справедливо утверждение: критерий χ^2 состоятелен для $\forall \overline{p_0}$.

41. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ. КРИТЕРИЙ НЕЙМАНА - ПИРСОНА

Если класс Ф допустимых распределений наблюдаемой случайной величины ξ имеет вид $\Phi = \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$, то рассматриваемые гипотезы называют параметрическими. В простейшем случае $H_0 : \theta = \theta_0$. Для того чтобы выяснить, верна ли гипотеза H_0, надо сконструировать такое правило, которое позволило бы для каждой реализации $\overline{x} \in X$ принять одно из двух решений: принять H_0 или отклонить ее. Поэтому каждому критерию соответствует разбиение выборочного пространства X на две непересекающиеся части: $X = X_0 + X_1$, где X_1 состоит из таких точек, для которых H_0 отклоняется. Множество X_0 называется ***областью принятия гипотезы*** $\boldsymbol{H_0}$, а X_1 - областью ее отклонения, или ***критической областью (критерием)***.

При проверке гипотезы H_0 можно совершить ***ошибку первого рода*** – отклонить H_0, когда она верна, или ***ошибку второго рода*** – принять H_0, когда она ложна. Т.е. ошибка первого рода это событие $\{(\bar{\xi} \in X_1) \cap H_0\}$, а ошибка второго рода – событие $\{(\bar{\xi} \in X_0) \cap H_1\}$. Вероятности этих ошибок можно выразить через функцию мощности $w(\theta)$ критерия X_1:

$$w(\theta) = w(X_1; \theta) = P_\theta(\bar{\xi} \in X_1).$$

Вероятности ошибок первого P_1 и второго P_2 рода соответственно равны

$$P_1 = w(\theta_0); \quad P_2 = 1 - w(\theta_1).$$

Одновременная минимизация вероятностей обоих типов ошибок в общем случае невозможна. Поэтому принцип выбора критической области X формулируется следующим образом:

$$w(\theta_1) \to \max, \; w(\theta_0) \le \alpha,$$

т.е. при заданном числе испытаний n устанавливается граница для вероятности ошибки первого рода и при этом критическая область X_1 выбирается из условия минимума ошибки второго рода. Величина α называется ***уровнем значимости*** критерия, а критерий обозначается $X_{1\alpha}$.

В рассматриваемом простейшем случае задача выбора наилучшего критерия $X_{1\alpha}$ формулируется так:

$$w(X_{1\alpha}; \theta_0) = \alpha; w(X_{1\alpha}; \theta_1) \to \max.$$

Решение таким образом поставленной задачи (нахождение ***наиболее мощного критерия***) основывается на ***отношении правдоподобия***:

$$\ell(\bar{\xi}) = \frac{L(\bar{\xi}; \theta_1)}{L(\bar{\xi}; \theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_0(\xi_i)},$$

где $f_0(x)$ и $f_1(x)$ - плотности распределения случайной величины ξ при реализации гипотез $H_0 : \theta = \theta_0$ и $H_1 : \theta = \theta_1$ соответственно. Определим функцию $\psi(c) = P_{\theta_0}\{\ell(\bar{\xi}) \ge c\} : \psi(0) = 1$, $\psi(c)$ убывает с ростом c.

Так как

$$P_{\theta_1}\left\{\ell(\xi)\ge c\right\}=\int\limits_{\ell(\bar\xi)\ge c} L\left(\bar x;\theta_1\right)d\bar x \ge c\cdot \int\limits_{\ell(\bar\xi)\ge c} L(\bar x;\theta_0)d\bar x =$$

$$= cP_{\theta_0}\left\{\ell(\bar\xi)\ge c\right\}= c\psi(c)$$

и, следовательно, $c\psi(c)\le 1$, то $\psi(c)\le \dfrac{1}{c}\to 0, c\to\infty$.

В случае когда $\psi(c)$ непрерывна, существует решение уравнения $\psi(c)=\alpha$ $(0<\alpha<1)$, которое обозначим $c_\alpha=\psi^{-1}(\alpha)$.

При сделанных предположениях существует наиболее мощный критерий проверки гипотезы H_0, который задается условием:

$$X_{1\alpha}^{*}=\left\{\bar x:\ell\left(\bar x\right)\ge c_{1\alpha}\right\}.$$

Этот критерий носит название ***критерия Неймана - Пирсона***.

Действительно, рассмотрев любой другой критерий $X_{1\alpha}$, получим:

$$w(X_{1\alpha};\theta_1)=\int\limits_{X_{1\alpha}} L\left(\bar x;\theta_1\right)d\bar x=\int\limits_{X_{1\alpha}X_{1\alpha}^{*}} L\left(\bar x;\theta_1\right)dx+\int\limits_{X_{1\alpha}\bar X_{1\alpha}^{*}} L\left(\bar x;\theta_1\right)dx.$$

Аналогично

$$w(X_{1\alpha}{}^{*};\theta_1)=\int\limits_{X_{1\alpha}X_{1\alpha}{}^{*}} L\left(\bar x;\theta_1\right)d\bar x+\int\limits_{\bar X_{1\alpha}X_{1\alpha}^{*}} L\left(\bar x;\theta_1\right)d\bar x\,.$$

Поэтому

$$w\left(X_{1\alpha}^{*};\theta_1\right)-w\left(X_{1\alpha};\theta_1\right)=\int\limits_{\bar X_{1\alpha}X_{1\alpha}^{*}} L\left(\bar x;\theta_1\right)d\bar x-\int\limits_{X_{1\alpha}\bar X_{1\alpha}^{*}} L\left(\bar x;\theta_1\right)d\bar x\,.$$

Но согласно определению множества $X_{1\alpha}^{*}$ вне этого множества $\ell\left(\bar x\right)<c$, а в точках этого множества $\ell\left(\bar x\right)\ge c$. Следовательно,

$$w\left(X_{1\alpha}^{*};\theta_1\right)-w\left(X_{1\alpha};\theta_1\right)>$$

$$>c_\alpha\left(\int\limits_{\bar X_{1\dot a}X_{1\alpha}^{*}} L\left(\bar x;\theta_0\right)d\bar x-\int\limits_{X_{1\alpha}\bar X_{1\alpha}^{*}} L\left(\bar x;\theta_0\right)d\bar x\right)=$$

$$= c_\alpha \left(\int\limits_{\overline{X}_{1\dot{\alpha}} X^*_{1\alpha} + X_{1\dot{\alpha}} X^*_{1\alpha}} L(\overline{x};\theta_0) d\overline{x} - \int\limits_{X_{1\dot{\alpha}} \overline{X}^*_{1\alpha} + X_{1\dot{\alpha}} X^*_{1\alpha}} L(\overline{x};\theta_0) d\overline{x} \right).$$

Последнее равенство имеет место, так как области интегрирования увеличены на множество $X_{1\alpha}X^*_{1\alpha}$ и, следовательно, интегралы в скобках увеличены на одно и то же число (свойство аддитивности интеграла). Окончательно

$$w\left(X^*_{1\alpha};\theta_1\right) - w\left(X_{1\alpha};\theta_1\right) > c_\alpha \left(\int\limits_{X_{1\alpha}{}^*} L(\overline{x};\theta_0) d\overline{x} - \int\limits_{X_{1\alpha}} L(\overline{x};\theta_0) \ldots d\overline{x} \right) =$$

$$= c_\alpha (\alpha - \alpha) = 0 .$$

И, таким образом, $X^*_{1\alpha}$ - наиболее мощный критерий.

Замечание. Так как $w(X^*_{1\alpha};\theta_1) > \alpha$ (доказать самостоятельно), то критерий Неймана-Пирсона является несмещенным.

Пример. $\xi \sim N(\theta;\sigma^2)$ (случайная величина ξ распределена по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием θ). Тогда при $\theta_1 > \theta_0$

$$\ell(\overline{x}) = \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - \theta_1)^2 - (x_i - \theta_0)^2 \right) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \frac{n}{\sigma^2} \left((\theta_1 - \theta_2)\tilde{m} - \frac{1}{2}\left(\theta_1^2 - \theta_0^2\right) \right) \right\}.$$

Неравенство $\ell(\overline{x}) \geq c$ эквивалентно $\tilde{m} \geq \dfrac{\sigma^2 \ln c}{n(\theta_1 - \theta_0)} + \dfrac{\theta_1 + \theta_0}{2}$ и

далее эквивалентно

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\tilde{m} - \theta_0) \geq \frac{\sigma \ln c}{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)} + \frac{\sqrt{n}}{2\sigma}(\theta_1 - \theta_0) = t(c).$$

Так как случайная величина $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\tilde{m}-\theta_0\right)$ распределена при $\theta=\theta_0$ по нормальному закону $N(0;1)$, то

$$\psi(c)=P_{\theta_0}\left\{\ell\left(\overline{\xi}\right)\geq c\right\}=P_{\theta}\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\tilde{m}-\theta_0\right)\geq t(c)\right\}=$$

$$=1-\Phi(t(c))=\Phi(-t(c)).$$

Далее, найдя $t_\alpha:\ \Phi(-t_\alpha)=\alpha$ и затем $c_\alpha:\ t(c_\alpha)=t_\alpha$, получаем для критической области

$$X^*_{1\alpha}=\left\{\overline{x}:\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\tilde{m}-\theta_0\right)\geq t_\alpha\right\},\ \Phi\left(-t_\alpha\right)=\alpha.$$

Т.е. в данном случае критерий зависит лишь от $\tilde{m}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ и не зависит от альтернативы $\theta_1>\theta_0$.

42. СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

При обработке данных эксперимента часто приходится решать задачу восстановления зависимости одной случайной величины η от другой ξ.

Таким образом, имеются система двух случайных величин (ξ,η) и набор экспериментальных данных (точек) $\left(x_i;y_i\right)$, $i=\overline{1,n}$. При решении практических задач обычно в качестве предположения о характере зависимости принимается ***линейная модель регрессии***:

$$\eta=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\varphi_j(\xi)+\varepsilon, \tag{50}$$

где $\varphi_j(\xi)$ – заданные функции, вид которых либо известен из некоторых физических соображений, либо подбирается на основании имеющихся экспериментальных данных; ε – случайная величина, называемая ошибкой или погрешностью:

$$M[\varepsilon]=0; D[\varepsilon]=\sigma^2 .$$

Задача определения коэффициентов α_j $\left(j=\overline{1,N}\right)$ решается путем минимизации ***квадратичного показателя качества***

$$I(\alpha_1;...;\alpha_N)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\varphi_j(x_i)-y_i\right)^2 \to \min_{\alpha_1;...;\alpha_N} . \qquad (51)$$

Необходимые условия минимума представляют собой систему уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_k}=\sum_{i=1}^{n}2\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\varphi_j(x_i)-y_i\right)\varphi_k(x_i)=0, \quad k=\overline{1,N} ,$$

которая может быть приведена к стандартному виду:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right)\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}y_i\varphi_k(x_i), \quad k=\overline{1,N} . \qquad (52)$$

Матрица коэффициентов этой системы уравнений

$$A=\left[\sum_{i=1}^{n}\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)\right]_{k,j=1}^{N}$$

является симметрической, что уменьшает объем вычислений. Такая система возникает при обработке равноточных наблюдений, когда дисперсия ошибки не изменяется от измерения к измерению. В случае зависимости дисперсии ошибки от номера измерения $D[\varepsilon_i]=\sigma_i^2$ квадратичный показатель качества записывается в виде:

$$I(\alpha_1;...;\alpha_N)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\varphi_j(x_i)-y_i\right)^2 \to \min_{\alpha_1;...;\alpha_N} . \qquad (51')$$

Система уравнений для определения α_j $\left(j=\overline{1,N}\right)$ в случае неравноточных измерений выглядит так:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}\varphi_k(x_i)\varphi_i(x_i)\right)\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}y_i\varphi_k(x_i). \qquad (52')$$

Применение описанного выше ***метода наименьших квадратов МНК*** не ограничивается линейной моделью регрессии. Так, например, широко известная производственная функция Кобба-Дугласа

$$Z=\gamma X^{\alpha}Y^{\beta} -$$

функция двух переменных X,Y легко превращается в линейную путем ее логарифмирования

$$\zeta=\ln Z=\ln\gamma+\alpha\ln X+\beta\ln Y=a_0+a_1\xi+a_2\eta .$$

Принципиальное ее отличие от (50) состоит в наличие двух факторов (аргументов) $\xi=\ln X,\eta=\ln Y.$ Однако основные детали МНК сохраняются. Так, квадратичный показатель качества формируется аналогично (51):

$$I(a_0;a_1;a_2)=\sum_{i=1}^{n}(a_0+a_1x_i+a_2y_i-z_i)^2\to\min_{a_0;a_1;a_2} . \qquad (51'')$$

Здесь x_i, y_i, z_i – значения, принимаемые в i-м эксперименте, ξ,η,b соответственно. Приняв частные производные I по $a_0;a_1;a_2$ равным нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} na_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a_1+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)a_2=\sum_{i=1}^{n}z_i;\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a_1+\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)a_2=\sum_{i=1}^{n}x_iz_i;\\ \left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)a_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)a_1+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)a_2=\sum_{i=1}^{n}y_iz_i. \end{cases} \qquad (52'')$$

Ее решение дает МНК – оценки параметров модели $a_0=\ln\gamma; a_1=\alpha; a_2=\beta$. Изменение системы уравнений $(52'')$, связанное с неравноточностью измерений, происходит по аналогии с $(51')$, $(52')$.

В ситуации, когда предполагаемая зависимость линейна, решение задачи оценивания коэффициентов формулы

$$\eta=a_0+a_1\xi$$

может быть получено с использованием результатов раздела 16, если в качестве закона распределения системы случайных величин (ξ, η) принять равномерный:

$$P\{(\xi = x_i)\bigcap(\eta = y_i)\} = \frac{1}{n}, \ i = \overline{1,n} .$$

Тогда остается в силе уравнение регрессии

$$\eta = \tilde{m}_\eta + \tilde{r}\frac{S_\eta}{S_\xi}(\xi - \tilde{m}_\xi),$$

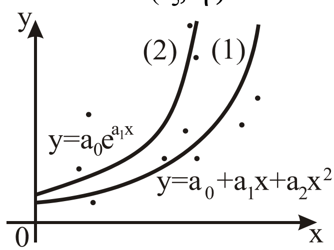
где

$$\tilde{m}_\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ; \ \tilde{m}_\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i ; \ S_\eta{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{m}_\eta)^2 ;$$

$$S_\xi{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m}_\xi)^2; \ \tilde{K}_{\xi\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m}_\xi)(y_i - \tilde{m}_\eta);$$

$\tilde{r} = \dfrac{\tilde{K}_{\xi\eta}}{S_\xi S_\eta}$ – выборочные характеристики (см. разд. 36).

Заметим, что в соответствии с формулами разд. 17 правая часть уравнения регрессии представляет собой условное математическое ожидание случайной величины η в случае нормального закона распределения системы случайных величин (ξ, η).

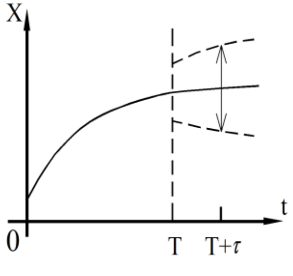


Один и тот же набор экспериментальных данных может быть описан исходя из различных моделей регрессии. На рисунке множество точек (x_i, y_i) позволяет, в частности, предположить как параболический вид кривой $\left(y = a_0 + a_1x + a_2x^2\right)$, так и экспоненциальный $\left(y = a_0e^{a_1x}\right)$. Выбор может быть сделан путем сравнения I_{min} для различных моделей.

43. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Случайная последовательность $\{\xi_t\}_{t=0}^{\infty}$, характеризующая динамику процесса (явления) во времени, ***называется временным рядом. Задача прогнозирования*** значений временного ряда решается путем ***экстраполяции*** выявленных при анализе устойчивых тенденций. Экстраполяцией называется метод, заключающийся в распространении выводов, полученных из наблюдений над значениями временного ряда $\{x_t\}_{t=0}^{T}$ на «будущие» моменты времени T+1; T+2;… . В основе методов экстраполяции лежит предположение о том, что выявленная для отрезка временного ряда $\{x_t\}_{t=0}^{T}$ тенденция будет действовать и в ближайшем будущем, так как не ожидается изменения факторов, обусловливающих эту тенденцию. Т.е. предполагается некоторая инерционность в развитии явления. С другой стороны, отклонение значений временного ряда от предсказанных (экстраполированных) свидетельствует об изменении внутренних или внешних факторов, влияющих на исследуемый процесс, и является поводом для изменения способа действий. Таким образом, известное высказывание «управлять – значит предвидеть» должно быть девизом любой деятельности.

Прогнозное (экстраполированное) значение временного ряда может быть точечным или интервальным (см. разд. 37-40). Точечный прогноз предполагает построение кривой x(t), координаты которой являются экстраполированными значениями. Интервальный прогноз дает границы доверительного интервала для моментов T+1; T+2;… .



На рисунке представлена линия регрессии, которая основана на данных, полученных на интервале наблюдения $[0;T]$ и продолжена за его пределы. Штриховой линией изображены границы доверительного интервала, величина которого растет с увеличением t, что связано с накоплением погрешности.

В процессе решения практических задач наиболее часто применяются два подхода к обработке временных рядов и прогнозированию:

1) подход, основанный на использовании средних;
2) подход, основанный на МНК.

В рамках первого подхода рассмотрим два метода: скользящего среднего и экспоненциального сглаживания.

Метод скользящего среднего состоит в «укрупнении» интервала – переходе от интервала длины $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ к интервалу длины $t_k - t_{k-N+1} = (N-1)\Delta t$, содержащему N членов временного ряда, и расчете средних значений для каждого такого интервала:

$$\eta_k = \frac{\xi_{k-N+1} + \xi_{k-N+2} + \ldots + \xi_k}{N}.$$

Идея метода состоит в том, что при достаточно медленном изменении «полезной» (информативной) составляющей последовательности $\{\xi_t\}$переход к среднему арифметическому N последних ее членов практически оставляет ее неизменной. Вклад случайной составляющей $\{\xi_t\}$ в результат усреднения η_k становится меньше в $\sqrt{N}$ раз (см. закон больших чисел). Разумеется, излишнее увеличение N скажется и на полезной составляющей, поэтому необходим разумный компромисс между такого рода потерями и выигрышем от «подавления» случайной составляющей.

Обычно значение скользящего среднего используют для экстраполяции $\hat{\xi}_{T+\tau} = \eta_t$. В этом случае сопоставление графиков ξ_t и η_t дает возможность получить информацию об изменении тенденции (тренда) процесса.

Пример. Располагая данными об изменениях средних дневных цен на рынке ценных бумаг (или на данной площадке) ξ_t, построим график скользящего среднего η_t. Сравнение этих двух графиков может служить основанием для принятия решения.

Если линия скользящего среднего находится ниже графика цен $(\eta_t \le \xi_t)$, то ценовой тренд является «бычьим»; в противном случае – «медвежьим». Пересечение линии цен скользящим средним может рассматриваться как сигнал к покупке (бычий тренд) или к продаже (медвежий тренд).

Метод скользящего среднего использует N последних значений временного ряда с одинаковыми «весами» (коэффициентами), равными $1/N$. Применение различных весов может быть обосновано тем соображением, что более далекое от t значение временного ряда имеет большее отклонение полезной составляющей от ее значения в момент t. Одним из методов введения различных весовых коэффициентов является метод экспоненциального сглаживания: последний член ξ_t имеет «вес» $\alpha(0<\alpha<1)$, предпоследний - $\alpha(1-\alpha)$,..., $\xi_{t-N+1} - \alpha(1-\alpha)^{N-1}$. Поскольку убывание весов происходит по экспоненте (показательной функции), то этот факт и дал название методу. При экстраполяции на один шаг получаем формулу:

$$\eta_{T+1} = \alpha\xi_T + (1-\alpha)\eta_T\,,\ \eta_2 = \xi_1.$$

Из этого соотношения следует, что величина α определяет степень доверия последнему члену временного ряда.

Метод наименьших квадратов (МНК), описанный в разделе 43, применим и при решении задачи экстраполяции временного ряда. Роль аргумента играет t. Как правило, в качестве базисных функций используют степенные

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n,$$

экспоненциальные $x(t) = a_0 e^{a_1 t}$,

гармонические $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ (ω – заданное число).

Пример. Имеются данные об объемах продаж по сезонам за ряд лет. Построить модель сезонных колебаний, найти МНК – оценки ее коэффициентов. Найти прогноз на следующий год.

Год	I				II				III			
Квартал	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
№ квар-тала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Объем x	73	59	31	39	69	62	30	41	75	57	30	40
$\cos wt$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$\sin wt$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Модель сезонных колебаний включает постоянную составляющую и гармоническую поправку с периодом T=4, частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos\frac{\pi}{2}t + a_2 \sin\frac{\pi}{2}t, \quad t=1,2,\ldots,12.$$

МНК предполагает минимизацию квадратичного показателя качества

$$I = \sum_{t=1}^{12}\left(a_0 + a_1\cos\frac{\pi}{2}t + a_2\sin\frac{\pi}{2}t - x(t)\right)^2 \to \min_{a_0;a_1;a_2}.$$

Приравняв нулю частные производные $I'_{a_0}, I'_{a_1}, I'_{a_2}$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 12a_0 + \left(\sum\limits_1^{12}\cos\frac{\pi}{2}t\right)a_1 + \left(\sum\limits_1^{12}\sin\frac{\pi}{2}t\right)a_2 = \sum\limits_1^{12}x(t); \\ \left(\sum\limits_1^{12}\cos\frac{\pi}{2}t\right)a_0 + \left(\sum\limits_1^{12}\cos^2\frac{\pi}{2}t\right)a_1 + \left(\sum\limits_1^{12}\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)a_2 = \sum\limits_1^{12}x(t)\cos\frac{\pi}{2}t; \\ \left(\sum\limits_1^{12}\sin\frac{\pi}{2}t\right)a_0 + \left(\sum\limits_1^{12}\cos\frac{\pi}{2}t\sin\frac{\pi}{2}t\right)a_1 + \left(\sum\limits_1^{12}\sin^2\frac{\pi}{2}t\right)a_2 = \sum\limits_1^{12}x(t)\sin\frac{\pi}{2}t. \end{cases}$$

Значения гармонических функций приведены в таблице. Их подстановка приводит к системе

$$\begin{cases} 12a_0 = 606 & a_0 = 50.5 \\ 6a_1 = -58 \Rightarrow & a_1 = -9.7 \\ 6a_2 = 126 & a_2 = 21. \end{cases}$$

При составлении таблицы использовались исходные данные: $a_0=50; a_1=-10; a_2=20$. Таким образом, МНК дает неплохие по точности результаты (относительная ошибка не выходит за предел 3 %).

Для экстраполяции на следующий год используется найденная модель

$$\hat{x}(t)=50.5-9.7\cos\frac{\pi}{2}t+21\sin\frac{\pi}{2}t\,,\ t=13,14,15,16,\dots .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Полиномиальная формула

В результате опыта может осуществиться один из r несовместных исходов A_1; A_2; . . .; A_r. Причем $P(A_i)=p_i$ и $p_1+p_2+\ldots+p_r=1$. Опыт повторяется независимым образом n раз. Найти вероятность того, что исход (событие) A_i произойдет n_i раз ($n_1+n_2+\ldots+n_i=1$).

С учетом независимости опытов любой из исходов, удовлетворяющих сформулированным условиям, происходит с вероятностью $p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}$. Таких исходов (см. п.5 раздела 1) равно

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}.$$

Поэтому искомая вероятность равна

$$p_{n_1;n_2;\ldots;n_r}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}.$$

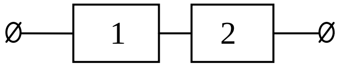
Причем

$$\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_r=n}p_{n_1;n_2;\ldots;n_r}=1.$$

2. Расчет надежности

Под надежностью устройства (блока) понимают вероятность его безотказной работы на данном интервале времени. В целях упрощения исключим из рассмотрения временной фактор. Также будем считать условием безотказной работы прохождение сигнала со входа на выход устройства. Обозначим A_j событие, состоящее в безотказной работе j-го блока. Тогда $\lambda_j = P(A_j)$ - его надежность. Рассмотрим две простейшие ситуации.

А) Последовательное соединение.

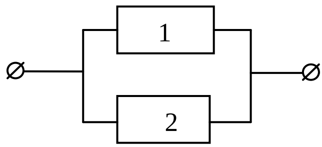


Обозначив А – надежность последовательного соединения, получим $A = A_1 \cdot A_2$. При условии независимости событий A_1 и A_2:

$$\lambda = P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 ,$$

т.е. надежность последовательного соединения равна произведению надежностей.

Б) Параллельное соединение.



Пусть А – надежность последовательного соединения. Тогда $A = A_1 \bigcup A_2$. Действительно имеются два пути прохождения сигнала.

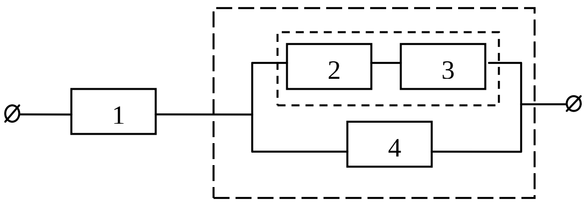
Т.е. надежность обеспечивается безотказной работой хотя бы одного блока. Поэтому

$$\lambda = P(A) = P(A_1 \bigcup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \cdot \lambda_2 .$$

Анализ более сложных схем, тем не менее сводящихся к последовательным и параллельным соединениям, производится методом агрегирования или постепенного усложнения.

Пример.

Рассчитать надежность $\lambda = P(A)$ схемы, состоящей из четырех блоков; если известны надежности $\lambda_i = P(A_i)$, $i = \overline{1,4}$.



На первом этапе объединим блоки 2 и 3. Обозначив надежность этого соединения $\lambda_{2,3}$, получим $\lambda_{2,3} = \lambda_2 \cdot \lambda_3$. На следующем этапе рассмотрим параллельное соединение “цепочки” 2,3 и блока 4 (см. рис.). Тогда надежность этого параллельного соединения равна

$$\lambda_{2,3,4} = \lambda_{2,3} + \lambda_4 - \lambda_{2,3} \cdot \lambda_4 = \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 .$$

И, наконец, рассмотрев последовательное соединение агрегата 2,3,4 с блоком 1, получим

$$\lambda = P(A) = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4).$$

В рамках рассмотренного подхода возможно решение более сложных задач. Например, найти $P(\overline{A}_j / \overline{A})$, т.е. вероятность того, что при условии выхода из строя схемы неисправен j-й блок. Эта задача может быть интерпретирована как поиск неисправного блока. А именно, первоначально при поиске неисправности следует проверить блок j^*, для которого $P(\overline{A}_j / \overline{A}) \to \max\limits_j$. Расчет этой вероятности легко осуществим по формуле Байеса:

$$P(\overline{A}_j / \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} / \overline{A}_j) \cdot P(\overline{A}_j)}{P(\overline{A})} = \frac{(1 - P(A / \overline{A}_j)) \cdot (1 - P(A_j))}{1 - P(A)} .$$

Воспользовавшись эквивалентностью $\overline{A}_j \Leftrightarrow \lambda_j = 0$, окончательно получим

$$P(\overline{A}_j / \overline{A}) = \frac{(1 - P(A / \lambda_j = 0)) \cdot (1 - \lambda_j)}{1 - \lambda} .$$

В частности, для рассмотренной в примере схемы при j=2:

$$P(\overline{A}_2 / \overline{A}) = \frac{(1 - \lambda_1 \cdot \lambda_4) \cdot (1 - \lambda_2)}{1 - \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4)} .$$

3. Г-распределение

Г-распределение имеет плотность (ξ ~Г(θ ;λ)):

$$f(x) = \frac{x^{\lambda-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\lambda)\theta^{\lambda}}, \ x \ge 0 .$$

Здесь $\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция.

Распределение $\Gamma(2;\frac{n}{2})$ называется распределением хи-квадрат с n степенями свободы; его плотность равна (см. 38)

$$k_n(x)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})},\ \ x\ge 0.$$

Соответствующая этой плотности характеристическая функция

$$\varphi(t;n)=\int_0^{+\infty}e^{-itx}k_n(x)dx=\frac{1}{(1+2it)^{n/2}}.$$

Отсюда получаем

$$M[\chi_n^2]=i\varphi'(0;n)=n; D[\chi_n^2]=-\varphi''(0;n)-M^2[\chi_n^2]=2n.$$

Важным свойством распределения хи-квадрат является его ***воспроизводимость*** по параметру n, что означает: сумма независимых случайных величин, распределенных по закону хи-квадрат, распределена также по закону хи-квадрат с числом степеней свободы, равным сумме степеней свободы слагаемых. Действительно,

$$M\left[e^{-it(\chi_{n_1}^2+\chi_{n_2}^2)}\right]=\varphi(t;n_1)\varphi(t;n_2)=$$

$$=\frac{1}{(1+2it)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}=\varphi(t;n_1+n_2).$$

Замечание. Имеет место более общее утверждение: распределение $\Gamma(\theta;\lambda)$ воспроизводимо по параметру λ.

Таким образом, случайную величину χ_n^2 можно представить в виде суммы независимых случайных величин, распределенных по закону хи-квадрат с одной степенью свободы. Но $k_1(x)$ совпадает с плотностью распределения ξ^2, если ξ ~N(0;1). Действительно, при x>0

$$F_{\xi^2}(x)=P\{\xi^2<x\}=P\{-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x}\}=$$

$$= \Phi\left(\sqrt{x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{x}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{x}\right) - 1.$$

$f_{\xi^2(x)} = F'_{\xi^2}(x) = \Phi'(\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = k_1(x)$, так как $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Следовательно, сумма квадратов n независимых случайных величин, распределенных по стандартному нормальному закону, имеет распределение $\chi^2(n)$.

4. Логарифмически-нормальное распределение

Случайная величина ξ называется логарифмически нормально распределенной, если ее логарифм $\eta = \ln \xi$ подчинен нормальному закону распределения. Тогда для $\xi = e^{\eta}$ получим (для x>0)

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\} = P\{\eta < \ln x\} = \Phi(\frac{\ln x - m}{\sigma});$$

$$f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}, x > 0.$$

Вероятностная модель, описываемая логарифмическим законом распределения, формируется следующим образом. Случайное приращение, вызванное действием случайной величины η_k, пропорционально уже достигнутому значению случайной величины. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\Delta\xi_k}{\xi_k} = \sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k$. Предельный переход при $\Delta\xi_k \to 0$ дает $\displaystyle\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\xi} = \ln\xi - \ln\xi_0$,

но в силу центральной предельной теоремы $\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k$ распределена по нормальному закону.

Приведенная схема формирования значений логарифмически нормальной случайной величины характерна для многих социально-экономических приложений: заработная плата работника, доход семьи и др.

5. Задача оптимизации инвестиционного портфеля

Инвестор может вложить деньги в несколько видов ценных бумаг, сформировав инвестиционный портфель. Пусть $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – доля вложения, приходящаяся на j-й вид ценных бумаг, ρ_j – эффективность (например, процент прибыли) j-го вида. Тогда эффективность портфеля равна

$$\rho=\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\ ,\ x_j\ge 0,\sum_{j=1}^{n}x_j=1\,.$$

Средний ожидаемый эффект от портфеля равен

$$m=M[\rho]=\sum_{j=1}^{n}x_j m_j\ ,\ m_j=M\left[\rho_j\right]\ .$$

Дисперсия эффекта портфеля

$$D[\rho]=M\left[(\rho-m)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{ij}x_i x_j, R_{ij}=M\left[(\rho_i-m_i)(\rho_i-m_j)\right].$$

Естественным желанием инвестора являются увеличение среднего ожидаемого эффекта и уменьшение его дисперсии (неопределенности).

Будем решать задачу минимизации дисперсии при условии обеспечения заданной величины среднего ожидаемого эффекта:

$$\sum_{i,j=1}^{n}R_{ij}x_i x_j\to\min;\sum_{j=1}^{n}m_j x_j=m_0;\sum_{j=1}^{n}x_j=1.$$

Поставленная таким образом задача представляет собой задачу нахождения условного экстремума. При $x_j\ge 0$ это задача квадратичного программирования.

Пример. Имеется три вида ценных бумаг: $m_1;m_2;m_3$ – средние ожидаемые эффективности; $\sigma_1{}^2;\sigma_2^2;\sigma_3^2$- дисперсии эффективности первого, второго и третьего видов ценных бумаг соответственно. Для простоты предположим, что все три эффективности попарно независимы ($R_{ij}=0, i\ne j$). Тогда задача оптимизации принимает вид:

$$\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2+\sigma_3^2x_3^2\to\min;\ \ m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=m_0;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Решим эту задачу, когда $m_1 = 1;\ m_2 = 2;\ m_3 = 3;\ m_0 = 2.5;$

$$\sigma_1^2 = \sigma^2; \sigma_2^2 = 3\sigma^2; \sigma_3^2 = 5\sigma^2:$$

$$x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 \to \min; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2.5; x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Переписав условия в виде

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 2.5 - x_1, \\ x_2 + x_3 = 1 - x_1, \end{cases}$$

выразим x_2, x_3 через x_1:

$$x_2 = 0.5 - 2x_1$$

$$x_3 = 0.5 + x_1$$

и подставим их в функцию, подлежащую минимизации:

$$9x_1^2 - x_1 + 2 \to \min, \quad 0 \le x_1 \le 1.$$

Данная квадратичная функция имеет локальный минимум в точке $x_1^* = 1/18$. Отсюда $x_2^* = 0.5 - 2x_1^* = \dfrac{7}{18}; x_3^* = 0.5 + x_1^* = \dfrac{10}{18}$.

При этих условиях дисперсия эффекта портфеля равна

$$D[\rho] = \sigma^2\left(\frac{1}{18^2} + 3\frac{7^2}{18^2} + 5\frac{10^2}{18^2}\right) = 2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 2006.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей М.: Высшая школа, 2006.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшее образование, Юрайт-Издат, 2009.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал, 2001.
5. Ширяев Ю.А. Лекции по теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2004.
6. Айвазян С.А. и др. Теория вероятностей и прикладная статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.

Дополнительная литература

7. Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей. М.: Наука, 1986.
8. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1982.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложение. Т. 1. М.: Мир, 1984.
10. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1992.
11. Айвазян С.А. и др. Прикладная статистика. Финансы и статистика. М.: Статистика, 1988.
12. Мурзов Н.В., Дубовиков А.В. Математические основы корреляционной теории случайных функций и её применение в радиотехнике. Рязань: РРТИ, 1986.
13. Дубовиков А.В., Мурзов Н.В. Основы теории случайных процессов. Рязань: РРТИ, 1985.
14. Мурзов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Рязань: РРТИ,1989.

15. Мурзов Н.В. и др. Математическая статистика. Рязань: РРТИ, 1987.
16. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: «Инфо-М», 1994.
17. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике. М.: «Дело и сервис», 1997.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Д у б о в и к о в Андрей Викторович

Вероятностно-статистические модели

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С. В. Макушина

Подписано в печать 25.12.06. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 10,25.
Уч. изд. л. 10,25. Тираж 150 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.