

Олимпиада РГРТУ 22.03.2014

1 курс

1. Вычислить определитель n -го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить $\begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix}^{2014}$.

3. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ справедливы свойства двойного векторного произведения:

а) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; б) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{0}$,

в) $\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} + \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]], \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$

4. На эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ найти такую точку, лежащую в первом квадранте, чтобы площадь S треугольника, образованного касательной к эллипсу в этой точке и осями координат, была наименьшей.

5. Вычислить пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\sin \pi x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x + x})$

6. Исследовать функцию и построить график: $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$.

7. Известно, что $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$. Вычислите $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x} dx$.

8. Найти минимальное значение функции

$$z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}.$$

9. Известно, что $f(xy) = f(x) + f(y)$, где $x > 0$, $y > 0$. Найти $f(x)$.

10. Вычислить интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x + 2014x^{2014}}$.

Олимпиада РГРТУ 22.03.2014

2-5 курсы

1. Вычислить $\begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix}^{2014}$.
2. Решить дифференциальное уравнение: $y' \cos y = x - \sin y$.
3. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\arctg(n+1)}{\arctg n} \right)$.
4. Из отрезка $[0,1]$ случайным образом взяты два числа. Найти вероятность того, что их сумма больше $3/2$, а произведение меньше $3/4$.
5. Вычислить интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + 2014x^{2014}}$.
6. Исследовать функцию и построить график: $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$.
7. Найти минимальное значение функции

$$z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}.$$
8. Известно, что $f(xy) = f(x) + f(y)$, где $x > 0$, $y > 0$. Найти $f(x)$.
9. Вычислить пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\sin \pi x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$
10. Доказать, что для любых векторов **a, b, c** справедливы свойства двойного векторного произведения:

$$\text{а) } [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}); \quad \text{б) } [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{0},$$

$$\text{в) } \mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} + \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]], \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$