II тур Всероссийской студенческой олимпиады по математике.
Открытая Олимпиада г. Рязани 26.04.2014 г.

1 курс.

1. Вычислить определитель n-го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложить определитель по последней строке, получить сумму двух определителей, один из которых равен Δ_{n-1}, другой определитель разложить по последнему столбцу, после чего решить рекуррентное уравнение $\Delta_n = \Delta_{n-1} - (-1)^n$. Ответ: $\Delta_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$.

2. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Найти A^n и B^n.

Ответ: $A^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, если n - нечетное, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, если n - четное.

$B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 2:3$, $AN : NC = 3:5$. В каком отношении делится каждый из отрезков BN и CM точкой K их пересечения?

Решение. Поскольку векторы **AB** и **AC** неколлиниарные, выберем их в качестве базиса на плоскости. С одной стороны, точка K принадлежит прямой, поэтому существует такое значение t, при котором $\mathbf{AK} = t \cdot \mathbf{AN} + (1-t) \cdot \mathbf{AB}$. С другой стороны, точка K принадлежит прямой CM, поэтому существует такое значение s, при котором $\mathbf{AK} = s \cdot \mathbf{AM} + (1-s) \cdot \mathbf{AC}$. Учитывая, что $\mathbf{AN} = \dfrac{3}{8}\mathbf{AC}$ и $\mathbf{AM} = \dfrac{2}{5}\mathbf{AB}$, получаем, что $\mathbf{AK} = t \cdot \dfrac{3}{8} \cdot \mathbf{AC} + (1-t) \cdot \mathbf{AB} = s \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \mathbf{AB} + (1-s) \cdot \mathbf{AC}$. В силу единственности разложения вектора **AK** по базису на плоскости, приравниваем соответствующие координаты:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{8}t = 1-s, \\ 1-t = \dfrac{2}{5}s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 8-8s, \\ 5-5t = 2s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{12}{17}, \\ s = \dfrac{25}{34}. \end{cases}$$

Таким образом, $\mathbf{AK} = \dfrac{12}{17}\mathbf{AN} + \dfrac{5}{17}\mathbf{AB}$, т. е. точка K делит отрезок BN в отношении $BK : KN = 12:5$. Также получаем, что $\mathbf{AK} = \dfrac{25}{34}\mathbf{AM} + \dfrac{9}{34}\mathbf{AC}$, т. е. точка K делит отрезок CM в отношении $CK : KM = 25:9$.

4. Доказать, что последовательность $\frac{1}{2}$, $2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$,… имеет предел, и найти этот предел.

Решение.

Если предел A существует, то он удовлетворяет отношению $A=1+1/A$, откуда $A=1+\sqrt{2}$. Обозначим n-й член рассматриваемой последовательности $1+\sqrt{2}+\delta_n$. Тогда

$$\delta_{n+1}=\frac{\delta_n\left(1-\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}+\delta_n}$$

и при $|\delta_n|<1$ имеем

$$|\delta_{n+1}|\le|\delta_n|\left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|\le\frac{1}{2}|\delta_n|.$$

Но $\delta_1=1-\sqrt{2}$, $|\delta_1|\le\frac{1}{2}$, так что $|\delta_n|\le\frac{1}{2^n}$ и $|\delta_n|\to 0$ при $n\to\infty$ откуда и вытекает, что предел действительно существует и равен $1+\sqrt{2}$.

5. Вычислить предел функции

$f(x)=\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)x^3$ при $x\to+\infty$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)=0$, то имеем неопределённость $(0\cdot\infty)$. При $x\to+\infty$

$$\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)\sim\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{1+x\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\sim\frac{1}{2x^3}.$$

Итак, главной частью функции $\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)$ является функция $\frac{1}{2x^3}$, а искомый предел равен $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)x^3=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^3}x^3=\frac{1}{2}$.

6. Дана функция $f(x)=x^2\sin^2 3x$. Вычислить производную $f^{(2014)}(x)$.

Решение. $f(x)=x^2\sin^2 3x=\frac{1}{2}x^2(1-\cos 6x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\cos 6x$. Очевидно, что $\left(\frac{x^2}{2}\right)^{(2014)}=0$. Производная n-го порядка функции $-\frac{x^2}{2}\cos 6x$ определяется по формуле $-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^2\right)^{(k)}(\cos 6x)^{(n-k)}$. Так как производные функции x^2 порядка выше 3 равны 0, то учитываются только первые 3 члена ряда. Тогда $f^{(n)}(x)=x^2(\cos 6x)^{(n)}+n\cdot 2x(\cos 6x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2(\cos 6x)^{(n-2)}$. Известно, что $(\cos 6x)^{(n)}=6^n\cos\left(6x+\frac{\pi n}{2}\right)$. Тогда

$$f^{(n)}(x)=x^2\cdot 6^n\cos\left(6x+\frac{\pi n}{2}\right)+n\cdot 2x\cdot 6^{n-1}\cos\left(6x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+n(n-1)6^{n-2}\cos\left(6x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right).$$

Для $f^{(2014)}(x)$ получим:

$$f^{(2014)}(x)=x^2\cdot 6^{2014}\cos(6x+1007\pi)+2014\cdot 2x\cdot 6^{2013}\cos\left(6x+1006\pi+\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+2014\cdot 2013\cdot 6^{2012}\cos(6x+1006\pi)=-x^2\cdot 6^{2014}\cos 6x-4028x\cdot 6^{2013}\sin 6x+2014\cdot 2013\cdot 6^{2012}\cos(6x).$$

7. Пусть $0<a<b$. Докажите, что

$$\int_a^b\left(x^2+1\right)e^{-x^2}dx\ge e^{-a^2}-e^{-b^2}.$$

Решение. Пусть $f(x)=\int_0^x\left(t^2+1\right)e^{-t^2}dt$ и $g(x)=-e^{-x^2}$; обе функции - возрастающие. Тогда, по теореме Лагранжа, существует $x\in(a,b)$, такой что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\left(x^2+1\right)e^{-x^2}}{2xe^{-x^2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ge\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=1.$$

Поэтому

$$\int_a^b\left(x^2+1\right)e^{-x^2}dx=f(b)-f(a)\ge g(b)-g(a)=e^{-a^2}-e^{-b^2}.$$

8. Доказать, что $\int_0^\infty\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}$ не зависит от величины α.

Решение. Имеем

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}=\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}+\int_1^\infty\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}=J_1+J_2.$$

Сделаем в первом интеграле замену $x=1/y$, тогда $J_1=\int_1^\infty\frac{dy}{\left(1+y^2\right)\left(1+y^{-\alpha}\right)}$

откуда получаем, что $J_1+J_2=\int_1^\infty\left(\frac{1}{1+x^\alpha}+\frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\right)\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^\infty\frac{dx}{1+x^2}$ не зависит от α.

9. Построить график функции $y(x)=\begin{cases}x(t)=\arccos(\cos t)\\ y(t)=\arcsin(\sin t)\end{cases}$

Решение

1. Область определения $x\in[0;\pi]$, множество значений $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

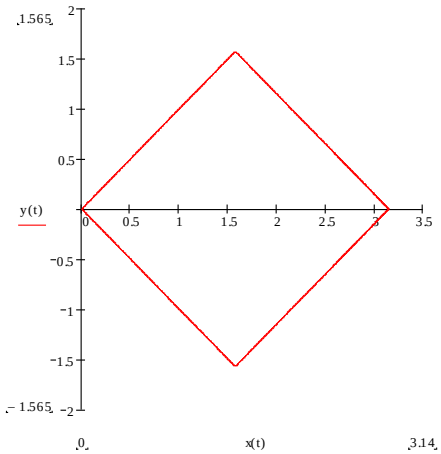
2. Так как функции $\sin(t),\cos(t)$ - периодические, достаточно рассмотреть изменение параметра в промежутке $t\in[0;2\pi]$

- $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\quad y(x)=\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=t\end{cases}\to x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to y(x)=x;$

- $t \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ $\quad y(x)=\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=\pi-t \end{cases} \rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \rightarrow y(x)=\pi-x;$

- $t \in \left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ $\quad y(x)=\begin{cases} x(t)=2\pi-t \\ y(t)=\pi-t \end{cases} \rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \rightarrow y(x)=x-\pi;$

- $t \in \left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ $\quad y(x)=\begin{cases} x(t)=t-2\pi \\ y(t)=-t+2\pi \end{cases} \rightarrow x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow y(x)=-x.$



10. Заданы координаты вершины пирамиды: $A(1,-2,1), B(2,-4,11), C(5,-7,3), D(2,-4,1)$.

Требуется:

1. Уравнения плоскостей (ABC), (BCD) и угол между этими плоскостями;
2. Угол между прямой (AB) и плоскостью (BCD)

Решение

1. Уравнения плоскостей найдем по формуле

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 1 & -2 & 10 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad 46x+38y+3z+27=0$$

$$(BCD): \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-11 \\ 3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 0 \quad x+y+z+2=0$$

Угол между этими плоскостями вычисляем по формуле

$$\varphi = \arccos \frac{46\cdot 1+38\cdot 1+3\cdot 0}{\sqrt{46^2+38^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} \cong 0{,}107$$

2. Угол между прямой (AB) и плоскостью (BCD) определим по формуле Прямая (AB) задается уравнением $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{10}$ с направляющим вектором $\mathbf{R}=(1,-2,10)$. Так как вектор нормали плоскости (BCD) $\mathbf{N}=(1,1,0)$, то искомый угол

$$\psi = \arcsin \frac{1\cdot 1+1\cdot(-2)+0\cdot 10}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+10^2}} = -0{,}069.$$