II тур Всероссийской студенческой олимпиады по математике.

Открытая Олимпиада г. Рязани 26.04.2014 г.

2-5 курсы.

1. Вычислить определитель n -го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложить определитель по последней строке, получить сумму двух определителей, один из которых равен Δ_{n-1} , другой определитель разложить по последнему столбцу, после чего решить рекуррентное уравнение $\Delta_n = \Delta_{n-1} - (-1)^n$. Ответ: $\Delta_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$.

2. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Найти A^n и B^n .

Ответ: $A^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, если n - нечетное, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, если n - четное.

$$B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM:MB = 2:3$, $AN:NC = 3:5$. В каком отношении делится каждый из отрезков BN и CM точкой K их пересечения?

Решение. Поскольку векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$ неколлинеарные, выберем их в качестве базиса на плоскости. С одной стороны, точка K принадлежит прямой, поэтому существует такое значение t , при котором $\mathbf{AK} = t \cdot \mathbf{AN} + (1-t) \cdot \mathbf{AB}$. С другой стороны, точка K принадлежит прямой CM , поэтому существует такое значение s , при котором $\mathbf{AK} = s \cdot \mathbf{AM} + (1-s) \cdot \mathbf{AC}$. Учитывая, что $\mathbf{AN} = \frac{3}{8} \mathbf{AC}$ и $\mathbf{AM} = \frac{2}{5} \mathbf{AB}$, получаем, что $\mathbf{AK} = t \cdot \frac{3}{8} \mathbf{AC} + (1-t) \cdot \mathbf{AB} = s \cdot \frac{2}{5} \mathbf{AB} + (1-s) \cdot \mathbf{AC}$. В силу единственности разложения вектора $\mathbf{AK}$ по базису на плоскости, приравниваем соответствующие координаты:

$$\begin{cases} \frac{3}{8}t = 1-s, \\ 1-t = \frac{2}{5}s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 8-8s, \\ 5-5t = 2s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{12}{17}, \\ s = \frac{25}{34}. \end{cases}$$

Таким образом, $\mathbf{AK} = \frac{12}{17} \mathbf{AN} + \frac{5}{17} \mathbf{AB}$, т. е. точка K делит отрезок BN в отношении

$BK:KN = 12:5$. Также получаем, что $\mathbf{AK} = \frac{25}{34} \mathbf{AM} + \frac{9}{34} \mathbf{AC}$, т. е. точка K делит отрезок CM в отношении $CK:KM = 25:9$.

4. Доказать, что последовательность $\frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$ имеет предел, и найти этот предел.

Решение.

Если предел A существует, то он удовлетворяет отношению $A = 1 + 1/A$, откуда $A = 1 + \sqrt{2}$. Обозначим n -й член рассматриваемой последовательности $1 + \sqrt{2} + \delta_n$. Тогда

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n(1 - \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2} + \delta_n}$$

и при $|\delta_n| < 1$ имеем

$$|\delta_{n+1}| \leq |\delta_n| \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{1}{2} |\delta_n|$$

Но $\delta_1 = 1 - \sqrt{2}$, $|\delta_1| \leq \frac{1}{2}$, так что $|\delta_n| \leq \frac{1}{2^n}$ и $|\delta_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ откуда и вытекает, что предел действительно существует и равен $1 + \sqrt{2}$.

5. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} y' = y^2 + z \\ z' = z^2 + y \end{cases}$

с начальным условием $y(0) = z(0) = 1$.

Решение.

Предположим $y(x) = z(x)$, получим уравнение $y' = y^2 + y$ с начальным условием $y(0) = 1$.

Решим его. $\frac{dy}{dx} = y(y+1)$; $\int \frac{dy}{y(y+1)} = x + C$; $\ln|y| - \ln|y+1| = x + C$; $\ln \left| \frac{y}{y+1} \right| = x + C$; $y = \frac{C_1 e^x}{1 + C_1 e^x}$.

Подставив $x=0$, получаем $y(0) = 1 = \frac{C_1}{1 + C_1}$, откуда $C_1 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $y(x) = \frac{\frac{1}{2} e^x}{1 + \frac{1}{2} e^x} = \frac{e^x}{2 - e^x}$.

Пара функций $y(x) = z(x) = \frac{e^x}{2 - e^x}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений и начальным условиям, поэтому по теореме единственности это и будет решением системы.

Ответ: $y(x) = z(x) = \frac{e^x}{2 - e^x}$.

6. Дана функция $f(x) = x^2 \sin^2 3x$. Вычислить производную $f^{(2014)}(x)$.

Решение. $f(x) = x^2 \sin^2 3x = \frac{1}{2} x^2 (1 - \cos 6x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \cos 6x$. Очевидно, что $\left(\frac{x^2}{2}\right)^{(2014)} = 0$.

Производная n -го порядка функции $-\frac{x^2}{2} \cos 6x$ определяется по формуле

$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} (\cos 6x)^{(n-k)}$. Так как производные функции x^2 порядка выше 3 равны 0, то

учитываются только первые 3 члена ряда. Тогда

$f^{(n)}(x) = x^2 (\cos 6x)^{(n)} + n \cdot 2x (\cos 6x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (\cos 6x)^{(n-2)}$. Известно, что

$(\cos 6x)^{(n)} = 6^n \cos\left(6x + \frac{\pi n}{2}\right)$. Тогда

$$f^{(n)}(x) = x^2 \cdot 6^n \cos\left(6x + \frac{\pi n}{2}\right) + n \cdot 2x \cdot 6^{n-1} \cos\left(6x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) + n(n-1)6^{n-2} \cos\left(6x + \frac{\pi(n-2)}{2}\right).$$

Для $f^{(2014)}(x)$ получим:

$$f^{(2014)}(x) = x^2 \cdot 6^{2014} \cos(6x + 1007\pi) + 2014 \cdot 2x \cdot 6^{2013} \cos\left(6x + 1006\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 2014 \cdot 2013 \cdot 6^{2012} \cos(6x + 1006\pi) = -x^2 \cdot 6^{2014} \cos 6x - 4028x \cdot 6^{2013} \sin 6x + 2014 \cdot 2013 \cdot 6^{2012} \cos(6x).$$

7. Пусть $0 < a < b$. Докажите, что

$$\int_a^b (x^2 + 1)e^{-x^2} dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

Решение. Пусть $f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)e^{-t^2} dt$ и $g(x) = -e^{-x^2}$; обе функции - возрастающие. Тогда, по теореме Лагранжа, существует $x \in (a, b)$, такой что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(x^2 + 1)e^{-x^2}}{2xe^{-x^2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1.$$

Поэтому $\int_a^b (x^2 + 1)e^{-x^2} dx = f(b) - f(a) \geq g(b) - g(a) = e^{-a^2} - e^{-b^2}$.

8. 1) Докажите, что $x^{-1} - 1 \geq |\ln x|$, $x \in (0, 1]$.

2) Используя п.1, докажите, что $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{x^{-1} + |\ln y| - 1} \leq 1$.

Решение

Первый способ.

Докажем неравенство $x^{-1} - 1 \geq |\ln x|$, $x \in (0, 1]$.

Очевидно тождество $(x^{-1} - 1)|_{x=1} = |\ln x|_{x=1} = 0$. Продифференцируем обе части неравенства.

$(x^{-1} - 1)' = -\frac{1}{x^2}$, $|\ln x|' = -\frac{1}{x}$. Отсюда получим $(x^{-1} - 1)' = -\frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{x} = |\ln x|'$, $x \in (0, 1]$. Тогда

$x^{-1} - 1 \geq |\ln x|$, $x \in (0, 1]$, что и требовалось доказать.

Тогда, $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{x^{-1} + |\ln y| - 1} \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{|\ln x| + |\ln y|} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{|\ln(xy)|}$.

Вводя замену $y = u/x$: $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{|\ln(xy)|} = \int_0^1 \left(\int_u^1 \frac{dx}{x} \right) \frac{du}{|\ln(u)|} = \int_0^1 |\ln(u)| \frac{du}{|\ln(u)|} = 1$

Второй способ.

Обозначим $s = x^{-1} - 1$ и $u = s - \ln y$, $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{x^{-1} + |\ln y| - 1} = \int_0^\infty \int_s^\infty \frac{e^{s-u}}{(s+1)^2 u} du ds = \int_0^\infty \left(\int_0^u \frac{e^s}{(s+1)^2} ds \right) \frac{e^{-u}}{u} du$.

Так как функция $\frac{e^s}{(s+1)^2}$ выпукла, то $\int_0^u \frac{e^s}{(s+1)^2} ds \leq \frac{u}{2} \left(\frac{e^u}{(u+1)^2} + 1 \right)$, поэтому

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{x^{-1} + |\ln y| - 1} \leq \int_0^\infty \frac{u}{2} \left(\frac{e^u}{(u+1)^2} + 1 \right) e^{-u} du = \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty \frac{du}{(u+1)^2} + \int_0^\infty e^{-u} du \right) = 1.$$

9. Найдите сумму сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$.

Решение.

Воспользуемся равенством $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$ при $xy \neq -1$.

Поскольку $\frac{1}{2n^2} = \frac{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}}{1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}$, то

$$\sum_{n=1}^k \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^k \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1}.$$

По определению суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{\pi}{4}$.

10. Студент Петров сдает экзамен по теории вероятностей доцентам Сидоровой и Ивановой. Вероятность сдать экзамен доцентам Сидоровой и Ивановой равны соответственно 0,7 и 0,5. Вероятность того, что студенту Петрову придется сдавать экзамен этим преподавателям равны. Петров экзамен не сдал. Найти вероятность, что он не сдал доценту Сидоровой.

Пусть A – событие сдачи экзамена, вероятности $P(B_1)$ и $P(B_2)$ – вероятности событий, заключающихся в том, что Петров будет сдавать экзамен каждому из доцентов – равны. $P(B_1) = P(B_2) = 0,5$. Вероятность сдачи экзамена $P(A) = 0,7 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,6$. Вероятность не сдать экзамен: $1 - P(A) = 0,4$. Тогда вероятность того, что студент не сдал экзамен доценту

Сидоровой равна $P(\bar{A} / B_1) = \frac{P(B_1)P_1(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,5 \cdot (1 - 0,7)}{0,4} = 0,375$.