УДК 537.812

А.И. Бакулин

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрены скалярные произведения электрических и магнитных составляющих суперпозиции вырожденных волн в прямоугольном и круглом волноводах, двух плоских волн в свободном пространстве. Формулируются условия выполнения ортогональности, делаются выводы.

Ключевые слова: *электромагнитное поле, ортогональность*

Введение. Понятие ортогональности играет чрезвычайно важную роль как в математике, так и в её приложениях к техническим дисциплинам. Формулируется оно, как известно, различным образом. Так, скалярные функции $f_i(x)$ и $f_j(x)$ ортогональны на $[a,\ b]$, если

$$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = 0, \quad i \neq j .$$

Для векторных функций $\dot{\vec{E}}_{i,j}$, $\dot{\vec{H}}_{i,j}$, соответствующих собственным волнам в волноводе, условие ортогональности записывается в следующем виде [1]:

$$\int_{S_\perp} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_i \vec{H}_j \right] - \left[\dot{\vec{E}}_j \vec{H}_i \right] \right\} d\vec{s} = 0 ,$$

где $S_\perp$ – поперечное сечение волновода: i, j – относятся к различным собственным волнам.

Наиболее простая формулировка ортогональности сводится к равенству нулю скалярного произведения векторных функций (векторов). Для компонент электромагнитного поля это означает выполнение равенства

$$\vec{E}\vec{H} = 0 , \tag{1}$$

которое имеет очевидный геометрический смысл.

Выполнение условия ортогональности (1) можно отнести к основным свойствам поля, как и его способность переносить энергию, т.к. только ортогональные $\vec{E}$ и $\vec{H}$ определяют величину вектора Пойнтинга, т.е. перенос энергии.

Несмотря на значимость равенства (1), в настоящее время практически нет работ, анализирующих выполнение этого соотношения. Более того, не сформулирован ответ на вопрос: удовлетворяет ли уравнениям Максвелла электромагнитное поле с неортогональными $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Цель настоящей работы состоит в анализе выполнения ортогональности (1) в частных случаях суперпозиции вырожденных волн в прямоугольном и круглом волноводах, а также плоских волн в свободном пространстве. Это позволило сформулировать некоторые выводы.

Векторное и скалярное произведения $\left[\vec{E}\vec{H}\right]$, $\vec{E}\vec{H}$. Сопоставим некоторые свойства этих произведений в предположении, что угол между $\vec{E}$ и $\vec{H}$ может отличаться от $\pi/2$. Прежде всего, оба произведения имеют одинаковую размерность Вт/м^2, т.е. энергетическое содержание, хотя в первом случае это вектор, а во втором – скаляр. Для значений углов между $\vec{E}$ и $\vec{H}$, равных $(\pi/2+\delta)$ и $(\pi/2-\delta)$, $\left[\vec{E}\vec{H}\right]$ не изменяется, а $\vec{E}\vec{H}$ изменяет знак.

Интегральные величины $\oint_S \left[\vec{E}\vec{H}\right] d\vec{s}$, $\int_S \left[\vec{E}\vec{H}\right] d\vec{s}$ имеют размерность мощности и ясное физическое толкование. Аналогичные интегралы от скалярного произведения не имеют, на наш взгляд, физического содержания.

Интегральные величины $\oint_S \vec{E}\vec{H}\, ds \Big/ S$, $\int_S \vec{E}\vec{H}\, ds \Big/ S$ есть среднее значение скалярного произведения на S. В предположении, что угол между $\vec{E}$ и $\vec{H}$ может равняться $(\pi/2 \pm \delta)$, среднее значение может равняться нулю и при отсутствии ортогональности в смысле (1).

Представим скалярное произведение $\vec{E}\vec{H}$, используя векторный потенциал $\vec{A}$, для чего рассмотрим выражение $div\left[\vec{A}\vec{E}\right]$. Используя известное тождество

$$div\left[\vec{A}\vec{E}\right] = \vec{E}\, rot\vec{A} - \vec{A}\, rot\vec{E}$$

и учитывая, что

$$rot\vec{A} = \mu_a \vec{H}, \ rot\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t ,$$

окончательно имеем:

$$\vec{E}\vec{H} = \frac{1}{\mu_a}\left(div\left[\vec{A}\vec{E}\right] - \vec{A}\, rot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right). \tag{2}$$

Для постоянного во времени поля

$$\vec{E}\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} div\left[\vec{A}\vec{E}\right].$$

Частные случаи скалярного произведения. Для более полного выяснения свойств скалярного произведения компонент поля рассмотрим несколько его частных случаев и для них проанализируем выполнение соотношения (1).

Рассмотрим сначала поле суммы двух вырожденных волн прямоугольного волновода (рисунок 1), т.е. H_{mn} и E_{mn} волн. Продольные компоненты запишем в следующем виде:

$$\begin{gathered} \dot{H}_z = H_{z0}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,e^{j(\omega t - \Gamma z)}, \\ m, n = 1, 2, 3... \\ \dot{E}_z = E_{z0}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,e^{j(\omega t - \Gamma z)}e^{j\varphi}, \end{gathered} \qquad (3)$$

где φ – произвольный фазовый сдвиг.

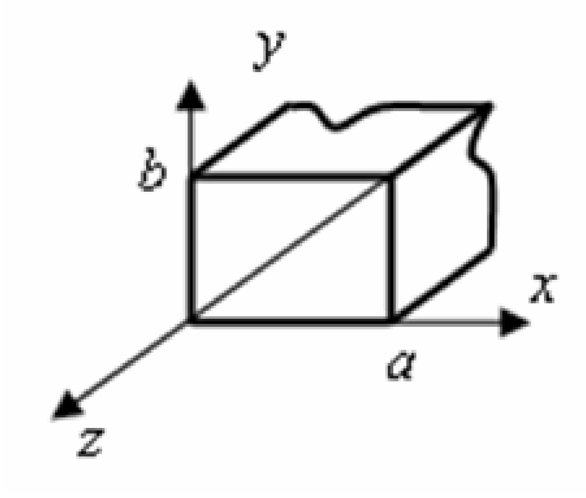

Рисунок 1

Поперечные компоненты $\vec{H}_\perp$ и $\vec{E}_\perp$ найдем через продольные, используя известные преобразования:

$$\begin{gathered} \vec{H}_\perp = -j\frac{\Gamma}{g^2}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial H_z}{\partial y}\vec{y}_0\right), \\ \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = Z_c^H; \\ \vec{E}_\perp = -j\frac{\Gamma}{g^2}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial E_z}{\partial y}\vec{y}_0\right), \\ \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = Z_c^E. \end{gathered} \qquad (4)$$

В формулах (3) и (4) Γ, g – продольное и поперечное волновые числа; Z_c^H, Z_c^E – характеристические сопротивления H и E волн.

С учетом ортогональности электрических и магнитных составляющих собственных волн скалярное произведение для суммарного поля

$$\begin{gathered} \vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma = E_x^H H_x^E + E_x^E H_x^H + E_y^H H_y^E + \\ + E_y^E H_y^H + H_z E_z. \end{gathered} \qquad (5)$$

Найдя из (3) и (4) поперечные компоненты поля (в действительной форме) и учитывая, что

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = g^2, \quad \frac{Z_c^H}{Z_c^E} - 1 = \frac{g^2}{\Gamma^2}, \qquad (5\text{-}1)$$

получим из (5) выражение для скалярного произведения компонент суммарного поля:

$$\vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma = \frac{1}{4}H_{z0}E_{z0}\sin\frac{2m\pi}{a}x\sin\frac{2n\pi}{b}y\cos\varphi. \qquad (6)$$

Последнее выражение показывает, что ортогональность в любой точке поперечного сечения волновода имеет место только при $\varphi = \pm\pi/2$. Кроме того, скалярное произведение (6) не зависит от продольной координаты z и времени t. Из этого выражения следует, что

$$\int_0^a\int_0^b \vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma\,dx\,dy \equiv 0.$$

Это можно рассматривать как ортогональность в среднем на поперечном сечении волновода.

Сдвиг фаз φ введен чисто формально, вне всякой связи с реальным процессом возбуждения. Особенностью этого процесса является невозможность возбудить порознь вырожденные волны, т.к. возбуждающее устройство как всякая неоднородность должно породить обе волны. В этой связи закономерно возникает вопрос: может ли фазовый сдвиг в реальных условиях принимать произвольные значения или он принимает значение $\pi/2$? Ответ на этот вопрос может дать, по всей видимости, только эксперимент.

Выражение (6) позволяет также сделать вывод, что поле с неортогональными $\vec{E}$ и $\vec{H}$ может удовлетворять уравнениям Максвелла, т.к. в рассмотренном примере суммарное поле удовлетворяет им при любых φ.

Проведем анализ условий ортогональности для вырожденных волн круглого волновода (рисунок 2).

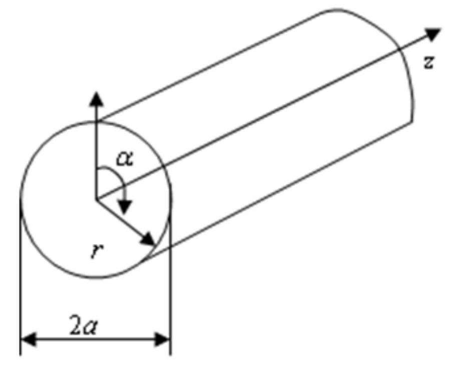

Рисунок 2

Как известно, в круглом волноводе вырожденными являются H_{0n} и E_{1n} волны. Запишем выражения для компонент поля этих волн (в действительной форме), используя зависимость между продольной и поперечными компонентами поля для круглого волновода и предполагая, как и раньше, сдвиг фаз φ между ними:

для H_{0n} волны

$$\begin{aligned} &H_z = H_{z0}\Im_0(gr)\cos(\omega t - \Gamma z),\\ &H_r = \frac{\Gamma}{g}H_{z0}\Im_0{}'(gr)\sin(\omega t - \Gamma z),\\ &H_\alpha = 0,\\ &E_\alpha = -H_r Z_c^H, \quad E_r = 0, \quad g = \mu_{0n}/a, \end{aligned} \tag{7}$$

для E_{1n} волны

$$\begin{aligned} &E_z = E_{z0}\Im_1(gr)\cos\alpha\cos(\omega t - \Gamma z + \varphi),\\ &E_r = \frac{\Gamma}{g}E_{z0}\Im_1{}'(gr)\cos\alpha\sin(\omega t - \Gamma z + \varphi),\\ &E_\alpha = -E_{z0}\frac{1}{r}\frac{\Gamma}{g^2}\Im_1(gr)\sin\alpha\sin(\omega t - \Gamma z + \varphi),\\ &H_\alpha = \frac{E_r}{Z_c^E}, \quad H_r = -\frac{E_\alpha}{Z_c^E}, \quad g = \beta_{1n}/a, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\Im_0$, $\Im_1$ – функции Бесселя; α – полярная координата поперечного сечения волновода; β_{1n}, μ_{0n} – корни функций Бесселя и их производных.

Скалярное произведение электрической и магнитной составляющих суммарного поля с учетом выполнения соотношений

$$\vec{E}_{0n}\vec{H}_{0n} = 0, \; \vec{E}_{1n}\vec{H}_{1n} = 0$$

запишется:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma &= \vec{E}_{0n}\vec{H}_{1n} + \vec{E}_{1n}\vec{H}_{0n} = \\ &= E_\alpha^H H_\alpha^E + E_r^E H_r^H + E_z H_z. \end{aligned} \tag{9}$$

С учетом (7) и (8) скалярное произведение (9) преобразуется к виду:

$$\vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma = E_{z0}H_{z0}\Im_1(gr)\times$$
$$\times\cos\alpha[\;\Im_1{}'(gr)\sin(\omega t - \Gamma z)\sin(\omega t - \Gamma z + \varphi) +$$
$$+\Im_0(gr)\cos(\omega t - \Gamma z)\cos(\omega t - \Gamma z + \varphi)].$$

Последнее выражение получено с учетом второго соотношения в (5-1) и известного равенства из теории Бесселевых функций:

$$\Im_0{}'(x) = -\Im_1(x).$$

После элементарных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} &\vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma = \frac{1}{2}E_{z0}H_{z0}\Im_1(gr)\times\\ &\times\cos\alpha\Big[\Big(\Im_0(gr) + \Im_1{}'(gr)\Big)\cos\varphi +\\ &+\Big(\Im_0(gr) - \Im_1{}'(gr)\Big)\cos(2(\omega t - \Gamma z) + \varphi)\Big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Сравнивая скалярные произведения (6) и (10), видим их существенное отличие. В случае круглого волновода выражение (10) не обращается в ноль ни при каких значениях фазового сдвига φ, Кроме того, в отличие от (6) оно зависит от времени и продольной координаты z и при $\varphi = \pm\pi/2$ упрощается:

$$\vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma\Big|_{\pi/2} = \mp\frac{1}{2}E_{Z0}H_{Z0}\Im_1(gr)\times$$
$$\times\cos\alpha\Big(\Im_0(gr) - \Im_1{}'(gr)\Big)\sin 2(\omega t - \Gamma Z).$$

Очевидно, что

$$\int_t^{t+T}\vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma\Big|_{\pi/2}dt = \int_Z^{Z+\lambda_в}\vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma\Big|_{\pi/2}dZ = 0,$$

где $T = 2\pi/\omega$, $\lambda_в = 2\pi/\Gamma$.

Если φ принимает произвольные значения, то

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}\vec{E}_\Sigma\vec{H}_\Sigma\, r\,dr\,d\alpha \equiv 0,$$

то есть, как и в случае прямоугольного волновода, суммарное поле имеет ортогональные в среднем компоненты на поперечном сечении волновода.

Сопоставляя условия ортогональности для прямоугольного и круглого волноводов, видим, что в обоих случаях сдвиг фаз φ существенно влияет на условие ортогональности.

В круглом волноводе в отличие от прямоугольного может быть только ортогональность в среднем. Очевидно, что это отличие вызвано различием граничных поверхностей.

Рассмотрим выполнение условия ортогональности при сложении двух плоских волн в свободном пространстве без потерь. Как известно, если волны сонаправлены, сложение дает плоскую волну с линейной или эллиптической поляризацией, у которой $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны. При наличии в среде потерь ортогональность у эллиптически поляризованной волны отсутствует [2]. Пусть волновые векторы этих волн в соответствии с рисунка 3 задаются выражениями:

$$\vec{K}_1 = K\left(\cos\frac{\alpha}{2}\vec{x}_0 - \sin\frac{\alpha}{2}\vec{y}_0\right),$$

$$\vec{K}_2 = K\left(\cos\frac{\alpha}{2}\vec{x}_0 + \sin\frac{\alpha}{2}\vec{y}_0\right),$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad 0 \le \alpha \le \pi.$$

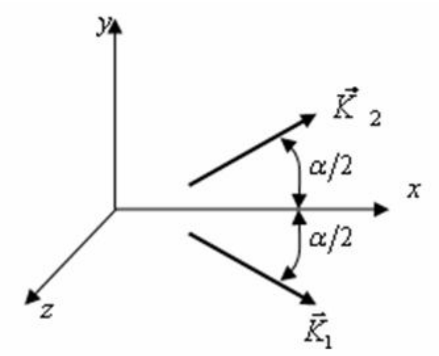

Рисунок 3

Вычисления показывают, что при совпадающих поляризациях волн, когда векторы $\vec{E}$ либо лежат в плоскости XOY, либо ортогональны ей, $\vec{E}_\Sigma \vec{H}_\Sigma = 0$ при любых α и сдвигах фаз φ между ними.

При взаимно ортогональных поляризациях, например, $\vec{E}_1$ лежит в плоскости XOY, а $\vec{E}_2$ перпендикулярен к ней, вычисление скалярного произведения дает следующий результат:

$$\vec{E}_\Sigma \vec{H}_\Sigma = \frac{E_{10}E_{20}}{z_c} \times \times \sin^2\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(2\omega t - 2Kx\cos\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) + + \cos\left(2Ky\sin\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)\right], \quad (11)$$

где E_{10}, E_{20} – амплитуды электрических составляющих волн.

Из (11) следует, что скалярное произведение тождественно равно нулю только при $\alpha = 0$, т.е. когда волны сонаправлены.

Очевидны следующие равенства, вытекающие из (11) при $\alpha > 0$:

$$\int_x^{x+\Delta x}\int_y^{y+\Delta y} \vec{E}_\Sigma \vec{H}_\Sigma dx dy = 0,$$

$$\int_t^{t+T/2}\int_y^{y+\Delta y} \vec{E}_\Sigma \vec{H}_\Sigma dt dy = 0, \quad (12)$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\cos{\alpha/2}}, \quad \Delta y = \frac{\lambda}{2\sin{\alpha/2}},$$

которые свидетельствуют об ортогональности в среднем. В отличие от волновода сдвиг фаз φ между волнами, как это следует из (11), не влияет на ортогональность.

Заключение. Основываясь на проведённом анализе, можно сделать следующие выводы.

1. Наряду с ортогональностью в смысле (1), целесообразно введение понятия ортогональности в среднем.

2. В рамках рассмотренных примеров электромагнитное поле, не ортогональное в смысле (1), обладает ортогональностью в среднем.

3. Вид ортогональности в среднем зависит как от наличия или отсутствия граничных поверхностей, так и от их геометрии.

4. В рассмотренных примерах составляющие поля ортогональны в среднем; вопрос о том, является ли ортогональность в среднем или в смысле (1) общим свойством поля заданных источников в отсутствие потерь, остаётся открытым.

Библиографический список

1. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.

2. *Вольман В.И., Пименов Ю.В.* Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 487 с.