

ПЕРЕДАЧА И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 681.518.3

Б.А. Алпатов, О.Е. Балашов**ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ОБЪЕКТА В СИСТЕМАХ
АВТОМАТИЧЕСКОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ОБЪЕКТОВ**

Предложен способ измерения виртуальной (относительной) скорости объектов, движущихся в пространстве равномерно по прямолинейной траектории, в системах автоматического сопровождения объектов по данным видеонаблюдения при отсутствии информации о дальности. Проведены экспериментальные исследования точности измерения скорости объектов.

Ключевые слова: скорость объекта, система сопровождение объектов.

Введение. Многие современные летательные аппараты, наземные транспортные средства оснащаются бортовыми оптико-механическими системами (ОМС) автоматического сопровождения объектов по данным видеонаблюдения. ОМС могут применяться для решения различных задач, например навигация, круглосуточное пилотирование летательных аппаратов, поиск, обнаружение и сопровождение наземных, надводных, воздушных подвижных и неподвижных объектов, мониторинг дорожной обстановки, оценка состояния техногенных объектов и т.п. Основными целями систем автоматического сопровождения объекта являются постоянное измерение угловых координат объекта в системе координат, связанной с носителем ОМС, по последовательности видеок кадров и совмещение оптической оси видеодатчика ОМС с направлением на объект [1,2]. Для качественного решения поставленной задачи необходимо учитывать, что при поиске сопровождаемого объекта на очередном видеок кадре может быть выделено несколько близко расположенных друг к другу объектов, имеющих схожие яркость, размеры и форму. В этих случаях требуется производить выбор сопровождаемого объекта среди выделенных сегментов. Данная ситуация может возникнуть, например, при сопровождении автомобиля, движущегося по шоссе и совершающего обгон такого же автомобиля. При этом один автомобиль может полностью или частично заслониться другим. В результате после обгона, когда на изображении будут два одинаковых автомобиля, исключительно по изображениям (без информа-

ции о дальности до объектов) трудно ответить на вопрос, где сопровождаемый автомобиль. В подобных случаях для автоматического различения схожих объектов следует использовать информацию о параметрах траекторий объектов (автомобили в примере имеют разную скорость).

Цель работы. Разработка алгоритма измерения по данным видеонаблюдения виртуальной (относительной) скорости объекта, движущегося в пространстве равномерно по прямолинейной траектории, при отсутствии информации о дальности. Проведение экспериментальных исследований точности измерения скоростей объектов.

Алгоритм измерения скорости объекта. В зависимости от области применения в ОМС используются различные алгоритмы обнаружения, выделения и измерения координат объектов. Также ОМС могут строиться по различным схемам с использованием одно-, двух- и трехосных поворотных платформ. В данной работе будем считать, что сопровождение объекта осуществляется ОМС с двухосным карданным подвесом, причем внешняя рамка кардана изменяет направление оптической оси видеодатчика по углу азимута, а внутренняя – по углу места.

В ОМС угловые координаты сопровождаемого объекта θ (азимут), φ (угол места) определяются в системе сопровождения как $\theta = \theta_d + \varepsilon_\theta + \zeta_\theta$, $\varphi = \varphi_d + \varepsilon_\varphi + \zeta_\varphi$, где θ_d – измеренное датчиком значение угла θ поворота рамки двухосного карданного подвеса, φ_d – измеренное значение угла φ поворота рамки подвеса, ε_θ , ε_φ – ошибки сопровождения объекта

системой, зависящие от его положения в текущем кадре изображения и текущих углов поворота рамок подвеса, ζ_{θ}^{θ} , $\zeta_{\varphi}^{\varphi}$ – ошибки измерений угловых координат объекта. Значения θ , φ без учета ошибок измерений можно определить по выражениям, приведенным в литературе [3, 4].

В предлагаемом алгоритме измерение скорости объекта осуществляется исключительно по данным об угловых координатах объекта относительно ОМС (информация о дальности до сопровождаемого объекта отсутствует). При этом предполагается, что объект движется в пространстве по прямолинейной траектории с постоянной скоростью (равномерно). В противном случае траектория объекта может быть аппроксимирована отрезками, на которых сохраняется характер прямолинейного равномерного движения.

Рассмотрим модель движения объекта в трехмерном пространстве с измерением без ошибок его угловых координат (азимута θ и угла места φ) относительно ОМС. При наличии информации только об угловых координатах объекта (информация о дальности отсутствует) можно говорить о бесконечном множестве возможных параллельных траекторий объекта. Все эти траектории в моменты измерений $\bar{n} = nT$, $n = 1, 2, \dots$ [n – номер измерения, T – интервал времени между двумя соседними измерениями ($T = \text{const}$)] имеют одинаковые значения измеряемых угловых координат.

Из множества возможных траекторий объекта, задавшись некоторым условием, выберем одну (изображена на рисунке 1). Далее будем считать, что объект движется по этой траектории, называемой условной траекторией (в дальнейшем просто траекторией). Проекция траектории на горизонтальную плоскость OXY проходит на расстоянии R от начала неподвижной системы координат $OXYZ$, привязанной к строительным осям носителя ОМС, причем ось OY совпадает с продольной строительной осью носителя (рисунок 1).

Предлагаемый алгоритм измерения скорости объекта является развитием алгоритма, описанного в [5]. В данной работе иначе производятся выбор условной траектории и вычисление ее параметров. Это позволяет для некоторых случаев расположения объекта и ОМС повысить точность измеряемых параметров за счет избавления от деления на величины, близкие к нулю.

Пусть к текущему моменту времени имеется информация об измеренных значениях угловых

координат объекта θ_{n-i} , φ_{n-i} , $i = \overline{0, N}$, где N – четное число. Будем считать, что углы азимута отсчитываются от оси OY против часовой стрелки.

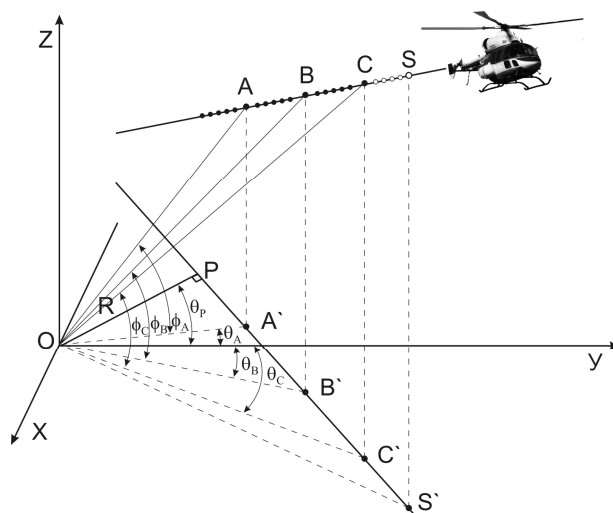


Рисунок 1 – Условная траектория объекта

На рисунке 1 показаны точки траектории A , B , C , равноудаленные одна от другой по времени на интервал $NT/2$. По пространственным координатам точек A , B , C можно определить текущую линейную скорость объекта.

Расстояния между точками траектории, соответствующими соседним измерениям угловых координат объекта, изменяются в соответствии с законом равномерного движения. На рисунке 1 отмечены угловые координаты по азимуту θ_A , θ_B , θ_C . Точка P – ближайшая от начала системы координат точка проекции траектории объекта на горизонтальную плоскость (рисунок 1). Точки A' , B' , C' проекции траектории являются проекциями точек A , B , C и лежат на одной прямой.

Будем считать, что в текущий момент времени nT объект находится в точке C с координатами (X_0^n, Y_0^n) и движется со скоростью $v^n = v = \text{const}$ (координатами точки C можно задавать условную траекторию).

Рассмотрим сначала измерение проекций скорости объекта v на оси OX , OY (соответственно v_X , v_Y). Координаты объекта в предыдущие моменты времени в горизонтальной плоскости определяются как

$$\begin{aligned} X(nT - iT) &= X_0^n - v_X iT, \quad i = \overline{0, N}; \\ Y(nT - iT) &= Y_0^n - v_Y iT, \quad i = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (1)$$

где T – период поступления видеок кадров. Используя (1), координаты X , Y точек A , B , C можно выразить в виде:

$$\begin{aligned} X_C &= X_0^n, & Y_C &= Y_0^n; \\ X_B &= X_0^n - V_X, & Y_B &= Y_0^n - V_Y; \\ X_A &= X_0^n - 2V_X, & Y_A &= Y_0^n - 2V_Y, \end{aligned} \quad (2)$$

где $V_X = v_X \frac{N}{2} T$, $V_Y = v_Y \frac{N}{2} T$. Соответственно углы азимута точек A , B , C вычисляются по соотношениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_C) &= -\frac{X_0^n}{Y_0^n}; \quad \operatorname{tg}(\theta_B) = -\frac{X_0^n - V_X}{Y_0^n - V_Y}; \\ \operatorname{tg}(\theta_A) &= -\frac{X_0^n - 2V_X}{Y_0^n - 2V_Y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выбор условной траектории объекта, осуществляемый из бесконечного множества параллельных прямых в пространстве траекторий с заданными угловыми координатами θ_A , θ_B , θ_C , φ_A , φ_B , φ_C , может производиться различными способами. В данной работе условная траектория выбирается путем задания координаты Y_C (для траектории объекта, показанной на рисунке 1, значение Y_C положительно). При сопровождении объекта удобно в начальный момент $Y_C = Y_0^n$ принять равным 1 или -1 в зависимости от расположения объекта относительно ОМС, а на следующих кадрах $Y_C = Y_0^{n+k} = Y_0^n + k v_Y$, где k – количество кадров между текущим моментом времени и кадром с номером n . В этом случае координата X_C будет равна:

$$X_C = -Y_C \operatorname{tg}(\theta_C). \quad (4)$$

Тогда, используя (4) и полагая, что значение Y_C задано, уравнения (3) можно преобразовать к следующей системе из двух уравнений с двумя неизвестными V_X , V_Y :

$$\begin{cases} Y_C (\operatorname{tg}(\theta_C) - \operatorname{tg}(\theta_B)) + V_X + V_Y \operatorname{tg}(\theta_C) = 0; \\ Y_C (\operatorname{tg}(\theta_C) - \operatorname{tg}(\theta_A)) + 2V_X + 2V_Y \operatorname{tg}(\theta_A) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы уравнений (5) можно представить в виде:

$$\begin{cases} V_X = Y_C (\operatorname{tg}(\theta_B) - \operatorname{tg}(\theta_C)) - V_Y \operatorname{tg}(\theta_B); \\ V_Y = \frac{Y_C (2\operatorname{tg}(\theta_B) - \operatorname{tg}(\theta_A) - \operatorname{tg}(\theta_C))}{2(\operatorname{tg}(\theta_B) - \operatorname{tg}(\theta_A))}. \end{cases} \quad (6)$$

Для вычисления скорости движения объекта в пространстве, кроме величин V_X , V_Y , необходимо вычислить вертикальную составляющую V_Z . Из рассмотрения рисунка 1 вытекают следующие выражения:

$$OA' = \frac{R}{\cos(\theta_P - \theta_A)}; \quad OB' = \frac{R}{\cos(\theta_P - \theta_B)}; \quad (7)$$

$$OC' = \frac{R}{\cos(\theta_P - \theta_C)}.$$

Угол θ_P между осью OY и отрезком OP с координатами (X_P, Y_P) (перпендикуляр к проекции условной траектории объекта на горизонтальную плоскость) равен:

$$\theta_P = \begin{cases} \operatorname{atg}\left(\frac{X_P}{Y_P}\right), & \text{если } X_P \leq 0; \\ \operatorname{atg}\left(\frac{X_P}{Y_P}\right), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Координаты точки P могут быть найдены путем решения системы двух уравнений

$$\begin{cases} X_P (X_C - X_A) + Y_P (Y_C - Y_A) = 0; \\ \frac{Y_C - Y_A}{X_C - X_A} X_P - Y_P + \left(Y_0^n - \frac{Y_C - Y_A}{X_C - X_A} X_0^n \right) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Первое уравнение является скалярным произведением вектора $\overline{A'C'}$, лежащего на проекции траектории, и перпендикулярного к нему вектора $\overline{OP}$. Второе уравнение является уравнением прямой, проходящей через точки C' и P . С учетом (2) выражение (9) можно привести к виду:

$$\begin{cases} X_P V_X + Y_P V_Y = 0; \\ Y_P - \frac{V_Y}{V_X} X_P - \left(Y_0^n - \frac{V_Y}{V_X} X_0^n \right) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решением (10) будут значения координат точки P . Расстояние R вычисляется по координатам точки P по выражению $R = \sqrt{X_P^2 + Y_P^2}$.

Скорость объекта вдоль оси OZ можно вычислить по координатам Z_A и Z_C , которые равны соответственно

$$\begin{aligned} Z_A &= OA' \cdot \operatorname{tg}(\varphi_A) = \frac{R \cdot \operatorname{tg}(\varphi_A)}{\cos(\theta_P - \theta_A)}; \\ Z_C &= OC' \cdot \operatorname{tg}(\varphi_C) = \frac{R \cdot \operatorname{tg}(\varphi_C)}{\cos(\theta_P - \theta_C)}. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом характера движения объекта для координат Z_A и Z_C на n -м кадре справедливы соотношения

$$Z_C = Z_0^n; \quad Z_A = Z_0^n - 2V_Z, \quad (12)$$

где $V_Z = v_Z \frac{N}{2} T$, v_Z – проекция скорости движения объекта на координатную ось OZ .

Из (11), (12) можно вычислить V_Z по выражению

$$V_Z = \frac{R}{2} \left(\frac{\operatorname{tg}(\varphi_C)}{\cos(\theta_P - \theta_C)} - \frac{\operatorname{tg}(\varphi_A)}{\cos(\theta_P - \theta_A)} \right). \quad (13)$$

По найденным проекциям V_X , V_Y , V_Z скорость объекта вычисляется как

$$v = \frac{2}{NT} \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}. \quad (14)$$

Рассчитанная скорость объекта может быть использована как признак в алгоритме сопровождения объекта на этапе принятия решения о его обнаружении. Также информация о скорости движения сопровождаемого объекта позволяет использовать упреждающее управление приводами карданного подвеса для уменьшения ошибок сопровождения [6, 7]. Для этого следует вычислять прогнозируемые значения углов азимута и места сопровождаемого объекта, что легко реализуется в случае использования виртуальной пространственной траектории его движения.

Обозначим точкой S на пространственной условной траектории объекта прогнозируемое на k кадров положение объекта, а S' – проекцию точки S на горизонтальную плоскость. Координаты точки S могут быть вычислены по выражениям

$$\begin{aligned} X_{PP}(nT + kT) &= X_0^n + v_X kT = X_0^n + \frac{2V_X}{N} kT; \\ Y_{PP}(nT + kT) &= Y_0^n + v_Y kT = Y_0^n + \frac{2V_Y}{N} kT; \\ Z_{PP}(nT + kT) &= Z_0^n + v_Z kT = Z_0^n + \frac{2V_Z}{N} kT. \end{aligned} \quad (15)$$

Прогнозируемые угловые координаты объекта на $n+k$ кадре могут быть вычислены как

$$\begin{aligned} \theta_{n+k}^{PP} &= \operatorname{atg} \frac{X_0^n + v_X kT}{Y_0^n + v_Y kT}, \\ \varphi_{n+k}^{PP} &= \operatorname{atg} \frac{Z_0^n + v_Z kT}{\sqrt{(X_0^n + v_X kT)^2 + (Y_0^n + v_Y kT)^2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где X_0^n , Y_0^n , Z_0^n , v_X^n , v_Y^n , v_Z^n – значения, вычисленные по данным, полученным на момент поступления последнего видеокadra. Для повышения точности вычисления φ_{n+k}^{PP} (значение в знаменателе может быть близко к нулю в зависимости от расположения объекта и ОМС) следует использовать следующее выражение:

$$\operatorname{tg} \varphi_{n+k}^{PP} = \frac{Z_{PP}(nT + kT)}{OS'_{PP}(nT + kT)}. \quad (17)$$

Длина отрезка OS' вычисляется как

$$(OS')_{PP}(nT + kT) = \frac{R}{\cos(\theta_P - \theta_{n+k}^{PP})}. \quad (18)$$

Из (11), (13), (17), (18) можно получить выражение для вычисления угла места φ_{n+k}^{PP} в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+k}^{PP} &= \operatorname{atg} \left(\frac{\operatorname{tg}(\varphi_C)}{\cos(\theta_P - \theta_C)} + \right. \\ &+ \left. \frac{k}{2N} \left(\frac{\operatorname{tg}(\varphi_C)}{\cos(\theta_P - \theta_C)} - \frac{\operatorname{tg}(\varphi_A)}{\cos(\theta_P - \theta_A)} \right) \right) \times \\ &\times \cos(\theta_P - \theta_{n+k}^{PP}). \end{aligned} \quad (19)$$

Исследование алгоритма измерения скорости объекта. При моделировании работы предлагаемого алгоритма будем считать, что объект движется в пространстве по кусочно-линейной траектории с постоянной скоростью на прямолинейных участках траектории. Движение объекта на каждом прямолинейном участке траектории описывается уравнениями:

$$X(n) = X_0 + nv_X; \quad Y(n) = Y_0 + nv_Y;$$

$$Z(n) = Z_0 + nv_Z;$$

$$v_Z = v \sin(\beta_0); \quad v_X = v \cos(\beta_0) \cos(\alpha_0);$$

$$v_Y = v \cos(\beta_0) \sin(\alpha_0),$$

где X_0 , Y_0 , Z_0 – координаты объекта в начале участка траектории; v – скорость объекта на участке траектории; β_0 – угол между траекторией объекта и горизонтальной плоскостью; α_0 – угол между проекцией вектора скорости на горизонтальную плоскость и положительным направлением оси OX ; v_X , v_Y , v_Z – проекции скорости объекта v на координатные оси OX , OY , OZ ; n – номер кадра (отсчета), $T=0,04$ с. При моделировании принято $N=50$.

Пусть на первом участке движения объект имеет следующие параметры: $X_0 = 3000$ м, $Y_0 = 50$ м, $Z_0 = 500$ м, $v = 50$ м/с (180 км/ч), $\beta_0 = 0^\circ$, $\alpha_0 = 160^\circ$. Движение по первому участку происходит 10 минут, затем объект совершает маневр и параметры траектории меняются на $v = 80$ м/с (288 км/ч), $\beta_0 = 5^\circ$, $\alpha_0 = 30^\circ$. Начальные координаты второго участка будем считать равными координатам объекта в конце движения по первому участку. Движение по второму участку продолжается 7 минут.

На рисунке 2 показана траектория объекта в пространстве.

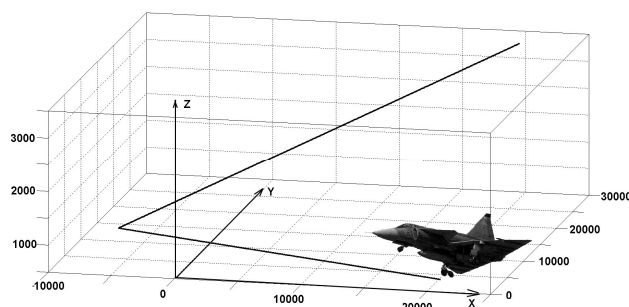


Рисунок 2 – Траектория объекта

В данном примере ошибки измерений угловых направлений на объект моделируются аддитивным шумом с нормальным законом распределения, нулевым математическим ожиданием ($m=0$) и СКО $\sigma=0.001^\circ$, который вносит погрешность в измерения, соизмеримую с ошибками дискретизации шестнадцатиразрядных датчиков углов поворота, ошибками дискретизации изображений (ошибками измерения координат объекта).

На рисунке 3 показаны угловые траектории объекта по углу азимута (рисунок 3, а) и углу места (рисунок 3, б). По оси абсцисс отложено время в секундах.

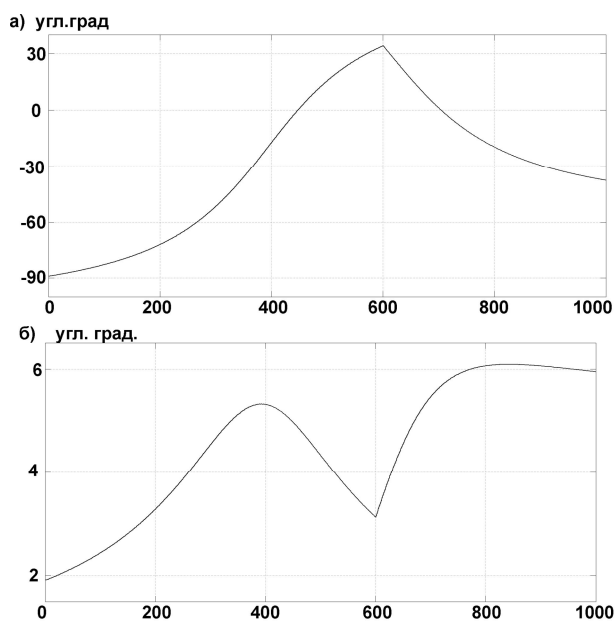


Рисунок 3 – График направления на объект по азимуту

При заданных параметрах траектории в данном эксперименте объект имеет следующие проекции скорости: $v_x = -46,98$ м/с, $v_y = 17,11$ м/с, $v_z = 0$ м/с до изменения направления движения и $v_x = 69,02$ м/с, $v_y = 39,85$ м/с, $v_z = 6,97$ м/с после.

Для упрощения расчетов при выборе условной траектории положим, что $Y_C = 1$ м. На рисунке 4 приведены результаты вычислений. Кривая 1 показывает оценку проекции скорости объекта на ось OX , кривая 2 – на ось OY , кривая 3 – ось OZ . По оси абсцисс отложено время в секундах. Измерение скорости движения объекта начинается с момента накопления $N+1$ измерений угловых координат объекта. Рассчитанные значения проекций скоростей объекта отличаются от реальных значений на некоторую постоянную величину (при отсутствии ошибок измерений). Это объясняется тем, что истинная траектория объекта неизвестна и для расчетов выбрана условная траектория.

При изменении направления или скорости движения объекта резко изменяются рассчитываемые оценки проекций скорости объекта. Данный факт можно использовать для обнаружения маневра объекта, после которого необходимо произвести сброс накопленной информации и заново начать оценку скорости объекта.

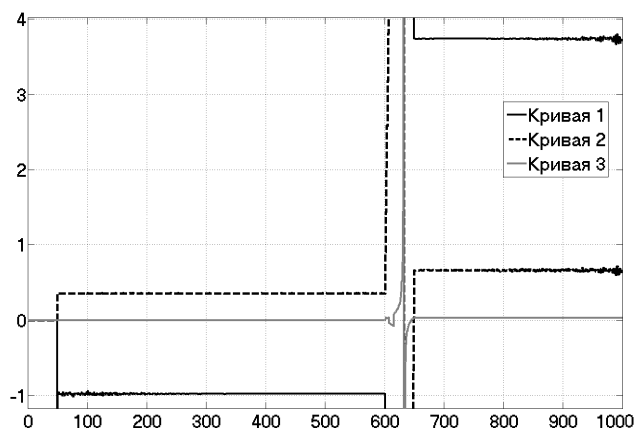


Рисунок 4 – Графики проекций скорости объекта

Колебательный характер оценок проекций скорости на концах кривых объясняется тем, что при движении в начале и конце траектории (рисунок 4) угловая скорость объекта невелика и относительная погрешность измерения угловых перемещений за $N+1$ отсчет выше по сравнению с моментом, соответствующим движению по средней части траектории. Повысить точность измерений скорости объекта в данных условиях (при больших абсолютных значениях азимута) можно путем применения временной фильтрации проекций скорости объекта, увеличением длины предыстории N . В случае увеличения погрешности измерения угловых координат объекта до $0,05$ угловых градусов (во многих современных ОМС $0,05$ угловых градусов цена одного пикселя обрабатываемого изображения) оценка скорости объекта для рассматриваемого примера увеличится на 4 %. Без учета погрешности измерения угловых координат объекта оценка скорости производится безошибочно на всем интервале наблюдения (начальный момент и после маневра, когда не накоплена информация, не учитываются).

Заключение. При решении задач автоматического сопровождения объектов в сложных условиях наблюдения часто возникают ситуации, когда анализ траектории объекта способен существенно повысить шансы правильного обнаружения сопровождаемого объекта. Такие ситуации возможны, например, при наблюдении объектов с пересекающимися траекториями.

Из анализа (6) следует, что точность измерения скорости объекта зависит от разности тан-

генсов углов (при близких углах получим деление на малые величины, что увеличит ошибки измерения). Подобные ситуации характерны для случаев, когда объект находится далеко или имеет малую скорость относительно ОМС и изменение угловой координаты объекта по азимуту за $N + 1$ кадр мало. В данном случае можно анализировать скорость изменения азимута объекта для выбора длины предыстории. Другим способом повышения точности измерений может служить иной подход к выбору условной траектории, например, можно задаться следующими условиями: $Z_C=1$, $V_X=1$ или $V_X/V_Y=1$. Различные варианты выбора приводят к изменению выражений для вычислений скорости объекта. В ходе работы ОМС по мере необходимости следует переключаться от одних выражений вычисления скорости объекта на другие. Правильное решение данной задачи позволит сохранить точность измерения скорости объекта в различных ситуациях.

В реальных ОМС необходимо учитывать ситуации, когда объект движется по направлению к ОМС или в противоположном направлении (угол азимута не меняется). Разработанный алгоритм не ориентирован на работу в таких ситуациях. В подобных случаях оценка скорости может производиться по изменению угловой координаты объекта только по углу места (в статье не рассматривается). Другой, более редкий, случай – когда объект движется строго на ОМС или в противоположную сторону (углы азимута и места не меняются). Обнаружить описанные случаи можно путем вычисления производных угловых координат объекта.

Описанный алгоритм по значениям проекций скорости объекта позволяет обнаруживать моменты совершения маневров, изменения характера движения (может измениться направление движения, скорость объекта или все сразу). Информация о маневре объекта также может быть полезна при вычислении управления приводами карданного подвеса ОМС [3].

Описанный алгоритм вычисляет условную скорость объекта, пропорциональную с постоян-

ным коэффициентом реальной скорости объекта. При наличии информации хотя бы на одном кадре о реальной скорости объекта или дальности до объекта предлагаемый алгоритм может рассчитывать оценку реальной скорости объекта на протяжении всего сопровождения.

Исследования выполнены при финансовом содействии гранта Президента РФ МК-433.2014.10.

Библиографический список

1. Алпатов Б.А., Балашов О.Е., Степашкин А.И. Управление приводами гиросtabilизированной платформы в видеокомпьютерной системе сопровождения объектов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2003. № 12. С. 38–41.
2. Алпатов Б.А., Балашов О.Е., Степашкин А.И. Формирование управления приводами трехосного карданного подвеса в системе сопровождения объектов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2006. Т. 49. № 5. С. 24–28.
3. Алпатов Б.А., Степашкин А.И., Балашов О.Е. Способ формирования управления приводами исполнительного устройства в оптико-электронных системах сопровождения и устройство, реализующее оптико-электронную систему сопровождения. Патент на изобретение RUS 2310888 10.05.2006.
4. Балашов О.Е., Степашкин А.И. Нашлемная система обзора и целеуказания // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2011. № 38. С. 40–44.
5. Алпатов Б.А., Балашов О.Е., Степашкин А.И. Алгоритм прогнозирования угловых координат объекта, движущегося прямолинейно равноускоренно // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2012. № 41. С. 17–21.
6. Алпатов Б.А., Балашов О.Е., Степашкин А.И. Повышение точности сопровождения объектов бортовой оптико-механической системой с двухосным карданным подвесом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 9. С. 20–23.
7. Алпатов Б.А., Балашов О.Е., Степашкин А.И. Прогнозирование угловых координат движущихся объектов в бортовых оптико-механических системах // Информационно-управляющие системы. 2011. № 5. С. 2 – 7.

УДК 621.319

В.К. Клочко, Ч.Т. Нгуен

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ФОРМИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В БОРТОВОЙ ДОПЛЕРОВСКОЙ РЛС

Представлены алгоритмы формирования трехмерных изображений земной поверхности в бортовой доплеровской РЛС маловысотного полета, основанные на многоканальной обработке и получении оценок пространственных координат элементов отражения. Проведен сравнительный анализ работы алгоритмов методом математического моделирования. Показано, что наибольшей точностью обладает алгоритм, основанный на фазовом методе оценивания координат.

Ключевые слова: радиолокация, трехмерное изображение, доплеровская фильтрация, оценки координат, маловысотный полет.

Введение. Последние годы наблюдается повышенный интерес к бортовым вертолетным и самолетным радиолокационным системам наблюдения [1, 2]. Ставятся задачи расширения их функциональных возможностей и повышения эффективности работы. В том числе – при наблюдении за земной поверхностью и объектами на поверхности при маловысотном полете. Появился интерес и к трехмерному радиовидению – формированию трехмерного радиолокационного изображения (РЛИ) земной поверхности, позволяющего повысить безопасность маловысотных полетов над сложным рельефом местности. Например, в работе [3] предлагаются методы формирования трехмерных РЛИ поверхности, основанные на оптимальном восстановлении полей отражения и определении координат в многоканальных системах узкополосной доплеровской фильтрации. В работе [4] предлагается метод формирования трехмерного РЛИ на основе трехмерного преобразования Фурье комплексных огибающих отраженного сигнала. Методам формирования трехмерных РЛИ посвящены и последние работы авторов [5 - 7].

Среди существующих направлений в радиовидении для маловысотного полета заслуживает внимания режим доплеровского “обужения” луча (ДОЛ), использующий узкополосную доплеровскую фильтрацию. Обычно он используется для получения двумерных изображений земной поверхности в координатах радиальная дальность – доплеровская частота при переднебоковом обзоре [8]. В данной работе развиваются подходы, позволяющие получать в режиме ДОЛ

трехмерные РЛИ земной поверхности, основанные на многоканальной обработке и получении оценок пространственных координат элементов отражения. Представляет научный и практический интерес проведение сравнительного анализа предлагаемых алгоритмов.

Цель работы – разработка алгоритмов формирования трехмерных РЛИ земной поверхности в бортовой доплеровской РЛС маловысотного полета, работающей в режиме ДОЛ, и сравнительный анализ работы алгоритмов методом математического моделирования.

Физическая постановка задачи. Бортовая импульсная доплеровская РЛС, работающая в миллиметровом или сантиметровом диапазоне длин волн с высокочастотным повторением импульсов в пачке зондирующих сигналов, ведет наблюдение за земной поверхностью и высотными объектами на поверхности в режиме ДОЛ при маловысотном полете. Узкий луч РЛС с шириной круговой диаграммы направленности антенны (ДНА) $1^0 - 3^0$ (на уровне 0,5 мощности) сканирует контролируемый участок пространства под малым углом к плоскости земной поверхности. При каждом положении луча сферические поверхности уровней наклонной дальности пересекают земную поверхность, образуя элементы разрешения дальности в виде узких полос на земной поверхности в пределах видимости РЛС (по ширине ДНА). Полосы имеют разный уровень по высоте в зависимости от рельефа местности и наличия высотных объектов. За счет первичной обработки отраженных сигналов выделяются комплексные амплитуды от разных

элементов дальности, а за счет узкополосной доплеровской фильтрации – от элементов разрешения по доплеровской частоте. Таков традиционный подход к формированию двумерного РЛИ земной поверхности.

В работе ставится задача формирования трехмерного изображения земной поверхности в виде совокупности пространственных координат всех элементов отражения, разрешенных по дальности и доплеровской частоте. Такая совокупность при отображении на экране индикатора пилота летательного аппарата представляет срез земной поверхности в элементе разрешения дальности. На множестве элементов дальности формируется трехмерное изображение земной поверхности по ширине ДНА. При сканировании луча РЛС область обзора расширяется.

Математическая постановка задачи. Рассматривается антенная прямоугольная система координат o, x, y, z . Ось oz показывает максимум ДНА. Наблюдение ведется в антенных угловых координатах φ и θ , где φ – азимут, отсчитываемый в горизонтальной плоскости oxz от оси oz в положительном направлении против часовой стрелки; θ – угол места, отсчитываемый от плоскости oxz . Антенна в виде Q -элементной плоской антенной решетки (АР) работает на излучение и прием отраженных сигналов. Принимаемые антенной сигналы параллельно и независимо в q -х каналах ($q = \overline{1, Q}$, Q – число каналов) проходят тракт первичной обработки [8], включающий стробирование по дальности, фазовое детектирование, низкочастотную фильтрацию и аналого-цифровое преобразование (АЦП) с частотой дискретизации f_d . На входе алгоритмов дальнейшей обработки имеем последовательность комплексных сигналов $\dot{s}_{qi}(t_\mu)$ в i -х элементах дальности ($i = \overline{1, M}$) в μ -е моменты времени t ($\mu = \overline{1, N}$), где M и N – соответственно число элементов разрешения по дальности и объем выборки (количество зондирующих импульсов в пачке).

Временные последовательности $\dot{s}_{qi}(t_\mu)$, $\mu = \overline{1, N}$ в каждом i -м элементе разрешения дальности и q -м канале независимо подаются на алгоритмы дискретного (ДПФ) или быстрого (БПФ) преобразования Фурье, на выходе которых образуются частотные последовательности $\dot{s}_{qi}^*(f_j)$, $j = \overline{1, N}$ по ширине спектра $[f_1, f_N]$, где $f_1 = 0$, $f_N = f_d$.

При наблюдении земной поверхности в полосе $[f_1, f_N]$ выделяется узкая полоса n частот

$[f_{j_1}, f_{j_n}] \subset [f_1, f_N]$, $n \ll N$, соответствующая отражению от элементов поверхности в пределах ширины ДНА, с шагом $h_f = f_N / N$, обеспечивающим разрешение по частоте. Каждая j -я частота, $j \in [f_{j_1}, f_{j_n}]$, соответствует одному или нескольким (как правило, соседним) k -м элементам отражения и связана с углом α_j отклонения вектора $\vec{v}$ путевой скорости движения носителя РЛС относительно луча отражения от элемента поверхности. Для режима ДОЛ имеем [8]: $f_j = (2v / \lambda) \cos \alpha_j$, где λ – длина волны, а $\cos \alpha_j$ находится с помощью скалярного произведения двух векторов: $\vec{v}^0 = (v_x, v_y, v_z)$ – орта вектора $\vec{v}$ и $\vec{r}^0 = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta, \cos \theta \cos \varphi)$ – орта радиус-вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ точки $M(x, y, z)$ – центра элемента отражения:

$$\cos \alpha = v_x \cos \theta \sin \varphi + v_y \sin \theta + v_z \cos \theta \cos \varphi,$$

или

$$(\lambda / 2v) f_j = v_x \cos \theta \sin \varphi + v_y \sin \theta + v_z \cos \theta \cos \varphi. \quad (1)$$

Уравнение (1) при фиксированных v и f_j представляет собой нелинейное уравнение линии доплеровской частоты (изодопы) на дальности r в угловых координатах φ, θ .

Прямоугольные координаты x, y, z точки $M(x, y, z)$ связаны со сферическими координатами r, φ, θ известными зависимостями:

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \cos \varphi. \quad (2)$$

Из (1), (2) получаем линейное уравнение поверхности доплеровской частоты f_j в координатах x, y, z – уравнение плоскости:

$$v_x x + v_y y + v_z z = c_j, \quad c_j = r(\lambda / 2v) f_j. \quad (3)$$

Так как при маловысотном полете ось oz составляет малый угол с плоскостью земной поверхности, то при малой ширине круговой ДНА ($1^\circ - 3^\circ$) практически можно принять $z \approx r$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$v_x x + v_y y = c_j, \quad c_j = r[(\lambda / 2v) f_j - v_z]. \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение прямой в координатах x, y , соответствующей j -й частоте. На этой прямой в пределах ширины ДНА расположены элементы отражения с искомыми координатами x, y .

В частном случае переднебокового обзора, когда вектор скорости носителя РЛС располо-

жен в плоскости xoz : $\vec{v}^0 = (v_x, 0, v_z)$ и его составляющая $v_y = 0$, уравнение (4) упрощается:

$$v_x x = c_j, \quad c_j = r[(\lambda/2v)f_j - v_z]. \quad (5)$$

В этом случае (5) представляет собой уравнение вертикальной прямой. При этом координата x однозначно определяется доплеровской частотой f_j : $x = c_j / v_x$, а координата y подлжит оцениванию.

Задача заключается в нахождении координат x, y, z элементов отражения в i -х элементах дальности на j -х частотах на основе сигналов $\dot{s}_{qi}(f_j)$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$, $q = \overline{1, Q}$. Совокупность искоемых координат $x(i, j, t), y(i, j, t), z(i, j, t)$ на множестве значений $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$ с привязкой к текущему моменту времени t представляет искоемое трехмерное изображение поверхности в пределах зоны видимости РЛС.

Учитывая, что обработка сигналов ведется независимо в i -х элементах дальности r_i , символ i при дальнейшем изложении опускается.

Модель сигналов. При наблюдении поверхности временные последовательности $\dot{s}_q(t_\mu)$, $\mu = \overline{1, N}$ могут быть описаны следующей зависимостью:

$$\begin{aligned} \dot{s}_q(t_\mu) = & \gamma_q \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} U(\varphi_{j_k}, \theta_{j_k}) D(\varphi_{j_k}, \theta_{j_k}) \exp \{ i [2\pi f_{j_k} t_\mu + \\ & + (2\pi/\lambda) \delta_q(\varphi_{j_k}, \theta_{j_k}) + \xi] \} + \dot{p}_q(t_\mu). \end{aligned} \quad (6)$$

Суммирование по j в (6) ведется по числу n частот, расположенных в полосе $[f_{j_1}, f_{j_n}]$ с шагом h_f . Каждому шагу по частоте соответствует элемент отражения земной поверхности. Суммирование по k ведется по m_j элементам отражения на j -й частоте. Общее количество наблюдаемых элементов поверхности в срезе дальности r составляет $m_1 + m_2 + \dots + m_n$. В частном случае, определяющем характер гладкой поверхности, принимается $m_j = 1, \forall j = \overline{1, n}$ и модель (5) упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{s}_q(t_\mu) = & \gamma_q \sum_{j=1}^n U(\varphi_j, \theta_j) D(\varphi_j, \theta_j) \exp \{ i [2\pi f_j t_\mu + \\ & + (2\pi/\lambda) \delta_q(\varphi_j, \theta_j) + \xi] \} + \dot{p}_q(t_\mu). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $q = \overline{1, Q}$; $U(\varphi, \theta)$ – амплитуда отражающего элемента с угловыми координатами φ, θ : $U(\varphi, \theta) = \rho U_0$, $\rho = \rho(\varphi, \theta)$ – коэффици-

ент отражения, зависящий от φ, θ ; U_0 – амплитуда зондирующего сигнала; $D(\varphi, \theta)$ – амплитудная характеристика ДНА на излучение и прием, например:

$$D(\varphi, \theta) = \exp \{ -k_0 (\varphi^2 / \Delta_\varphi^2 + \theta^2 / \Delta_\theta^2) \},$$

$\varphi \approx x/r$, $\theta \approx y/r$, где k_0 – известный коэффициент ($k_0 = 2,78$); Δ_φ и Δ_θ – ширина ДНА по азимуту и углу места на уровне 0,5 мощности; i – мнимая единица; $\delta_q(\varphi, \theta)$ – запаздывание или опережение по фазе принимаемого отраженного сигнала от элемента с угловыми координатами φ, θ в q -м приемном элементе антенны по сравнению с центром антенны; ξ – составляющая фазы в элементе разрешения дальности: $\xi = -4\pi r / \lambda + \phi_0 + \eta$, ϕ_0 – начальная фаза; η – случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 2\pi]$ и описывающая неопределенность отражения в элементе дальности (η меняет свое значение по элементам дальности); $\dot{p}_q(t_j)$ – комплексный белый шум с нулевым средним (шум аппаратуры) и дисперсией σ_p^2 ; γ_q – мультипликативная помеха с единичным средним, моделирующая флуктуации сигналов в q -х каналах.

Отсчет времени t_μ ведется с частотой дискретизации f_δ , обеспечивающей отсутствие эффекта “растекания частот” при ДПФ, т.е. для каждой частоты $f_j \in [f_{j_1}, f_{j_2}]$ выполняется равенство: $f_j = q f_\delta / N$, где q – целое число.

Величина $\delta_q(\varphi, \theta)$ определяется как разность расстояний: $\delta_q = r - r_q$, где r – удаление точки с координатами x, y, z от центра антенны; r_q – удаление точки от центра q -го приемного элемента антенны с известными координатами x'_q, y'_q и $z'_q = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta_q = & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x - x'_q)^2 + (y - y'_q)^2 + z^2} = \\ = & r - \sqrt{r^2 - 2(x'_q x + y'_q y) + x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Формула (8) дает нелинейную зависимость δ_q от r, x, y . Для практического расчета δ_q примем допущение. Представим сферический фронт отраженной волны, достигшей центрального элемента антенны, касательной плоскостью (плоским фронтом) с нормальным вектором

$$\vec{n} = (x, y, z) = r(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta, \cos \theta \cos \varphi),$$

направленным к центру антенны, или ортом вектора нормали $\vec{n}_0 = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta, \cos \theta \cos \varphi)$. Считаем, что плоский фронт волны с таким же нормальным вектором достигает центра остальных приемных элементов антенны. Тогда величина δ_q определится как отклонение центра q -го приемного элемента (точки с координатами $x_q, y_q, 0$) от плоскости, проходящей через начало координат с вектором нормали $\vec{n}_0$, по формуле:

$$\delta_q = x'_q \cos \theta \sin \varphi + y'_q \sin \theta,$$

или с учетом $\cos \theta \sin \varphi = x/r$, $\sin \theta = y/r$ имеем:

$$\delta_q = (x'_q x + y'_q y) / r. \quad (9)$$

Формула (9) дает линейную зависимость δ_q от x, y при известном r .

Из модели (7) видно, что угловые координаты φ, θ центров отражающих элементов содержатся в амплитудной и фазовой частях обрабатываемых сигналов. Причем измеряемая разность фаз $\Delta\psi_q$, взятая относительно центра антенны ($\delta_0 = 0$) при малых углах φ, θ , однозначно определяет δ_q :

$$\Delta\psi_q = \psi_q - \psi_0 = (2\pi / \lambda) \delta_q, \quad (10)$$

где $\psi_q = 2\pi f_{j_k} t_\mu + (2\pi / \lambda) \delta_q(\varphi_{j_k}, \theta_{j_k}) + \xi$. Так, если δ_q меняется в пределах $0 \leq \delta_q \leq \lambda$, что соответствует малым углам φ, θ , разность фаз меняется в пределах $-\pi \leq \psi \leq \pi$ и между δ_q и $\Delta\psi_q$ устанавливается однозначное соответствие (10). В работе считается, что для узкой ДНА, характерной для фазированной АР, прием сигналов ведется с направлений однозначного измерения фазы. Также не рассматривается поправка на сферичность фронта волны.

В результате ДПФ временные последовательности $\dot{s}_q(t_\mu)$, $\mu = \overline{1, N}$ одновременно в q -х каналах ($q = \overline{1, Q}$) преобразуются в частотные последовательности $\dot{s}_q^*(f_j)$, $j = \overline{1, N}$. Для n частот $f_j \in [f_{j_1}, f_{j_n}] \subset [f_1, f_N]$, $n \ll N$, принимается модель:

$$\begin{aligned} \dot{s}_q^*(f_j) &= \gamma_q \sum_{k=1}^{m_j} U(\varphi_{j_k}, \theta_{j_k}) D(\varphi_{j_k}, \theta_{j_k}) \times \\ &\times \exp\{i[c_0 \delta'_q(x_{j_k}, y_{j_k}) + \xi]\} + \dot{p}_q^*(f_j), \end{aligned} \quad (11)$$

где “*” – символ ДПФ, $c_0 = 2\pi / (r\lambda)$, $\delta'_q(x_k, y_k) = x'_q x_k + y'_q y_k$.

Или в частном случае $m_j = 1 \forall j = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} \dot{s}_q^*(f_j) &= \gamma_q U(\varphi_j, \theta_j) D(\varphi_j, \theta_j) \times \\ &\times \exp\{i[c_0 \delta'_q(x_j, y_j) + \xi]\} + \dot{p}_q^*(f_j). \end{aligned} \quad (12)$$

Совокупность измерений $\dot{s}_q^*(f_j)$, $q = \overline{1, Q}$, полученных в q -х каналах на каждой j -й частоте $f_j \in [f_{j_1}, f_{j_n}]$, используется в дальнейшем для нахождения оценок координат x_j, y_j при $z_j = r \forall j = \overline{j_1, j_n}$.

Решение задачи формирования изображения земной поверхности представлено следующими алгоритмами.

Алгоритм 1 (метод пеленгационных характеристик). Используется 4-канальная АР ($Q = 4$), приемные элементы которой расположены на плоскости в точках с координатами

$$x'_1 = d, y'_1 = d, \quad x'_2 = -d, y'_2 = d,$$

$x'_3 = -d, y'_3 = -d, x'_4 = d, y'_4 = -d$, где $b = 2d$ – базовое расстояние между центрами соседних элементов.

Алгоритм основан на методе построения пеленгационных характеристик [5, 6] и сводится к указанным далее операциям.

1. После прохождения тракта первичной обработки в каждом i -м элементе дальности r_i и q -м канале ($q = \overline{1, Q}$) на выходе АЦП образуются временные последовательности $\dot{s}_q(t_\mu)$, $\mu = \overline{1, N}$, отвечающие модели (7). Эти последовательности параллельно в q -х каналах подаются на блоки ДПФ. На выходах ДПФ получаются частотные последовательности $\dot{s}_q^*(f_j)$, $j = \overline{1, N}$ в полосе частот $[f_1, f_N]$.

2. В полосе $[f_1, f_N]$ рассматриваются только n доплеровских частот $f_j \in [f_{j_1}, f_{j_n}] \subset [f_1, f_N]$, соответствующих полосе земной поверхности и отвечающих модели (12). Для таких частот модуль $|\dot{s}_q^*(f_j)|$ превышает порог обнаружения полезного сигнала во всех каналах ($q = \overline{1, Q}$).

3. На каждой частоте f_j , $j = \overline{1, n}$ спектральные характеристики в q -х каналах запоминаются как $\dot{s}_q^*$, $q = \overline{1, Q}$. Запомненные комплексные величины подаются на вход алгоритма оценивания координат. Алгоритм выполняет следующие операции.

4. Определяются суммарный и разностные сигналы:

$$\dot{S}_\Sigma = \dot{s}_1^* + \dot{s}_2^* + \dot{s}_3^* + \dot{s}_4^*, \quad \dot{S}_X = \dot{s}_2^* + \dot{s}_3^* - \dot{s}_1^* - \dot{s}_4^*,$$

$$\dot{S}_Y = \dot{s}_3^* + \dot{s}_4^* - \dot{s}_1^* - \dot{s}_2^*.$$

5. Вычисляются пеленгационные характеристики:

$$U_X = -\text{Im}\{\dot{S}_X / \dot{S}_\Sigma\}, \quad U_Y = -\text{Im}\{\dot{S}_Y / \dot{S}_\Sigma\}.$$

6. Находятся координаты центра элемента отражения по формулам:

$$\hat{x} = k_1 U_X, \quad \hat{y} = k_1 U_Y, \quad \hat{z} = \sqrt{r^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2}, \\ k_1 = r\lambda / (2\pi d).$$

7. Операции 1- 6 повторяются для всех i -х элементов дальности ($i = \overline{1, M}$).

Алгоритм 2 (Метод разности фаз). Используется 4-канальная АР ($Q = 4$), приемные элементы которой расположены на плоскости в точках с координатами:

$$x'_1 = d, y'_1 = 0, \quad x'_2 = 0, y'_2 = d, \\ x'_3 = -d, y'_3 = 0, \quad x'_4 = 0, y'_4 = -d.$$

Алгоритм основан на фазовом методе [7].

1-3, 7. Эти пункты совпадают с предыдущим алгоритмом.

4. Определяются аргументы комплексных величин $\dot{s}_q^*$ – фазы $\psi_q = \arg\{\dot{s}_q^*\}$, $q = \overline{1, Q}$.

5. Вычисляются разности фаз:

$$\Delta\psi_X = \psi_1 - \psi_3, \quad \Delta\psi_Y = \psi_2 - \psi_4.$$

6. Находятся координаты точки отражения по формулам:

$$\hat{x} = k_2 \Delta\psi_X, \quad \hat{y} = k_2 \Delta\psi_Y, \quad \hat{z} = \sqrt{r^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2}, \\ k_2 = r\lambda / (4\pi d).$$

Алгоритм 3 (Метод восстановления). Используется матричная АР ($Q > 4$), приемные элементы которой расположены на плоскости в матричном порядке (в i -х строках и j -х столбцах) в точках с координатами:

$$x'_q = \pm j d, \quad y'_q = \pm i d, \quad j = \overline{1, n_x}, \quad i = \overline{1, n_y}, \\ Q = (2n_x + 1)(2n_y + 1).$$

Алгоритм основан на методе восстановления амплитуд [5, 6] и ориентирован на переднебоковой обзор, представленный зависимостью (5), где частота f_j определяет координату x и оценке подлежит одна координата y . Придавая y ряд дискретных значений y_k , $k = \overline{1, K}$ (здесь k – номер дискретизации, K – заданное число элементов дискретизации) по линейной ширине ДНА на дальности r , получаем K точек на линии доплеровской частоты с координатами x, y_k , $k = \overline{1, K}$. Для всех этих точек справедлива модель измерения (11), где $m_j = K$, или в матричной форме:

$$S = GU + P, \quad (13)$$

где S – Q -вектор измерений $\dot{s}_q^*$; G – $Q \times K$ -матрица коэффициентов ДНА $\dot{G}_{qk}$:

$$\dot{G}_{qk} = D(\varphi_k, \theta_k) \exp\{ic_0 \delta'_q(\varphi_k, \theta_k)\},$$

$$D(\varphi, \theta_k) = \exp\{-k_0(\varphi^2 / \Delta_\varphi^2 + \theta_k^2 / \Delta_\theta^2)\};$$

$$\varphi \approx x/r, \quad \theta_k \approx y_k/r; \quad (14)$$

U – K -вектор искоемых амплитуд $\dot{U}_k$;

P – Q -вектор шумов $\dot{p}_q^*$.

Алгоритм.

1-3, 7. Эти пункты совпадают с предыдущими алгоритмами.

4. Для модели (13) заранее находится $K \times Q$ -псевдообратная матрица G^+ .

5. Для полученного вектора S измерений $\dot{s}_q^*$, $q = \overline{1, Q}$ вычисляется вектор оценок $\hat{U}$:

$$\hat{U} = G^+ S, \quad (15)$$

Элементами вектора $\hat{U}$ являются оценки комплексных амплитуд $\hat{U}_k$ для k -х элементов дискретизации. Практически (15) сводится к умножению комплексных измерений $\dot{s}_q^*$ на известные комплексные весовые коэффициенты $\dot{w}_{kq}$ – элементы матрицы G^+ и суммированию:

$$\hat{U}_k = \sum_{q=1}^Q \dot{w}_{kq} \dot{s}_q^*, \quad k = \overline{1, K}.$$

В соответствии с методом максимального правдоподобия наибольшими амплитудами должны обладать те k -е оценки $\hat{U}_k$, координаты которых y_k соответствуют наблюдениям $\dot{s}_q^*$, $q = \overline{1, Q}$.

6. Выбирается k -я оценка с максимальной амплитудой: $\max |\hat{U}_k|$. Ей соответствует оценка координаты y : $\hat{y} = y_k$. Оценки координат x, z будут: $\hat{x} = c_j / v_x$, $c_j = r[(\lambda / 2v)f_j - v_z]$;

$$\hat{z} = \sqrt{r^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2}.$$

Алгоритм 4 (Метод максимума амплитудной характеристики ДНА)

Используется линейная АР, центры приемных элементов которой расположены на оси ou в Q точках с координатами $x'_q = 0$, $y'_q = \pm i d$, $i = \overline{1, n_y}$, $Q = 2n_y + 1$. Биссектрисы диаграмм направленности q -х приемных элементов АР смещены по углу места θ на величину θ_{0q} таким образом, что амплитудная характеристика ДНА каждого q -го канала зависит от θ_{0q} :

$$D_q(\varphi, \theta_k) = \exp\{-k_0 \varphi^2 / \Delta_\varphi^2 + (\theta_k - \theta_{0q})^2 / \Delta_\theta^2\},$$

$$\varphi \approx x/r, \theta_k \approx y_k/r. \quad (16)$$

Практически это достигается за счет пространственной ориентации q -го элемента АР по углу места в направлении θ_{0q} , или электронного управления лучом. Величины θ_{0q} задаются на промежутке $[-\Delta_\theta/2, \Delta_\theta/2]$ с шагом $h_\theta = \Delta_\theta/(Q-1)$. Данный алгоритм, подобно алгоритму 3, ориентирован на переднебоковой обзор, представленный зависимостью (5), когда требуется найти оценку одной координаты y . Алгоритм.

1-3, 7. Эти пункты совпадают с предыдущими алгоритмами.

4. Для полученных измерений $\dot{s}_q^*$, $q = \overline{1, Q}$ вычисляются модули $|\dot{s}_q^*|$, которые дают распределение амплитуд $A_q = |\dot{s}_q^*|$, $q = \overline{1, Q}$ вдоль оси ou с шагом дискретизации h_θ по углу места.

5. В последовательности $\{A_q\}$ выбирается максимальная по q амплитуда $A_{\max} = \max_q A_q$.

Соответствующий $A_{\max}$ номер q дает начальную оценку координаты y с точностью, равной величине линейного шага $h_y = r h_\theta$:

$$\hat{y}_0 = -r \Delta_\theta / 2 + h_y (q - 1).$$

6. Оценка $\hat{y}_0$ уточняется по трем значениям амплитуд A_{q-1}, A_q, A_{q+1} : методом параболической интерполяции находится смещение Δy в сторону точки максимума и вычисляется уточненная оценка $\hat{y} = \hat{y}_0 + \Delta y$. Оценки координат x, z вычисляются так же, как в алгоритме 3.

Моделирование работы алгоритмов. Работа алгоритмов 1 – 4 моделировалась в условиях переднебокового обзора (5). При скорости летательного аппарата $v = 100$ м/с орт вектора скорости задавался $\vec{v}^0 = (1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2})$. На дальности $r = 1000$ м подлежала рассмотрению полоса склона земной поверхности. При ширине круговой ДНА 2° на дальности r высота склона по оси ou составляла 34 м, протяженность по оси ox – 34 м. Центры элементов отражения общим числом $n = 25$ шли с шагом 1,36 м по осям ox и ou в сторону уменьшения высоты. Оценке подлежали пространственные координаты этих центров. Зондирующие импульсы числом $N = 5000$ при моделировании отражались от центров элементов полосы поверхности

с коэффициентом $\rho = 1$. При длине волны $\lambda = 0,01$ м отраженные сигналы принимались в Q элементах АР с базовым расстоянием $b = 0,1$ м и после прохождения тракта первичной обработки в Q каналах формировались в соответствии с моделью (7). При частоте дискретизации $f_\theta = 100$ кГц после АЦП получались Q временных последовательностей длиной $N = 5000$ каждая, которые подвергались ДПФ. В общей полосе частот $[0, 100 \text{ кГц}]$ полоса доплеровских частот, соответствующая отражающим элементам поверхности, составляла $[13,9 \text{ кГц}; 14,4 \text{ кГц}]$ с разрешением по частоте 20 Гц. Полученные в результате ДПФ спектральные последовательности подавались на вход алгоритмов 1 – 4 обработки данных. Результаты моделирования представлены ниже.

В таблицах 1 – 4 показано влияние аддитивного шума $\dot{p}_q(t_\mu)$ в модели (7) на точность работы алгоритмов 1 – 4. Даны зависимости средней ошибки определения пространственных координат центров элементов отражения и оценок СКО этих ошибок от отношения сигнал-шум $C/\Pi = 20 \lg(U_0 / \sigma_p)$.

Таблица 1 – Влияние аддитивного шума на алгоритм 1

С/Ш дБ	20	30	40	50	60	70
Ошибка (м)	1,138	1,049	1,016	0,980	0,947	0,893
СКО (м)	0,845	0,839	0,820	0,789	0,726	0,538

Таблица 2 – Влияние аддитивного шума на алгоритм 2

С/Ш дБ	20	30	40	50	60	70
Ошибка (м)	0,525	0,515	0,510	0,495	0,481	0,448
СКО (м)	0,352	0,342	0,331	0,296	0,264	0,256

Таблица 3 – Влияние аддитивного шума на алгоритм 3

С/Ш дБ	20	30	40	50	60	70
Ошибка (м)	1,268	1,074	0,997	0,969	0,933	0,845
СКО (м)	1,048	0,954	0,767	0,756	0,750	0,743

Таблица 4 – Влияние аддитивного шума на алгоритм 4

С/Ш дБ	20	30	40	50	60	70
Ошибка (м)	0,688	0,643	0,625	0,599	0,573	0,523
СКО (м)	0,584	0,514	0,498	0,404	0,359	0,334

Видно преимущество алгоритма 2 по точности определения координат в условиях данного эксперимента.

В таблицах 5 – 8 показано влияние мультипликативной помехи γ_q при фиксированном отношении С/Ш = 60 дБ. Действие γ_q моделировалось случайным изменением γ_q по q -м каналам с отклонением на указанный процент относительно ее среднего значения. Видно также преимущество алгоритма 2.

Таблица 5 – Влияние мультипликативной помехи на алгоритм 1

Помеха	0 %	4	8	12	16	20
Ошибка (м)	0,947	1,008	1,053	1,106	1,151	1,227
СКО (м)	0,726	0,750	0,779	0,791	0,828	0,866

Таблица 6 – Влияние мультипликативной помехи на алгоритм 2

Помеха	0 %	4	8	12	16	20
Ошибка (м)	0,481	0,494	0,498	0,500	0,506	0,523
СКО (м)	0,264	0,285	0,290	0,296	0,298	0,301

Таблица 7 – Влияние мультипликативной помехи на алгоритм 3

Помеха	0 %	4	8	12	16	20
Ошибка (м)	0,933	0,947	1,382	2,192	3,570	4,799
СКО (м)	0,750	0,839	1,311	5,021	5,058	5,061

Таблица 8 – Влияние мультипликативной помехи на алгоритм 4

Помеха	0 %	4	8	12	16	20
Ошибка (м)	0,573	0,635	0,654	0,690	0,794	0,930
СКО (м)	0,359	0,600	0,757	0,765	0,783	0,791

Выводы. В условиях проведенного модельного эксперимента сравнительный анализ показывает, что наибольшей точностью обладает

алгоритм 2, основанный на фазовом методе оценивания координат. Данный алгоритм может найти применение в существующих бортовых системах наблюдения за земной поверхностью.

Библиографический список

1. Антипов В.Н., Меркулов В.И., Самарин О.Ф., Чернов В.С. Основные направления развития авиационных бортовых РЛС // Успехи современной радиоэлектроники. 2009. № 10. С. 7 – 28.
2. Артемьев А.И., Канащенков А.И., Меркулов В.И., Самарин О.Ф., Чернов В.С. Вертолетные радиолокационные системы // Успехи современной радиоэлектроники. 2011. № 10. С. 4 – 26.
3. Клочко В.К. Методы формирования трехмерных изображений поверхности в бортовых системах радиовидения // Автометрия. 2009. № 1. С. 23 – 33.
4. Нестеров С.М., Скородумов И.А., Устищенко Л.Г. Метод формирования трехмерных радиолокационных изображений объектов // Радиотехника. 2011. № 1. С. 64 – 66.
5. Клочко В.К., Нгуен Ч.Т. Математическая модель системы формирования трехмерных радиоизображений на основе доплеровской фильтрации и оценивания координат // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 2 (44). С. 11 – 18.
6. Нгуен Ч.Т. Алгоритмы формирования трехмерных радиоизображений на основе доплеровской фильтрации и оценивания координат // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 3 (45). С. 27 – 31.
7. Клочко В.К., Усачев А.Н., Нгуен Ч.Т. Алгоритм формирования изображений объектов на основе фазового метода измерения пространственных координат // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 49. С. 128 – 131.
8. Кондратенков Г.С., Фролов А.Ю. Радиовидение. Радиолокационные системы дистанционного зондирования Земли: учеб. пособие для вузов / под ред. Г.С. Кондратенкова. М.: Радиотехника, 2005. 368 с.

УДК 53.087.5

И.В. Бодрова, О.А. Бодров, В.В. Солдатов

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА НА КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИЯХ ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА

Предложена методика для вычисления параметров вектор-функции Стокса рассеянного светового потока при фотометрических исследованиях космического мусора для случая, когда поляризационные элементы расположены перед изучаемым космическим объектом. Произведен расчет четырех

компонентов вектора Стокса, а также изучена зависимость коэффициента поляризации от каждого из изучаемых параметров.

Ключевые слова: параметры Стокса, коэффициент поляризации, матрица Мюллера.

Введение. Физические свойства и геометрия рассеивающей поверхности имеют важное значение для решения прямой и обратной задач фотометрии космических объектов. При оптическом мониторинге удаленных космических объектов, в частности космического мусора техногенного и естественного происхождения, большую долю полезной информации о структуре изучаемого объекта могут дать поляриметрические измерения [1, 2, 3].

Цель работы – применение математических методов обработки информации для исследования поляризации светового потока, рассеянного космическим мусором, на основе оптических наблюдений.

Космический объект (КО) рассматривается в сферической системе координат (рисунок 1).

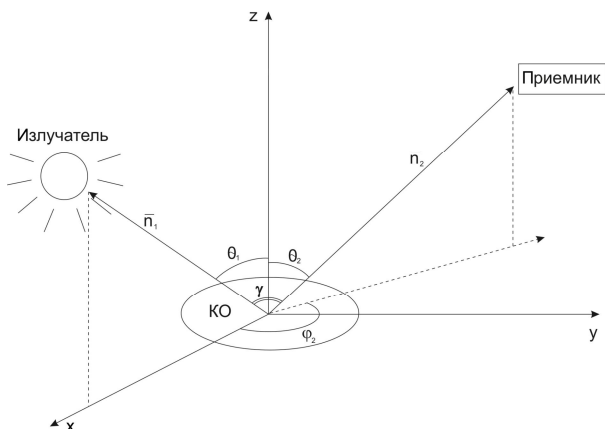


Рисунок 1 – Космический объект в сферической системе координат

Начало координат совмещено с исследуемым объектом, нормаль к касательной плоскости исследуемой поверхности космического объекта (КО) является осью Oz ,

θ_1 – угол между направлением на излучатель и нормалью к поверхности;

θ_2 – угол между направлением на приемник излучения и нормалью к поверхности;

φ_1 – азимутальный угол проекции вектора $\vec{n}_1$ на плоскость HOY (проекция совмещена с положительным направлением оси Ox $\varphi_1=0$);

φ_2 – азимутальный угол проекции вектора $\vec{n}_2$ на плоскость HOY с положительным направлением оси Ox ;

γ – угол между направлениями на излучатель и приемник излучения.

Постановка задачи

Как известно, состояние поляризации рассеянного излучения характеризуется вектором Стокса $\vec{S} = (S_0, S_1, S_2, S_3)$. Первый компонент вектора Стокса S_0 характеризует интенсивность светового потока [4, 5, 6]. Физический смысл параметров S_1, S_2, S_3 практически не изучен. В связи с этим вызывает интерес исследование зависимости коэффициента поляризации от параметров Стокса.

Предлагается методика обработки полученной информации на основе функциональной схемы устройства для измерения интенсивности излучения, рассеянного космическим мусором.

Анализируется влияние компонентов вектора Стокса на коэффициент поляризации и проверяется адекватность расчетов.

Как правило, функциональные схемы решения задач фотополяриметрии удаленных объектов всякий раз адаптируются под конкретные космические тела, различаемые по размеру и удаленности. Параметры Стокса нуждаются в оптимальном усреднении во времени, при этом критерии усреднения выбирались эвристически. Исходными данными для расчета параметров Стокса является интенсивность рассеянного излучения, которая измеряется с помощью устройства, функциональная схема которого показана на рисунке 2.

На поверхность изучаемого объекта падает естественный неполяризованный световой поток. После отражения от поверхности изучаемого объекта световой пучок приобретает некоторую поляризацию, поэтому рассеивающая поверхность может быть представлена в качестве поляризатора светового потока. Для измерения интенсивности излучения и последующего расчета параметров Стокса используются фотоприемник, анализатор и модулятор, которые позволяют вычислить необходимые параметры [4, 7]. В качестве базового выбирается подход, основанный на последовательном изменении параметров анализатора и модулятора. Параметрами анизотропии выбраны: ϕ – угол поворота плоскости поляризации, ε – фазовый сдвиг.

Для случая, когда поляризационные элементы расположены между фотоприемником и рассеивающим объектом, целесообразно использовать следующую функциональную схему, кото-

рая адаптирована для наблюдения за объектами космического мусора в околоземном пространстве. Данная схема предназначена для измерения интенсивности излучения, расчета параметров Стокса и коэффициента поляризации рассеянного поля. Схема представляет собой фотоприемник рассеянного излучения с расположенными перед ним анализатором и модулятором (рисунок 2). Наблюдения однозначно соответствуют приведенной схеме, на основе которой осуществляются теоретические расчеты и проверяется адекватность экспериментальных данных.

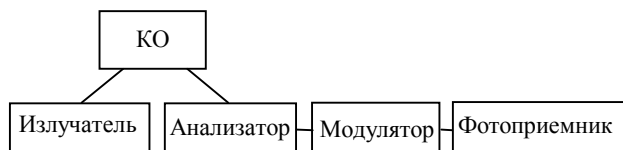


Рисунок 2 – Функциональная схема устройства для измерения интенсивности рассеянного излучения

Модель отражения светового потока от рассеивающей поверхности. Световой пучок, падающий на космический объект и рассеянный им, обычно рассматривается как гармоническая волна $E(R, t) = E(R)e^{-i\omega t}$, где $E(R, t)$ – напряженность светового поля в момент времени t и в точке R пространства, ω – частота световой волны.

Будем рассматривать световой пучок в виде тензора светового поля $\Phi = \sum_s E^s E^{*s}$, где

E^s – гармоника с положительной частотой ω , E^{*s} – гармоника с отрицательной частотой, $E = E_x + iE_y$ – некогерентная простая волна с положительной частотой, E_x, E_y – проекции вектора $\vec{E}$ на оси, перпендикулярные к направлению распространения световой волны, $E^* = E_x^* + iE_y^*$ – некогерентная простая волна с отрицательной частотой.

Состояние поляризации светового поля полностью характеризуется параметрами Стокса:

$$S_0 = \langle |E_x|^2 \rangle + \langle |E_y|^2 \rangle;$$

$$S_1 = \langle |E_x|^2 \rangle - \langle |E_y|^2 \rangle;$$

$$S_2 = 2\text{Re}\langle E_x E_y^* \rangle;$$

$$S_3 = 2\text{Im}\langle E_x E_y^* \rangle,$$

где $\langle \rangle$ – выбранная операция усреднения по времени.

Для естественного неполяризованного света $S_1 = S_2 = S_3 = 0$, следовательно, нормированный

вектор Стокса для естественного света рассматривается как $\vec{S} = (1, 0, 0, 0)$.

В соответствии с предлагаемой функциональной схемой регистрации изучаемых параметров составлено матричное уравнение, его параметры подобраны под данную конкретную задачу:

$$S = R(\theta_2)MR(\theta_1)S',$$

где S' – вектор-столбец Стокса падающего на изучаемый объект излучения, размер (4×1) , S – вектор-столбец Стокса регистрируемого излучения, размер (4×1) ,

$R(\theta_1)$ – матрица поворота падающего излучения к плоскости рассеяния:

$$R(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta_1 & -\sin 2\theta_1 & 0 \\ 0 & \sin 2\theta_1 & \cos 2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

M – матрица Мюллера рассеивающего объекта размерностью (4×4) , характеризующая рассеивающие свойства поверхности;

$R(\theta_2)$ – матрица поворота рассеянного излучения к плоскости рассеяния $R(\theta_2)$:

$$R(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta_2 & -\sin 2\theta_2 & 0 \\ 0 & \sin 2\theta_2 & \cos 2\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно расчет матрицы Мюллера в данном исследовании не проводился.

Методика расчета параметров Стокса. В соответствии с представленной функциональной схемой производились измерения интенсивности излучения, рассеянного техногенным космическим объектом. Исследования проводились на базе Рязанской астрономической обсерватории. Измерения интенсивности рассеянного излучения производились по сетке $6^0 \times 6^0$, $0^0 \leq \varphi_2 \leq 360^0$, $0^0 \leq \theta_2 \leq 180^0$, $\theta_1 = 128^0$. Регистрация интенсивности светового потока осуществлялась с помощью наземных оптических средств на базе ПЗС-приемников. Все расчеты произведены для квазимонохроматического света, т.е. ширина спектра световой волны $\Delta\nu$ на два порядка меньше значения средней частоты световой волны ν_0 . Частоты ν_0 в оптическом диапазоне принимают значения $\approx 10^{14}$ Гц, следовательно, ширина спектра $\Delta\nu \approx 10^{12}$ Гц.

Параметры Стокса $S(\theta_2, \varphi_2)$ численно рассчитаны с помощью четырех измерений интен-

сивности излучения путем изменения угла наклона анализатора ϕ и сдвига фаз ε между гармониками E_x и E_y с помощью модулятора для каждого измерения [4, 6]. Расчет производился с помощью системы

$$I_{\phi_k}(\theta_2, \varphi_2) = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cos 2\phi_k + S_2 \cos \varepsilon_k \sin 2\phi_k - S_3 \sin \varepsilon_k \sin 2\phi_k),$$

$$k = 1, 2, 3, 4.$$

Матрица системы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos 2\phi_1 & \cos \varepsilon_1 \sin 2\phi_1 & -\sin \varepsilon_1 \sin 2\phi_1 \\ 1 & \cos 2\phi_2 & \cos \varepsilon_2 \sin 2\phi_2 & -\sin \varepsilon_2 \sin 2\phi_2 \\ 1 & \cos 2\phi_3 & \cos \varepsilon_3 \sin 2\phi_3 & -\sin \varepsilon_3 \sin 2\phi_3 \\ 1 & \cos 2\phi_4 & \cos \varepsilon_4 \sin 2\phi_4 & -\sin \varepsilon_4 \sin 2\phi_4 \end{pmatrix}.$$

Поле рассеяния второй компоненты вектора Стокса S_1 в сферической системе координат показано на рисунке 3. Ось Oz направлена на источник света.

Расчет коэффициента поляризации и оценка влияния на него параметров Стокса

Коэффициент поляризации P рассеянного излучения связан с параметрами Стокса следующим соотношением:

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \quad 0 \leq P \leq 1,$$

$P = 0$ для неполяризованного света,

$P = 1$ для эллиптически поляризованного света.

Поле рассчитанного коэффициента поляризации для изучаемого объекта в сферической системе координат показано на рисунке 4.

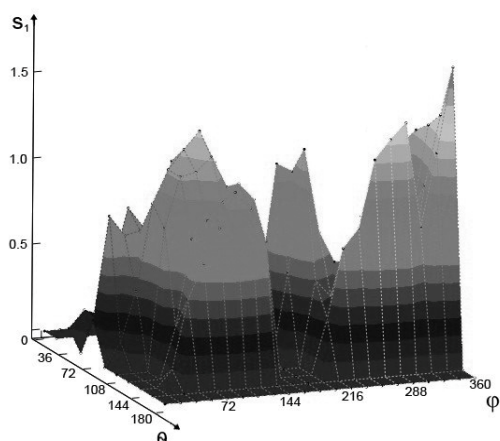


Рисунок 3 – Поле рассеяния второй компоненты вектора Стокса

Как можно видеть, на отдельных участках при значениях $75^\circ \leq \theta_2 \leq 150^\circ$, $40^\circ \leq \varphi_2 \leq 135^\circ$, а также $110^\circ \leq \theta \leq 140^\circ$, $210^\circ \leq \varphi_2 \leq 285^\circ$ наблюдаются отличные от нуля значения коэффици-

ента поляризации ($P \approx 0,3-0,6$). Кроме того, в этих областях наблюдаются высокие значения первых двух компонентов S_0 и S_1 вектора Стокса при практически нулевых значениях параметров S_2 и S_3 . На остальных участках параметры Стокса и коэффициент поляризации мало отличны от нуля, что связано с низкой интенсивностью рассеянного светового пучка в данных областях измерения. На полученных графиках наблюдается четко выраженный максимум коэффициента поляризации при углах θ_2 и φ_2 , близких к 90° . Среднее значение коэффициента поляризации $P_\theta(\varphi)$ достигает величины 0,7.

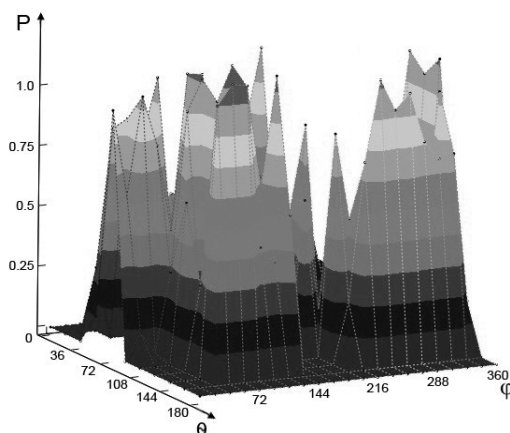


Рисунок 4 – Поле коэффициента поляризации

Компоненты вектора Стокса имеют различный физический смысл. Как известно, физический смысл первого компонента вектора Стокса – это интенсивность рассеянного излучения. В данной работе ставилась задача оценить влияние второго компонента Стокса на коэффициент поляризации.

При изучении поля рассеяния параметров Стокса и коэффициента поляризации наблюдается зависимость P от параметра S_1 . В результате расчетов было выявлено, что вклад параметров S_2 и S_3 в поляризацию минимальный, поэтому ими можно пренебречь.

Рассчитан коэффициент корреляции r между параметром поляризации $P_\theta(\varphi)$ и параметром Стокса S_1 (далее θ_2 обозначается как θ , φ_2 как φ), который определяется следующим образом:

$$r(P_\theta, S_1) = \frac{M(P_\theta(\varphi) \cdot S_1) - \bar{S}_1 \cdot \bar{P}_\theta(\varphi)}{\sigma(P_\theta(\varphi)) \cdot \sigma(S_1)},$$

где $M(P_\theta(\varphi) \cdot S_1) - \bar{S}_1 \cdot \bar{P}_\theta(\varphi)$ – ковариация, $\sigma(P_\theta(\varphi))$, $\sigma(S_1)$ – среднеквадратические отклонения коэффициента поляризации и параметра Стокса S_1 соответственно.

Полученный коэффициент корреляции равен значению 0,793, что подтверждает высокую степень коррелированности коэффициента поляризации и параметра Стокса S_1 . Проверка значимости коэффициента корреляции произведена с помощью квантиля распределения Стьюдента при уровне значимости 0,01 [8].

$P_{\alpha=0,01,k=9} = 0.73$, что указывает на существенную связь между изучаемыми параметрами, т. к. $r(P_\theta, S_1) > P_{\alpha=0,01,k=9}$.

Для изучения характера зависимости был проведен регрессионный анализ коэффициента поляризации и параметра Стокса S_1 .

На рисунке 5 изображен график уравнения парной линейной регрессии между исследуемыми параметрами. Коэффициенты парной регрессии рассчитаны методом наименьших квадратов [8]. Уравнение парной регрессии имеет вид

$$P = 0.522 \cdot S_1 + 0.258.$$

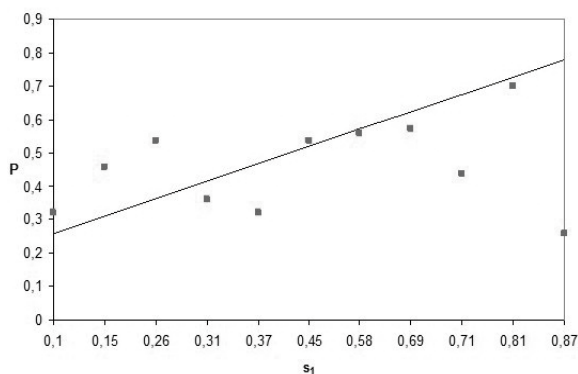


Рисунок 5 – График линейной регрессии между вторым компонентом вектора Стокса и коэффициентом поляризации

Проверка адекватности регрессивной модели производилась с помощью критерия Фишера [8]. Критерий Фишера, вычисляемый как

$$F_9 = \frac{r^2}{1-r^2} (n-2), \text{ где } r - \text{полученный коэффициент корреляции, принимает значение}$$

$F_9 = 11,78$ при теоретическом его значении $F_m = 5,12$, что позволяет признать адекватность данной модели.

Заключение. В результате исследования обосновано применение данной функциональной схемы для измерения интенсивности рассеянного излучения и расчета параметров Стокса. Для данного эксперимента рассчитаны компоненты вектора Стокса. Выявлена корреляционная зависимость между коэффициентом поляризации рассеянного излучения и параметром S_1 вектора Стокса. Получено уравнение парной корреляции данных параметров и установлена адекватность исследуемой регрессионной модели на основе критерия Фишера. Таким образом, можно сделать вывод о зависимости между коэффициентом поляризации и вторым компонентом вектора Стокса, которую возможно рассматривать как близкую к линейной.

Библиографический список

1. Муртазов А.К. Мониторинг загрязнения околоземного пространства оптическими средствами – Рязань. 2010. – 248 с.
2. Mironov V.V. A comparison of systems for recording space debris// Cosmic Research. – 1996. – Vol. 34. – № 4. – P. 382-386.
3. Mironov V.V. A Technique for Estimating the Space Debris Density from the Data of Onboard Recording Systems// Cosmic Research. – 2004. – Vol. 41. – № 2. – P. 204-208.
4. Розенберг Г.В. Вектор-параметр Стокса. // Успехи физических наук. – 1955. – С. 77-110.
5. Ухинов С.А. Методы Монте-Карло с вычислением производных для решения задач теории переноса излучения с учетом поляризации: дисс. – Новосибирск. – 2010. – 235 с.
6. Белошенков А.В. Поляризационные индикаторы рассеяния в прямой и обратной задачах фотометрии удаленных объектов: дисс. – Саратов. – 1996. – 111 с.
7. Савенков С.Н., Климов А.С., Оберомок Е.А., Осовский С.А. Оптимизация измерения матрицы Мюллера с использованием обобщенного временного подхода// Вестник Днепропетровского университета. Серия «Физика. Радиоэлектроника». – Днепропетровск. 2008. – Выпуск 15. – С. 23-29.
8. Крамер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика – М., 2009. – 550 с.

УДК 517.977.58, 519.668

А.И. Бобиков, Д.М. Грушин

ИНСТРУМЕНТАРИЙ ДЛЯ СИНТЕЗА НЕЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА, ОСНОВАННОГО НА РЕШЕНИИ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ СОСТОЯНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ В СРЕДЕ GUI СИСТЕМЫ МАТЛАВ

Рассматривается задача, целью которой является разработка инструментария для синтеза регулятора нелинейных систем, представленных моделью «вход-состояние-выход». При проектировании регулятора применяется метод, основанный на решении ЗСУР. Применение ЗСУР регулятора позволяет привести вектор состояния и сигнал управления к нулевым значениям. Для решения задачи слежения применяется интегральное ЗСУР управление. В приложении реализована возможность проектирования системы управления с наблюдателем состояния, который основан на решении зависящего от состояния алгебраического уравнения Риккати (ЗСАУР).

Ключевые слова: нелинейные системы, ЗСУР регулятор, наблюдатель ЗСАУР, интегральное ЗСУР управление.

Введение. Модели, которые адекватно описывают свойства объекта во всем рабочем диапазоне, почти всегда являются нелинейными. В связи с вышесказанным возникла необходимость разработки и применения нелинейных методов управления.

Существуют многочисленные методы нелинейного управления, каждый со своими плюсами и минусами. Область применения большинства из них достаточно узка [8].

Вот лишь некоторые из хорошо известных нелинейных методов управления с обратной связью: линеаризация обратной связью; бэкстеппинг; метод функций управления Ляпунова [8]. Для получения оптимального закона управления применяют метод, основанный на решении уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана (ГЯБ) [11, 14]. Применение уравнения ГЯБ для синтеза управляющих воздействий для нелинейных систем наталкивается, как правило, на сложности аналитического и вычислительного порядков [1]. Для квадратичных функционалов качества в задаче стабилизации можно осуществить переход от скалярного уравнения в частных производных к матричному уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (ЗСУР), т.е. переход от метода оптимального нелинейного управления к методу ЗСУР [14].

Отметим следующие достоинства метода ЗСУР:

- нахождение компромисса между применимостью и вычислительными затратами;

- возможность «интуитивно» управлять поведением системы;
- устойчивость;
- робастность [1, 3, 4].

К сожалению, очень трудно найти закон ЗСУР управления в аналитическом виде для систем высокого порядка, поэтому возникает необходимость создания пользовательского приложения, в котором применяется численный метод. В результате использования численного метода получаем набор значений сигнала управления в дискретные моменты времени. Второй причиной разработки приложения послужило желание избавить проектировщика от необходимости создавать для каждой нелинейной системы отдельную имитационную модель в среде SIMULINK, а также желание позволить проектировщику сохранять и загружать результаты работы.

Идея создания приложений для проектирования различных регуляторов, основанных на методах теории автоматического управления, не нова. Например, в [10] разрабатывается программа для синтеза составного нелинейного управления с обратной связью. Актуальность данной работы заключается в том, что на данный момент не существует отечественного приложения, позволяющего синтезировать ЗСУР регуляторы без применения наблюдателя состояния, с использованием наблюдателя состояния, а также позволяющего проектировать интегральное ЗСУР управление. *Цель работы* – кратко рассмотреть метод ЗСУР и реализовать программу в

пакете MATLAB, которая позволит проектировать ЗСУР управление, интегральное ЗСУР управление, ЗСУР управление с наблюдателем состояния ЗСАУР, а также проводить имитационное моделирование замкнутых систем с ЗСУР управлением.

Теоретические сведения о методе ЗСУР.

Рассмотрим следующую задачу нелинейного оптимального управления, где модель автономной, нелинейной по состоянию и аффинной по управлению системы, представлена в виде [1]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u(t), \quad x_0 = x(0), \\ f(0) &= 0, \quad g(x) \neq 0,\end{aligned}\quad (1)$$

с вектором состояния $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$, входом $u \in R^m$, вектором $f(x) \in R^n$ и матрицей $g(x) \in R^{n \times m}$. Необходимо найти управление, при котором элементы вектора состояния стремятся к нулю [2]. Для синтеза такого управления минимизируется линейный квадратичный функционал:

$$\begin{aligned}J(x_0, u(t)) &= \int_0^\infty x^T(t)Q(x)x(t) + \\ &+ u^T(t)R(x)u(t)dt,\end{aligned}\quad (2)$$

где весовые матрицы $Q \in R^{n \times n}$ и $R \in R^{m \times m}$ зависят от состояния. Матрица $Q(x)$ является положительной полуопределенной, а матрица R – положительно определенной.

Так как минимизация критерия качества (2) требует больших вычислительных мощностей, применяется приближенный метод, основанный на решении ЗСУР. В работах Шимена и Клутье [2, 4] показано, что ЗСУР управление не сильно отличается от нелинейного оптимального управления.

Минимизация осуществляется с помощью решения уравнения ЗСУР [13]. Чтобы получить уравнения ЗСУР, необходимо провести «расширенную линеаризацию» [1], в результате которой модель нелинейной системы (1) можно представить как

$$\dot{x}(t) = A(x)x + B(x)u, \quad x_0 = x(0). \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет линейную структуру с матрицами $A(x)$ и $B(x)$ такими, что

$$f(x) = A(x)x, \quad g(x) = B(x). \quad (4)$$

Для систем выше первого порядка непрерывные нелинейные матричные функции $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$ неоднозначно определяются с помощью расширенной линеаризации [3].

Фактором, влияющим на качество работы

замкнутой системы, является выбор весовых матриц Q и R , входящих в уравнение Риккати и являющихся параметрами проектирования [12].

Матрица Q представляет собой матрицу весовых коэффициентов, используемую для того, чтобы «штрафовать» элементы вектора состояния за слишком большие их отклонения от нулевого значения. Аналогично матрица R используется, чтобы «штрафовать» управляющее воздействие [1].

Для синтеза ЗСУР управления также необходимо выполнение 3-х условий.

Условие 1. $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией, зависящей от x .

Условие 2. Состояние $x = 0$ является точкой равновесия системы, такой, что $f(0) = 0$ при $u = 0$.

Условие 3. Пара $\{A(x), B(x)\}$ является поточно управляемой или стабилизируемой для $\forall x$ [3].

Следуя технологии ЛКР, получаем управление с обратной связью по состоянию:

$$u(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x. \quad (5)$$

При выполнении условий 1-3 матрица $P(x)$ является единственным, симметричным, положительно определенным (поточно стабилизируемым) решением зависящего от состояния уравнения Риккати

$$\begin{aligned}P(x)A(x) + A^T(x)P(x) - \\ P(x)B(x) \cdot R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

В результате использования ЗСУР управления находим траекторию x , которая является решением квазилинейного уравнения замкнутой системы

$$\dot{x} = [A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x)]x. \quad (7)$$

Поэтому ЗСУР управление является таким, что нелинейный закон управления (5) определяет матрицу замкнутой системы

$$A_{cl}(x) = A(x) - B(x)K(x). \quad (8)$$

Эта матрица является поточно гурвицевой, т. е. $\text{Re}[\lambda_i(A_{cl}(x))] < 0$ для $\forall x$ (здесь λ – это собственные значения матрицы замкнутой динамики) [1].

Нелинейные системы с ЗСУР управлением являются локально асимптотически устойчивыми, что доказано в работах Банка и Клутье [3, 4].

Методология проектирования наблюдателя, основанная на решении зависящего от

состояния алгебраического уравнения Риккати (ЗСАУР). Проблема проектирования наблюдателя возникает, как только появляется необходимость во внутренней информации о системе при доступных внешних измерениях. Однако нельзя использовать много датчиков для измерения сигналов, характеризующих поведение системы, по причинам их стоимости и технологических ограничений [15].

Наблюдатель ЗСАУР основывается на решении двойственной (дуальной) задачи ЗСУР, основанной на технологии построения нелинейных регуляторов [6]. При этом наблюдатель имеет такую же структуру, как непрерывный стационарный линейный наблюдатель Калмана [16]. В отличие от расширенного наблюдателя Калмана (РНК) [16], который использует якобиан нелинейностей в динамике системы, наблюдатель ЗСАУР основан на расширенной линеаризации, которая приводит нелинейную систему к линейной структуре с зависящими от состояния параметрами [15]. Этот метод создает дополнительные степени свободы, которые можно использовать, чтобы преодолеть ограничения традиционных методов оценивания вектора состояния, такие как низкая эффективность, сингулярность и потеря свойства наблюдаемости [6].

Рассмотрим расширенную линеаризацию модели нелинейной системы (3), где $x \in R^n$ является достаточно гладкой функцией вектора состояния x . Выход задается

$$y = C(x)x, \quad (9)$$

где $C(x) \in R^{p \times n}$ – матрица выхода. Дифференциальное уравнение для оценки вектора состояния определяется как

$$\dot{\hat{x}} = A(\hat{x})\hat{x} + \Psi\{\hat{x}, [C(x)x - C(\hat{x})\hat{x}]\} + B(\hat{x})u, \quad (10)$$

где Ψ – дополнительное слагаемое наблюдателя, благодаря которому вектор оценок состояния $\hat{x} \rightarrow x$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть ошибка оценивания для системы $e = x - \hat{x}$ и u – управление.

Наблюдатель ЗСАУР с уравнением (10) является субоптимальным наблюдателем, так как приближенно минимизирует функционал стоимости

$$J = \int_0^{\infty} (e^T \bar{Q} e + u^T \bar{R} u) dt, \quad (11)$$

где $\hat{x} \in R^n$, $u \in R^m$ и $\bar{Q} \in R^{n \times n}$ – симметричная положительно полуопределенная матрица, а $\bar{R} \in R^{m \times m}$ – симметричная положительно определенная матрица. В работе [7] показано, что наблюдатель (10) обеспечивает асимптотическую

устойчивость нулевого состояния равновесия системы, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$. Предлагаемый в статье нелинейный наблюдатель строится, имитируя наблюдатель для линейных систем.

Чтобы найти субоптимальный наблюдатель, минимизируем функционал стоимости (11), решая уравнение ЗСАУР.

Выбираем дополнительное слагаемое наблюдателя

$$\Psi\{\hat{x}, [C(x)x - C(\hat{x})\hat{x}]\} = L(\hat{x})(C(x)x - C(\hat{x})\hat{x}), \quad (12)$$

где

$$L(\hat{x}) = P(\hat{x})C^T(\hat{x})\bar{R}^{-1} \quad (13)$$

является параметром наблюдателя и $P(\hat{x})$ является решением следующего уравнения ЗСАУР

$$A(\hat{x})\bar{P}(\hat{x}) + \bar{P}(\hat{x})A^T(\hat{x}) - \bar{P}(\hat{x})C^T(\hat{x})\bar{R}^{-1}C(\hat{x})\bar{P}(\hat{x}) + \bar{Q} = 0. \quad (14)$$

Матрицы $\bar{Q}$ и $\bar{R}$ позволяют настраивать характеристики наблюдателя. Часто матрицы $\bar{Q}$ и $\bar{R}$ выбираются равными матрицам Q и R . После всех преобразований получаем следующее уравнение наблюдателя ЗСАУР

$$\dot{\hat{x}} = A(\hat{x})\hat{x} + B(\hat{x})u + L(\hat{x})[C(x)x - C(\hat{x})\hat{x}]. \quad (15)$$

Анализируя уравнения (12-15) и уравнения (3, 6), нетрудно прийти к выводу, что задача построения наблюдателя ЗСАУР дуальна, другими словами, эквивалентна задаче проектирования ЗСУР регулятора.

Интегральное ЗСУР управление. В работе [9] предлагается усовершенствовать метод ЗСУР с помощью введения в систему дополнительной переменной. Такая модернизация метода ЗСУР позволяет перейти от задачи регулирования к задаче слежения. Уравнения объекта управления (3, 9) расширяются с помощью введения задающего воздействия v и составного вектора состояния $\bar{x}$:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}(x)\bar{x} + \bar{B}(x)u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad (16)$$

где

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \int e(\tau) d\tau \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}(x) = \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(x) = \begin{bmatrix} B(x) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$e = v - Cx, \quad C \in R^{p \times n},$$

здесь n – порядок системы и $1 \leq p \leq n$. Необхо-

можно выбрать весовые матрицы $\tilde{Q}(x) \in R^{(n+p) \times (n+p)}$ и $\tilde{R}(x) \in R^{m \times m}$.

Затем решается расширенное уравнение Риккати относительно $\tilde{P}(x)$:

$$\tilde{P}(x)\bar{A}(x) + \bar{A}^T(x)\tilde{P}(x) - \tilde{P}(x)\bar{B}(x)\tilde{R}^{-1}(x)\bar{B}^T(x)\tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x) = 0. \quad (17)$$

Теперь не составит особого труда определить интегральное ЗСУР управление, которое вычисляется по следующей формуле:

$$u(\bar{x}) = -\tilde{R}^{-1}(x)\bar{B}^T(x)\tilde{P}(x)\bar{x}. \quad (18)$$

Описание работы приложения. Для создания приложения с «дружелюбным» графическим интерфейсом используется специализированная среда GUIDE, входящая в состав системы MATLAB [5]. Проектировщик осуществляет работу с приложением через три различных окна, созданных средствами среды GUIDE.

Главное окно, с помощью которого синтезируется ЗСУР регулятор без наблюдателя (рисунок 1).

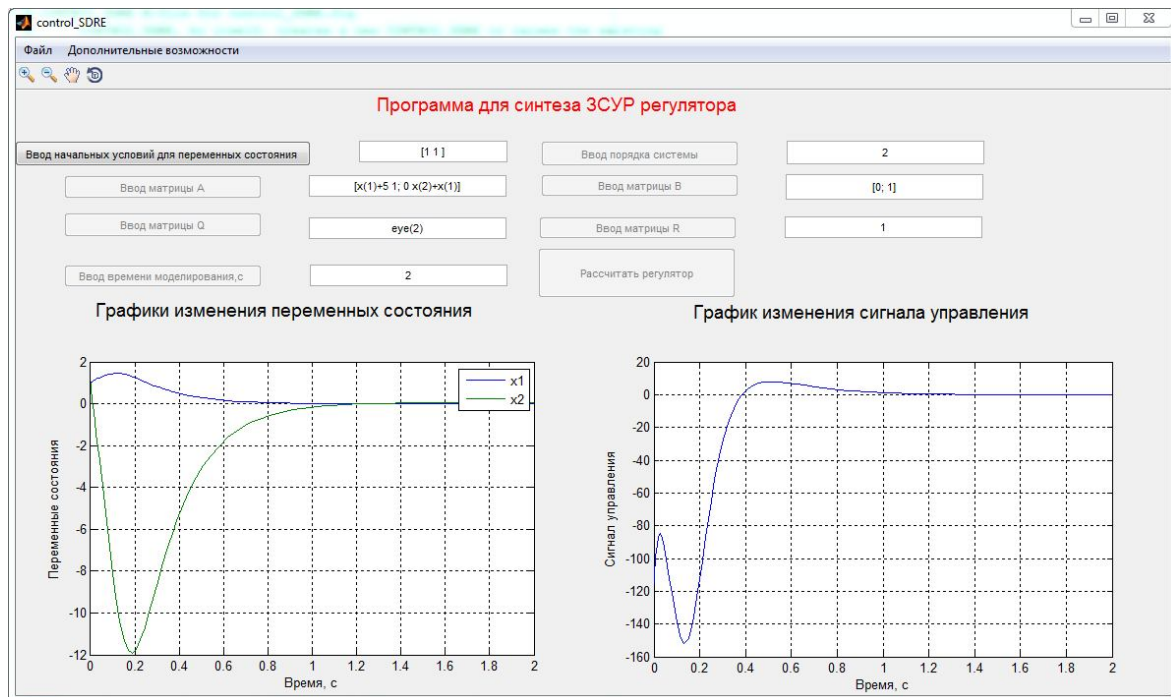


Рисунок 1 – Главное окно приложения

Все, что требуется для работы – это ввести в текстовые поля матрицы модели системы, весовые матрицы, начальные условия, порядок системы и время имитационного моделирования. Ввод осуществляется с помощью кнопок и текстовых полей для ввода. Сначала активна только кнопка, отвечающая за ввод начальных состояний. Если начальное состояние введено правильно, то активируется кнопка, отвечающая за ввод порядка системы. В противном случае выдается ошибка. При верном вводе по цепочке активируются кнопки, а при неправильном вводе – выдаются ошибки.

В текстовых полях для ввода начального состояния, порядка системы и времени моделирования вбиваются только числа, а в полях для ввода матриц наряду с числами используются символы, чтобы ввести элементы вектора состояния. Кнопка, при нажатии на которую вычисляется ЗСУР управление и поведение вектора состояния при этом управлении, активируется последней. Для иллюстрации поведения вектора

состояния и управления на оси выводятся их графики.

На главном окне присутствует панель инструментов. Все элементы панели инструментов предназначены для работы с графиками: лупа для увеличения масштаба графиков, лупа для уменьшения масштаба графиков, панорамирование, используемое для перемещения области просмотра [5].

После запуска приложения текстовые поля ввода уже заполнены для демонстрационного примера, чтобы пользователь разобрался с правилами ввода и чтобы продемонстрировать работоспособность приложения. Графики изменения вектора состояния и управления имеют подписи осей координат. У графиков изменения вектора состояния есть легенда, так как на графике может присутствовать большое количество элементов вектора состояния и без легенды будет не понятно, где на графике изображен тот или иной элемент вектора состояния.

В главном окне реализовано меню с вклад-

ками «Файл» и «Дополнительные возможности». С помощью подпунктов вкладки «Файл» можно сохранить изображение окна приложения в виде bmp-файла, сохранить в txt-файл данные, находящиеся в текстовых полях ввода, а также есть возможность загрузить сохраненные ранее данные из txt-файла, что значительно упрощает работу с приложением, так как отпадает необходимость вбивать заново уже сохраненный про-

ект, и присутствует возможность закрыть приложение.

Вспомогательное окно для синтеза ЗСУР регулятора с применением наблюдателя ЗСАУР, которое запускается при нажатии на подпункт «Проектирование ЗСУР регулятора с использованием наблюдателя ЗСАУР» вкладки меню «Дополнительные возможности» (рисунок 2).

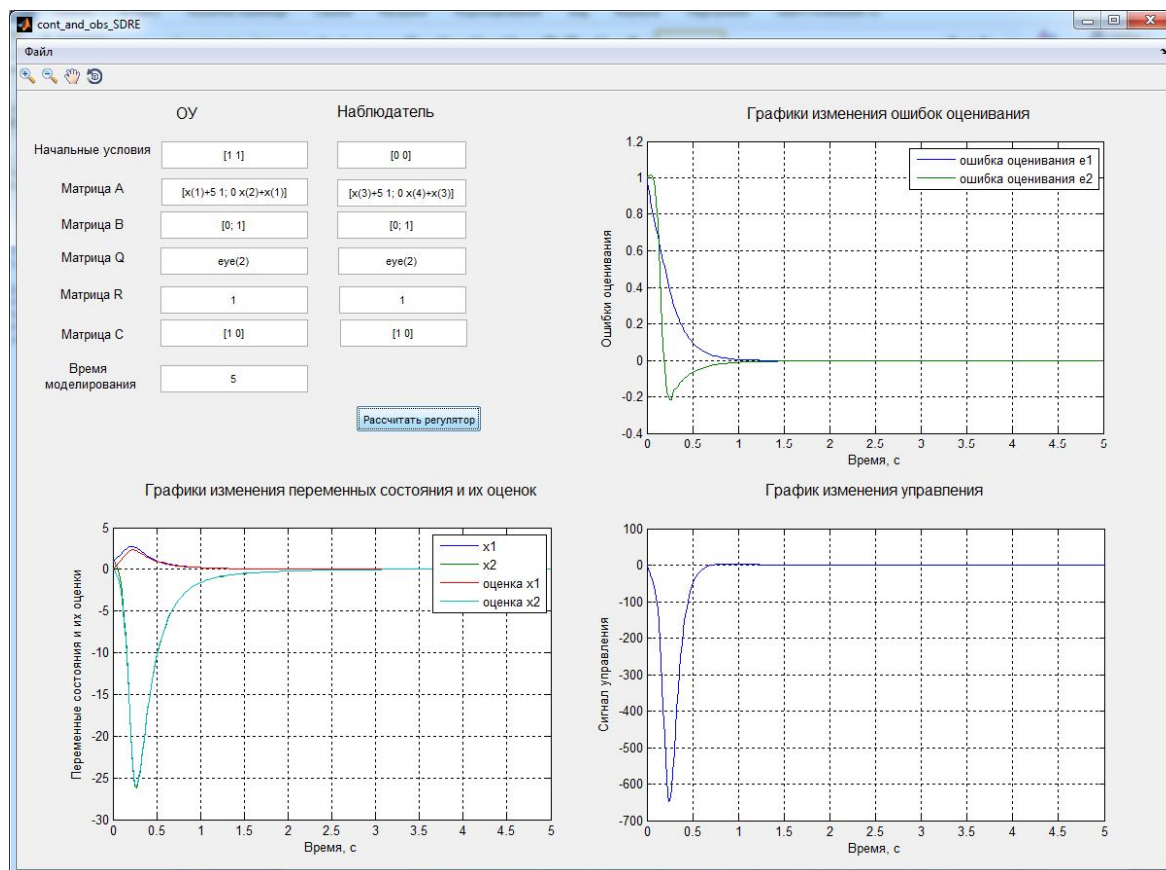


Рисунок 2 – Вспомогательное окно для синтеза ЗСУР регулятора с применением наблюдателя ЗСАУР

Наблюдатель состояния ЗСАУР используется при проектировании ЗСУР управления, так как в закон ЗСУР управления входит весь вектор состояния, который не всегда может быть измерен с помощью датчиков (использование датчиков не всегда является целесообразным). После нажатия на подпункт «Проектирование ЗСУР регулятора с использованием наблюдателя ЗСАУР» вкладки «Дополнительные возможности» открывается новое окно, на котором расположены одна кнопка для синтеза регулятора с наблюдателем, поля для ввода начальных условий, матриц A , B , C , Q , R ОУ и наблюдателя и поле для ввода времени моделирования. Если хотя бы одно из полей для ввода заполнено неверно, то при нажатии на кнопку «Рассчитать регулятор» выдается ошибка с соответствующим описанием и расчет регулятора не производится.

Также присутствуют три оси, на которые

выводятся графики изменения вектора состояния и вектора оценок состояния, графики изменения ошибок оценивания и график изменения сигнала управления. Все графики имеют подписи осей координат. У графиков изменения вектора состояния и вектора оценок состояния, а также графиков изменения ошибок оценивания есть легенда. Текстовые поля ввода уже заполнены для демонстрационного примера.

На вспомогательном окне расположена панель инструментов. Все элементы панели аналогичны элементам панели инструментов для основного окна.

Реализовано меню с вкладкой «Файл», подпункты которой аналогичны подпунктам одноименной вкладки меню главного окна.

Вспомогательное окно для синтеза интегрального ЗСУР управления, которое запускается при нажатии на подпункт «Проектирование

ЗСУР регулятора с интегральным управлением» вкладки меню «Дополнительные возможности» (рисунок 3).

При нажатии на подпункт «Проектирование ЗСУР регулятора с интегральным управлением» вкладки «Дополнительные возможности» запускается вспомогательное окно. Ввод начального условия, порядка системы, матриц A , B , C , Q , R

и времени моделирования производится с помощью кнопок и текстовых полей для ввода. При неверном вводе выдается соответствующая ошибка, а при верном – происходит постепенная активация кнопок. Также присутствуют две оси, на которые выводятся графики изменения вектора состояния и график изменения сигнала управления.

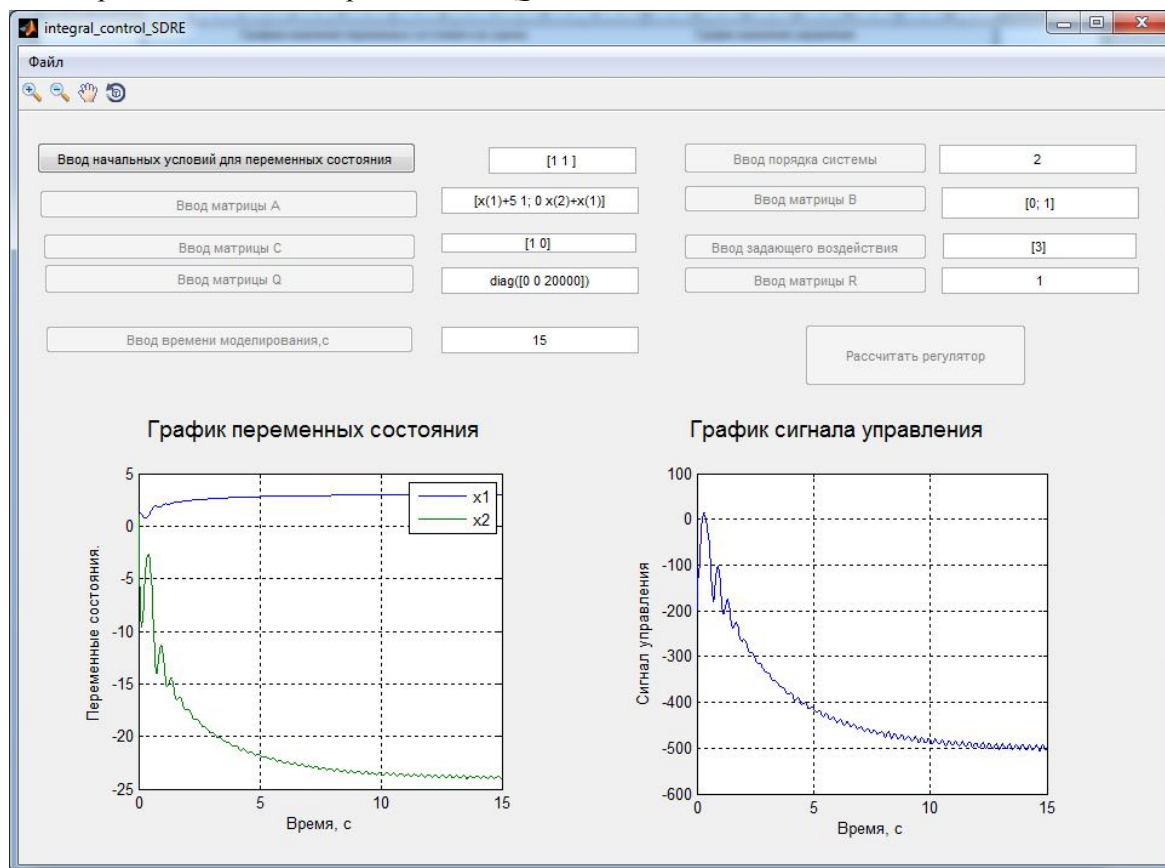


Рисунок 3 – Вспомогательное окно для синтеза интегрального ЗСУР управления

На графиках присутствуют подписи осей координат. У графиков изменения вектора состояния есть легенда.

Панель инструментов расположена в верхнем левом углу вспомогательного окна. Все элементы панели аналогичны элементам панели инструментов для основного окна.

У вкладки «Файл» подпункты аналогичны подпунктам одноименной вкладки меню главного окна.

Поля ввода уже заполнены для демонстрационного примера.

Пример для иллюстрации работы приложения. Для иллюстрации работоспособности разработанного приложения используем демонстрационный пример.

В нем модель ОУ описывается ДУ (19), а весовые матрицы представлены формулой (20):

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + 5x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_2^2 + x_1x_2 + u,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad (19)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1. \quad (20)$$

- Синтез ЗСУР регулятора.

Из графиков на рисунке 1 видно, что элементы вектора состояния и сигнал управления быстро стремятся к нулю (элементы вектора состояния за 0.9 с, а сигнал управления за 0.85 с).

- Синтез ЗСУР регулятора с применением наблюдателя ЗСАУР.

Из рисунка 2 видно, что элементы вектора состояния и вектора оценок состояния, сигнал управления и ошибки оценивания быстро стремятся к нулю (элементы вектора состояния и вектора оценок состояния с ошибками слежения – за 1.4 с, а сигнал управления – за 0.8 с).

- Синтез интегрального ЗСУР управления.

ОУ описывается уравнением (20), задающее воздействие $v=3$, а весовые матрицы

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20000 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

Из графиков изменения вектора состояния (рисунок 3) нетрудно увидеть, что $x_1=v=3$ после 5 с.

Из результатов симуляций для демонстрационного примера можно сделать вывод, что программа успешно производит синтез регуляторов.

Выводы. Испытания приложения на примерах различной сложности доказали его работоспособность.

Стоит отметить, что разработано работоспособное универсальное приложение для синтеза ЗСУР регуляторов с простым и понятным пользователю интерфейсом. Синтез ЗСУР регулятора осуществляется для линейных и нелинейных аффинных по входу систем со скалярным сигналом управления. Предложенное в статье приложение позволяет значительно упростить работу проектировщика.

Библиографический список

1. Erdem E. B. Analysis and real-time implementation of state-dependent riccati equation controlled systems, Thesis for the degree of Doctor of Philosophy University of Illinois at Urbana-Champaign, 2001.
2. Çimen T. On the existence of solutions characterized by Riccati equations to infinite-time horizon nonlinear optimal control problems, Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011.
3. Banks S. P. and Manha K. J. Optimal Control and Stabilization for Nonlinear Systems, IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 9 pp. 179-196, 1992.
4. Cloutier J. R. State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview, Proceedings of the American Control Conference, vol.2, pp. 932-936, 1997.
5. Дьяконов В. П. MATLAB 7.*/R2006/R2007. Самоучитель. Программные средства математических вычислений. Операции с векторами и матрицами. Использование обычной и специальной графики. Обзор расширений в MATLAB. Визуальное программирование GUI. – М.: ДМК-Пресс. 2008. — 768 с.
6. Mracek C. P., Cloutier J. R. and D'Souza C. A. A new technique for nonlinear estimation, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, pages 387–396, 1996.
7. Banks H. T., Lewis B. M., and Tran H. T. Nonlinear feedback controllers and compensators: A state-dependent Riccati equation approach, Computational Optimization and Applications, 37(2): 177-218, 2007.
8. Бобиков А. И. Анализ и проектирование нелинейных систем управления. РГПТУ. Рязань, 2013. – 220 с.
9. Çimen T. State-Dependent Riccati Equation (SDRE) control: a survey, Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, pages 3761-3775, 2008.
10. Cheng G., Chen B. M., Peng K., Lee T. H. A MATLAB toolkit for composite nonlinear feedback control – improving transient response in tracking control, Journal of Control Theory and Applications, pp. 271-279, 2010.
11. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы - СПб.: Питер, 2006. - 272 с.
12. Çimen T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the State-Dependent Riccati Equation (SDRE) method, Annual Reviews in Control, pages 32–51, 2010.
13. Hammett K. D., Hall C. D., Ridgely D. B. Controllability issues in nonlinear the State-Dependent Riccati Equation control, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 5 (1998), pp. 767-773.
14. Huang Y., Lu W-M. Nonlinear Optimal Control: Alternatives to Hamilton-Jacobi Equation, Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3942-3947, 1996.
15. Jaganath C., Ridley A. and Bernstein D. S. A SDRE-based asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems, American Control Conference, pp. 3630-3635, 2005.
16. Haessig D., Friedland B. State dependent differential Riccati equation for nonlinear estimation and control, Proceedings of the 15th World Congress The International Federation of Automatic Control Barcelona, Spain, pages 227-232, 2002.