Всероссийская студенческая олимпиада по математике (I тур)
РГРТУ
14 марта 2015 года
1 курс

1. Найти наименьшее $n \in N$, при котором выполняется равенство $\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Записать левую часть в виде матрицы $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$, $n \in N$.

Ответ: согласно указанию

$$\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6} \\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{6} = 0 \\ \cos\frac{\pi n}{6} = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 6k,\ k \in N.$$ Наименьшее $n = 12$.

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 \end{vmatrix}.$$

Решение

Данный определитель является определителем Ван-дер-Монда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

который с помощью элементарных преобразований приводится к виду

$$\Delta = \prod_{j>k=1}^{n} \left(\lambda_j - \lambda_k\right).$$

При $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 4,\ \lambda_5 = 5,\ \lambda_6 = 6$. Получаем

$$\Delta = (6-5)(6-4)(6-3)(6-2)(6-1)*$$
$$*(5-4)(5-3)(5-2)(5-1)*$$
$$*(4-3)(4-2)(4-1)*$$
$$*(3-2)(3-1)*$$
$$*(2-1)=$$
$$=1!2!3!4!5!=34560$$

3. Разложить по формуле Тейлора функцию $\sin(\sin(x))$ при $x \to 0$ до порядка $o(x^9)$.

Решение

По формуле Тейлора имеем

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9).$$

Тогда

$$\sin(\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3!} + \frac{\sin^5(x)}{5!} - \frac{\sin^7(x)}{7!} + \frac{\sin^9(x)}{9!} + o(\sin^9(x)).$$

Подставим в данное выражение разложение в ряд Тейлора функции $\sin(x)$.

После приведения подобных слагаемых получим:

$$\sin(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{8x^7}{315} + \frac{13x^9}{2520} + o(x^9).$$

4. В компании из 10 человек трое правдивые, а остальные хитрецы, которые на любой вопрос отвечают правду или лгут по своему усмотрению. Докажите, что, задавая вопросы членам этой компании, по их ответам можно обнаружить хотя бы одного хитреца.

Решение

Достаточно каждому предложить назвать всех правдивых в этой компании. Если *A* – правдивый, то он назовет троих правдивых, в том числе и себя. Тогда каждый из двух других названных им правдивыми *B* и *C* действительно является правдивым и назовет ту же тройку *A, B, C*. Если это не произойдет, то *A* – хитрец. Если же такая тройка образуется, то либо все трое действительно правдивые, либо все трое – хитрецы. Тогда в последнем случае должна образоваться другая тройка из правдивых. А так как 10 человек не могут разбиться на тройки, то один из них не может попасть в такую тройку, он и является хитрецом.

5. Вычислить предел

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

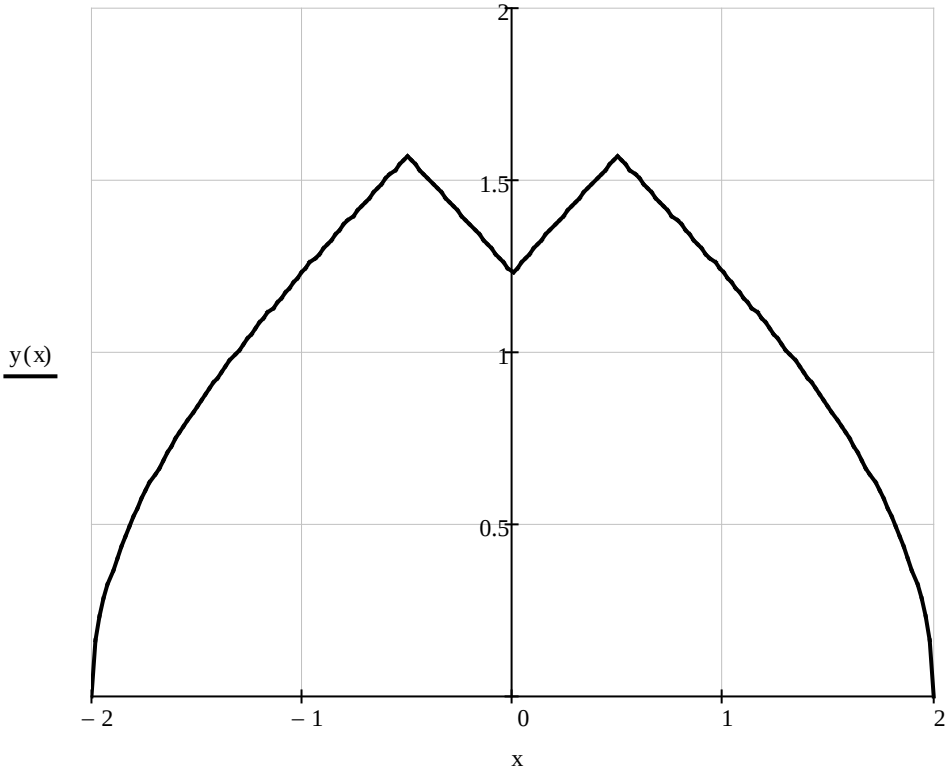
6. Найти производные от функций

а) $y=\dfrac{8\,\mathrm{ch}^2 x\cdot \mathrm{arctg}^4\left(x^3\right)\cdot \ln \mathrm{ch}\, x}{\mathrm{th}^2 x\cdot\left(x^2+5\right)^2}$; б) $y(x)=x^{x^{x^{x^{x}}}}$.

Решение. Необходимо использовать логарифмическое дифференцирование.

7. Построить эскиз графика функции $y=\arccos\left|\dfrac{1-2|x|}{3}\right|$.

Решение.



8. "От сосны к березе, повернуть направо, пройти столько же. От сосны к дубу, повернуть налево, пройти столько же. Копать посередине." С этим указанием флибустьера Рождерса Вы прибыли на остров. Береза цела, дуб есть, сосна исчезла... Можно ли найти клад? (Повороты делать на $90°$.)

Решение.

Введем декартову систему координат так, чтобы береза имела координаты $Б(-a,0)$, дуб – $Д(0,a)$, и обозначим координаты сосны $C(x,y)$. Точка $Б'$, в которую мы попадем, пройдя от сосны к березе, повернув направо и пройдя столько же, имеет координаты $Б'(-y,a+x)$, соответственно, точка $Д'(y,a-x)$. Тогда координаты клада $(\frac{y-y}{2},\frac{a+x+a-x}{2})=(0,a)$ – не зависят от координат сосны.

9. Построить график функции $y=f(x)=2arctgx+\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

Решение. Область определения $x \in D(f) = \mathbb{R}$, функция нечетная ($f(-x) = f(x)$), непрерывная на всей области определения. Находим производную

$$y' = \left(2arctgx + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2} \right) \right)' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)' =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}} \cdot \frac{2\left(1+x^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2 - 4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}} \cdot \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}}{1+x^2}} \cdot \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} \cdot \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}}.$$

Итак, $y' = f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{\left|1-x^2\right|}$.

1) При $|x| > 1$ имеем $x^2 > 1$, следовательно, $1-x^2 < 0$, значит $\left|1-x^2\right| = -\left(1-x^2\right)$ и $y' = f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{-\left(1-x^2\right)} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} \equiv 0$.

Значит, при $|x| > 1$ функция постоянная и

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 2arctg(1) + \arcsin\left(\frac{2}{1+1} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

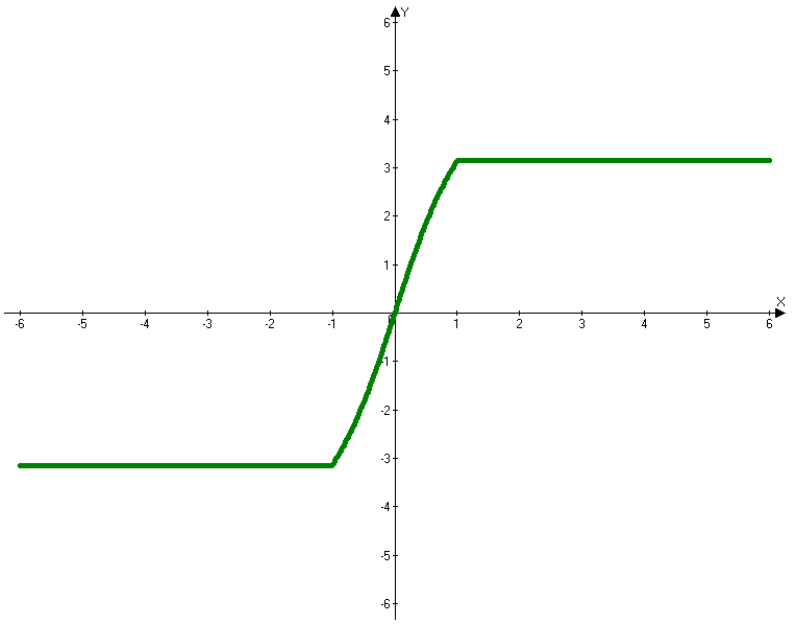
2) При $|x| < 1$ имеем $x^2 < 1$, следовательно, $1-x^2 > 0$, значит $\left|1-x^2\right| = 1-x^2$ и

$$y' = f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1-x^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{4}{1+x^2}.$$

Значит, при $|x| < 1$ производная $y' = \frac{4}{1+x^2} > 0$, что говорит о том, что функция строго монотонно возрастает.

3) В точках $x = -1$, $x = 1$ функция не имеет конечной производной (функция в этой точке не гладкая), причем $f(1) = 2arctg(1) + \arcsin\left(\frac{2}{1+1} \right) = \pi$.

График функции имеет вид (используем нечетность функции).



10. Как изменяются корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, если коэффициенты $b,\ c$ считать постоянными, а коэффициент a устремлять к нулю.

Решение. Корни квадратного уравнения выглядят следующим образом

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Находим $\lim\limits_{a\to 0}x_1=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot 0\cdot c}}{2\cdot 0}\right)=\left(\dfrac{-b+b}{0}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

.

Для раскрытия неопределенности применим метод сопряженных выражений

$$\lim_{a\to 0}x_1=\lim_{a\to 0}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\lim_{a\to 0}\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}=$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\left(-b\right)^2-\left(b^2-4ac\right)}{2a\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}=\lim_{a\to 0}\frac{4ac}{2a\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}=\lim_{a\to 0}\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}=$$

$$=\left[\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4\cdot 0\cdot c}}\right]=\left[\frac{2c}{-b-b}\right]=-\frac{c}{b}.$$

Находим $\lim\limits_{a\to 0}x_2=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot 0\cdot c}}{2\cdot 0}\right)=\left(\dfrac{-b-b}{0}\right)=-\infty.$

Ответ: $\lim\limits_{a\to 0}x_1=-b/c$, $\lim\limits_{a\to 0}x_2=-\infty$.

Всероссийская студенческая олимпиада по математике (I тур)
РГРТУ
14 марта 2015 года
2-5 курс

1. Найти наименьшее $n \in N$, при котором выполняется равенство $\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Записать левую часть в виде $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$, $n \in N$ ..

Ответ: согласно указанию

$$\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6} \\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{6} = 0 \\ \cos\frac{\pi n}{6} = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 6k,\ k \in N.$$ Наименьшее $n = 12$.

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 \end{vmatrix}.$$

Решение

Данный определитель является определителем Ван-дер-Монда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

который с помощью элементарных преобразований приводится к виду

$$\Delta = \prod_{j>k=1}^{n} \left(\lambda_j - \lambda_k\right).$$

При $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 4,\ \lambda_5 = 5,\ \lambda_6 = 6$. Получаем

$$\Delta = (6-5)(6-4)(6-3)(6-2)(6-1)*$$
$$*(5-4)(5-3)(5-2)(5-1)*$$
$$*(4-3)(4-2)(4-1)*$$
$$*(3-2)(3-1)*$$
$$*(2-1)=$$
$$=1!2!3!4!5!=34560$$

3. Разложить по формуле Тейлора функцию $\sin(\sin(x))$ при $x \to 0$ до порядка $o(x^9)$.

Решение

По формуле Тейлора имеем

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9).$$

Тогда

$$\sin(\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3!} + \frac{\sin^5(x)}{5!} - \frac{\sin^7(x)}{7!} + \frac{\sin^9(x)}{9!} + o(\sin^9(x)).$$

Подставим в данное выражение разложение в ряд Тейлора функции $\sin(x)$.

После приведения подобных слагаемых получим:

$$\sin(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{8x^7}{315} + \frac{13x^9}{2520} + o(x^9).$$

4. В компании из 10 человек трое правдивые, а остальные хитрецы, которые на любой вопрос отвечают правду или лгут по своему усмотрению. Докажите, что, задавая вопросы членам этой компании, по их ответам можно обнаружить хотя бы одного хитреца.

Решение

Достаточно каждому предложить назвать всех правдивых в этой компании. Если *A* – правдивый, то он назовет троих правдивых, в том числе и себя. Тогда каждый из двух других названных им правдивыми *B* и *C* действительно является правдивым и назовет ту же тройку *A, B, C*. Если это не произойдет, то *A* – хитрец. Если же такая тройка образуется, то либо все трое действительно правдивые, либо все трое – хитрецы. Тогда в последнем случае должна образоваться другая тройка из правдивых. А так как 10 человек не могут разбиться на тройки, то один из них не может попасть в такую тройку, он и является хитрецом.

5. Вычислить предел

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

6. Найти производные от функций

а) $y = \dfrac{8\,\mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{arctg}^4\left(x^3\right) \cdot \ln \mathrm{ch}\, x}{\mathrm{th}^2 x \cdot \left(x^2+5\right)^2}$; б) $y(x) = x^{x^{x^{x^x}}}$.

Решение. Необходимо использовать логарифмическое дифференцирование.

7. Найти все функции, имеющие непрерывную вторую производную и такие, что при всех x выполняется равенство $f(5x+1) = 25 f(x)$.

Решение

Продифференцировав равенство два раза, получаем $f''(5x+1) = f''(x)$, или $f''(x) = f''((x-1)/5)$. Возьмем произвольное $x = a$ и строим последовательность по правилу $a_0 = a$, $a_{k+1} = (a_k - 1)/5$. Тогда значения f'' во всех точках этой последовательности равны. Предел этой последовательности равен $-1/4$, так как $|a_{k+1} + 1/4| = |a_{k+1} + 1/4|/5$. В силу непрерывности значения f'' во всех точках этой последовательности равны $f''(-1/4)$, а значит, $f''(x)$ – константа.

Тогда $f(x) = c_2x^2 + c_1x + c$. Подставив это выражение в исходное равенство, получаем систему уравнений, из которых находим $c_2 = 16c$, $c_1 = 8c$, и $f(x) = (4x + 1)^2c$.

8. Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2+n}x^n .$$

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2+n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)x^n =$$

$$= -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1} = -\frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - x\right) + \ln(1+x) =$$

$$= -\frac{\ln(1+x)}{x} + 1 + \ln(1+x) \text{ при } -1 < x \le 1.$$

9. Снегопад начался до полудня и продолжался далее с постоянной интенсивностью. Ровно в полдень бригада вышла на уборку снега на шоссе постоянной ширины. За первые 2 часа рабочие расчистили 2 км., а за следующие 2 часа им удалось продвинуться лишь 1 км. Скорость уборки снега постоянна. Определить время начала снегопада.

Решение

Пусть b - скорость выпадения снега (увеличение толщины снежного покрова за единицу времени, $см/час$), c - производительность уборки снега (уменьшение толщины снега за единицу времени на единицу длины шоссе, $см \cdot км/час$). Пусть снег начался за t_0 часов до полудня. Тогда, в момент времени t перед бригадой находится участок шоссе, покрытый слоем снега толщиной $b(t+t_0)$. Скорость v передвижения бригады по шоссе равна

$$v = \frac{c\,км}{b(t+t_0)\,час}.$$

За время T бригада удалится от начальной точки на расстояние

$$x = \int_0^T v\,dt = \int_0^T \frac{c}{b(t+t_0)}\,dt = \frac{c}{b}\left(\ln(t_0+T) - \ln t_0\right).$$

По условию задачи: $x(2)=2$, $x(4)=3$, получаем систему уравнений:

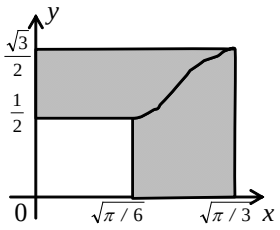
$$\begin{cases} \dfrac{c}{b}\ln\dfrac{t_0+2}{t_0}=2 \\ \dfrac{c}{b}\ln\dfrac{t_0+4}{t_0}=3, \end{cases}$$

Откуда $t_0=\sqrt{5}$ *час* $=1$ *час* 14 *мин* 10 *сек*, т.е. снегопад начался в 10*час*, 45*мин*, 50*сек*.

10. Вычислите сумму интегралов: $\int\limits_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}}\sin(x^2)dx+\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{\arcsin x}dx$.

Решение

Подынтегральные функции являются взаимно обратными, положительными, возрастающими. Пределы интегрирования соответствуют друг другу. Поэтому если во втором интегральном выражении заменить переменную x на y, то интегралы будут численно равны площадям заштрихованных фигур, изображенных на рисунке.



Сумма площадей вычисляется как разность площадей прямоугольников и равна $\dfrac{\sqrt{\pi}\left(\sqrt{6}-1\right)}{2\sqrt{6}}$.