ISSN 1995-4565. Вестник РГРТУ. № 2 (выпуск 24). Рязань, 2008

УДК 517.1

В.А. Саблина

О ПОРЯДКАХ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ В ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ, I

Рассмотрены вопросы определения порядка замкнутого класса и выразимости функций замкнутого класса формулами над базисной системой на примере двух классов трехзначной логики: класса всех функций, сохраняющих основание {x}, и класса всех функций, сохраняющих основание {0,x}. Доказано, что оба рассмотренных класса имеют порядок 2. Указаны способы выражения функций классов формулами над базисными системами данных классов.

Введение. Проблема функциональной выразимости в многозначной логике P_k в наиболее общей постановке заключается в описании решетки всех замкнутых классов с указанием, когда это возможно, базисов и порядков. Полностью эта проблема решена лишь в двузначном случае [1]. Кроме того, проводились исследования замкнутых классов многозначной логики P_k $(k>2)$ [2-5]. Выяснилось, что при изучении решетки замкнутых классов многозначной логики уже при $k=3$ чувствуется нехватка методов определения порядков замкнутых классов, методов выразимости функций замкнутого класса формулами над базисной системой данного класса.

Обычно для описания замкнутых классов используется язык предикатов, предложенный А.В. Кузнецовым [6]. Однако, как показал И.А. Черепов [7], предикатно описуемые замкнутые классы описываются и как классы сохранения основания [8], что при описании решетки замкнутых классов в P_k не только более удобно в обращении, но и позволяет ввести перечень оснований (как, например, в [9]), который будет дисциплинировать исследование решетки замкнутых классов в P_k. В противном случае исследования приобретают характер хаоса [3,10,11].

Цель работы. В настоящей работе автор полагает начало развитию методов определения порядков замкнутых классов с указанием схем реализуемости функций в базисе того же порядка согласно перечню [9]; исследован поставленный вопрос относительно первых двух классов сохранения основания: $\{x\}$ и $\{0,x\}$.

Класс *ПС*1

Назовем функцию $f(\widetilde{x})$ α-функцией, если $f(x,\ldots,x)=x$. Везде в дальнейшем $\widetilde{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, n – количество аргументов функции.

Рассмотрим класс всех α-функций $ПС1=\{f(\widetilde{x})\mid f(x,\ldots,x)=x\}$ (первый класс перечня [9]) из P_3. Легко показать, что α-функция $2x_1+2x_2 \pmod 3$ порождает линейную функцию:

$$2(2x_1+2x_2)+2(2x_3+2x_4)=$$
$$=4(x_1+x_2+x_3+x_4)=x_1+x_2+x_3+x_4 \pmod 3.$$

Полученная линейная функция, в свою очередь, порождает линейные функции вида $x_1+x_2+\ldots+x_{3l+1} \pmod 3$ для любого натурального l.

Пусть
$$\psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x})=\begin{cases}1 \text{ при } \widetilde{x}=\widetilde{\alpha},\\ 2 \text{ при } \widetilde{x}=2\widetilde{\alpha},\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases} \qquad (1)$$

причем $\widetilde{\alpha}\in\{0,1\}^n\setminus\{\widetilde{0}\}$.

Отсюда
$$\psi^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})=\begin{cases}1 \text{ при } \widetilde{x}=\widetilde{1},\\ 2 \text{ при } \widetilde{x}=\widetilde{2},\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$\psi^{11}(x_1,x_2)=\begin{cases}1 \text{ при } (x_1,x_2)=(1,1),\\ 2 \text{ при } (x_1,x_2)=(2,2),\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Функция $\psi^{11}(x_1,x_2)$ порождает функцию $\psi^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})$, так как $\psi^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})=\psi^{11}(x_1,\psi^{\widetilde{1}}(x_2,\ldots,x_n))$.

Обозначим:
$$\psi^{\widetilde{1}}_{\widetilde{\beta}}(\widetilde{x})=\begin{cases}1 \text{ при } \widetilde{x}=\widetilde{\beta},\\ \psi^{\widetilde{1}}(\widetilde{x}) \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

причем $\widetilde{\beta}\neq(b,\ldots,b),\ b\in\{0,1,2\}$.

Отсюда для $\beta_1\neq\beta_2;\ \beta_1,\beta_2\in\{0,1,2\}$:
$$\psi^{11}_{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}1 \text{ при } (x_1,x_2)=(\beta_1,\beta_2),\\ \psi^{11}(x_1,x_2) \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Лемма 1. *Функции* $\psi_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})$ *выражаются через функции системы* $\psi_{(\beta_1,\beta_2)}^{11}(x_1,x_2)$ *и* $\psi^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})$*;* $\widetilde{\beta}\neq(b,...,b), b\in\{0,1,2\}$.

Δ Пусть $\widetilde{\beta}$ имеет вид $\widetilde{\beta}^0=(\underbrace{0,...,0}_{r},1,...,1,2,...,2)$.

Тогда для такого $\widetilde{\beta}^0$ получим

$$\psi_{\widetilde{\beta}^0}^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})=\psi^{\widetilde{1}}(\psi_{(\beta_1^0,\beta_{r+1}^0)}^{11}(x_1,x_{r+1}),\psi_{(\beta_1^0,\beta_{r+2}^0)}^{11}(x_1,x_{r+2}),...,$$
$$\psi_{(\beta_1^0,\beta_n^0)}^{11}(x_1,x_n),\psi_{(\beta_{r+1}^0,\beta_1^0)}^{11}(x_{r+1},x_1),...\psi_{(\beta_{r+1}^0,\beta_r^0)}^{11}(x_{r+1},x_r)). \quad (2)$$

Пусть $\widetilde{\beta}$ произвольно. Переставим столбцы матрицы $\begin{pmatrix}\widetilde{x}\\ \widetilde{\beta}\end{pmatrix}$ так, чтобы матрица имела вид $\begin{pmatrix}x_{j_1} & ... & x_{j_n}\\ \beta_1^0 & ... & \beta_n^0\end{pmatrix}$. В левой части (2) произведем переименование переменных согласно подстановке $\begin{pmatrix}x_1 & ... & x_n\\ x_{j_1} & ... & x_{j_n}\end{pmatrix}$. Получим требуемое. ▲

Теорема 1. *Система* α*-функций* $2x_1+2x_2$, $\psi^{11}(x_1,x_2)$, $\psi_{(\beta_1,\beta_2)}^{11}(x_1,x_2)$, $\beta_1\neq\beta_2;\beta_1,\beta_2\in\{0,1,2\}$ *является базисом класса* $\mathit{ПС}1$*, то есть класс* $\mathit{ПС}1$ *имеет порядок 2.*

Δ Произвольная α-функция может быть получена следующим суммированием по модулю 3:

$$f(\widetilde{x})=\sum_{\widetilde{\beta}:f(\widetilde{\beta})=1}\psi_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})+\sum_{\widetilde{\beta}:f(\widetilde{\beta})=2}(\psi_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})+\psi_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{1}}(\widetilde{x}))+$$
$$+\sum_{m}\psi^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})\,(\mathrm{mod}\ 3),$$

где $\widetilde{\beta}\notin(b,...,b), b\in\{0,1,2\}$, m – необходимое количество «нулей», дополняющее число суммируемых функций до $3l+1$, так как подстановка осуществляется в функцию $x_1+x_2+...+$ $+x_{3l+1}$ $(\mathrm{mod}\ 3)$.

Выше показано, что линейная функция $x_1+x_2+...+x_{3l+1}\,(\mathrm{mod}\ 3)$ порождается функцией $2x_1+2x_2$, функция $\psi^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})$ – функцией $\psi^{11}(x_1,x_2)$, функции $\psi_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})$ – функциями $\psi^{\widetilde{1}}(\widetilde{x})$ и $\psi_{(\beta_1,\beta_2)}^{11}(x_1,x_2)$, $\widetilde{\beta}\neq(b,...,b), b\in\{0,1,2\}$. ▲

Класс *ПС*2

Назовем функцию $f(\widetilde{x})$ γ-функцией, если $f(x,...,x)=0$.

Рассмотрим теперь класс функций $\mathit{ПС}2$ (второй класс перечня [9]) из P_3.

$$\mathit{ПС}2=\{f(\widetilde{x})\,|\,f(\{0,x\}^n)\in\{0,x\}\}.$$

Функция $f(\widetilde{x})\in\mathit{ПС}2$ на подкубе $\{0,1\}^n$ не принимает значения 2, так как из определения класса $\mathit{ПС}2$ следует, что $f(\{0,1\}^n)\in\{0,1\}$, то есть функции класса $\mathit{ПС}2$ сохраняют множество $\{0,1\}$.

Лемма 2.1. *Функция* $f(\widetilde{x})\in\mathit{ПС}2$*, определенная на подкубе* $\{0,1\}^n$*, на подкубе* $\{0,2\}^n$ *определяется автоматически.*

Δ Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha}\in\{0,1\}^n$. Составим матрицу $\begin{pmatrix}0 & \widetilde{\alpha} & 2\widetilde{\alpha}\end{pmatrix}^T$, состоящую из столбцов $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$.

Тогда либо $\begin{pmatrix}f(0) & f(\widetilde{\alpha}) & f(2\widetilde{\alpha})\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$, либо $\begin{pmatrix}f(0) & f(\widetilde{\alpha}) & f(2\widetilde{\alpha})\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$. ▲

Следствие. *Функции* $f(\widetilde{x})\in\mathit{ПС}2$ *на наборах* $\widetilde{\beta}$*, где* $\exists i,j\ \beta_i=1,\beta_j=2$*, независимо пробегают все значения из множества* $\{0,1,2\}$.

Класс $\mathit{ПС}2$ содержит функцию $\max(x_1,x_2)$, поскольку $\max(x,x)=\max(0,x)=\max(x,0)=x$, $\max(0,0)=0$, а также функцию $\max(\widetilde{x})=\max(x_1,\max(x_2,...,x_n))$.

Определим функции

$$\varphi_{\beta}^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{x})=\begin{cases}\beta\ \text{при}\ \widetilde{x}=\widetilde{\beta},\\ 0\ \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $\beta\in\{1,2\}$; $\widetilde{\beta}$ такое, что $\exists i,j\quad \beta_i=1,\beta_j=2$.

$\varphi_{\beta}^{\widetilde{\beta}}(\{0,x\}^n)=0$, поэтому $\varphi_{\beta}^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{x})\in\mathit{ПС}2$.

Для случая двух переменных имеем:

$$\varphi_{\beta}^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}\beta\ \text{при}\ (x_1,x_2)=(\beta_1,\beta_2),\\ 0\ \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $\beta,\beta_1,\beta_2\in\{1,2\},\beta_1\neq\beta_2$.

Рассмотрим функцию $\psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x})$, определенную в (1).

Для случая двух переменных имеем:

$$\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}1\ \text{при}\ (x_1,x_2)=(\alpha_1,\alpha_2),\\ 2\ \text{при}\ (x_1,x_2)=(2\alpha_1,2\alpha_2),\\ 0\ \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $\alpha_1,\alpha_2\in\{0,1\};(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$.

Функции $\psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x})$ выражаются через функции $\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)$ следующим образом:

$$\psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x})=\psi^{(\alpha_i,1)}(x_i,\psi^{(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},...,\alpha_n)}(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)),$$

где i выбираем таким образом, чтобы $(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\neq\widetilde{0}$.

Лемма 2.2. *Функции* $\varphi_\beta^{\tilde\beta}(\tilde x)$, $\beta\in\{1,2\}$, $\tilde\beta$ *такое, что* $\exists i,j\ \beta_i=1,\beta_j=2$, *выражаются либо через функции системы* $\varphi_\beta^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$, *если набор* $\tilde\beta\in\{1,2\}^n$, *либо через функции системы* $\varphi_\beta^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$ *и функцию* $\psi^{01}(x_1,x_2)$ *в противном случае;* $\beta,\beta_1,\beta_2\in\{1,2\},\beta_1\neq\beta_2$.

Δ Рассмотрим случай, когда набор $\tilde\beta\in\{1,2\}^n$. Однако $\tilde\beta\neq\tilde 1$ и $\tilde\beta\neq\tilde 2$, что следует из определения функций $\varphi_\beta^{\tilde\beta}(\tilde x)$. Тогда можно выразить: $\varphi_\beta^{\tilde\beta}(\tilde x)=\varphi_\beta^{(\beta_i,\beta_0)}(x_i,\varphi_{\beta_0}^{(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots,\beta_n)}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n))$, где i такое, что $\exists j\ \beta_i=\beta_j, j\neq i$; выбираем $\beta_0:\beta_0=1,\text{если}\ \beta_i=2,\text{и}\ \beta_0=2,\text{если}\ \beta_i=1$.

Рассмотрим теперь случай, когда набор $\tilde\beta\notin\{1,2\}^n$. Учитываем ограничения, наложенные на $\tilde\beta$ при определении функций $\varphi_\beta^{\tilde\beta}(\tilde x)$, а именно то, что $\exists i,j\ \beta_i=1,\beta_j=2$; это означает, что набор $\tilde\beta$, кроме 1 и 2, содержит один или несколько 0. Тогда получаем:
$\varphi_\beta^{\tilde\beta}(\tilde x)=\psi^{01}(x_i,\varphi_\beta^{(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots,\beta_n)}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n))$, где i выбираем такое, чтобы $\beta_i=0$. Если в полученном наборе $(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots,\beta_n)$ есть еще 0, повторяем аналогичное разложение для $\varphi_\beta^{(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots,\beta_n)}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$, иначе дальнейшее разложение сводится к первому случаю. ▲

Теорема 2. *Система функций из* $ПС2$ $\max(x_1,x_2)$, $\varphi_\beta^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$, $\beta,\beta_1,\beta_2\in\{1,2\},\beta_1\neq\beta_2$, $\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)$, $\alpha_1,\alpha_2\in\{0,1\};(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$ *является базисом класса* $ПС2$, *то есть класс* $ПС2$ *имеет порядок 2.*

Δ Произвольная функция $f(\tilde x)\in ПС2$, кроме функции $f(\tilde x)=0$, может быть получена следующим образом:

$$f(\tilde x)=\max\{\max_{\tilde\alpha:f(\tilde\alpha)=1}\psi^{\tilde\alpha}(\tilde x),\max_{\tilde\beta:f(\tilde\beta)=\beta}\varphi_\beta^{\tilde\beta}(\tilde x)\},$$

где $\tilde\alpha\in\{0,1\}^n\setminus\{\tilde 0\}$, $\beta\in\{1,2\}$, $\tilde\beta$ такое, что $\exists i,j\ \beta_i=1,\beta_j=2$.

Таким образом, с помощью функций $\psi^{\tilde\alpha}(\tilde x)$ определяем значения функции $f(\tilde x)$ на подкубе $\{0,1\}^n$ и, следовательно, на подкубе $\{0,2\}^n$, а с помощью функций $\varphi_\beta^{\tilde\beta}(\tilde x)$ – значения на оставшихся наборах $\tilde\beta$.

Выше показано, что функция $\max(\tilde x)$ порождается функцией $\max(x_1,x_2)$; $\psi^{\tilde\alpha}(\tilde x)$ – функциями $\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)$, $\tilde\alpha\in\{0,1\}^n\setminus\{\tilde 0\}$; $\varphi_\beta^{\tilde\beta}(\tilde x)$ – функциями $\varphi_\beta^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$ либо функциями $\varphi_\beta^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$ и функцией $\psi^{01}(x_1,x_2)$, $\beta\in\{1,2\}$, $\tilde\beta$ такое, что $\exists i,j\ \beta_i=1,\beta_j=2$. ▲

Заключение. В статье предложены способы выражения функций двух рассмотренных классов сохранения основания через функции их базисов. Доказано, что данные классы трехзначной логики имеют порядок 2.

В заключение автор выражает свою благодарность В.В. Тарасову, под руководством которого выполнена эта работа.

Библиографический список

1. *Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. – М.: Наука, 1966. – 120 с.

2. *Гниденко В.М.* Нахождение порядков предполных классов в трехзначной логике //Проблемы кибернетики. Выпуск 8. – М.: Наука. 1962. – С. 341-346.

3. *Марченков С.С.* О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики //Проблемы кибернетики. Выпуск 36. – М.: Наука. 1979. – С. 5-22.

4. *Lau D.* Submaximalle Klassen von P_3 //Electron. Informationsverarb. und Kybern. – 1982. – B. 18, N 4-5. – S. 227-243.

5. *Михеева Е.А.* Построение в P_k максимальных классов, не имеющих базисов //Дискретная математика. 1998. т.10, вып.2. С. 137-159.

6. *Кузнецов А.В.* Алгебра логики и ее обобщения Математическая логика и основания математики. Математика в СССР за сорок лет. Т1 //*Яновская С.А.* – М.: Физматлит, 1959. – С. 13-120.

7. *Черепов И.А.* Классы решетки Поста как классы сохранения основания //Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и ее применения» (29 января – 2 февраля 2001 г.)

8. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в *k*-значной логике //Труды института им. В.А. Стеклова. Том 51. – М.: Издательство АН СССР. 1958. – С. 5-142.

9. *Саблина В.А., Сухов В.Е.* Каталог подполугрупп симметрической полугруппы третьей степени //Деп. в ВИНИТИ № 20. Рязань: Рязан. госуд. радиотехн. универ. 2008. 22 с.

10. *Мещанинов Д.Г.* О замкнутых классах *k*-значных функций, сохраняющих первые *d*-разности //Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. – М.: Наука, 1999. – С. 219-230.

11. *Крохин А.А., Сафин К.Л., Суханов Е.В.* О строении решетки замкнутых классов полиномов //Дискретная математика. – 1997. – Т.9, вып. 2. – С. 24-39.