ISSN 1995-4565. Вестник РГРТУ. № 2 (выпуск 24). Рязань, 2008

УДК 517.925

С.А. Бельман

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАБИЛЬНОГО РАЗВИТИЯ МНОГОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

Исследована математическая модель, и получены условия циклического развития многосекторной экономики.

Введение. В статье исследуется математическая модель стабильного развития многосекторной экономики. Пусть y − объем производственных фондов, λ определяет внешние воздействия (уплата налогов, конкуренция и другие факторы), $\dot{y}$ − скорость изменения фондов y, которая пропорциональна наличному объему фондов Ay, зависит от объема регулярных обновлений $C(y,\lambda)$ и внешних инвестиций $D(y,\lambda)$.

Математической моделью такой многосекторной экономики является следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{y} = Ay + C(y,\lambda) + D(y,\lambda), \qquad (1)$$

где при $i = j$ матрица $A = \left(a_{ij}\right)_1^n$ определяет зависимость скорости изменения i-го объема производственного фонда от его наличного количества, при $i \neq j$ определяет влияние i-го объема производственного фонда на j-й объем, $C(y,\lambda)$, форма порядка s, определяет объем внутренних резервов, $D(y,\lambda)$ – конечная сумма форм порядка более высокого, чем s, характеризует объем внешних инвестиций, используемых для регулярного обновления производственных фондов; $y \in E_n$, $s > 1$, $\lambda \in E_k$, λ – параметр, E_p – p-мерное векторное пространство.

Предполагается, что при заранее определенных внешних воздействиях λ (при неизменных правилах сборов налогов, при стабильных тарифах на электроэнергию и т.д.) объем производственных фондов не меняется. Но так как внешние воздействия регулярно меняются (изменяются правила сбора налогов, тарифов на газ, электроэнергию и т.д.), то происходит изменение объема производственных фондов с течением времени.

Экономическая задача ставится так: определить условия развития многосекторной экономики так, чтобы при изменившихся внешних воздействиях объем производственных фондов через определенные промежутки времени достигал своего начального значения, то есть имело бы место стабильное развитие многосекторной экономики.

Пусть y_0, λ_0 таковы, что правая часть уравнения (1) равна нулю. Это означает, что y_0 определяет работу многосекторной экономики, описываемой моделью (1), при условии неизменности внешних воздействий λ_0 (остаются неизменными правила сбора налогов, тарифы на газ, электроэнергию). Соответствующая математическая задача формулируется так: определить условия существования периодического решения системы дифференциальных уравнений с параметром (1) в окрестности y_0.

Теоретические исследования

Введем следующие обозначения: $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda \in E_k : |\lambda| \le \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$ – некоторое число, $|u| = \max\limits_i \{|u_i|\}$, $\|Q\| = \max\limits_{|u|\le 1} |Qu|$, Q – матрица, N – множество всех натуральных чисел.

Предположим, что при любом фиксированном $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ систему (1) можно представить равенством

$$\dot{y} = \mathrm{A}^*(\theta_\xi(\lambda),\lambda)(y - \theta_\xi(\lambda)) +$$
$$+ C^*(\theta_\xi(\lambda),\lambda, y - \theta_\xi(\lambda)) + D^*(\theta_\xi(\lambda),\lambda, y - \theta_\xi(\lambda)),$$

где $C^*(\theta_\xi(\lambda),\lambda,0) \equiv 0$, $D^*(\theta_\xi(\lambda),\lambda,0) \equiv 0$. Следовательно, $y = \theta_\xi(\lambda)$ – решение системы (1) при любом значении λ, где индекс ξ характеризует один из возможных вариантов поведения исследуемой экономики, $\xi \in \{1,2,\ldots,r\}$.

Введем следующие замены переменных: $x = y - \theta_\xi(\lambda)$, $\omega = \omega_0 + \mu$, где $\omega_0 > 0$ – некоторое число, μ – параметр $(|\mu| \le \delta_0)$, $\mathrm{A}^*(\theta(\lambda),\lambda) = A + K(\lambda)$, $C^*(\theta(\lambda),\lambda,x) = C(x,\lambda)$, $D^*(\theta(\lambda),\lambda,x) = D(x,\lambda)$, систему (1) запишем в виде

$$\mathrm{R}(x,\lambda,\mu)\equiv \dot{x}-\omega_0\mathrm{A}x-\omega_0\mathrm{K}(\lambda)x-\omega_0 C(x,\lambda)- \\ -\omega_0 D(x,\lambda)-\mu\mathrm{A}x-\mu\mathrm{K}(\lambda)x-\mu C(x,\lambda)- \\ -\mu D(x,\lambda)=0. \quad (2)$$

Периодическому решению системы (2) соответствует ненулевое периодическое решение системы (1). Дальнейшие исследования посвящены нахождению решения уравнения (2).

Рассмотрим множество M_n всех тригонометрических рядов вида $a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt$, где a_0, a_k, b_k – n-мерные векторы (коэффициенты ряда). Ряд с нулевыми коэффициентами назовем нулевым элементом множества M_n.

Определение 1. Элемент множества $x_0\in M_n$ назовем периодическим решением системы (2) при некотором $\lambda\in\Lambda(\delta_0)$, если $R(x_0,\lambda,\mu)$ – нулевой элемент множества M_n.

Оператор B определим равенством

$$Bx=\dot{x}-\omega_0 Ax.$$

Определение 2. Ненулевой элемент $x_0\in M_n$ назовем собственным элементом оператора B, если существует действительное число γ, при котором $Bx_0-\gamma x_0$ – нулевой элемент множества M_n, а число γ – собственным значением оператора B, соответствующим собственному элементу x_0.

Заметим, что согласно определению нулевого элемента множества M_n, при любом $k\in M_n$, система $Bx=\mathrm{z}$ эквивалентна системе уравнений: $-\omega_0 Aa_0=c_0$, $-\omega_0 Aa_k+kEb_k=c$, $-kEa_k-\omega_0 Ab_k=d_k$.

Положим $L(k)=(colon(-\omega_0 A,kE),colon(-kE,-\omega_0 A)$, при $k=0$ $L(0)=-\omega_0 A$.

Можно показать, что необходимым условием существования ненулевого периодического решения системы (2) является существование такого положительного ω_0, при котором оператор B имеет нулевое собственное значение, что равносильно условию $\det L(k)=0$ при некотором k. Далее полагаем ω_0 таким, что у оператора B существует нулевое собственное значение.

Разбивая пространство M_n на сумму подпространств (пространства собственных элементов W_0, соответствующих нулевому собственному значению оператора B, инвариантного пространства W_1 и пространства W_2 такого, что $M_n(l_1)=W_0\oplus W_1\oplus W_2$), задачу поиска элемента $x\in M_n$, удовлетворяющего равенству $R(x,\lambda,\mu)=0$, сведем к задаче поиска элемента $x\in M_n(l_1)$, удовлетворяющего операторным уравнениям:

$$P(R(x,\lambda,\mu))=0, \quad (3)$$

$$\xi(R(x,\lambda,\mu))=0,\ \eta(R(x,\lambda,\mu))=0, \quad (4)$$

где Px – оператор проектирования пространства $M_n(l_1)$ в пространство W_2, $\xi(x)$, $\eta(x)$ - линейные функционалы, определенные соответственно равенствами $\xi_j(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}xh_j\,dt$,

$\eta_j(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}xg_j\,dt$, $\xi(x)=(\xi_1(x),\xi_2(x),...,\xi_m(x))$, $\eta(x)=(\eta_1(x),\eta_2,(x),...,\eta_l(x))$, при любых $j\in\{1,2,...,q\}$. Под произведением коэффициентов понимаем скалярное произведение векторов. Непосредственным вычислением устанавливаем, что для любого элемента $x\in W_2$, $\xi(x)=0$, $\eta(x)=0$.

Решение системы уравнений (3), (4) будем искать в виде $x(\alpha,\beta)=\mathrm{P}x(\alpha,\beta)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i$, где $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_m)$, $\beta=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ – постоянные векторы, подлежащие определению. Нормы векторов α, β задаются соответственно равенствами $||\alpha|| =\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|$, $||\beta|| = =\sum_{i=1}^{l}|\beta_i|$.

Согласно работе [1] для того, чтобы $x(\alpha, \beta)$ было решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы векторы α и β удовлетворяли операторным уравнениям

$$\xi(\mathrm{B}(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta)))+\xi(f(\alpha,\beta,\lambda,\mu))=0, \quad (5)$$

$$\eta(\mathrm{B}(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta)))+\eta(f(\alpha,\beta,\lambda,\mu))=0, \quad (6)$$

где $J(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i$, $f(\alpha,\beta,\lambda,\mu)= =-\mu Ax-(\mu+\omega_0)K(\lambda)x-(\mu+\omega_0)C(x,\lambda)- -(\mu+\omega_0)D(x,\lambda)$.

Исследуем каждое слагаемое уравнения (5) в отдельности. $\xi(B(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta)))= =\xi(BPx(\alpha,\beta))+\xi\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Bh_i\right)+\xi\left(\sum_{i=1}^{l}\beta_i Bg_i\right)$. Из свойств операторов ξ, B, P следует, что $BPx(\alpha,\beta)\in W_2$. Отсюда $\xi(BPx(\alpha,\beta))=0$. Для любого $i\in\{1,2,...,m\}$ h_i является собственным элементом оператора B, соответствующим нулевому собственному значению. Следовательно, $\xi\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Bh_i\right)=0$. Пусть $M_1\beta=\xi\left(\sum_{i=1}^{l}\beta_i Bg_i\right)$. Тогда $\xi(B(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta)))=M_1\beta$. Из линейности функционала ξ и условия Липшица для вектор-форм $C(x,\lambda)$, $D(x,\lambda)$ слагаемое $\xi(f(\alpha,\beta,\lambda,\mu))$ можно записать $\xi(f(\alpha,\beta,\lambda,\mu)) = -\widetilde{K}_1(\lambda)\widetilde{\alpha} + {} + \mathrm{O}_1(\mu) + \mathrm{o}_1(\varepsilon^s)$, где $\widetilde{\mathrm{K}}_1(\lambda)$ – диагональная матрица, $\widetilde{\alpha} = \omega_0 \mathrm{colon}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\lim\limits_{\mu\to 0} \mathrm{O}_1(\mu) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathrm{o}_1(\varepsilon^s)/\varepsilon^s = 0$. Поэтому уравнение (5) равносильно следующему уравнению:

$$\mathrm{M}_1\beta - \widetilde{K}_1(\lambda)\widetilde{\alpha} + \mathrm{O}_1(\mu) + \mathrm{o}_1(\varepsilon^s) = 0. \qquad (7)$$

Аналогично, операторное уравнение (6) примет вид

$$\mathrm{M}_2\beta - \widetilde{K}_2(\lambda)\widetilde{\beta} + \mathrm{O}_2(\mu) + \mathrm{o}_2(\varepsilon^s) = 0, \qquad (8)$$

где $M_2\beta = \eta\left(\sum\limits_{i=1}^{l} \beta_i B g_i\right)$, $\widetilde{\mathrm{K}}_2(\lambda)$- диагональная матрица, $\widetilde{\beta} = \omega_0 \mathrm{colon}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, $\lim\limits_{\mu\to 0} \mathrm{O}_2(\mu) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathrm{o}_2(\varepsilon^s)/\varepsilon^s = 0$.

Положив $M = \mathrm{colon}(M_1, M_2)$, $\widetilde{K}(\lambda) = {} = \mathrm{colon}\left(-\widetilde{K}_1(\lambda), -\widetilde{K}_2(\lambda)\right)$, $\widetilde{\gamma} = \mathrm{colon}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, $\widetilde{O}(\mu) = {} = \mathrm{colon}(\mathrm{O}_1(\mu), \mathrm{O}_2(\mu))$, $\widetilde{\mathrm{o}}(\varepsilon^s) = \mathrm{colon}(\mathrm{o}_1(\varepsilon^s), \mathrm{o}_2(\varepsilon^s))$, систему уравнений (7) и (8) запишем следующим образом:

$$\mathrm{M}\beta + \widetilde{K}(\lambda)\widetilde{\gamma} + \mathrm{O}(\mu) + \mathrm{o}(\varepsilon^s) = 0, \qquad (9)$$

где M – $(m+l)\times l$-матрица.

Исследуем уравнение (9) при $M\beta = 0$. Преобразуем слагаемые $\widetilde{\mathrm{O}}(\mu)$ и $\widetilde{\mathrm{o}}(\varepsilon^{s})$ следующим образом: $\widetilde{\mathrm{O}}(\mu) = \mathrm{O}^*(\mu)\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\mathrm{o}}(\varepsilon^s) = O^*(\varepsilon)\widetilde{\gamma}$, при $s \ge 2$. После подстановки получим уравнение:

$$\left(\widetilde{K}(\lambda) + \mathrm{O}^*(\mu) + \mathrm{O}^*(\varepsilon)\right)\widetilde{\gamma} = 0. \qquad (10)$$

Введем обозначение: $H(\lambda,\mu,\varepsilon) = \widetilde{K}(\lambda) + \mathrm{O}^*(\mu) + {} + \mathrm{O}^*(\varepsilon)$, где $H(\lambda,\mu,\varepsilon) = \left(h_{ij}(\lambda,\mu,\varepsilon)\right)_{i,j=1}^{m+l}$, $h_{ij}(\lambda,\mu,\varepsilon) = k_{ij}(\lambda) + \mathrm{O}_{ij}(\mu) + \mathrm{O}_{ij}(\varepsilon)$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, λ_1-вектор размерности $m+l$, λ_2-вектор размерности $k-(m+l)$.

Для того чтобы выполнялось равенство $H(\lambda,\mu,\varepsilon)\widetilde{\gamma} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из столбцов был равным нулю. Для определенности положим равным нулю последний столбец матрицы $H(\lambda,\mu,\varepsilon)$. Рассмотрим структуру произвольно зафиксированного элемента последнего столбца $h_{i(m+l)}(\lambda,\mu,\varepsilon) = k_{i(m+l)}(\lambda) + \mathrm{O}_{i(m+l)}(\mu) + \mathrm{O}_{i(m+l)}(\varepsilon) = 0$ или после замены $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$h_{i(m+l)}(\lambda,\mu,\varepsilon) = \left(k^1_{i(m+l)}, \lambda_1\right) + \left(k^2_{i(m+l)}, \lambda_2\right) + {}$$
$$+ \mathrm{O}_{i(m+l)}(\mu) + \mathrm{O}_{i(m+l)}(\varepsilon) = 0.$$

Положим $\mathrm{R}\lambda_1 = \left(k^1_{i(m+l)}, \lambda_1\right)_{i=1}^{m+l}$, $\left(k^2_{i(m+l)}, \lambda_2\right)_{i=1}^{k-(m+l)}$, $\mathrm{O}(\mu) = \left(\mathrm{O}_{i(m+l)}(\mu)\right)_{i=1}^{m+l}$, $\mathrm{O}(\varepsilon) = \left(\mathrm{O}_{i(m+l)}(\varepsilon)\right)_{i=1}^{m+l}$. Получим уравнение

$$R\lambda_1 + \mathrm{O}(\lambda_2) + \mathrm{O}(\mu) + \mathrm{O}(\varepsilon) = 0.$$

Предположим, что $\det R \ne 0$. Выразим λ_1 в явном виде

$$\lambda_1 = -R^{-1}\left(\mathrm{O}(\lambda_2) + \mathrm{O}(\mu) + \mathrm{O}(\varepsilon)\right).$$

Символом $\Gamma(\lambda_2,\mu,\varepsilon)$ обозначим оператор, определяемый правой частью последнего равенства. Отсюда

$$\Gamma(\lambda_2,\mu,\varepsilon)\lambda_1 = -\left(R^{-1}\mathrm{O}(\lambda_2) + R^{-1}\mathrm{O}(\mu) + R^{-1}\mathrm{O}(\varepsilon)\right).$$

Теорема. Существует такое число $\delta > 0$, что оператор $\Gamma(\lambda_2,\mu,\varepsilon)$ имеет на выпуклом, замкнутом ограниченном множестве неподвижную точку.

Доказательство. Покажем, что оператор $\Gamma(\lambda_2,\mu,\varepsilon)$ отображает замкнутое, выпуклое, ограниченное множество в себя.

Так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} R^{-1}\mathrm{O}(\varepsilon) = 0$, то по определению предела для любого $\sigma > 0$, $\sigma = 1/3$, найдется $\delta > 0$ такое, что при $\varepsilon \le \delta$ $\left|R^{-1}\mathrm{O}(\varepsilon)\right|/\varepsilon < \sigma$. Тогда $\left|\mathrm{O}(\varepsilon)\right| < \sigma\varepsilon \le \delta/3$.

Из равенства $\lim\limits_{\mu\to 0} R^{-1}\mathrm{O}(\mu) = 0$ следует, что для $\delta > 0$ найдется $\delta_1 \le \delta$, что при $|\mu| < \delta_1 < \delta$ $\left|R^{-1}O(\mu)\right| < \delta/3$. Аналогично по определению предела $\lim\limits_{\lambda_2\to 0} R^{-1}\mathrm{O}(\lambda_2) = 0$ существует $\delta_2 \le \delta$ такое, что из $|\lambda_2| < \delta_2$ следует $\left|R^{-1}O(\lambda_2)\right| < \delta/3$.

Таким образом, для любого λ_1 $(|\lambda_1| \le \delta)$, для любого фиксированного μ $(|\mu| < \delta_1)$, для любого фиксированного λ_2 $(|\lambda_2| < \delta_2)$ выполнено неравенство

$$\left|\Gamma(\lambda_2,\mu,\varepsilon)\lambda_1\right| \le \left|R^{-1}\mathrm{O}(\lambda_2) + R^{-1}\mathrm{O}(\mu) + R^{-1}\mathrm{O}(\varepsilon)\right| < \delta.$$

Значит, непрерывный по построению оператор $\Gamma(\lambda_2,\mu,\varepsilon)$ множество $\Lambda = \{\lambda_1 : |\lambda_1| \le \delta\}$ отображает в себя. Множество Λ является замкнутым, выпуклым, ограниченным. Поэтому выполнены все условия теоремы Боля-Брауэра, по которой на множестве Λ оператор $\Gamma(\lambda_2,\mu,\varepsilon)$ имеет неподвижную точку. Что и требовалось доказать.

Из теоремы следует, что при некоторых фиксированных ε^*, α^* $(\|\alpha^*\| < \varepsilon^*)$, β^* $(\|\beta^*\| < \varepsilon^*)$, λ^* $(\|\lambda^*\| < \varepsilon^*)$, μ^* $(\|\mu^*\| < \varepsilon^*)$ оператор

$\Gamma(\lambda_2^*, \mu^*, \varepsilon^*)$ имеет неподвижную точку. Пусть это будет λ_1^*. Тогда последний столбец матрицы $H\left(\lambda_2^*, \mu^*, \varepsilon^*\right)$ равен нулю. Отсюда решение системы (10) есть вектор, все координаты которого нули, кроме последнего $\beta_1^* \neq 0$. Что и определяет существование ненулевого периодического решения системы (1).

Вывод. Выполненное исследование позволяет определить условия стабильного развития многосекторной экономики, функционирование которой описывается математической моделью (1) при наличии внешних воздействий. Найдены границы внешних воздействий, при которых многосекторная экономика развивается стабильно, условия циклического развития объема производственных фондов, оценка периода циклического развития фондов. Математически это означает, что определена окрестность точки y_0, в которой уравнение (1) имеет периодическое решение при значении λ из окрестности λ_0.

Библиографический список

1. *М.Т. Терехин.* Ненулевые периодические решения нелинейных систем обыкновенных уравнений с особенной матрицей при производных // Дифференциальные уравнения. 2003. том 39. № 12, С.1645 – 1653.