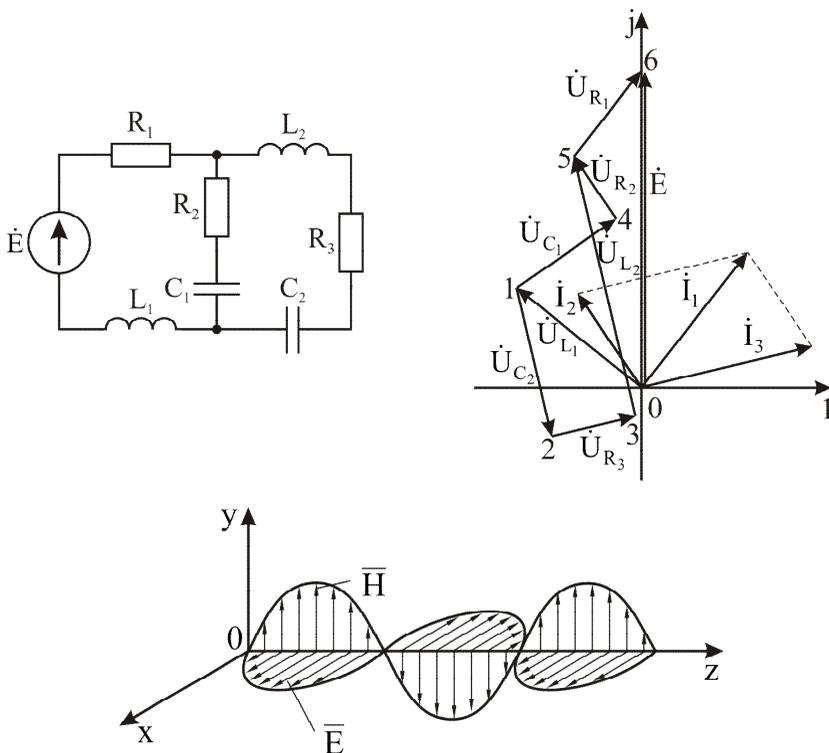


В.С. ГУРОВ, Е.В. МАМОНТОВ,
С.А. КРУГЛОВ, Т.А. ГЛЕБОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ



Министерство образования и науки Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет

В.С. ГУРОВ, Е.В. МАМОНТОВ,
С.А. КРУГЛОВ, Т.А. ГЛЕБОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие

Рязань 2011

УДК 621.3(021)

Теоретические основы электротехники: учеб. пособие/ В.С. Гуров, Е.В. Мамонтов, С.А. Круглов, Т.А. Глебова, Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань: РГРТУ, 2011. 140 с.

Содержит сведения по анализу и расчету электрических цепей постоянного и переменного тока, трехфазных цепей, по исследованию переходных процессов в цепях первого и второго порядка. Приводятся данные по расчету электрических цепей периодического несинусоидального тока и пассивных четырехполюсников. Рассматриваются основные моменты теории электромагнитного поля.

Предназначено для студентов направления 210100 «Электроника и микроэлектроника», изучающих дисциплину ТОЭ.

Ил. 156. Библиогр. 11 назв.

Постоянный ток, переменный ток, закон Ома, законы Кирхгофа, резонанс, трехфазная цепь, переходный процесс, законы коммутации, периодический несинусоидальный сигнал, спектр, коэффициент передачи, фильтр, длинная линия, электромагнетизм, уравнения Максвелла, электромагнитные волны

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра промышленной электроники РГРТУ (зав. кафедрой проф. В.С. Гуров)

Г у р о в Виктор Сергеевич
М а м о н т о в Евгений Васильевич
К р у г л о в Сергей Александрович
Г л е б о в а Татьяна Александровна

Теоретические основы электротехники

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 15.08.11. Формат бумаги 60 × 84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 8,75.

Тираж 250 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

© Рязанский государственный
радиотехнический университет, 2011

1. Законы и элементы электрических цепей

1.1. Элементы электрических цепей

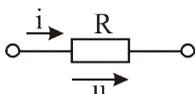


Рис. 1. 1. Положительное направление напряжения и тока на элементах

Электрической цепью называется совокупность элементов, по которым протекает электрический ток. Элементами электрических цепей являются источники электрической энергии, устройства для ее передачи и приемники этой энергии. Источники преобразуют другие виды энергии в электрическую. Передача электрической энергии происходит по соединительным линиям. В приемниках (нагрузках) происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии. Элементы электрических цепей делятся на активные (источники напряжения и тока) и пассивные (сопротивления, индуктивности и емкости).

Электрический ток как упорядоченное движение электрических зарядов характеризуется направлением. За положительное направление тока принято направление движения положительных зарядов. Минимальный заряд определяется зарядом электрона и равен $1,6 \cdot 10^{-19}$, измеряется в кулонах [Кл]. Положительные направления тока и напряжения на схемах электрических цепей изображают стрелками (рис. 1. 1).

В электротехнике различают постоянный и переменный токи (рис. 1. 2). Постоянным называется ток, амплитуда и направление которого не изменяются со временем (рис. 1. 2, а), $I = \text{const}$. Переменный ток характеризуется мгновенным

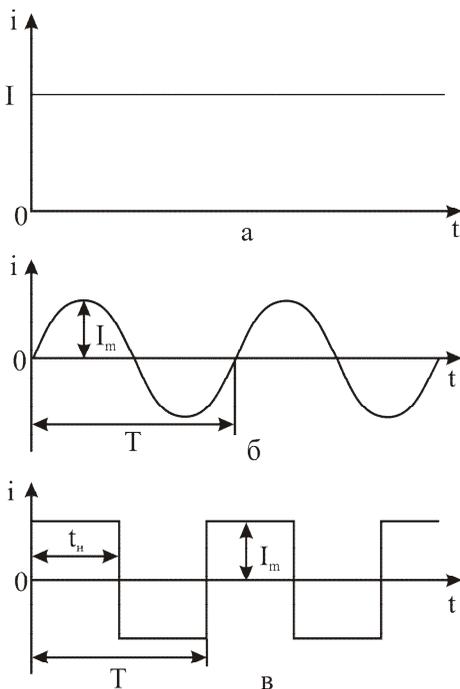


Рис. 1. 2. Временные диаграммы постоянного (а), переменного синусоидального (б) и переменного импульсного (в) токов

значением $i(t)$, которое определяется в каждый момент времени. На рис. 1. 2, б изображен переменный синусоидальный ток, который описывается законом $i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$, где I_m – амплитуда тока, T – период изменения тока, $\omega = 2\pi/T$ – циклическая частота изменения тока. На рис. 1. 2, в изображен переменный импульсный ток, который описывается законом

$$i(t) = \begin{cases} I_m, & 0 < t \leq t_n \\ -I_m, & t_n < t \leq T \end{cases},$$

где I_m – амплитуда тока, T – период изменения тока, t_n – длительность импульса тока.

Элементы электрических цепей можно описать с помощью вольт-амперной характеристики (ВАХ). ВАХ – зависимость величины протекающего через элемент тока от приложенного к нему напряжения. В электротехнике различают элементы с линейной (рис. 1. 3, а) и нелинейной (рис. 1. 3, б) ВАХ.

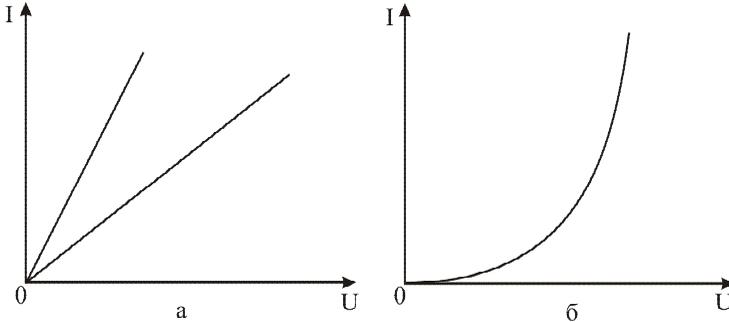


Рис. 1. 3. Примеры ВАХ линейных (а) и нелинейного (б) элементов

Если электрическая цепь состоит из линейных элементов, то она называется линейной. Для линейных цепей применим принцип суперпозиции. *Согласно ему реакция цепи на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие.*

Если в электрической цепи есть хотя бы один нелинейный элемент, то вся цепь называется нелинейной. Для такой цепи принцип суперпозиции неприменим.

При протекании электрического тока переносится энергия, скорость изменения этой энергии характеризуется мгновенной мощностью

$$p = u \cdot i. \quad (1.1)$$

Мгновенная мощность измеряется в ваттах [Вт] и имеет знак. При $p > 0$ энергия источника расходуется, а при $p < 0$ она возвращается к источнику. Энергия, поступившая в приемник за интервал времени от 0 до T , выражается интегралом

$$W = \int_0^T p(t) dt. \quad (1.2)$$

1.1.1. Приемники электрической энергии

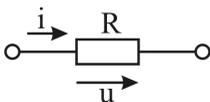


Рис. 1. 4. Условно графическое обозначение сопротивления

Сопротивление. Условно графическое изображение сопротивления (также называемого резистором) приведено на рис. 1. 4. На схеме обозначается буквой R , единица измерения – ом [Ом].

Величина, обратная сопротивлению $q=1/R$ называется проводимостью, единица измерения – сименс [См].

Свойства пассивных элементов электрических цепей определяются характером связи между протекающим через них током и действующим на них напряжением.

Для сопротивления эта связь выражается законом Ома

$$u_R = R \cdot i. \quad (1.3)$$

В соответствии с законом Ома напряжение и ток имеют одинаковый знак, и поэтому мгновенная мощность, рассеиваемая на сопротивлении, всегда положительная:

$$p_R = u_R \cdot i = R \cdot i^2 = u_R^2 / R. \quad (1.4)$$

Это означает, что в сопротивлении происходит преобразование электрической энергии в тепловую. За время от 0 до T в сопротивлении выделяется энергия

$$W_R = R \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{R} \int_0^T u^2 dt. \quad (1.5)$$

Для постоянного тока $i=I=\text{const}$, поэтому из (1.5) имеем

$$W_R = I \cdot U \cdot T = RI^2T = U^2T/R. \quad (1.6)$$

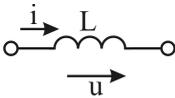


Рис. 1. 5. Условно графическое обозначение индуктивности

Индуктивность. Условно графическое изображение индуктивности приведено на рис. 1. 5. На схеме обозначается буквой L, единица измерения – генри [Гн].

Связь между мгновенными значениями тока и напряжения для индуктивности устанавливается законом Фарадея

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ или } i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt. \quad (1.7)$$

Для $i=\text{const}$ напряжение на индуктивности $u_L=0$, а ее сопротивление равно нулю. Случай, когда сопротивление электрической цепи равно нулю, называется режимом короткого замыкания (величина протекающего тока ничем не ограничена).

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, определяется выражением

$$p_L = u_L \cdot i_L = L \cdot i_L \frac{di_L}{dt}. \quad (1.8)$$

Так как ток и его производная могут иметь одинаковые или разные знаки, мгновенная мощность p_L может быть как положительной, так и отрицательной. При $p_L > 0$ происходит накопление энергии в магнитном поле индуктивности, при $p_L < 0$ энергия возвращается источнику. Энергия магнитного поля в момент времени T определяется по формуле

$$W_L = L \int_0^T i_L \cdot \frac{di_L}{dt} \cdot dt = L \int_0^T i_L di_L = \frac{Li_L^2}{2}. \quad (1.9)$$

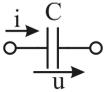


Рис. 1. 6. Условно графическое обозначение емкости

Емкость. Условно графическое изображение емкости (также называемой конденсатором) приведено на рис. 1. 6. На схеме обозначается буквой C , единица измерения – фарад [Ф].

Для емкости связь между током и напряжением устанавливается через выражение

$$u_C = q / C, \quad (1.10)$$

где $q = \int_0^t i_C dt$ – запасенный в конденсаторе заряд за время

протекания через него тока $i_C(t)$. Отсюда

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt \text{ или } i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.11)$$

Мгновенная мощность, поступающая в емкость, равна

$$p_C = u_C \cdot i_C = C \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt}. \quad (1.12)$$

При $p_C > 0$ в электрическом поле конденсатора запасается энергия, а при $p_C < 0$ энергия возвращается источнику. Энергия конденсатора рассчитывается по формуле

$$W_C = \frac{Cu_C^2}{2}. \quad (1.13)$$

Для $u_C = \text{const}$ ток через емкость $i_C = 0$, а ее сопротивление равно ∞ . Случай, когда сопротивление электрической цепи равно ∞ , называется режимом холостого хода (разрыв цепи).

Так как в индуктивности и емкости энергия не расходуется, эти элементы называют реактивными. Индуктивность и емкость в качестве нагрузок для цепей постоянного тока не используются

1.1.2. Источники электрической энергии, соединительные линии, измерение токов и напряжений

Ток в электрических цепях протекает от источников электрической энергии. Источники электрической энергии преобразуют другие виды энергии в электрическую. Различают источники тока и источники напряжения.

Источник напряжения (ЭДС). У идеального источника ЭДС (электродвижущей силы) напряжение не зависит от протекающего через него тока. Его ВАХ представляет собой постоянную величину (рис. 1. 7, б). У реальных источников ЭДС с изменением тока напряжение не остается постоянным (рис. 1. 7, г). В эквивалентной схеме источника ЭДС это отражается наличием элемента R_i , называемого внутренним сопротивлением. Величина R_i может быть определена по ВАХ (рис. 1. 7, г)

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}. \quad (1.14)$$

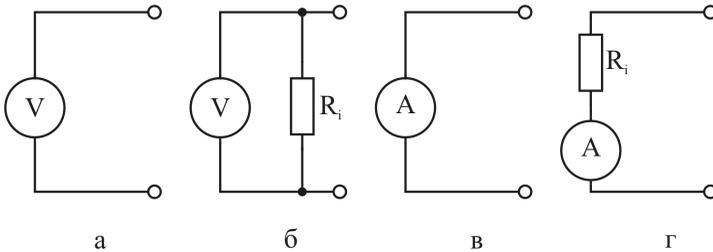


Рис. 1. 11. Графическое изображение идеального и реального вольтметра (а, б) и амперметра (в, г)

Соединительные линии предназначены для подключения нагрузок к источникам энергии. В электротехнике условно принимают соединительные линии идеальными (рис. 1. 9, а). В этом случае сопротивление между точками, которые соединяет линия, равно нулю. Если в расчетах использовать реальные линии, то необходимо учитывать сопротивление потерь (рис. 1. 9, б).

На рис. 1. 10 приведен пример электрической цепи. Представленная электрическая цепь имеет 6 ветвей и 4 узла.

Ветвь – участок цепи, по которому протекает один и тот же ток. *Узел* – место соединения 3 и более ветвей.

Цепь, содержащая источники электрической энергии, называется активной, не содержащая – пассивной. Если источник энергии 1, то цепь называется простой, если 2 и больше – сложной.

Цепь, состоящая из одной ветви, называется неразветвленной.

Измерение напряжений на элементах электрической цепи и протекающих через них *токов* производится вольтметрами и амперметрами соответственно (рис. 1. 11 а, в). Для измерения напряжения на участке цепи вольтметр подключается параллельно данному участку, а для измерения тока амперметр включается в цепь последовательно (рис. 1. 12). При этом показания вольтметра $V=U_1+U_5=I_1R_1+I_5R_5$, а показания амперметра $A=I_6$.

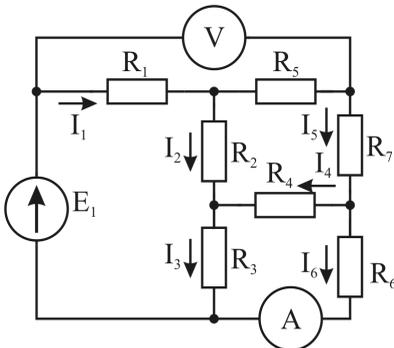


Рис. 1. 12. Пример подключения вольтметра и амперметра к электрической цепи

Чтобы не вносить искажений в режим работы электрической цепи, внутреннее сопротивление идеального вольтметра должно равняться бесконечности, а внутреннее сопротивление идеального амперметра – нулю. В реальности у вольтметра существует сопротивление утечки, которое на эквивалентной схеме подключается параллельно ему (рис. 1. 11, б), а у амперметра существует сопротивление потерь, которое на эквивалентной схеме подключается последовательно с ним (рис. 1. 11, г).

1.2. Законы Ома и Кирхгофа

В электротехнике приняты три формы записи закона Ома:

- для участка цепи (рис. 1. 13, а) – $I=U/R$;
- для полной цепи (рис. 1. 13, б) – $I=E/(r_i+R)$;
- обобщенный закон Ома (рис. 1. 13, в) – $I=(E-U)/R$

При расчетах электрических цепей наряду с законом Ома используют законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа определяет баланс токов в разветвленной цепи.

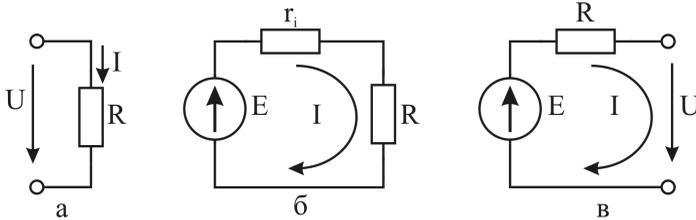


Рис. 1. 13. Формы записи закона Ома: для участка цепи (а), для полной цепи (б), обобщенный закон Ома (в)

Алгебраическая сумма токов в узле равна 0

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (1.15)$$

Обычно положительным выбирается направление тока, втекающего в узел. Для электрического узла, показанного на рис. 1. 14, первый закон Кирхгофа записывается в виде

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0.$$

Первый закон Кирхгофа основан на законе сохранения заряда и том факте, что в узле заряд не накапливается.

Второй закон Кирхгофа устанавливает баланс напряжений в замкнутом контуре. *Алгебраическая сумма ЭДС в любом контуре цепи равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах этого контура*

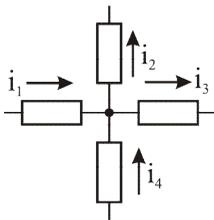


Рис. 1. 14. Пример электрического узла

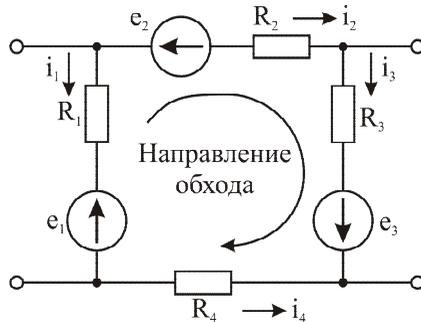


Рис. 1. 15. Пример электрической цепи для II закона Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{l=1}^m u_l. \quad (1.16)$$

Обход контура совершается в произвольном направлении. Если ЭДС или падение напряжения на элементе совпадают с направлением обхода, они берутся с положительным знаком. Для примера на рис. 1. 15 второй закон Кирхгофа записывается в следующем виде:

$$e_1 - e_2 + e_3 = -u_{R1} + u_{R2} + u_{R3} - u_{R4} = -R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 - R_4 i_4.$$

Законы Кирхгофа и Ома справедливы для цепей как постоянного, так и переменного тока.

1.3. Способы соединения элементов электрических цепей

Элементы электрических цепей могут соединяться различными способами. Чаще всего элементы соединяются последовательно, параллельно, «звездой» и «треугольником». На рис. 1. 16 показано последовательное соединение резисторов, индуктивностей и емкостей.

При последовательном соединении через все элементы цепи течет одинаковый ток, а приложенное к цепи напряжение u , в соответствии со вторым законом Кирхгофа, равно сумме падений напряжений на отдельных элементах. При этом для каждой цепи справедливо

$$u_R = R_1 i + R_2 i + \dots + R_n i = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) i = R \cdot i,$$

$$u_L = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

$$u_C = \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt + \dots + \frac{1}{C_n} \int idt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \int idt = \frac{1}{C} \int idt.$$

Тогда цепи можно представить в виде одного общего элемента, значение которого рассчитывается по формулам

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad L = L_1 + L_2 + \dots + L_n, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (1.17)$$

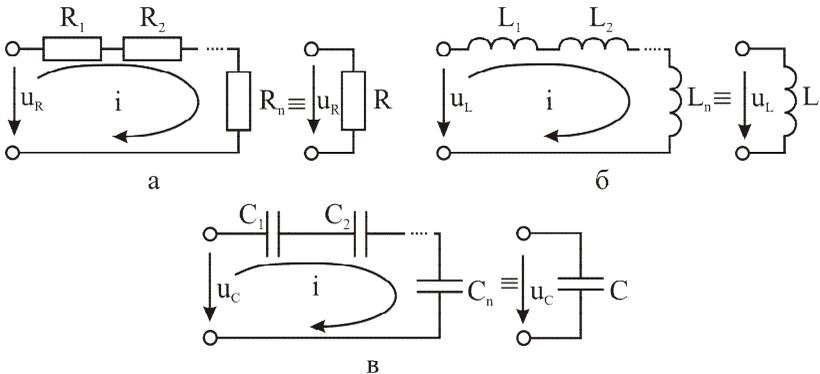


Рис. 1. 16. Последовательное соединение резисторов (а), индуктивностей (б), емкостей (в) и их эквиваленты

В случае двух емкостей

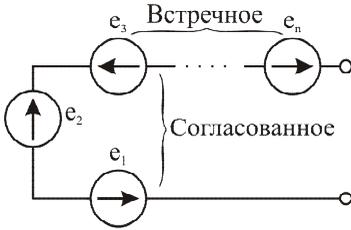


Рис. 1. 17. Пример последовательного соединения источников ЭДС

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1.18)$$

Возможно последовательное соединение источников ЭДС (рис. 1. 17). Если направление источников ЭДС совпадает, то их напряжения складываются, а соединение называется согласованным (e_1 и e_2 на рис. 1. 17). Если направление источников не совпадает, то их

напряжения вычитаются, а соединение называется встречным (e_3 и e_n на рис. 1. 17). Для примера рис. 1. 17 общее напряжение $e = -e_1 + e_2 - e_3 + \dots + e_n$.

Последовательное соединение источников тока не используется.

Параллельное соединение элементов (рис. 1. 18) имеет место в случае, когда элементы схемы имеют два общих узла и на них действует одинаковое напряжение. По первому закону Кирхгофа можно записать

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n.$$

Тогда для каждого соединения имеем

$$i_R = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \dots + \frac{u}{R_n} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) u,$$

$$i_L = \frac{1}{L_1} \int u dt + \frac{1}{L_2} \int u dt + \dots + \frac{1}{L_n} \int u dt = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \int u dt,$$

$$i_C = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} + \dots + C_n \frac{du}{dt} = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \frac{du}{dt}.$$

Отсюда для расчета значения общего элемента параллельного соединения сопротивлений, индуктивностей и емкостей получаем формулы

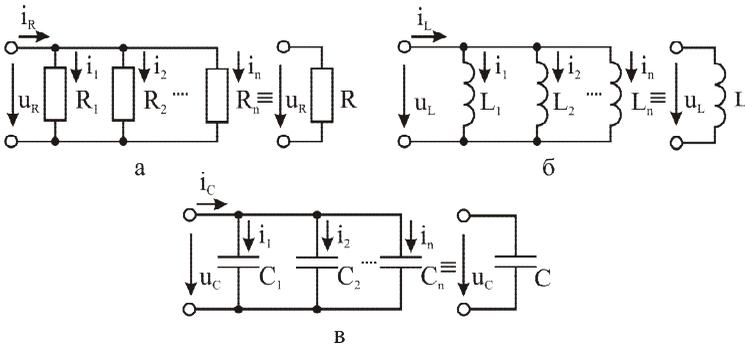


Рис. 1. 18. Параллельное соединение резисторов (а), индуктивностей (б), емкостей (в) и их эквиваленты

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}, \quad C = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (1.19)$$

В случае двух сопротивлений

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.20)$$

Для увеличения отбираемого от источника ЭДС тока возможно параллельное сонаправленное соединение постоянных источников ЭДС с одинаковым напряжением (рис. 1. 19).

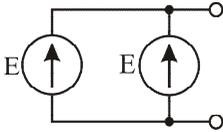


Рис. 1. 19. Параллельное соединение постоянных источников ЭДС

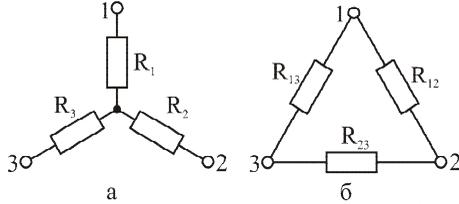


Рис. 1. 20. Соединение «звездой» (а) и «треугольником» (б)

На рис. 1. 20 представлены соединения «звездой» и «треугольником». Эти соединения можно тождественно преобразовать одно в другое.

Для определения правил преобразования будем последовательно отключать от цепи один из узлов схемы. Допустим, что сначала отключен второй узел. Сопротивления между 1-м и 3-м узлами «звезды» и «треугольника» равны между собой. Тогда

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{13} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{13} + R_{12} + R_{23}}. \quad (1.21)$$

При отключении 3-го узла сопротивления между 1-м и 2-м узлами равны между собой

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot (R_{13} + R_{23})}{R_{13} + R_{12} + R_{23}}. \quad (1.22)$$

При отключении 1-го узла сопротивления между 2-м и 3-м узлами равны между собой

$$R_3 + R_2 = \frac{R_{23} \cdot (R_{13} + R_{12})}{R_{13} + R_{12} + R_{23}}. \quad (1.23)$$

Решая совместно уравнения (1.21), (1.22) и (1.23) находим правило преобразования из «треугольника» в «звезду»:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \quad R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}. \quad (1.24)$$

Обратное преобразование:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}, \quad R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}. \quad (1.25)$$

2. Электрические цепи постоянного тока

Постоянным называется электрический ток, неизменный по направлению и величине. Мгновенные значения тока и напряжения в цепи постоянного тока всегда одинаковые: $i(t)=I$, $u(t)=U$. Законы электротехники справедливы для мгновенных значений токов и напряжений, поэтому они являются общими как для цепей постоянного, так и для цепей переменного тока. Особенностью цепей постоянного тока является то, что нагрузками в них могут быть только сопротивления. Действительно, в соответствии с соотношениями между токами и напряжениями для индуктивностей и емкостей вида

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (2. 1)$$

напряжение на индуктивности и ток через емкость при постоянных величинах i_L и u_C оказываются равными $u_L=0$, $i_C=0$. Это означает, что индуктивность в цепях постоянного тока можно рассматривать как короткое замыкание, а емкость – как разрыв. Таким образом, цепи постоянного тока могут включать в себя источники постоянного тока (генераторы тока), источники постоянного напряжения (источники ЭДС) и нагрузки в виде сопротивлений.

Электрические цепи могут быть линейными и нелинейными, простыми и сложными, активными и пассивными. Активная цепь, наряду с нагрузками, содержит источники электрической энергии, пассивная цепь состоит только из нагрузок. Простая цепь содержит один источник электрической энергии, сложная – два или более.

2. 1. Понятие двухполюсника

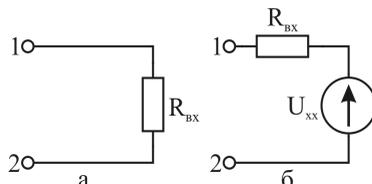
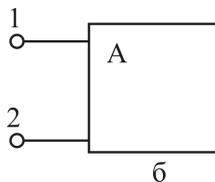
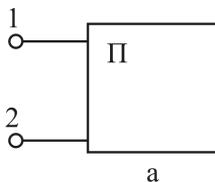


Рис. 2. 1. Графическое изображение двухполюсника: а – пассивного, б – активного

Рис. 2. 2. Эквивалентные схемы: а – пассивного и б – активного двухполюсников

Частным случаем электрических цепей являются двухполюсники, имеющие два входных зажима (рис. 2. 1). Двухполюсник, состоящий только из пассивных элементов (нагрузок), называется пассивным (рис. 2. 1, а). Если, кроме нагрузок, двухполюсник содержит источники электрической энергии, он является активным (рис. 2. 1, б).

Двухполюсники любой сложности и конфигурации можно заменить эквивалентной схемой. Для пассивного двухполюсника эквивалентная схема представляет собой сопротивление, а для активного – источник ЭДС и сопротивление (рис. 2. 2). Напряжение источника ЭДС равно U_{xx} – напряжению хо-

лостого хода (напряжению на разомкнутых зажимах двухполюсника). Сопротивление $R_{вх}$ называют входным сопротивлением двухполюсника.

Основной задачей при рассмотрении электрической цепи является расчет токов во всех ее ветвях, по известным токам можно рассчитать напряжения и выделяемую на ее элементах мощность. Существующие методы расчета электрических цепей отличаются различной степенью сложности.

2. 2. Расчет простых цепей

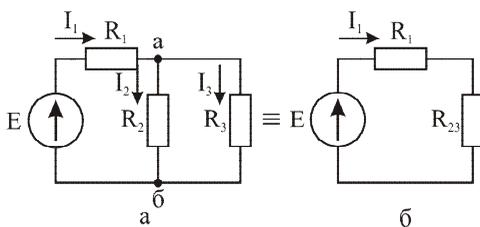


Рис. 2. 3. Простая электрическая цепь (а) и ее эквивалент (б)

Простая цепь (пример на рис. 2. 3) рассчитывается методом последовательных преобразований. В начале расчета следует обозначить токи в ветвях электрической цепи и указать их направления. Далее, применяя ряд упрощений (используя преобразования параллельно или последовательно соединенных элементов

а если необходимо, преобразования «треугольника» в «звезду» или наоборот), получают цепь в виде одного контура, в котором рассчитывается ток. Для приведенного примера

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{23}}, \text{ где } R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}. \quad (2. 2)$$

Далее рассчитывается напряжение между узлами а и б

$$U_{аб} = R_{23} \cdot I_1 \quad (2. 3)$$

и токи в ветвях

$$I_2 = U_{аб} / R_2, \quad I_3 = U_{аб} / R_3. \quad (2. 4)$$

2. 3. Расчет сложных цепей

Для расчета сложных цепей применяются методы наложения, контурных токов, узловых потенциалов, расчет по законам Кирхгофа. Рассмотрим порядок расчета по некоторым из них на примере цепи, показанной на рис. 2. 4, а.

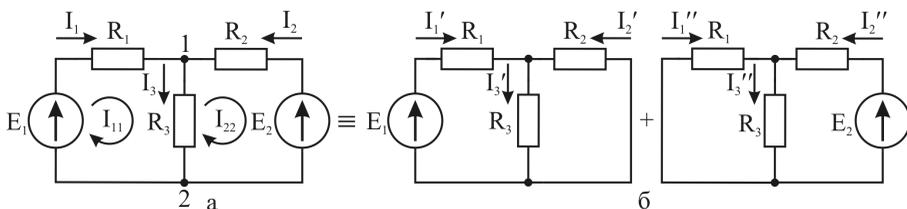


Рис. 2. 4. Сложная электрическая цепь с двумя источниками ЭДС (а) и ее представление в виде двух простых цепей (б)

2. 3. 1. Расчет методом наложения

Расчет по методу наложения основан на применении принципа суперпозиции.

Принцип суперпозиции (принцип наложения): реакция от суммы воздействий равна сумме реакций от каждого из этих воздействий.

Цепь разбивается на две простые цепи, каждая из которых содержит по одному источнику ЭДС E_1 , E_2 или источник тока J . При исключении одного из источников ЭДС в простой цепи он заменяется короткозамкнутым участком, так как внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю. При исключении источника тока в простой цепи он заменяется разрывом, так как внутреннее сопротивление идеального источника тока равно бесконечности. В каждой из полученных простых цепей (рис. 2. 4, б) находятся частные токи I_1' , I_2' , I_3' и I_1'' , I_2'' , I_3'' , создаваемые соответственно источниками ЭДС E_1 и E_2 . Далее рассчитываются полные токи как сумма частных

$$I_1 = I_1' + I_1'', I_2 = I_2' + I_2'', I_3 = I_3' + I_3''. \quad (2. 5)$$

Если ток после расчета имеет отрицательный знак, значит, первоначальное направление тока было выбрано неверно и его нужно изменить на противоположное.

2. 3. 2. Баланс мощности

Для проверки правильности расчета электрической цепи составляют уравнение *баланса мощности: мощность, отдаваемая источниками энергии, должна быть равна мощности, выделяющейся в нагрузках:*

$$\sum_{i=1}^n E_i \cdot I_i + \sum_k^p U_k \cdot J_k = \sum_{j=1}^m R_j \cdot I_j^2, \quad (2. 6)$$

где E_i , I_i – напряжение источника ЭДС и протекающий через него ток, U_k , J_k – напряжение на зажимах источника тока и его ток, I_j – ток, протекающий через соответствующую нагрузку.

Мощность, выделяемая в нагрузках, всегда положительная. Знак мощности источников ЭДС зависит от направлений ЭДС E_i и тока I_i , протекающего через них. Если направления совпадают, то мощность положительная (источник ЭДС отдает мощность), а если направления противоположные, то мощность отрицательная (источник ЭДС потребляет мощность). Мощность источника тока считается положительной, если направление его тока втекает в положительный полюс напряжения на нем.

2. 3. 3. Расчет по законам Кирхгофа

Расчет электрической цепи может быть произведен по законам Кирхгофа. Количество уравнений, записываемое по I закону Кирхгофа, равняется числу узлов электрической цепи минус один. Таким образом, для схемы рис. 2. 4, а по I закону Кирхгофа получим одно уравнение для узла 1

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (2. 7)$$

Число уравнений, записываемых по II закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров схемы. Независимым называется контур, который содержит хотя бы одну ветвь, не входящую в другие контуры. По II закону Кирхгофа нельзя обходить контуры, содержащие источники тока, так как на них существует падение напряжения, которое необходимо определять дополнительно. Для двух независимых контуров схемы рис. 2. 4, а (E_1 , R_1 , R_3 и E_2 , R_2 , R_3) запишем уравнения по II закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} E_1 &= R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3, \\ E_2 &= R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3. \end{aligned} \quad (2. 8)$$

Решая совместно систему из полученных уравнений, находим токи (для схемы рис. 2. 4, а) это токи I_1 , I_2 , I_3 .

2. 3. 4. Расчет методом контурных токов

Применение метода контурных токов позволяет сократить количество уравнений. При расчете по этому методу в независимых контурах вводят контурные (расчетные) токи. В электротехнике принято обозначать контурные токи двойным индексом (I_{11} , I_{22} , ..., I_{nn}). Считают, что в каждом выделенном контуре протекает только один контурный ток. Через ветвь, входящую в несколько контуров, протекает алгебраическая сумма всех токов, в контуры которых эта ветвь входит. Через источник тока может протекать только один контурный ток, величина которого равна току источника.

После того как контурные токи определены, по второму закону Кирхгофа составляют уравнения для каждого контура, за исключением контуров, содержащих источники тока (так как токи в них уже известны). Общее число уравнений равно числу независимых контуров минус число источников тока. В левой части уравнения записывается алгебраическая сумма источников ЭДС, входящих в контур. Если направление источника ЭДС совпадает с направлением контурного тока, то он учитывается с положительным знаком, а если их направления противоположны, то с отрицательным. В правой части записывается падение напряжения на каждой нагрузке, входящей в контур. Падение напряжения, вызываемое контурным током, для которого составляется уравнение, всегда записывается с положительным знаком. Падение напряжения, вызванное другим контурным током (протекающим в ветвях, которые входят в несколько контуров), зависит от его направления. Если его направление в данной ветви совпадает с направлением основного контурного тока, то падение напряжения от него записывается с положительным знаком, а если их направления противоположны, то с отрицательным. Затем решают полученную систему уравнений и находят контурные токи. Токи в ветвях равны алгебраической сумме протекающих через них токов (с учетом направления).

В схеме рис. 2. 4, а обозначим контурные токи I_{11} , I_{22} . Уравнения для контуров, в которых протекают выбранные токи, будут иметь вид

$$\begin{cases} E_1 = I_{11} \cdot (R_1 + R_3) - I_{22} \cdot R_3 \\ -E_2 = I_{22} \cdot (R_2 + R_3) - I_{11} \cdot R_3 \end{cases} \quad (2.9)$$

Из решения системы двух уравнений определяем токи I_{11} и I_{22} , а по ним определяем реальные токи

$$I_1 = I_{11}, I_2 = -I_{22}, I_3 = I_{11} - I_{22}. \quad (2.10)$$

2.3.5. Расчет методом эквивалентного генератора

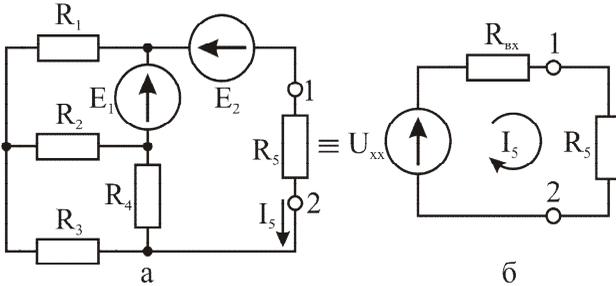


Рис. 2. 5. Электрическая цепь (а) и ее эквивалентная схема (б)

Во многих случаях требуется найти ток только в одной (выделенной) ветви электрической цепи. Такую задачу можно решить на основе *метода эквивалентного генератора*. Суть метода заключается в том, что электрическая цепь относительно выделенной ветви заменяется активным двухполюсником с эквивалентным ЭДС U_{xx} и входным сопротивлением R_{bx} (рис. 2. 5).

Ток в выделенной ветви рассчитывается по формуле

$$I_5 = U_{xx} / (R_{bx} + R_5). \quad (2.11)$$

Для нахождения тока I_5 требуется определить параметры эквивалентного двухполюсника R_{bx} и U_{xx} . Они могут быть найдены расчетным и опытным путем. При расчете R_{bx} в исходной электрической цепи выделенная ветвь отключается, а источники ЭДС заменяются коротким замыканием (рис. 2. 6) и рассчитывается сопротивление цепи относительно зажимов 1 – 2 (входное сопротивление)

$$R_{bx} = \frac{R_{123} \cdot R_4}{R_{123} + R_4}, \quad (2.12)$$

$$\text{где } R_{123} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3.$$

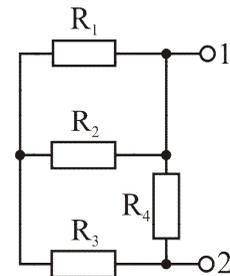


Рис. 2. 6. Схема для расчета входного сопротивления

При расчете напряжения холостого хода U_{xx} выделенная ветвь отключается (рис. 2. 7) и определяется напряжение между зажимами 1-2. Расчет U_{xx} осуществляется по второму закону Кирхгофа, при этом напряжение холостого хода учитывается в правой части уравнения (в качестве падения напряжения на эле-

менте цепи). Токи в эквивалентной схеме *не равны* токам основной схемы и обозначаются как I' . Для схемы на рис. 2. 7 $E_1 - E_2 = U_{xx} + R_4 \cdot I'_4$ или $-E_2 = U_{xx} - R_1 \cdot I'_1 - R_3 \cdot I'_3$.

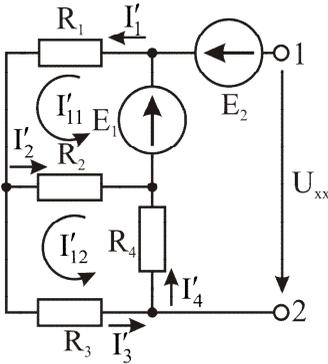


Рис. 2. 7. Схема для расчета напряжения холостого хода

Отсюда

$$U_{xx} = E_1 - E_2 - R_4 \cdot I'_4, \quad (2. 13)$$

$$U_{xx} = -E_2 + R_1 \cdot I'_1 + R_3 \cdot I'_3$$

Для определения частных токов I'_1 , I'_3 и I'_4 необходимо провести расчет эквивалентной схемы (рис. 2. 7). Система уравнений по методу контурных токов для нее будет иметь вид

$$\begin{cases} I'_{11}(R_1 + R_2) - I'_{22}R_2 = E_1 \\ I'_{22}(R_2 + R_3 + R_4) - I'_{11}R_2 = 0 \end{cases} \quad (2. 14)$$

После определения контурных токов находим частные токи $I'_1 = I'_{11}$, $I'_3 = I'_4 = I'_{22}$.

Далее из (2. 13) находим напряжение холостого хода и по (2. 11) ток в выделенной ветви.

При экспериментальном определении параметров эквивалентной схемы в режимах холостого хода измеряют напряжение холостого хода U_{xx} , а в режиме короткого замыкания – ток короткого замыкания $I_{кз}$. При этом входное сопротивление рассчитывается по формуле

$$R_{вх} = U_{xx} / I_{кз}. \quad (2. 15)$$

2. 3. 6. Расчет методом двух узлов

Метод двух узлов является частным случаем метода узловых потенциалов и применим для схем, которые состоят из нескольких параллельно соединенных ветвей (имеют 2 узла).

Напряжение между узлами 1 и 2 для схемы рис. 2. 4, а

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (2. 16)$$

где φ_1 – потенциал 1-го узла, а φ_2 – потенциал 2-го узла. Если принять потенциал второго узла φ_2 равным нулю (заземлить его), то $U_{12} = \varphi_1$.

В общем виде формула для расчета напряжения между узлами 1 и 2 будет иметь следующий вид:

$$U_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot E_i + \sum_{j=1}^p J_j}{\sum_{k=1}^m g_k}, \quad (2. 17)$$

где g_i – проводимость ветвей, содержащих соответствующий источник ЭДС, E_i – напряжение источника ЭДС, J_j – амплитуда источника тока, g_k – проводимость ветвей, не содержащих источник тока. Если источник ЭДС направлен к

1-му узлу, то произведение $g_i E_i$ учитывается с положительным знаком, а если от него, то с отрицательным. Так же и для источника тока. Если источник тока направлен к 1-му узлу, то он учитывается с положительным знаком, а если от него, то с отрицательным. Для схемы на рис. 2. 4, а получим

$$U_{12} = \frac{E_1 \cdot \frac{1}{R_1} + E_3 \cdot \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}. \quad (2. 18)$$

После определения U_{12} по обобщенному закону Ома определяем токи в ветвях:

$$I_1 = (E_1 - U_{12}) \cdot \frac{1}{R_1}, \quad I_2 = U_{12} \cdot \frac{1}{R_2}, \quad I_3 = (E_3 - U_{12}) \cdot \frac{1}{R_3}. \quad (2. 19)$$

2. 3. 7. Режимы работы электрической цепи

Рассмотрим цепь рис. 2. 5, б, где сопротивление R_5 будем считать нагрузкой ($R_n = R_5$), напряжение холостого хода – напряжением источника ЭДС ($E = U_{xx}$), а сопротивление $R_{вх}$ – внутренним сопротивлением источника ЭДС ($R_i = R_{вх}$). При изменении сопротивления R_n в цепи будут существовать различные режимы работы, которые будут характеризоваться следующими основными параметрами:

- выходное напряжение $U = R_n \cdot I$;
- выходная мощность $P = U \cdot I = R_n \cdot I^2$;
- потребляемая от источника питания мощность $P_E = E \cdot I$, для сложной схемы – мощность, потребляемая от источников $P_E = U_{xx} \cdot I$;
- коэффициент полезного действия $\eta = P/P_E = R_n / (R_n + R_i)$.

На рис. 2. 8 показаны графики зависимости этих параметров от величины выходного тока I . Ток I может меняться в пределах от $I=0$ до $I=I_{\max}$. Ток $I=0$

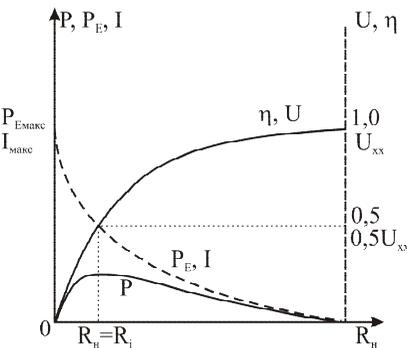


Рис. 2. 8. Зависимость параметров электрической цепи от сопротивления нагрузки

соответствует режиму холостого хода, когда сопротивление нагрузки $R_n = \infty$. При этом выходное напряжение $U = E$, а КПД электрической цепи стремится к 1. В другом крайнем случае при $R_n = 0$ (режим короткого замыкания) выходной ток достигает максимума $I_{\max} = E/R_i$, а выходное напряжение и соответственно мощность в нагрузке и КПД равны нулю. Режим работы цепи при $R_i = R_n$ называется согласованным. В этом случае половина мощности выделяется в нагрузке, а другая половина – в источнике ЭДС и КПД составляет $\eta = 0,5$. Наибольший КПД соответствует режиму холостого хода.

3. Электрические цепи переменного тока

3.1. Общие сведения

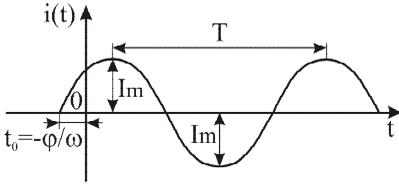


Рис. 3. 1. Графическое изображение переменного синусоидального тока

Переменным называется ток, изменяющийся во времени по величине или направлению. Наиболее распространенным является переменный синусоидальный ток, описываемый функцией

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (3. 1)$$

где $i(t)$, I_m [А], ω [радиан/с], φ [радианы или градусы] – мгновенное

значение, амплитуда, угловая (или циклическая) частота и начальная фаза синусоидального тока. График синусоидального тока показан на рис. 3. 1. Кроме угловой частоты ω в расчетах используется частота f . Она связана с угловой по формуле

$$f = \omega / 2\pi \text{ [Гц]}. \quad (3. 2)$$

С частотой f связан период колебания T

$$T = 1/f = 2\pi/\omega \text{ [с]}. \quad (3. 3)$$

Начальная фаза характеризует сдвиг колебания во времени относительно начала координат на величину $t_0 = -\varphi/\omega = -\varphi T/2\pi$ (рис. 3.1). Если записать изменение фазы колебаний как функцию от времени $\psi(t) = \omega t + \varphi$, то функция мгновенного значения будет иметь вид

$$i(t) = I_m \sin\psi(t). \quad (3. 4)$$

3.2. Средняя мощность и действующее значение переменного тока

Мгновенная мощность синусоидального тока является переменной величиной

$$p(t) = Ri^2(t), \quad (3. 5)$$

поэтому при оценке энергии, выделяемой в нагрузке за период, используют среднюю мощность

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t) dt. \quad (3. 6)$$

Для расчета средней мощности вводят понятие действующего (эффективного) значения переменного тока I . Действующим называется такое значение переменного тока, которое вызывает выделение в активной нагрузке R энергии, равной энергии, выделяющейся от протекания эквивалентного постоянного тока. То есть средняя мощность переменного тока P_{cp} должна равняться мощности постоянного тока $P = RI^2$. Отсюда

$$RI^2 = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t) dt = \frac{R}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t dt = \frac{R \cdot I_m^2}{T} \int_0^T \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} dt = \frac{R \cdot I_m^2}{2},$$

$$I^2 = I_m^2 / 2, I = I_m / \sqrt{2} \cong 0.707 I_m. \quad (3.7)$$

При вычислении действующего значения напряжения получается аналогичный результат: $U = U_m / \sqrt{2}$.

3.3. Комплексное представление синусоидального тока

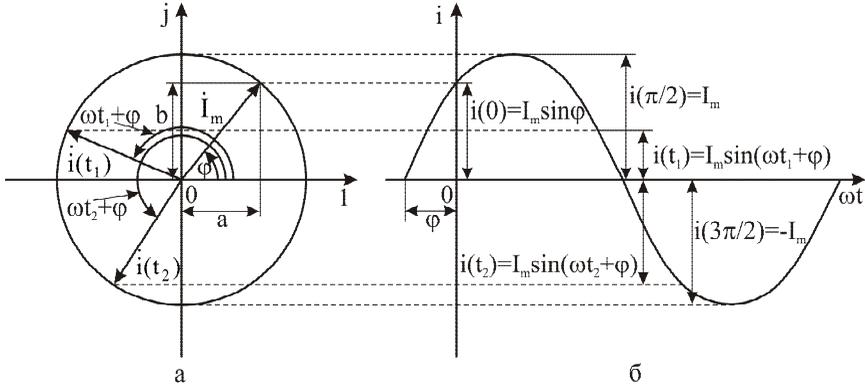


Рис. 3. 2. Связь между синусоидальным током и его комплексным представлением

Для расчета электрических цепей синусоидального тока используется символический метод, основанный на комплексном представлении тока. Известно, что синусоидальная величина может быть представлена вектором на комплексной плоскости (рис. 3. 2, а, б). При этом значение синусоидальной величины в любой момент времени может быть определено как проекция вектора

$$\dot{i}(t) = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t} = I_m \cdot e^{j(\omega t + \phi)} \quad (3.8)$$

на ось мнимых чисел. То есть действительные значения тока получают как мнимую часть от комплексного числа (рис. 3. 2, а):

$$\begin{aligned} i(t) &= \text{Jm}[\dot{i}(t)] = \text{Jm}[I_m \cdot e^{j(\omega t + \phi)}] = \\ &= \text{Jm}[I_m \cdot \cos(\omega t + \phi) + j I_m \cdot \sin(\omega t + \phi)] = I_m \cdot \sin(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Значение $\dot{i}(t) = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$ называют комплексом мгновенного значения тока. Так как синусоидальная функция в любой момент времени t может быть определена по известным параметрам I_m , ω , ϕ , то все расчеты производят для момента времени $t=0$. Тогда $\omega t=0$ и комплекс мгновенных значений преобразуется в комплекс амплитуды тока

$$\dot{i}(0) = \dot{I}_m \cdot e^{j0} = \dot{I}_m, \dot{I}_m = I_m e^{j\phi}. \quad (3.10)$$

При расчетах часто используют комплекс действующего значения тока. Он, как и действующее значение (3. 7), отличается от комплекса амплитудного значения тока в $1/\sqrt{2}$ раз ($\dot{I} = \dot{I}_m / \sqrt{2}$). Комплекс амплитуды можно представить в алгебраической и тригонометрической формах:

$$\dot{I}_m = I_m (\cos\varphi + j\sin\varphi) = a + jb, \quad a = I_m \cos\varphi, \quad b = I_m \sin\varphi. \quad (3.11)$$

Модуль I_m и аргумент φ комплексного числа могут быть найдены по формулам

$$I_m = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}. \quad (3.12)$$

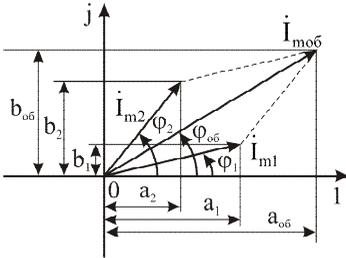


Рис. 3. 3. Пример графического сложения комплексных токов

Сложение и вычитание комплексных чисел необходимо проводить в алгебраической ($\dot{I}_{m1} = a_1 + jb_1$, $\dot{I}_{m2} = a_2 + jb_2$) форме, а умножение и деление – в показательной ($\dot{I}_{m1} = I_{m1} e^{j\varphi_1}$, $\dot{I}_{m2} = I_{m2} e^{j\varphi_2}$).

При сложении комплексных токов одной частоты отдельно складываются действительные и мнимые части:

$$\dot{I}_{m06} = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a_{06} + jb_{06}.$$

Сложение комплексных значений токов может быть проведено на комплексной плоскости (рис. 3. 3).

При умножении (делении) комплексных токов одной частоты амплитуды отдельных токов умножаются (делятся), а фазы складываются (вычитаются):

$$\dot{I}_{m06} = \dot{I}_{m1} \cdot \dot{I}_{m2} = I_{m1} e^{j\varphi_1} \cdot I_{m2} e^{j\varphi_2} = (I_{m1} \cdot I_{m2}) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = I_{06} e^{j\varphi_{06}}.$$

Необходимо отметить, что умножение комплексной величины на мнимую единицу приводит к повороту исходного вектора на угол 90° против часовой стрелки на комплексной плоскости (рис. 3. 4, а):

$$j \cdot \dot{I}_m = j \cdot I_m e^{j\varphi} = e^{j90^\circ} \cdot I_m e^{j\varphi} = I_m e^{j(\varphi + 90^\circ)}. \quad (3.13)$$

Деление комплексной величины на мнимую единицу приводит к повороту исходного вектора на угол 90° по часовой стрелке на комплексной плоскости (рис. 3. 4, б)

$$\dot{I}_m / j = I_m e^{j\varphi} / j = (-j) \cdot I_m e^{j\varphi} = e^{-j90^\circ} \cdot I_m e^{j\varphi} = I_m e^{j(\varphi - 90^\circ)}. \quad (3.14)$$

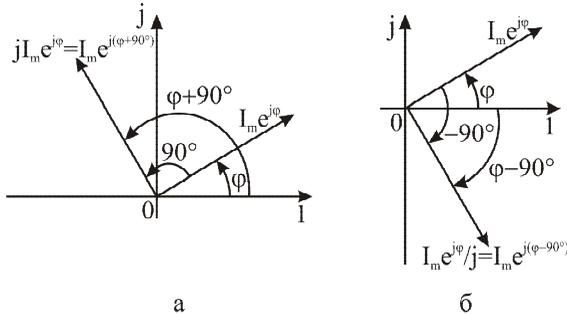


Рис. 3. 4. Умножение (а) и деление (б) комплексного тока на мнимую единицу

3.4. Синусоидальный ток в пассивных элементах

Рассмотрим свойства пассивных R, L, C элементов при протекании через них тока синусоидальной формы $i(t) = I_m \sin \omega t$ (начальная фаза равна 0).

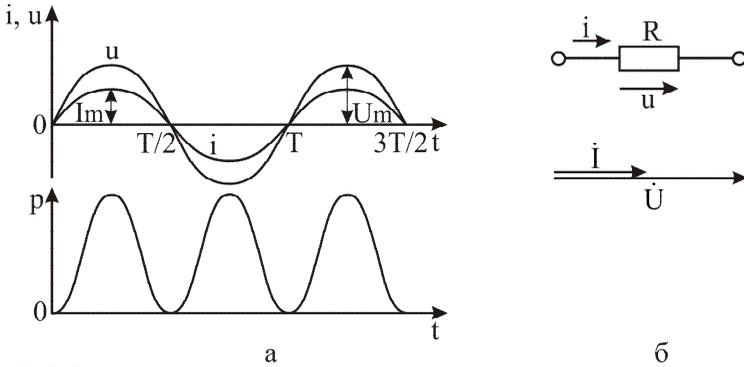


Рис. 3. 5. Временные диаграммы тока, напряжения и мгновенной мощности (а), а также векторная диаграмма тока и напряжения (б) для активного сопротивления

Активное сопротивление. В соответствии с законом Ома напряжение на сопротивлении

$$U = Ri(t) = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t. \quad (3. 15)$$

Из записанного выражения следует, что ток через сопротивление и напряжение на сопротивлении изменяются по одинаковому закону, между ними нет сдвига фазы (рис. 3. 5, б). Мгновенная мощность на сопротивлении всегда положительная:

$$p = u(t) \cdot i(t) = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t = \frac{U_m \cdot I_m}{2} [1 - \cos 2\omega t] = U \cdot I \cdot [1 - \cos 2\omega t] \geq 0. \quad (3. 16)$$

Временные диаграммы тока, напряжения и мгновенной мощности показаны на рис. 3. 5, а.

Индуктивность. Связь между током через индуктивность и напряжением

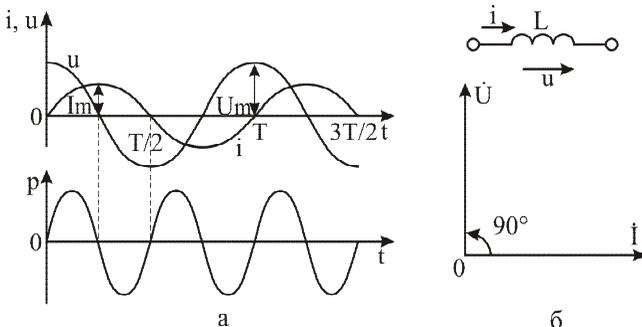


Рис. 3. 6. Временные диаграммы тока, напряжения и мощности (а), а также векторная диаграмма тока и напряжения (б) для индуктивности

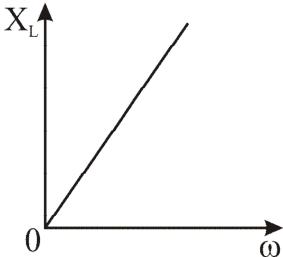


Рис. 3. 7. Зависимость сопротивления индуктивности от частоты

на индуктивности устанавливается законом электромагнитной индукции

$$u(t) = L \frac{di}{dt}. \quad (3.17)$$

При протекании через индуктивность тока $i(t) = I_m \sin \omega t$ на индуктивности создается напряжение

$$u(t) = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos \omega t = X_L I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (3.18)$$

где $X_L = \omega L$ – реактивное сопротивление индуктивности. Амплитуда напряжения на индуктивности $U_m = X_L I_m = \omega L I_m$. Из сравнения выражений для i и u следует, что между током через индук-

тивность и напряжением на индуктивности существует сдвиг по фазе. Причем напряжение опережает ток на 90° . Мгновенная мощность на индуктивности изменяется по закону

$$p = u(t) \cdot i(t) = U_m \cdot I_m \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \sin 2\omega t = U \cdot I \cdot \sin 2\omega t. \quad (3.19)$$

Временные диаграммы тока, напряжения и мощности, а также векторная диаграмма тока и напряжения показаны на рис. 3. 6 а, б. Мощность на индуктивности описывается знакопеременной функцией. Когда $p > 0$, индуктивность энергию запасает, при $p < 0$ индуктивность энергию возвращает. При этом средняя мощность за период оказывается равной нулю. Так как индуктивность энергию не расходует, ее называют реактивным элементом. Реактивное сопротивление индуктивности $X_L = \omega L$ зависит от частоты (рис. 3. 7). На постоянном токе при $\omega = 0$ сопротивление $X_L = 0$ и индуктивность в схеме представляет собой короткозамкнутый участок. На высоких частотах, при $\omega \rightarrow \infty$, индуктивность в схеме можно рассматривать как разрыв ($X_L \rightarrow \infty$).

Емкость. При протекании через емкость тока $i = I_m \sin \omega t$ на ней создается напряжение, определяемое выражением

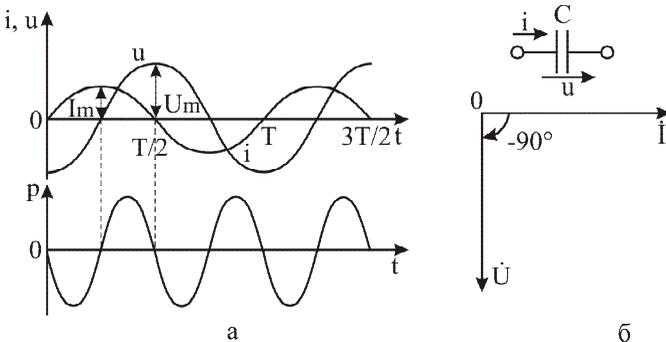


Рис. 3. 8. Временные диаграммы тока, напряжения и мощности (а), а также векторная диаграмма тока и напряжения (б) для емкости

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = \int_0^t I_m \cdot \sin \omega t = -\frac{I_m}{\omega C} \cdot \cos \omega t = X_C I_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ), \quad (3.20)$$

где $X_C = 1/\omega C$ – реактивное сопротивление емкости. Амплитуда напряжения на конденсаторе $U_m = X_C I_m = I_m/\omega C$. Приведенные выражения для i и u показывают, что между током через конденсатор и напряжением на конденсаторе существует сдвиг фазы, причем ток опережает напряжение на 90° . Мгновенная мощность на конденсаторе изменяется по закону

$$p = u(t) \cdot i(t) = -U_m \cdot I_m \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t = -\frac{U_m \cdot I_m}{2} \sin 2\omega t = -U \cdot I \cdot \sin 2\omega t. \quad (3.21)$$

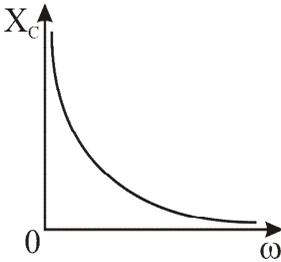


Рис. 3.9. Зависимость сопротивления емкости от частоты

Временные диаграммы для i , u , p и векторная диаграмма тока и напряжения показаны на рис. 3.8, а, б. Мгновенная мощность на емкости изменяется по синусоидальному закону, а ее среднее значение равно нулю. Это означает, что емкость энергию не расходует и поэтому является реактивным элементом. Реактивное сопротивление емкости $X_C = 1/\omega C$ зависит от частоты (рис. 3.9). На низких частотах, при $\omega \rightarrow 0$, емкостное сопротивление стремится к ∞ , и в схеме ее можно рассматривать как разрыв. С ростом частоты, при $\omega \rightarrow \infty$, сопротивление $X_C \rightarrow 0$, и конденсатор в схеме можно учитывать как короткозамкнутый участок.

3.5. Символический метод расчета цепей переменного тока

Для использования символического метода при расчете цепей переменного тока необходимо перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений, которые являются дифференциальными, к алгебраическим. Этот переход осуществляется следующим образом.

В электрических цепях синусоидального тока для реактивных элементов L и C вводят понятие комплексных сопротивлений

$$\begin{aligned} \dot{Z}_L &= j \cdot X_L = j\omega L, \\ \dot{Z}_C &= -jX_C = \frac{1}{j\omega C}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь множитель j учитывает сдвиг фазы между током и напряжением в индуктивности и емкости. Значение активного сопротивления остается таким же, как в цепях постоянного тока.

Мгновенные значения токов в ветвях и напряжений на элементах заменяются их комплексными амплитудными (либо комплексными действующими) значениями. После замены ток и напряжения на элементах будут иметь вид

$$\begin{aligned} i(t) &\Rightarrow \dot{I}_m \text{ или } \dot{I}, \\ e(t) &\Rightarrow \dot{E}_m \text{ или } \dot{E}, \end{aligned}$$

$$u_R(t) = i(t) \cdot R \Rightarrow \dot{U}_{mR} = \dot{I}_m \cdot R \text{ или } \dot{U}_R = \dot{I} \cdot R,$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \dot{U}_{mL} = \dot{I}_m \cdot \dot{Z}_L = \dot{I}_m \cdot j\omega L \text{ или } \dot{U}_L = \dot{I} \cdot \dot{Z}_L = \dot{I} \cdot j\omega L, \quad (3.23)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow \dot{U}_{mC} = \dot{I}_m \cdot \dot{Z}_C = \dot{I}_m \cdot \frac{1}{j\omega C} \text{ или } \dot{U}_C = \dot{I} \cdot \dot{Z}_C = \dot{I} \cdot \frac{1}{j\omega C}.$$

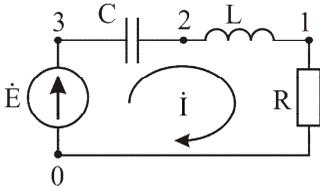


Рис. 3. 10. Пример электрической цепи переменного тока

В дальнейшем, при выполнении расчетов, будем использовать комплексные действующие значения напряжений и токов.

Рассмотрим неразветвленную цепь переменного тока, содержащую источник ЭДС, активное сопротивление, емкость и индуктивность (рис. 3. 10).

При переходе от мгновенных значений токов и напряжений к комплексным (амплитудным) действующим оказывается возможным использование для расчета цепей переменного тока законов Ома и Кирхгофа, а также методов, применяемых для расчета электрических цепей постоянного тока (методы наложения, контурных токов, эквивалентного генератора и др.). Законы Ома и Кирхгофа для цепей переменного тока в символической форме имеют вид

$$\dot{I} = \dot{U} / \dot{Z}, \quad \sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \dot{Z}_k \cdot \dot{I}_k = \sum_{l=1}^m \dot{E}_l. \quad (3.24)$$

Применение символического метода расчета электрических цепей переменного тока позволяет перейти от решения дифференциальных уравнений к решению алгебраических уравнений, что значительно упрощает расчеты. Рассмотрим порядок расчета символическим методом электрической цепи переменного тока, показанной на рис. 3. 10. В цепи действует ЭДС

$$e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \dot{E} = E \cdot e^{j\varphi_0} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_0}. \quad (3.25)$$

В этой цепи по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений тока можно составить интегрально-дифференциальное уравнение вида

$$e(t) = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt. \quad (3.26)$$

В символической форме это уравнение примет вид

$$\dot{E} = R \cdot \dot{I} + jX_L \dot{I} - jX_C \dot{I}. \quad (3.27)$$

Из последнего уравнения получим формулу для комплексного тока цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + jX_L - jX_C} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}}, \quad (3.28)$$

где $\dot{Z} = R + jX_L - jX_C$ – комплексное сопротивление цепи. В общем случае комплексное сопротивление имеет действительную R и мнимую X части:

$$\begin{aligned}
 X &= X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \\
 \dot{Z} &= R + jX = |\dot{Z}|e^{j\varphi_Z}, \\
 |\dot{Z}| &= \sqrt{R^2 + X^2}, \\
 \varphi_Z &= \arctg \frac{X}{R}.
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Получив выражение для комплексного значения тока $\dot{I} = \dot{E} / \dot{Z} = I \cdot e^{j\varphi}$, далее перейдем к мгновенным значениям тока

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi). \tag{3.30}$$

Из-за комплексного характера полного сопротивления цепи \dot{Z} между ЭДС $\dot{E} = E \cdot e^{j\varphi_0}$ и током $\dot{I} = I \cdot e^{j\varphi}$ возникает сдвиг фазы

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}} = \frac{E_m \cdot e^{j\varphi_0}}{|\dot{Z}| \cdot e^{j\varphi_Z}} = \frac{E_m}{|\dot{Z}|} e^{j(\varphi_0 - \varphi_Z)} = I \cdot e^{j\varphi}. \tag{3.31}$$

Рассчитав ток \dot{I} , далее можно определить напряжения на пассивных элементах

$$\dot{U}_R = R \cdot \dot{I}, \quad \dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I}, \quad \dot{U}_C = \frac{\dot{I}}{j\omega C}. \tag{3.32}$$

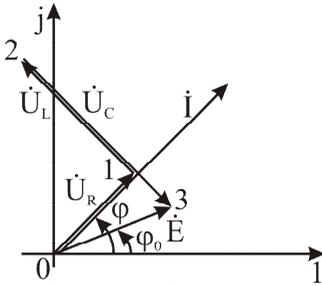


Рис. 3.11. Векторно-топографическая диаграмма для схемы на рис. 3.10

По полученным данным строят векторную диаграмму токов, отображающую комплексные токи в цепи, и топографическую диаграмму напряжений, отображающую комплексные потенциалы в цепи (рис. 3.11). Векторная диаграмма токов является интерпретацией I закона Кирхгофа, а топографическая диаграмма напряжений – интерпретацией II закона Кирхгофа для электрической цепи синусоидального тока в векторной форме. Векторную и топографическую диаграммы строят на одном графике в раз-

ных масштабах. Совместное построение диаграмм позволяет демонстрировать сдвиги фаз между токами и напряжениями в элементах электрической цепи.

Сначала строят векторную диаграмму токов. Для ее построения векторы всех токов, протекающих в цепи, откладывают из начала координат. В процессе построения графическим методом контролируют соблюдение первого закона Кирхгофа. В схеме рис. 3.10 протекает только один ток величиной I и фазой φ .

Для построения топографической диаграммы напряжений на схеме электрической цепи расставляют точки с различающимися потенциалами и нумеруют их начиная с 0. За 0-ю точку обычно принимают отрицательный электрод источника ЭДС. Точка 0 совпадает с началом координат на комплексной плоскости. Потенциалы расставляют, двигаясь против направления протекания тока.

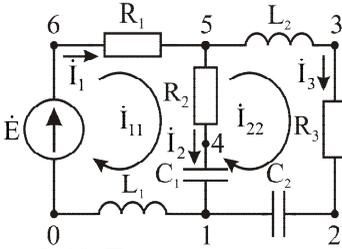


Рис. 3. 12. Пример разветвленной электрической цепи переменного тока

Точке потенциала с максимальным номером соответствует потенциал положительного электрода источника ЭДС. В схеме рис. 3. 10 потенциал изменяется 3 раза, таким образом, отмечаем на схеме 4 точки. Из 0 откладываем вектор напряжения на сопротивлении, который совпадает с током по фазе, и попадаем в точку 1. Конец вектора \dot{U}_R направлен к большему потенциалу (к точке 1). Из точки 1 откладываем вектор напряжения на индуктивности, он опережает вектор тока на 90° . Конец вектора \dot{U}_L направлен к точке 2. Из точки 2 откладываем вектор напряжения на конденсаторе, он отстает от вектора тока на 90° и проводится параллельно вектору \dot{U}_L с небольшим смещением. Конец вектора \dot{U}_C направлен к точке 3. После построения диаграммы напряжений на элементах схемы необходимо провести вектор между точками 0 и 3. Конец полученного вектора должен быть направлен в точку 3, амплитуда полученного вектора (в выбранном масштабе напряжений) должна соответствовать действующему значению напряжения источника ЭДС \dot{E} , а фаза равняться φ_0 .

При расчете разветвленных цепей переменного тока могут применяться любые методы, описанные в пп. 2.3.1 – 2.3.6. Чаще всего применяют метод последовательных преобразований или метод контурных токов. Рассмотрим пример расчета разветвленной цепи переменного тока (рис. 3.12) методом контурных токов. В цепи действует ЭДС

$$e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \Rightarrow \dot{E} = E \cdot e^{j90^\circ} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j90^\circ} = jE.$$

Начальная фаза источника ЭДС равна 90° , то есть при расчете значение напряжения будет иметь только мнимую составляющую. Уравнения для контурных токов в комплексной форме будут иметь вид

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(R_1 + R_2 - \frac{j}{\omega C_1} + j\omega L_1) - \dot{I}_{22}(R_2 - \frac{j}{\omega C_1}) = \dot{E}, \\ \dot{I}_{22}(R_2 + R_3 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_1} - \frac{j}{\omega C_2}) - \dot{I}_{11}(R_2 - \frac{j}{\omega C_1}) = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Из этих уравнений выразим контурные токи, заменив сопротивления всех элементов и источника ЭДС их численными значениями. Здесь приведем решение в общем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_{22} = \frac{\dot{I}_{11} \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_1} \right)}{R_2 + R_3 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2} \right)} = I_{22} e^{j\varphi_{22}}, \\ \dot{I}_{11} = \frac{\dot{E}}{R_1 + R_2 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) - \frac{\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_1} \right)^2}{R_2 + R_3 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2} \right)}} = I_{11} e^{j\varphi_{11}}, \end{array} \right. \quad (3.34)$$

По полученным контурным токам определяем токи в ветвях

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = I_1 \cdot e^{j\varphi_1}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = I_2 \cdot e^{j\varphi_2}, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{22} = I_3 \cdot e^{j\varphi_3},$$

а по токам, протекающим в ветвях, рассчитываем напряжения на элементах

$$\dot{U}_{R_1} = R_1 \cdot \dot{I}_1, \quad \dot{U}_{R_2} = R_2 \cdot \dot{I}_2, \quad \dot{U}_{R_3} = R_3 \cdot \dot{I}_3, \quad \dot{U}_{L_1} = j\omega L_1 \cdot \dot{I}_1,$$

$$\dot{U}_{L_2} = j\omega L_2 \cdot \dot{I}_3, \quad \dot{U}_{C_1} = \frac{\dot{I}_2}{j\omega C_1}, \quad \dot{U}_{C_2} = \frac{\dot{I}_3}{j\omega C_2}.$$

Для проверки правильности расчета необходимо построить векторную и топографическую диаграммы. Для построения векторной диаграммы откладываем векторы всех токов, протекающих в схеме из начала координат, и проверяем выполнение I закона Кирхгофа. Из векторной диаграммы, приведенной на рис. 3. 13, очевидно, что ток \dot{I}_1 равен сумме токов \dot{I}_2 и \dot{I}_3 .

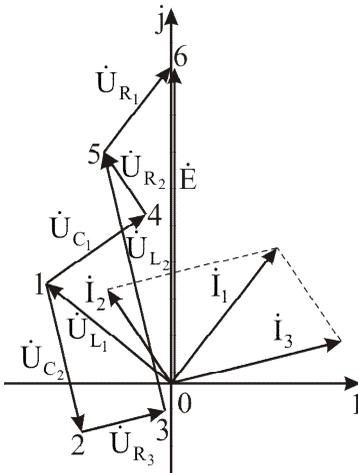


Рис. 3. 13. Векторно-топографическая диаграмма для схемы на рис. 3. 12

Для проверки соблюдения II закона Кирхгофа строим топографическую диаграмму напряжений. Из точки 0 откладываем падение напряжение на \dot{U}_{L_1} , которое опережает ток \dot{I}_1 на 90° . Из точки 1 выходят 2 параллельные ветви, т.е. необходимо отложить 2 вектора: вектор \dot{U}_{C_1} , отстающий от \dot{I}_2 на 90° , в точку 4, и вектор \dot{U}_{C_2} , отстающий от \dot{I}_3 на 90° , в точку 2. Из точки 2 откладываем вектор \dot{U}_{R_3} , совпадающий по направлению с \dot{I}_3 , в точку 3, а из точки 3 вектор \dot{U}_{L_2} , опережающий ток \dot{I}_3 на 90° , в точку 5. Из точки 4 откладываем вектор \dot{U}_{R_2} , совпадающий по направлению с \dot{I}_2 , в точку 5. При соблюдении II закона Кирхгофа векторы \dot{U}_{R_2} и \dot{U}_{L_2} должны сойтись в одной точке. Из точки 5 откладываем вектор \dot{U}_{R_1} , совпадающий по

направлению с \dot{I}_1 , в точку 6. Для проверки соблюдения II закона Кирхгофа необходимо определить амплитуду и фазу вектора напряжения между точками 0 и 6. Напряжение между точками 0 и 6 носит комплексный характер и равно напряжению источника ЭДС, т.е. II закон Кирхгофа выполняется.

3. 6. Мощность в цепи переменного тока

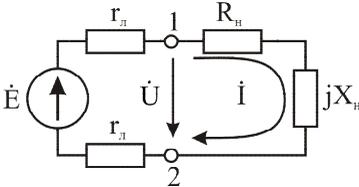


Рис. 3. 14. Электрическая цепь, содержащая ЭДС, соединительные линии и комплексное сопротивление

В общем случае полное сопротивление цепи переменного тока является комплексной величиной $\dot{Z} = R_n + jX_n$. При этом в электрической цепи, состоящей из источника ЭДС, соединительных линий и комплексной нагрузки (рис. 3. 14), между током и напряжением возникает сдвиг фазы:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_n} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_U}}{\left| \dot{Z}_n \right| e^{j\varphi_Z}} = \frac{U}{Z_n} e^{j\varphi_1}, \quad (3. 35)$$

где $Z_n = \left| \dot{Z}_n \right| = \sqrt{R_n^2 + X_n^2}$ - модуль комплексного сопротивления нагрузки, $\varphi_Z = \arctg(X_n/R_n)$ - фаза комплексного сопротивления нагрузки (сдвиг фаз между напряжением и током нагрузки), $\dot{U} = U \cdot e^{j\varphi_U}$ - комплексное действующее напряжение на нагрузке, φ_U - фаза напряжения на нагрузке, \dot{I} - комплексный действующий ток в нагрузке, $\varphi_1 = \varphi_U - \varphi_Z$ - фаза тока в нагрузке, r_n - сопротивление соединительной линии.

Под комплексным изображением полной мощности понимают произведение комплексного напряжения на нагрузке на комплексно-сопряженный ток нагрузки \dot{I}^* . Если $\dot{I} = I \cos \varphi + j I \sin \varphi = I \cdot e^{j\varphi_1}$, то $\dot{I}^* = I \cos \varphi - j I \sin \varphi = I \cdot e^{-j\varphi_1}$. Таким образом, комплексная мощность, выделяемая в нагрузке, записывается в следующем виде

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = U \cdot e^{j\varphi_U} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_1} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi_Z} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi}. \quad (3.36)$$

Из выражения (3.36) следует, что комплексная мощность, выделяемая в нагрузке, зависит от типа нагрузки (фазы комплексного сопротивления нагрузки).

Модуль комплексной мощности, выделяемой в нагрузке $S = \left| \dot{S} \right| = U \cdot I$, называется полной (или кажущейся) мощностью, измеряется в вольтамперах [В·А].

Записав выражение для комплексной мощности в тригонометрической форме, получим

$$\dot{S} = U \cdot I \cdot \cos \varphi + j \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi, \quad (3.37)$$

$$\dot{S} = P + jQ, \quad (3.38)$$

где $P = \operatorname{Re}\{\dot{S}\} = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ – активная мощность, выделяется только на активных сопротивлениях, измеряется в ваттах [Вт], $Q = \operatorname{Im}\{\dot{S}\} = U \cdot I \cdot \sin \varphi$ – реактивная мощность, мощность которая дважды за период передается от источника в реактивные элементы нагрузки и дважды возвращается от них в источник, измеряется в вольт-амперах реактивных [ВАр]. Полная мощность равна

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (3.39)$$

Одной из важных характеристик цепи переменного тока является коэффициент мощности. Коэффициентом мощности называют отношение активной мощности к полной $\frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi$. Коэффициент мощности численно равен косинусу угла сдвига фаз между напряжением и током нагрузки. Для повышения качества использования энергии источника необходимо стремиться к повышению коэффициента мощности ($\cos \varphi$), так как при малом $\cos \varphi$ возрастают потери энергии в передающих линиях за счет многократной передачи энергии от источника в нагрузку и обратно. Для повышения коэффициента мощности реактивную составляющую сопротивления нагрузки компенсируют с помощью включения в цепь реактивного сопротивления противоположного знака.

3. 7. Резонансы в электрических цепях

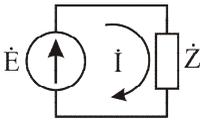


Рис. 3. 15. Электрическая цепь, содержащая ЭДС и комплексное сопротивление

Если в схеме рис. 3. 14 принять сопротивления соединительных линий равным 0, то в полученной электрической цепи, состоящей из источника ЭДС и комплексной нагрузки (рис. 3. 15), между током и напряжением возникает сдвиг фазы φ

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{E}}{|\dot{Z}|e^{j\varphi}} = \frac{\dot{E}}{Z} e^{-j\varphi}, \quad (3.40)$$

где $Z = |\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(X/R)$.

В случае когда нагрузка одновременно включает в себя противоположные реактивные элементы (L и C), при определенных соотношениях между параметрами цепи R , L и C и частотой переменного тока ω возможна ситуация, при которой полное сопротивление цепи оказывается чисто активным. Тогда сдвиг фазы между током \dot{i} и ЭДС \dot{E} будет равен нулю ($\varphi=0$). Такой режим работы электрической цепи называется резонансом. Наиболее распространенными являются последовательный (резонанс напряжений) и параллельный (резонанс токов) резонансы, которые возникают при последовательном и параллельном соединении L , C элементов.

Резонанс напряжений. Резонанс напряжений возникает в электрической цепи с последовательным соединением индуктивности, емкости и сопротивления (рис. 3. 16). Условие последовательного резонанса: мнимая часть входного сопротивления цепи равна 0.

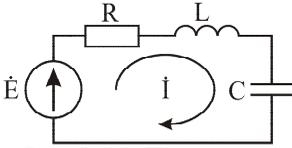


Рис. 3. 16. Последовательный колебательный контур

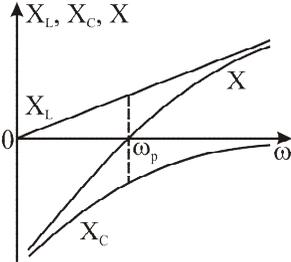


Рис. 3. 17. Зависимость реактивных сопротивлений последовательного колебательного контура от частоты

Полное сопротивление цепи на рис. 3. 16 равно

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= R + jX = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \\ &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Реактивная (мнимая) часть сопротивления цепи

$$X = \omega L - 1/\omega C \quad (3.42)$$

является функцией частоты. График зависимости X от ω показан на рис. 3. 17. Как видно из данной зависимости, до точки резонанса реактивная часть сопротивления цепи носит емкостный характер, а после точки резонанса – индуктивный.

На резонансной частоте ω_p мнимая часть сопротивления цепи будет равна нулю:

$$\text{Im}\{\dot{Z}(\omega_p)\} = 0$$

$$\omega_p L - 1/\omega_p C = 0. \quad (3.43)$$

Сопротивление индуктивности $X_L = \omega_p L$ оказывается равным сопротивлению емкости $X_C = 1/\omega_p C$.

Из этого условия определяется резонансная частота колебательного контура (формула Томсона)

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC}. \quad (3.44)$$

Таким образом, на частоте ω_p сопротивление последовательного контура чисто активное $\dot{Z}(\omega_p) = R$. Ток в цепи при этом достигает наибольшего значения: $\dot{I}_p = \dot{E} / R$.

Значения сопротивлений индуктивности и емкости на частоте ω_p называются характеристическим сопротивлением

$$\rho = \omega_p L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \rho = 1/\omega_p C = \frac{1}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.45)$$

При резонансе напряжения на индуктивности и емкости равны по величине и противоположны по знаку

$$U_L(\omega_p) = -U_C(\omega_p) = \frac{\rho}{R} \dot{E}. \quad (3.46)$$

Величина $Q = \rho/R$ называется добротностью контура. Она показывает, во сколько раз напряжение на реактивных элементах L и C превышает амплитуду источника ЭДС \dot{E} . Превышение в Q раз напряжениями U_L и U_C напряжения источника ЭДС достигается за счет периодического обмена энергией между индуктивностью и емкостью.

Колебательные системы принято описывать частотной характеристикой (резонансной кривой). В случае последовательного колебательного контура под резонансной кривой понимают зависимость амплитуды тока, протекающего в контуре, от частоты (амплитудно-частотную характеристику – АЧХ):

$$\dot{i}(\omega) = \frac{\dot{E}}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\dot{I}_p}{1 + jQ(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega)}. \quad (3.47)$$

Пусть фаза источника ЭДС равна 0. Тогда

$$\dot{i}(\omega) = \frac{I_p}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega)^2}} e^{-\arctg(Q(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega))}. \quad (3.48)$$

С учетом (3.48) резонансная кривая последовательного колебательного контура описывается выражением

$$|\dot{i}(\omega)| = I(\omega) = \frac{I_p}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega)^2}}. \quad (3.49)$$

Приведенные резонансные кривые для двух значений добротности показаны на рис. 3.18. Для резонансной характеристики вводят понятие ширины полосы пропускания $\Delta\omega$, под которой понимается расстояние между точками пересечения резонансной кривой с уровнем, составляющим величину $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ от максимального значения.

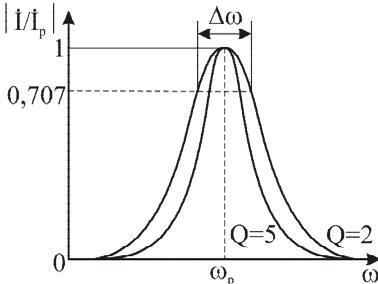


Рис. 3.18. Резонансные кривые последовательного колебательного контура

Полоса пропускания контура зависит от добротности контура $\Delta\omega = \omega_p / Q$, чем выше добротность, тем уже полоса пропускания, более «острой» становится резонансная характеристика.

Зависимость сдвига фазы между током \dot{i} и напряжением \dot{E} называют фазочастотной характеристикой (ФЧХ). ФЧХ последовательного контура является зависимостью фазы входного сопротивления от частоты:

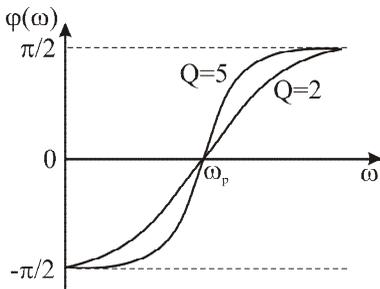


Рис. 3.19. Фазочастотная характеристика последовательного колебательного контура

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arctg(X/R) = \\ &= \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Форма ФЧХ для двух значений добротности показана на рис. 3.19, чем выше добротность, тем более «прямоугольной» становится фазочастотная характеристика.

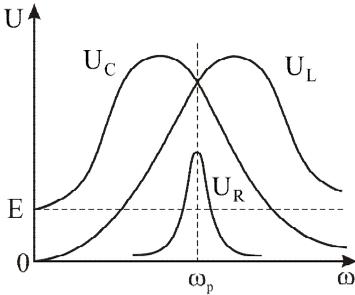


Рис. 3. 20. Зависимости амплитуды напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости от частоты

напряжение на индуктивности больше, чем напряжение на емкости (сопротивление схемы носит индуктивный характер).

Резонанс токов. Резонанс токов возникает в схеме, содержащей две параллельные ветви с реактивными элементами различного характера. Такая цепь называется параллельным резонансным контуром (рис. 3. 21). Здесь сопротивление R обычно отражает потери в индуктивности. *Условие параллельного резонанса:* мнимая часть входной проводимости контура равна 0.

$$\dot{Y}_{\text{вх}} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L},$$

$$\dot{Y}_{\text{вх}} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{(R + j\omega L) \cdot (R - j\omega L)} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right).$$

Из условия резонанса ($\text{Im}\{\dot{Y}_{\text{вх}}\} = 0$) получим

$$\omega_p C = \frac{\omega_p L}{R^2 + \omega_p^2 L^2}. \quad (3. 52)$$

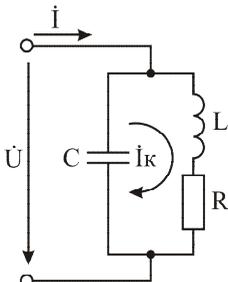


Рис. 3. 21. Параллельный колебательный контур

При резонансе сопротивление реактивных элементов значительно больше активного сопротивления, исходя из этого условия, пренебрегаем активными потерями в формуле (3. 52) и получаем выражение для резонансной частоты параллельного колебательного контура $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$. Оно имеет такой же вид, что и для последовательного контура. Характеристическое сопротивление также имеет тот же вид: $\rho = \omega_p L = 1/\omega_p C = \sqrt{L/C} \gg R$.

В качестве резонансной характери-

Амплитуда напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости определяется как

$$U_R = R \cdot I(\omega), \quad U_L = \omega L \cdot I(\omega),$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I(\omega). \quad (3. 51)$$

Зависимости амплитуды напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости от частоты приведены на рис. 3. 20. Форма кривой напряжения совпадает с резонансной кривой колебательного контура. До точки резонанса напряжение на емкости больше, чем напряжение на индуктивности (сопротивление схемы носит емкостный характер), а после точки резонанса

стики параллельного контура рассматривают амплитудно-частотную характеристику зависимости полного сопротивления от частоты. Определим сопротивление параллельного колебательного контура с учетом выражений для его резонансной частоты и характеристического сопротивления:

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\left(\frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C}\right) * \frac{\omega_p}{\omega}}{R + j\omega_p L \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{1}{\omega C \omega_p L}\right)} = \frac{\rho^2 - j\rho R \frac{\omega_p}{\omega}}{R + j\rho \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)}$$

На частотах, близких к резонансу $\rho \gg R$, можно пренебречь мнимой частью числителя. Тогда

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{\rho^2}{R + j\rho \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)}$$

Учитывая, что добротность контура $Q = \rho/R$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{Z}(\omega) &= \frac{\rho^2}{R + jRQ \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)} = \frac{\rho^2}{R \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)\right)} = \frac{\rho * \rho/R}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)} = \\ &= \frac{\rho Q}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)} = \frac{R_\alpha}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для полного сопротивления контура имеет вид

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{R_\alpha}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)} = \frac{R_\alpha}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} e^{-\arctg(Q(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega))}, \quad (3.53)$$

где $R_\alpha = \rho^2/R = \rho Q$ - сопротивление контура на резонансной частоте. Резонансная

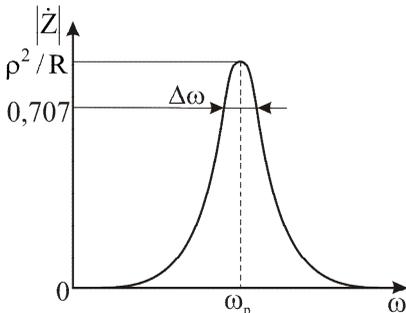


Рис. 3. 22. Резонансная кривая параллельного колебательного контура

кривая (рис. 3. 22) параллельного контура описывается формулой для модуля, а фазочастотная характеристика (рис. 3. 23) – формулой для фазы полного сопротивления. На резонансной частоте сопротивление параллельного контура оказывается значительным, а ток в контуре \dot{I}_k в Q раз превышает ток \dot{I} , поступающий в контур от генератора тока. Превышение контурного тока \dot{I}_k над внешним током \dot{I} объясняет

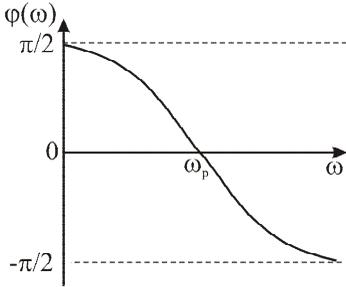


Рис. 3. 23. Фазочастотная характеристика параллельного колебательного контура

ся периодическим обменом энергией между индуктивностью и емкостью. Энергия, приобретаемая от внешнего источника, расходуется только на компенсацию потерь в сопротивлении контура R . При $R=0$ получим идеальный контур, в котором могут существовать незатухающие периодические колебания при отключении источника тока.

4. Электрические цепи с магнитно-связанными элементами

4.1. Магнитно-связанные катушки в цепи переменного тока

Простейшей катушкой индуктивности является провод, намотанный на цилиндрическую поверхность (соленоид). При протекании через соленоид тока вокруг витков обмотки создается магнитное поле, вектор магнитной индукции \vec{B} которого направлен по часовой стрелке относительно направления протекания тока. Внутри катушки линии магнитной индукции от каждого витка обмотки суммируются и направлены параллельно оси соленоида. В случае соленоида без магнитопровода (рис. 4. 1, а) линии магнитной индукции начинают отклоняться от оси на границах начала и конца обмотки. При помещении внутрь обмотки сердечника из ферромагнитного материала линии магнитной индукции, вызываемые протекающим через обмотку током, концентрируются внутри магнитопровода на всем его протяжении (рис. 4. 1, б). В случае намотки двух (или нескольких) обмоток на один сердечник при протекании через каждую из них переменного тока будет возникать магнитный поток (самоиндукция), вызывающий в остальных обмотках ЭДС взаимной индукции. Такие катушки называются магнитно-связанными и характеризуются взаимной магнитной индукцией. Взаимная магнитная индукция обозначается M , измеряется в генри [Гн] и имеет свойства индуктивности $\dot{X}_M = j\omega M$. На схемах магнитная связь между элементами обозначается дугой, с обеих сторон оканчивающейся стрелками.

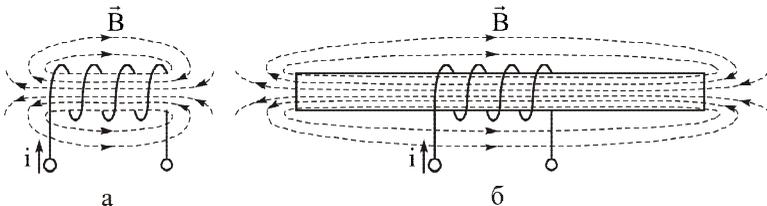


Рис. 4. 1. Распределение линий магнитной индукции в соленоиде без магнитопровода – а и в соленоиде с магнитопроводом – б

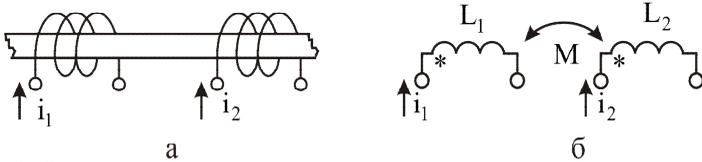


Рис. 4. 2. Согласное включение магнитно-связанных катушек - а и его изображение на схеме – б

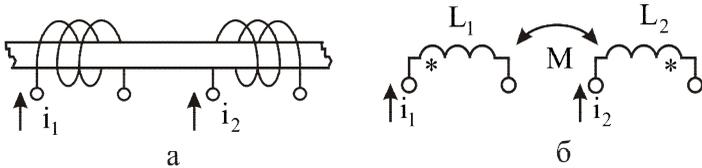


Рис. 4. 3. Встречное включение магнитно-связанных катушек - а и его изображение на схеме – б

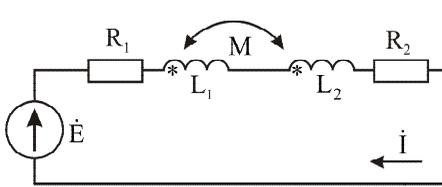


Рис. 4. 4. Согласное последовательное соединение двух магнитно-связанных катушек

Существует согласное (рис. 4. 2, а) и встречное (рис. 4. 3, а) включение магнитно-связанных катушек. При согласном включении токи в катушках втекают в одноименные зажимы, рис. 4. 2, б (на схемах обозначаются точками либо звездочками), и создают магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции, направленные в одну

сторону (согласованные). При встречном включении токи в катушках втекают в разноименные зажимы (рис. 4. 3, б) и создают магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции, направленные в противоположные стороны (встречные).

При согласном последовательном соединении двух магнитно-связанных катушек (рис. 4. 4) ЭДС взаимной индукции складывается с ЭДС самоиндукции, а реактивное сопротивление схемы увеличивается:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{I} \cdot R_1 + \dot{I} \cdot j\omega L_1 + \dot{I} \cdot j\omega M + \dot{I} \cdot j\omega L_2 + \dot{I} \cdot j\omega M + \dot{I} \cdot R_2, \\ \dot{E} &= \dot{I} \cdot (R_1 + R_2 + j(\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M)), \\ \dot{Z} = \dot{E} / \dot{I} &= (R_1 + R_2 + j(\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M)). \end{aligned} \quad (4. 1)$$

При встречном последовательном соединении двух магнитно-связанных катушек (рис. 4. 5) ЭДС взаимной индукции вычитается из ЭДС самоиндукции, а реактивное сопротивление схемы уменьшается:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{I} \cdot R_1 + \dot{I} \cdot j\omega L_1 - \dot{I} \cdot j\omega M + \dot{I} \cdot j\omega L_2 - \dot{I} \cdot j\omega M + \dot{I} \cdot R_2, \\ \dot{E} &= \dot{I} \cdot (R_1 + R_2 + j(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M)), \\ \dot{Z} = \dot{E} / \dot{I} &= (R_1 + R_2 + j(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M)). \end{aligned} \quad (4. 2)$$

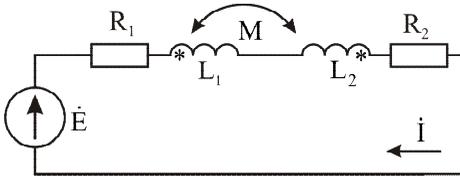


Рис. 4. 5. Встречное последовательное соединение двух магнитно-связанных катушек

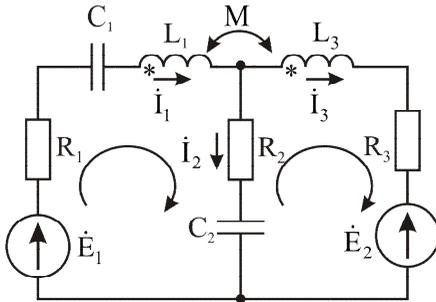


Рис. 4. 6. Пример электрической цепи с магнитно-связанными элементами

Система уравнений для представленной схемы будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3, \\ \dot{E}_1 = \dot{I}_1 \cdot (R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} + j\omega L_1) + \dot{I}_2 \cdot (R_2 - j\frac{1}{\omega C_2}) + \dot{I}_3 \cdot j\omega M, \\ \dot{E}_2 = \dot{I}_3 \cdot (R_3 + j\omega L_2) - \dot{I}_2 \cdot (R_2 - j\frac{1}{\omega C_2}) + \dot{I}_1 \cdot j\omega M. \end{cases} \quad (4.3)$$

Решая полученную систему, находим токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 .

4.2. Трансформатор в цепи переменного тока

Трансформатором называют статическое электромагнитное устройство, имеющее две или более индуктивно-связанных обмоток и предназначенное для преобразования переменного тока (или напряжения) одной обмотки (первичной) в переменный ток (или напряжение) другой обмотки (вторичной) посредством электромагнитной индукции.

Расчет цепей с магнитно-связанными элементами осуществляется символическим методом. Для этого применим любой из способов, описанный выше. Рассмотрим расчет схемы, представленной на рис. 4. 6, по законам Кирхгофа. В данной схеме необходимо записать одно уравнение по первому и два уравнения по второму закону Кирхгофа. При записи уравнений по второму закону необходимо учитывать, что ток \dot{I}_1 , протекая через индуктивность L_1 , наводит ЭДС взаимной индукции в индуктивности L_2 , а ток \dot{I}_3 , протекая через индуктивность L_2 , наводит ЭДС взаимной индукции в индуктивности L_1 . Так как катушки включены согласованно, то в обоих случаях ЭДС взаимной индукции учитывается с положительным знаком.

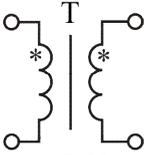


Рис. 4. 7. Условное обозначение трансформатора

Наибольшее применение в электротехнических установках, а также в энергетических системах передачи и распределения электроэнергии имеют силовые трансформаторы, посредством которых изменяют величину переменного напряжения и тока. При этом число фаз, форма кривой напряжения (тока) и частота остаются неизменными. Простейший силовой трансформатор состоит из магнитопровода – сердечника, выполненного из ферромагнитного материала, и двух обмоток, расположенных на стержнях магнитопровода (рис. 4. 7). На схемах магнит-

ную связь между обмотками трансформатора обозначать не принято, показывают только начала обмоток. Линия между обмотками обозначает наличие магнитопровода. Одна из обмоток присоединена к источнику переменного напряжения $e_1(t)$, эту обмотку называют первичной. К другой обмотке подключен потребитель $\dot{Z}_н$ – ее называют вторичной (рис. 4. 8). Здесь L_1 и L_2 – индуктивность, а r_1 и r_2 – активное сопротивление первичной и вторичной обмоток. Взаимная магнитная индукция между первичной и вторичной обмотками равна M .

Принцип действия трансформатора основан на явлении электромагнитной индукции. При подключении первичной обмотки к источнику переменного

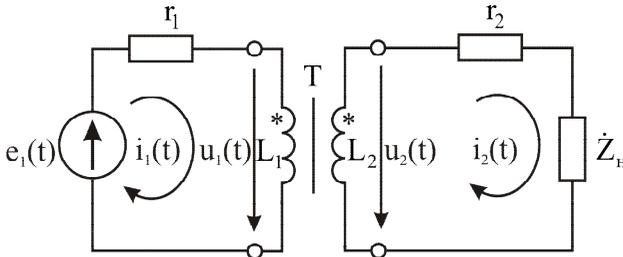


Рис. 4. 8. Включение трансформатора в электрическую цепь

тока в витках этой обмотки протекает переменный ток $i_1(t)$, который создает в магнитопроводе переменный магнитный поток Φ . Замыкаясь на магнитопроводе, этот поток сцепляется с обеими обмотками (первичной и вторичной) и индуцирует в них ЭДС:

$$u_1(t) = -w_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4. 4)$$

$$u_2(t) = -w_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4. 5)$$

где w_1 и w_2 – число витков в первичной и вторичной обмотке трансформатора.

Как видно из (4. 4) и (4. 5), соотношение между $u_1(t)$ и $u_2(t)$ определяется соотношением числа витков первичной и вторичной обмоток:

$$u_2(t) / u_1(t) = w_2 / w_1 = n, \quad (4. 6)$$

где n – коэффициент трансформации. Если $n > 1$ – трансформатор повышающий (напряжение на вторичной обмотке больше, чем напряжение на первичной об-

мотке), а если $n < 1$ – трансформатор понижающий (напряжение на вторичной обмотке меньше, чем напряжение на первичной обмотке). Соотношение (4. 6) справедливо для действующих и амплитудных значений напряжения

$$U_2 / U_1 = U_{2m} / U_{1m} = w_2 / w_1 = n. \quad (4. 7)$$

В случае использования идеального трансформатора (у которого отсутствует активное сопротивление обмоток и рассеивание магнитного потока) мощность в цепи первичной обмотки равна мощности в цепи вторичной обмотки:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_2(t), \\ u_1(t) \cdot i_1(t) &= u_2(t) \cdot i_2(t), \end{aligned} \quad (4. 8)$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – значение мгновенной мощности в первичной и вторичной обмотках, $i_1(t)$ и $i_2(t)$ – значение мгновенных токов в первичной и вторичной обмотках. Используя (4. 6), можно записать

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{u_2(t)}{u_1(t)} \cdot i_2(t) = n \cdot i_2(t), \\ i_1(t) / i_2(t) &= n. \end{aligned} \quad (4. 9)$$

Таким образом, из (4. 6) и (4. 9) видно, что в случае повышающего трансформатора ток во вторичной обмотке меньше тока в первичной обмотке, а в случае понижающего трансформатора ток во вторичной обмотке больше тока в первичной обмотке.

В идеальном трансформаторе вся мощность вторичной обмотки рассеивается в нагрузку. С учетом этого и (4. 8) можно определить эквивалентное значение сопротивления нагрузки \dot{Z}'_n , пересчитанное в цепь первичной обмотки:

$$\begin{aligned} i_1^2(t) \cdot \dot{Z}'_n &= i_2^2(t) \cdot \dot{Z}_n, \\ \dot{Z}'_n &= \frac{i_2^2(t)}{i_1^2(t)} \cdot \dot{Z}_n = \frac{\dot{Z}_n}{n^2}. \end{aligned} \quad (4. 10)$$

Используя аналогичные преобразования, можно получить следующие соотношения:

$$R'_2 = R_2 / n^2, \quad L'_2 = L_2 / n^2, \quad C'_2 = n^2 \cdot C_2, \quad (4. 11)$$

где R_2 , L_2 и C_2 – сопротивление, индуктивность и емкость, включенные в цепь вторичной обмотки, а R'_2 , L'_2 и C'_2 – их эквивалентные значения, пересчитанные в цепь первичной обмотки.

В трансформаторе с равным числом витков первичной и вторичной обмоток (коэффициентом трансформации $n=1$) воздействие тока первичной обмотки на вторичную эквивалентно воздействию тока вторичной обмотки на первичную. Так как трансформатор является устройством переменного тока, то к схемам с его использованием применим символический метод расчета. С учетом этого для схемы на рис. 4. 8 в случае, когда нагрузка носит только активный характер, можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{I}_1 \cdot r_1 + \dot{I}_1 \cdot j\omega L_1 - \dot{I}_2 \cdot j\omega M = \dot{E}, \\ \dot{I}_2 \cdot r_2 + \dot{I}_2 \cdot R_n + \dot{I}_2 \cdot j\omega L_2 - \dot{I}_1 \cdot j\omega M = 0. \end{cases} \quad (4. 12)$$

Из выражения (4. 12) можно определить входное сопротивление трансформатора с коэффициентом трансформации $n=1$:

$$\begin{cases} \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \cdot \frac{j\omega M}{r_2 + R_n + j\omega L_2}, \\ \dot{I}_1 \cdot r_1 + \dot{I}_1 \cdot j\omega L_1 + \dot{I}_1 \cdot \frac{j\omega^2 M^2}{r_2 + R_n + j\omega L_2} = \dot{E}. \end{cases}$$

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_1} = r_1 + j\omega L_1 + \frac{j\omega^2 M^2}{r_2 + R_n + j\omega L_2}. \quad (4. 13)$$

Если в первое уравнение системы (4. 12) одновременно добавить и вычесть произведение $\dot{I}_1 \cdot j\omega M$, а во второе уравнение – произведение $\dot{I}_2 \cdot j\omega M$, то состояние системы не изменится:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 \cdot r_1 + \dot{I}_1 \cdot j\omega L_1 - \dot{I}_1 \cdot j\omega M + \dot{I}_1 \cdot j\omega M - \dot{I}_2 \cdot j\omega M = \dot{E}, \\ \dot{I}_2 \cdot r_2 + \dot{I}_2 \cdot R_n + \dot{I}_2 \cdot j\omega L_2 - \dot{I}_2 \cdot j\omega M + \dot{I}_2 \cdot j\omega M - \dot{I}_1 \cdot j\omega M = 0. \end{cases}$$

Преобразовав полученные выражения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{I}_1 \cdot r_1 + \dot{I}_1 \cdot j\omega \cdot (L_1 - M) + j\omega M \cdot (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = \dot{E}, \\ \dot{I}_2 \cdot r_2 + \dot{I}_2 \cdot R_n + \dot{I}_2 \cdot j\omega \cdot (L_2 - M) + j\omega M \cdot (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = 0, \end{cases} \quad (4. 14)$$

которая описывает эквивалентную схему замещения трансформатора с коэффициентом трансформации $n=1$ (рис. 4. 9). В этой схеме $L_1 - M = L_{S1}$ и $L_2 - M = L_{S2}$ – индуктивности рассеивания первичной и вторичной обмоток соответственно.

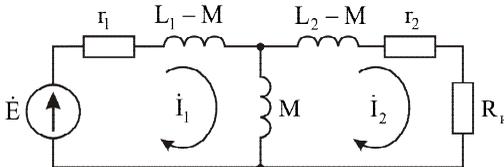


Рис. 4. 9. Эквивалентная схема замещения трансформатора с коэффициентом трансформации $n=1$

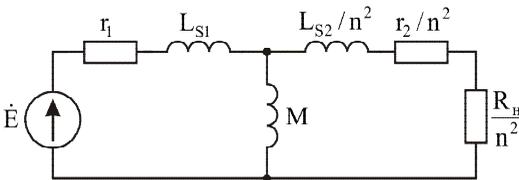


Рис. 4. 10. Эквивалентная схема замещения трансформатора с коэффициентом трансформации $n \neq 1$

Индуктивность рассеивания обусловлена рассеиванием части магнитного потока трансформатора вне витков вторичной и первичной обмоток и является паразитным параметром трансформатора.

Если коэффициент трансформации $n \neq 1$, то элементы, входящие в цепь вторичной обмотки, необходимо пересчитать в цепь первичной обмотки с учетом соотношений (4. 11). В этом случае эквивалентная схема замещения трансформатора будет иметь вид рис. 4. 10. У идеального трансформатора активные сопротивления обмоток r_1 , r_2 и индуктивности рассеивания обмоток L_{S1} , L_{S2} равны нулю.

Трансформатор является устройством переменного тока. Если через его первичную обмотку пропускать постоянный ток, то магнитный поток в магнитопроводе трансформатора также будет постоянным как по величине, так и по направлению ($d\Phi/dt=0$), а в обмотках трансформатора не будет наводиться ЭДС. Поэтому трансформатор обеспечивает гальваническую развязку – постоянная составляющая напряжения и тока из цепи первичной обмотки не передается в цепь вторичной обмотки (рис. 4. 11, а):

$$i_{1\text{общ}}(t) = i_1(t) + I_{\text{const}}, \quad I_{\text{const}} = E_2 / r_1, \quad i_2(t) = i_1(t) / n,$$

а постоянная составляющая напряжения и тока из цепи вторичной обмотки не передается в цепь первичной обмотки (рис. 4. 11, б):

$$i_{2\text{общ}}(t) = i_2(t) + I_{\text{const}}, \quad I_{\text{const}} = E_2 / (r_2 + R_H), \quad i_1(t) = n \cdot i_2(t).$$

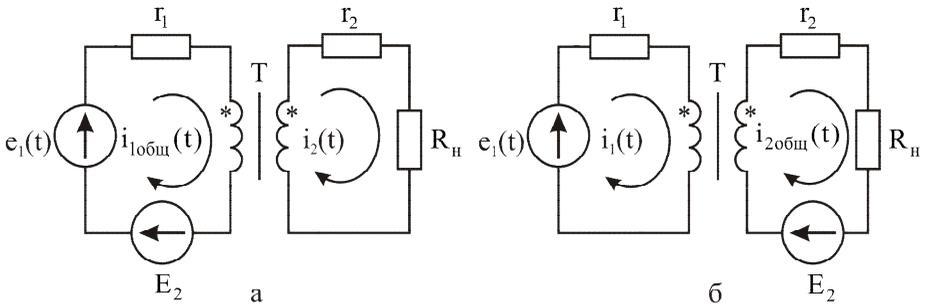


Рис. 4. 11. Подключение постоянного источника ЭДС в цепь первичной обмотки трансформатора – а и в цепь вторичной обмотки трансформатора – б

5. Трехфазные цепи переменного тока

5.1. Основные понятия и определения

Трехфазной цепью называется совокупность трехфазной системы ЭДС, трехфазной нагрузки и соединительных проводов. Трехфазная цепь является частным случаем многофазных электрических систем, представляющих собой совокупность электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга на определенный угол. Трехфазная симметричная система ЭДС – это совокупность трех синусоидальных ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутых по фазе на 120° относительно друг друга. ЭДС в симметричной трехфазной системе формируется с помощью генератора, на статоре которого размещается обмотка, состоящая из трех частей (фаз). Начала обмоток трехфазного генератора обозначают первыми буквами латинского алфавита (А, В, С), а их концы – последними (Х, Y, Z). При вращении ротора с равномерной скоростью в обмотках фаз статора индуцируются периодически изменяющиеся синусоидальные ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, но отличающиеся друг от друга по фазе на 120° вследствие их пространственного смещения. В электротехнике ЭДС каждой фазы принято обозначать по началу обмоток А, В и С. Если ЭДС одной фазы (обычно фазы А) принять за исходную и считать её начальную фазу равной нулю, то выражения мгновенных значений ЭДС всех трех фаз можно записать в виде

$$\begin{aligned} e_A(t) &= E_m \cdot \sin \omega t, \\ e_B(t) &= E_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ), \\ e_C(t) &= E_m \cdot \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \cdot \sin(\omega t + 120^\circ). \end{aligned} \quad (5. 1)$$

Временные диаграммы трехфазной симметричной системы ЭДС приведены на рис. 5. 1. Здесь $T=2\pi/\omega$. Для удобства построения векторно-топографических диаграмм трехфазных цепей ось действительных чисел на комплексной плоскости направляют не слева направо, а снизу вверх. Ось мнимых чисел направляют не снизу вверх, а справа налево. Представление симметричной системы ЭДС на комплексной плоскости показано на рис. 5. 2.

Для трехфазной симметричной системы ЭДС в любой момент времени

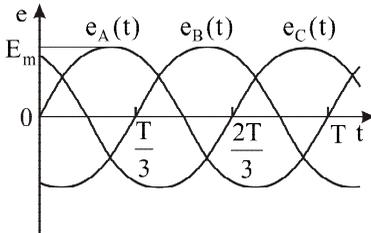


Рис. 5. 1. Временные диаграммы трехфазной симметричной системы ЭДС

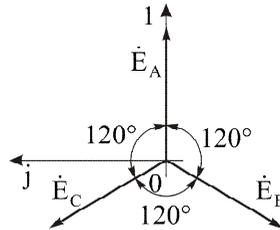


Рис. 5. 2. Представление симметричной системы ЭДС на комплексной плоскости

выполняется соотношение

$$e_A(t) + e_B(t) + e_C(t) = 0. \quad (5.2)$$

Трехфазная симметричная система ЭДС является совокупностью синусоидальных источников, поэтому для нее применим символический метод расчета. Тогда выражение (5.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C &= E_m + E_m \cdot e^{-j120^\circ} + E_m \cdot e^{j120^\circ} = E_m \cdot (1 + \cos 120^\circ - \\ &- j\sin 120^\circ + \cos 120^\circ + j\sin 120^\circ) = E_m \cdot (1 - 0,5 - 0,5j) = 0. \end{aligned}$$

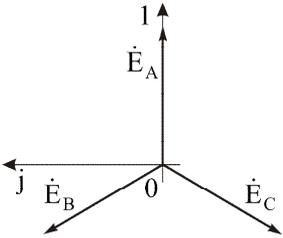


Рис. 5.3. Векторная диаграмма трехфазной симметричной системы ЭДС с обратной последовательностью фаз

Трехфазную систему ЭДС, в которой ЭДС фазы В отстает от ЭДС фазы А на 120° , а ЭДС фазы С отстает от ЭДС фазы В на 120° , называют системой прямой последовательности фаз (рис. 5.2). Если изменить направление вращения ротора генератора, то ЭДС фазы С будет отставать от ЭДС фазы А на 120° и ЭДС фазы В будет отставать от ЭДС фазы С на 120° . Такая последовательность фаз будет называться обратной (рис. 5.3). Последовательность фаз определяет направление вращения трехфазных двигателей. Для

определения последовательности фаз имеются специальные приборы – фазоуказатели.

Симметричная трехфазная система ЭДС является уравновешенной. Это означает, что даже если в отдельных фазах мгновенная мощность пульсирует (рисунок 5.4, а), изменяя за время одного периода не только величину, но и знак, суммарная мгновенная мощность всех фаз остается величиной постоянной в течение всего периода синусоидальной ЭДС (рис. 5.4, б).

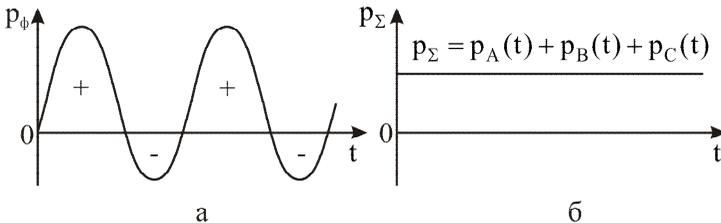


Рис. 5.4. Мощность фазы – а и суммарная мощность – б симметричной трехфазной системы ЭДС

При использовании несвязанной системы ЭДС, в которой фазы обмотки генератора электрически не соединены между собой и каждая фаза соединяется со своим приемником двумя проводами, для соединения генератора с приемником требуется шесть проводов. Такие системы неэкономичны. Более совершенными и экономичными являются связанные цепи, в которых фазы обмотки электрически соединены между собой. Существуют различные способы соеди-

нения фаз трехфазных источников питания и трехфазных потребителей электроэнергии. Наиболее распространенными являются соединения «звезда» и «треугольник». При этом способы соединения фаз источников и фаз потребителей в трехфазных системах могут быть различными. Фазы источника обычно соединены «звездой», фазы потребителей соединяются либо «звездой», либо «треугольником».

5. 2. Соединение фаз генератора и приемника «звездой»

В электротехнике симметричную трехфазную систему ЭДС на схемах принято обозначать в виде трех обмоток, соединенных между собой определенным образом. При соединении фаз обмоток генератора (или трансформатора) «звездой» их концы X, Y и Z соединяют в одну общую точку N, которую называют нейтральной точкой (или нейтралью). Концы фаз приемников (\dot{Z}_a , \dot{Z}_b , \dot{Z}_c) также соединяют в одну точку n (рис. 5. 5). Нагрузка каждой фазы приемника последовательно соединена с соответствующей фазой генератора. Про-

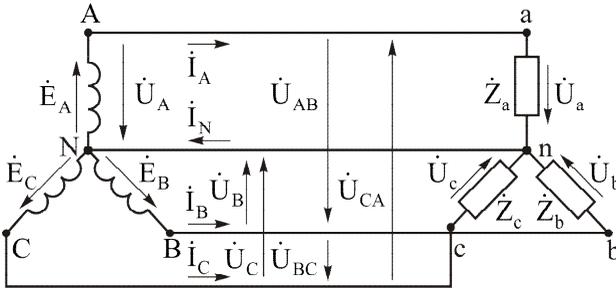


Рис 5. 5. Схема четырехпроводного соединения фаз генератора и приемника «звездой»

вода, соединяющие начала фаз генератора и приемника (A-a, B-b и C-c), называются линейными, провод, соединяющий точку N генератора с точкой n приемника, нейтральным. Трехфазная цепь, содержащая нейтральный провод, является четырехпроводной, а без нейтрального провода – трехпроводной.

Различают фазные и линейные напряжения. Фазное напряжение \dot{U}_Φ – напряжение между началом и концом фазы или между линейным проводом и нейтралью (\dot{U}_A , \dot{U}_B , \dot{U}_C у источника и \dot{U}_a , \dot{U}_b , \dot{U}_c у приемника). Если сопротивлением проводов пренебречь, то фазное напряжение в приемнике считают таким же, как и в источнике ($\dot{U}_A = \dot{U}_a$, $\dot{U}_B = \dot{U}_b$, $\dot{U}_C = \dot{U}_c$). За условно положительные направления фазных напряжений принимают направления от начала к концу фаз.

Линейное напряжение \dot{U}_L – напряжение между линейными проводами или между одноименными выводами разных фаз (\dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA}). Условно положительные направления линейных напряжений приняты от точек, соответствующих первому индексу, к точкам, соответствующим второму индексу. В

соответствии с выбранными условными положительными направлениями фазных и линейных напряжений можно записать уравнения по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Значение фазного напряжения равно значению ЭДС соответствующей фазы, тогда

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = E_m - E_m \cdot e^{-j120^\circ} = E_m - E_m \cdot \cos(-120^\circ) - \\ - E_m \cdot \sin(-120^\circ) = \frac{3}{2}E_m + j\frac{\sqrt{3}}{2}E_m. \end{aligned}$$

Отсюда действующее значение линейного напряжения

$$U_{AB} = |\dot{U}_{AB}| = \sqrt{\frac{9}{4}E_m^2 + \frac{3}{4}E_m^2} = \sqrt{3}E_m = \sqrt{3}U_A = \sqrt{3}U_B, \quad \varphi_{\Phi L} = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ.$$

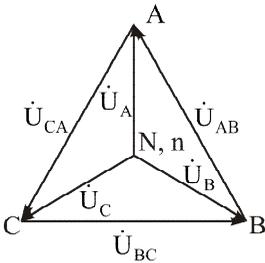


Рис. 5. 6. Топографическая диаграмма фазных и линейных напряжений

Аналогичные вычисления можно провести для остальных линейных напряжений. Таким образом, линейное напряжение связано с фазным соотношением

$$U_L = \sqrt{3}U_\Phi. \quad (5. 3)$$

Для соединения «звезда» строят топографическую диаграмму (рис. 5. 6). Вектор, проведенный между двумя точками топографической диаграммы, выражает по величине и фазе напряжения между одноименными точками цепи.

По аналогии с фазными и линейными напряжениями различают также фазные и линейные токи. Фазные (\dot{I}_Φ) – токи в фазах генератора и приемников, линейные (\dot{I}_L) – токи в линейных проводах. При соединении «звезда» фазные и линейные токи равны $\dot{I}_\Phi = \dot{I}_L$. Ток, протекающий в нейтральном проводе, обозначают \dot{I}_N .

В трехфазных цепях различают симметричные и несимметричные нагрузки. В случае симметричной нагрузки

$$\begin{aligned} \dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c = \dot{Z}_\Phi = Z_\Phi \cdot e^{j\varphi}, \quad R_a = R_b = R_c = R_\Phi, \\ X_a = X_b = X_c = X_\Phi, \quad \varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi = \arctg(X_\Phi / R_\Phi). \end{aligned}$$

К симметричным нагрузкам относятся трехфазные приемники (трехфазные асинхронные двигатели, индукционные печи и др.).

В случае несимметричной нагрузки

$$\dot{Z}_a \neq \dot{Z}_b \neq \dot{Z}_c.$$

К несимметричным нагрузкам обычно относятся однофазные приемники (осветительные приборы, бытовые приборы, однофазные двигатели и др.).

Если в качестве несимметричной нагрузки выступает трехфазный приемник, у которого $Z_a = Z_b = Z_c$, то такой приемник называют равномерным, а е-

ли трехфазный приемник у которого $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c$, то такой приемник называют однородным.

5. 2. 1. Расчет четырехпроводной цепи при соединении фаз генератора и приемника «звездой»

Для расчета трехфазной цепи применимы все методы, используемые для расчета линейных цепей. Обычно сопротивления проводов и внутреннее сопротивление генератора меньше сопротивлений приемников, поэтому при расчете таких цепей сопротивления проводов можно не учитывать ($\dot{Z}_{Л} = 0$, $\dot{Z}_N = 0$). Если полные комплексные сопротивления фаз равны \dot{Z}_a , \dot{Z}_b , \dot{Z}_c , токи в каждой фазе определяются по закону Ома

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\dot{Z}_a}, \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\dot{Z}_b}, \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\dot{Z}_c}. \quad (5.4)$$

Записав уравнение по первому закону Кирхгофа для нейтральной точки N (n), получим

$$\dot{I}_N = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (5.5)$$

5. 2. 1. 1. Симметричная нагрузка приемника

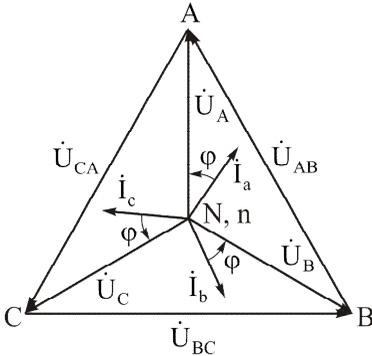


Рис. 5. 7. Векторно-топографическая диаграмма соединения «звезда» при симметричной нагрузке

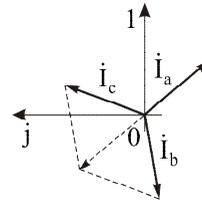


Рис. 5. 8. Векторная диаграмма токов соединения «звезда» при симметричной нагрузке

При симметричной нагрузке полные комплексные сопротивления фаз приемника равны между собой

$$\dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c = \dot{Z}_\Phi = Z_\Phi \cdot e^{j\varphi},$$

где $Z_\Phi = \sqrt{X_\Phi^2 + R_\Phi^2}$, $\varphi = \arctg(X_\Phi / R_\Phi)$. В случае симметричной системы ЭДС действующие значения фазных токов равны $I_a = I_b = I_c = I_\Phi = E_m / Z_\Phi$ и углы сдвига фаз между токами и напряжениями одинаковы: $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$ (рис. 5. 7).

Из векторной диаграммы токов для симметричного приемника (рис. 5. 8) видно, что сумма векторов фазных токов равна 0 ($\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$). Соответственно и ток в нулевом проводе $\dot{I}_N = 0$. Из этого следует, что при подключении к симметричной системе ЭДС симметричной нагрузки по схеме «звезда» необходимости использования нулевого провода нет.

5. 2. 1. 2. Несимметричная нагрузка приемника

При подключении несимметричной нагрузки ($Z_a \neq Z_b \neq Z_c$, $\varphi_a \neq \varphi_b \neq \varphi_c$) к симметричной системе ЭДС токи в фазах нагрузки различны и определяются по закону Ома (5. 4). Ток в нейтральном проводе будет равен сумме фазных токов (рис. 5. 9)

$$\dot{I}_N = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c.$$

В случае идеального нулевого провода ($Z_N = 0$) падение напряжения на нем равно 0 и фазные напряжения нагрузки равны фазным напряжениям генератора:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A, \dot{U}_b = \dot{U}_B, \dot{U}_c = \dot{U}_C,$$

а значение фазного напряжения $U_\phi = U_L / \sqrt{3}$ (рис. 5. 10). Таким образом, нейтральный провод обеспечивает симметрию фазных напряжений приемника при несимметричной нагрузке.

Учитывая сказанное, в трехфазных электрических цепях однофазные несимметричные нагрузки подключают к симметричной системе ЭДС по четырехпроводной схеме. В этом случае режим работы каждой фазы нагрузки, находящейся под неизменным фазным напряжением генератора, не будет зависеть от режима работы других фаз.

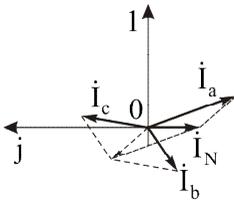


Рис. 5. 9. Векторная диаграмма токов соединения «звезда» при несимметричной нагрузке

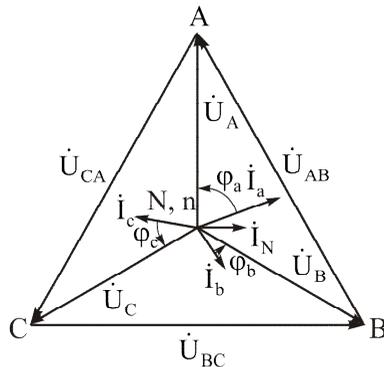


Рис. 5. 10. Векторно-топографическая диаграмма соединения «звезда» при несимметричной нагрузке

5. 2. 2. Расчет трехпроводной цепи при соединении фаз генератора и приемника «звездой»

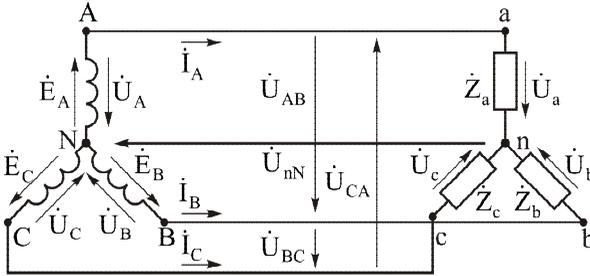


Рис. 5. 11. Схема трехпроводного соединения фаз генератора и приемника «звездой»

Схема трехпроводного соединения «звезда» приведена на рис. 5. 11. При таком соединении точки N и n не связаны между собой проводником и между ними может возникать разность потенциалов \dot{U}_{nN} , которую называют напряжением смещения нейтрали.

Для трехпроводной цепи сумма фазных токов нагрузки в точке n равна 0 ($\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$). В случае симметричной нагрузки приемника $\dot{U}_A = \dot{U}_a$, $\dot{U}_B = \dot{U}_b$, $\dot{U}_C = \dot{U}_c$, сумма фазных напряжений приемника $\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c = 0$, напряжение смещения нейтрали $\dot{U}_{nN} = 0$ и расчет цепи проводится так же, как в п. 5. 2. 1. 1.

В случае несимметричной нагрузки приемника ($\dot{Z}_a \neq \dot{Z}_b \neq \dot{Z}_c$) напряжение смещения нейтрали $\dot{U}_{nN} \neq 0$. Для его определения используют метод двух узлов (см. п. 2. 3. 6), так как схема соединения «звезда» имеет только 2 узла: n и N. Уравнение для определения \dot{U}_{nN} будет иметь вид

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{Y}_a \cdot \dot{U}_A + \dot{Y}_b \cdot \dot{U}_B + \dot{Y}_c \cdot \dot{U}_C}{\dot{Y}_a + \dot{Y}_b + \dot{Y}_c}, \quad (5. 6)$$

где $\dot{Y}_a = 1/\dot{Z}_a$, $\dot{Y}_b = 1/\dot{Z}_b$, $\dot{Y}_c = 1/\dot{Z}_c$ – комплексные проводимости соответствующих фаз нагрузки приемника.

Очевидно, что при $\dot{U}_{nN} \neq 0$ напряжения на фазах приемника будут отличаться от напряжений фаз генератора и друг от друга. По второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN}, \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN}, \quad \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN}. \quad (5. 7)$$

Зная фазные напряжения приемника, определяют фазные токи

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\dot{Z}_a} = \dot{Y}_a \cdot \dot{U}_a, \quad \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\dot{Z}_b} = \dot{Y}_b \cdot \dot{U}_b, \quad \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\dot{Z}_c} = \dot{Y}_c \cdot \dot{U}_c. \quad (5. 8)$$

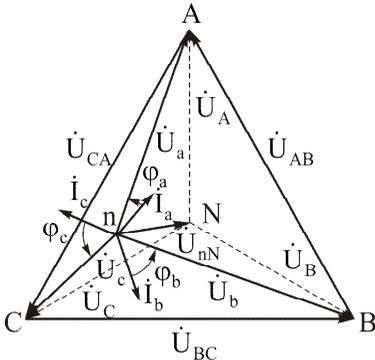


Рис. 5. 12. Векторно-топографическая диаграмма трехпроводного соединения «звезда» при несимметричной нагрузке

Векторно-топографическая диаграмма при подключении несимметричной нагрузки к трехфазной симметричной системе ЭДС по трехпроводной схеме «звезда» показана на рис. 5. 12.

При изменении величины (или характера) фазных сопротивлений напряжение смещения нейтрали \dot{U}_{nN} может значительно изменяться. При этом нейтральная точка приемника n на диаграмме может занимать разные положения, а фазные напряжения приемника \dot{U}_a, \dot{U}_b и \dot{U}_c могут существенно отличаться друг от друга.

Таким образом, при несимметричной нагрузке и отсутствии нейтрального провода фазные напряжения нагрузки не равны фазным напряжениям генератора, так как на нагрузку воздействуют только линейные напряжения генератора. Несимметричная нагрузка в таких условиях вызывает несимметрию ее фазных напряжений $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$ и смещение ее нейтральной точки n из центра треугольника напряжений (смещение нейтрали). Из вышеперечисленного следует, что использование нейтрального провода позволяет:

- выравнять фазные напряжения приемника при несимметричной нагрузке;
- подключать к трехфазной цепи однофазные приемники с номинальным напряжением в $\sqrt{3}$ раз меньше номинального линейного напряжения сети.

В цепь нейтрального провода нельзя ставить предохранитель, так как перегорание предохранителя приведет к разрыву нейтрального провода и появлению значительных перенапряжений на фазах нагрузки.

5. 3. Соединение фаз генератора и приемника «треугольником»

При симметричной системе ЭДС возможно соединение фаз источника в замкнутый «треугольник», так как $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$. При соединении фаз симметричной системы ЭДС «треугольником» конец X одной фазы соединяется с началом B второй фазы, конец Y второй фазы – с началом C третьей фазы, конец третьей фазы Z – с началом первой фазы A . Если соединение обмоток «треугольником» выполнено неправильно, т.е. в одну точку соединены концы или начала двух фаз, то суммарная ЭДС в контуре «треугольника» отличается от нуля и по обмоткам протекает большой ток. Такой режим является аварийным для источников питания, и его возникновение недопустимо. Начала фаз A, B и

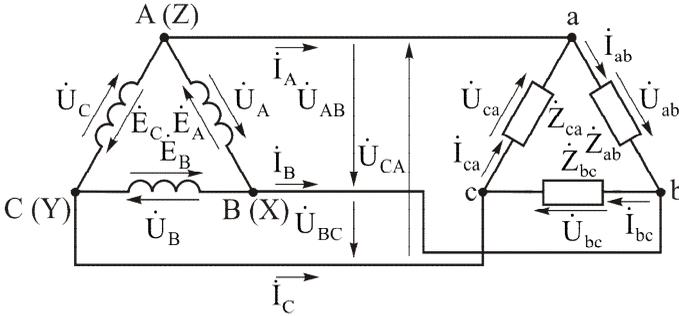


Рис. 5. 13. Схема соединения фаз генератора и приемника «треугольником»

С подключаются с помощью трех проводов к фазам приемника, соединенным в треугольник (рис. 5. 13).

При соединении «треугольником» напряжение между концом и началом фазы равно напряжению между линейными проводами, то есть фазное напряжение равно линейному:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A, \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B, \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C, \dot{U}_L = \dot{U}_\Phi,$$

а фаза нагрузки подключается параллельно соответствующей фазе генератора. Пренебрегая сопротивлением линейных проводов, линейные напряжения потребителя можно приравнять к линейным напряжениям источника питания:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB}, \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA}.$$

По фазам \dot{Z}_{ab} , \dot{Z}_{bc} , \dot{Z}_{ca} приемника протекают фазные токи \dot{I}_{ab} , \dot{I}_{bc} , \dot{I}_{ca} . Условное положительное направление фазных напряжений \dot{U}_{ab} , \dot{U}_{bc} , \dot{U}_{ca} совпадает с положительным направлением фазных токов. Условное положительное направление линейных токов \dot{I}_A , \dot{I}_B и \dot{I}_C принято обозначать от источников питания к приемнику. Токи в фазах приемника определяют по закону Ома:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_{ab}}, \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_{bc}}, \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_{ca}}. \quad (5.9)$$

В отличие от соединения «звездой» при соединении «треугольником» фазные токи не равны линейным. Линейные токи определяют, составив уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов a, b и c:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}, \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}, \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \quad (5.10)$$

Сложив левые и правые части уравнений (5. 10), получим

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (5.11)$$

Таким образом, при соединении «треугольником» сумма комплексных значений линейных токов равна нулю как при симметричной, так и при несимметричной нагрузке.

5. 3. 1. Симметричная нагрузка приемника

При симметричной нагрузке полные комплексные сопротивления фаз приемника равны между собой:

$$\dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c = \dot{Z}_\Phi = Z_\Phi \cdot e^{j\varphi},$$

где $Z_\Phi = \sqrt{X_\Phi^2 + R_\Phi^2}$, $\varphi = \arctg(X_\Phi / R_\Phi)$. Так как система линейных (фазных) напряжений \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} и \dot{U}_{CA} симметричная, то и фазные токи образуют симметричную систему:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_\Phi}, \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_\Phi}, \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_\Phi}.$$

Значения фазных токов равны между собой ($I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_\Phi$), а сдвиги по фазе относительно друг друга составляют 120° . Если условно принять начальную фазу тока \dot{I}_{ab} равной нулю, то $\dot{I}_{ab} = I_\Phi$, $\dot{I}_{bc} = I_\Phi \cdot e^{-j120^\circ}$, $\dot{I}_{ca} = I_\Phi \cdot e^{j120^\circ}$. Линейные токи определяются по уравнениям (5. 10) и также образуют симметричную систему:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = I_\Phi - I_\Phi \cdot \cos(-120^\circ) - I_\Phi \cdot \sin(-120^\circ) = \frac{3}{2}I_\Phi + j\frac{\sqrt{3}}{2}I_\Phi.$$

$$I_A = |\dot{I}_A| = \sqrt{\frac{9}{4}I_\Phi^2 + \frac{3}{4}I_\Phi^2} = \sqrt{3}I_\Phi = \sqrt{3}I_{ab} = \sqrt{3}I_{bc}, \quad \varphi_{\PhiЛ} = \arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ.$$

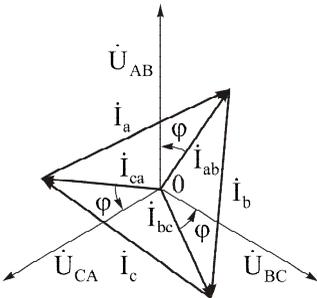


Рис. 5. 14. Векторная диаграмма соединения «треугольником» при симметричной нагрузке приемника

Аналогичные вычисления можно провести для остальных линейных токов. Таким образом, при соединении «треугольником» и симметричной нагрузке приемника линейный ток связан с фазным соотношением

$$I_{Л} = \sqrt{3}I_\Phi. \quad (5. 12)$$

На векторной диаграмме (рис. 5.14) фазные токи отстают от фазных напряжений на угол $\varphi > 0$ (в данном примере фазы приемника носят индуктивный характер). Также принято, что напряжение \dot{U}_{AB} имеет нулевую фазу.

Таким образом, при симметричной нагрузке фаз приемника расчет трехфазной цепи, соединенной «треугольником», можно свести

к расчету одной фазы. Фазное напряжение $\dot{U}_\Phi = \dot{U}_Л$, фазный ток $I_\Phi = \frac{U_\Phi}{Z_\Phi}$,

линейный ток $I_{Л} = \sqrt{3}I_\Phi$, угол сдвига тока фазы от напряжения фазы $\varphi = \arctg(X_\Phi / R_\Phi)$.

5.3.2. Несимметричная нагрузка приемника

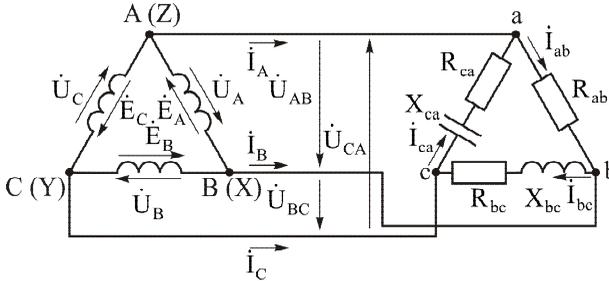


Рис. 5.15. Пример соединения фаз генератора и приемника «треугольником» при несимметричной нагрузке

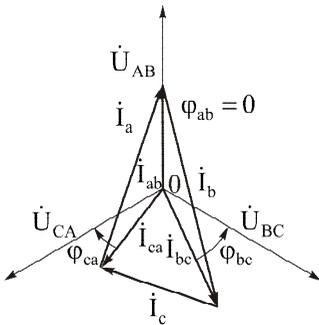


Рис. 5.16. Векторная диаграмма соединения «треугольником» при несимметричной нагрузке приемника

В общем случае при несимметричной нагрузке фаз приемника $\dot{Z}_{ab} \neq \dot{Z}_{bc} \neq \dot{Z}_{ca}$. Обычно такой случай возникает при питании от трехфазной сети однофазных приемников. В схеме, приведенной на рисунке 5.15, фазные токи, углы сдвига фаз и фазные мощности будут различными. В фазе ab ток совпадает с напряжением, в фазе bc ток отстает от напряжения, а в фазе ca ток опережает напряжение (рис. 5.16). Таким образом, при несимметричной нагрузке нарушается симметрия фазных токов, их значения определяются из уравнений (5.9) и линейные токи можно определить только расчетом по уравнениям (5.10) или графическим путем из векторной диаграммы.

Важной особенностью соединения фаз приемника треугольником является то, что при изменении сопротивления одной из фаз режим работы других фаз остается неизменным, так как линейные напряжения генератора являются постоянными. Будут изменяться только ток данной фазы и линейные токи в проводах линии, соединенных с этой фазой. Поэтому схема соединения «треугольником» широко используется для включения несимметричной нагрузки.

Возможно подключение нагрузки фаз приемника, соединенной «треугольником», к симметричной системе ЭДС, соединенной «звездой». В этом случае расчет проводится аналогично с учетом того, что линейное напряжение больше фазного напряжения генератора в $\sqrt{3}$ раз ($U_{ab} = \sqrt{3}U_A$).

5. 4. Мощность трехфазной цепи

В трехфазных цепях, так же как и в однофазных, пользуются понятиями активной, реактивной и полной мощностей.

5. 4. 1. Соединение потребителей «звездой»

В общем случае активная мощность трехфазного приемника равна сумме активных мощностей отдельных фаз:

$$P = P_a + P_b + P_c, \quad (5. 13)$$

где $P_a = U_a \cdot I_a \cdot \cos \varphi_a$, $P_b = U_b \cdot I_b \cdot \cos \varphi_b$, $P_c = U_c \cdot I_c \cdot \cos \varphi_c$; U_a , U_b , U_c , I_a , I_b , I_c – действующие значения напряжения и токов соответствующих фаз приемника; φ_a , φ_b , φ_c – угол сдвига между напряжением и током соответствующей фазы приемника.

Реактивная мощность соответственно равна сумме реактивных мощностей отдельных фаз:

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c, \quad (5. 14)$$

где $Q_a = U_a \cdot I_a \cdot \sin \varphi_a$, $Q_b = U_b \cdot I_b \cdot \sin \varphi_b$, $Q_c = U_c \cdot I_c \cdot \sin \varphi_c$.

Полная мощность отдельных фаз

$$S_a = U_a \cdot I_a, S_b = U_b \cdot I_b, S_c = U_c \cdot I_c,$$

а полная мощность трехфазного приемника

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (5. 15)$$

В случае симметричной системы напряжений ($U_a = U_b = U_c = U_\Phi$) и симметричной нагрузки приемников ($I_a = I_b = I_c = I_\Phi$, $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$) мощности фаз приемника равны между собой $P_a = P_b = P_c = P_\Phi = U_\Phi \cdot I_\Phi \cdot \cos \varphi$, $Q_a = Q_b = Q_c = Q_\Phi = U_\Phi \cdot I_\Phi \cdot \sin \varphi$, $S_a = S_b = S_c = S_\Phi = U_\Phi \cdot I_\Phi$. Тогда мощности трехфазного приемника равны

$$P = 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Phi \cdot \cos \varphi, Q = 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Phi \cdot \sin \varphi, S = 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Phi, \quad (5. 16)$$

а с учетом того, что при соединении «звездой» $U_\Phi = U_{Л} / \sqrt{3}$ и $I_\Phi = I_{Л}$,

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{Л} \cdot I_{Л} \cdot \cos \varphi, Q = \sqrt{3} \cdot U_{Л} \cdot I_{Л} \cdot \sin \varphi, S = \sqrt{3} \cdot U_{Л} \cdot I_{Л}. \quad (5. 17)$$

Необходимо помнить, что в формулах (5. 17) φ – угол сдвига между напряжением и током фазы приемника.

5. 4. 2. Соединение потребителей «треугольником»

В общем случае активная мощность трехфазного приемника равна сумме активных мощностей отдельных фаз:

$$P = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca}, \quad (5. 18)$$

где $P_{ab} = U_{ab} \cdot I_{ab} \cdot \cos \varphi_{ab}$, $P_{bc} = U_{bc} \cdot I_{bc} \cdot \cos \varphi_{bc}$, $P_{ca} = U_{ca} \cdot I_{ca} \cdot \cos \varphi_{ca}$; U_{ab} , U_{bc} , U_{ca} , I_{ab} , I_{bc} , I_{ca} – действующие значения напряжения и токов

соответствующих фаз приемника; φ_{ab} , φ_{bc} , φ_{ca} – угол сдвига между напряжением и током соответствующей фазы приемника.

Реактивная мощность соответственно равна сумме реактивных мощностей отдельных фаз:

$$Q = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca}, \quad (5.19)$$

где $Q_{ab} = U_{ab} \cdot I_{ab} \cdot \sin \varphi_{ab}$, $Q_{bc} = U_{bc} \cdot I_{bc} \cdot \sin \varphi_{bc}$, $Q_{ca} = U_{ca} \cdot I_{ca} \cdot \sin \varphi_{ca}$.

Полная мощность отдельных фаз

$$S_{ab} = U_{ab} \cdot I_{ab}, \quad S_{bc} = U_{bc} \cdot I_{bc}, \quad S_{ca} = U_{ca} \cdot I_{ca},$$

а полная мощность трехфазного приемника

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (5.20)$$

В случае симметричной системы напряжений ($U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_{\Phi}$) и симметричной нагрузки приемников ($I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\Phi}$, $\varphi_{ab} = \varphi_{bc} = \varphi_{ca} = \varphi$) мощности фаз приемника равны между собой:

$$P_{ab} = P_{bc} = P_{ca} = P_{\Phi} = U_{\Phi} \cdot I_{\Phi} \cdot \cos \varphi,$$

$$Q_{ab} = Q_{bc} = Q_{ca} = Q_{\Phi} = U_{\Phi} \cdot I_{\Phi} \cdot \sin \varphi,$$

$$S_{ab} = S_{bc} = S_{ca} = S_{\Phi} = U_{\Phi} \cdot I_{\Phi}.$$

Тогда мощности трехфазного приемника равны

$$P = 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\Phi} \cdot \cos \varphi, \quad Q = 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\Phi} \cdot \sin \varphi, \quad S = 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\Phi}, \quad (5.21)$$

а с учетом того, что при соединении «треугольником» $U_{\Phi} = U_{Л}$ и $I_{\Phi} = I_{Л} / \sqrt{3}$,

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{Л} \cdot I_{Л} \cdot \cos \varphi, \quad Q = \sqrt{3} \cdot U_{Л} \cdot I_{Л} \cdot \sin \varphi, \quad S = \sqrt{3} \cdot U_{Л} \cdot I_{Л}. \quad (5.22)$$

Необходимо помнить, что в формулах (5.22) φ – угол сдвига между напряжением и током фазы приемника.

Таким образом, в случае симметричной системы напряжений и симметричной нагрузки приемников для расчета мощности при соединении потребителей «треугольником» справедливы те же соотношения, что и при соединении потребителей «звездой».

6. Переходные процессы в линейных электрических цепях

6.1. Общие сведения о переходных процессах

В установившемся режиме работы электрических цепей напряжения и токи либо не изменяются во времени (цепи постоянного тока), либо являются периодическими функциями времени (цепи переменного тока). Процессы, протекающие в электрических цепях при переходе из одного установившегося режима в другой, называются переходными. Переход от одного режима работы к другому может быть вызван изменением параметров цепи (подключением или отключением элементов электрической цепи) и называется коммутацией. В электротехнике коммутации осуществляются с помощью идеализированных ключей, переключение которых происходит мгновенно, сопротивление в положении “включено” равно нулю, а в положении “выключено” бесконечно. Для коммутации могут также использоваться двунаправленные ключи (рис. 6.1, б). Для удобства полагают, что коммутации в электрических цепях происходят в момент времени $t=0$.

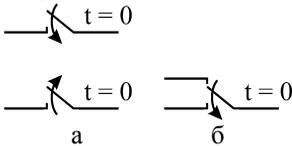


Рис. 6.1. Варианты ключей, используемых для коммутаций в электрических цепях

В электрических цепях с активными нагрузками переходные процессы протекают мгновенно из-за отсутствия накопителей энергии. При наличии в электрической цепи реактивных элементов – индуктивностей или емкостей или одновременно и индуктивностей и емкостей – переходные процессы протекают в течение некоторого интервала времени

ни, так как переход в новое состояние связан с изменением энергии индуктивностей $W_L = L \cdot i^2 / 2$ и емкостей $W_C = C \cdot u^2 / 2$, а в соответствии с законом о непрерывности изменения энергии не могут происходить скачкообразно. Теоретически переходные процессы протекают бесконечное время, практически их длительность ограничивают интервалом, в течение которого токи и напряжения в электрической цепи достигают некоторого уровня от установившегося значения. В зависимости от назначения электрической цепи переходные процессы могут быть нежелательными (в системах электроснабжения) или естественными, нормальными режимами (в системах радиоэлектроники). Задачи анализа переходных процессов заключаются в нахождении функций, описывающих изменения токов и напряжений во всех или некоторых ветвях электрической цепи, возникающих после коммутации (при $t > 0$). Существует несколько методов расчета переходных процессов в линейных электрических цепях. Наиболее фундаментальным и наглядным является классический метод, заключающийся в составлении и решении дифференциальных уравнений.

6.2. Законы коммутации и начальные условия

Известно, что реактивные элементы L и C способны запасать и отдавать энергию. При протекании через L тока i в магнитном поле индуктивности запасается энергия

$$W_L = \frac{L \cdot i^2}{2}, \quad (6.1)$$

а энергия электрического поля, заряженного до напряжения и конденсатора, составляет

$$W_C = \frac{C \cdot u^2}{2}. \quad (6.2)$$

Из принципа непрерывности изменения энергии вытекает непрерывность изменения во времени потокосцепления индуктивности и электрического заряда емкости, на которой основаны законы коммутации.

Первый закон коммутации: ток через индуктивность до коммутации равен току после коммутации $i(0_-) = i(0_+)$ и затем плавно изменяется.

Второй закон коммутации: напряжение на емкости до коммутации равно напряжению после коммутации $u(0_-) = u(0_+)$ и затем плавно изменяется.

Напряжение на индуктивности U_L и ток через конденсатор i_C могут изменяться скачкообразно, так как с ними непосредственно не связана энергия магнитного поля индуктивности и энергия электрического поля конденсатора.

До начала коммутации при $t < 0$ электрическая цепь находилась в установившемся режиме, который характеризуется начальными условиями – значениями токов и напряжений реактивных элементов. Значение тока через индуктивность $i_L(0)$ и напряжение на емкости $u_C(0)$ до коммутации образуют независимые начальные условия, которые используются при решении задач расчета переходных процессов. Начальные условия могут быть нулевыми, когда

$$i_L(0) = 0, \quad u_C(0) = 0,$$

или не нулевыми в случаях

$$\text{а) } i_L(0) \neq 0, \quad u_C(0) \neq 0;$$

$$\text{б) } i_L(0) \neq 0, \quad u_C(0) = 0;$$

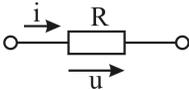
$$\text{в) } i_L(0) = 0, \quad u_C(0) \neq 0.$$

При нулевых начальных условиях в момент $t = 0$ коммутации индуктивность можно рассматривать как разрыв, а емкость как короткое замыкание. В случае не нулевых начальных условий индуктивность представляет собой источник тока $J = i_L(0)$, а емкость – источник ЭДС. $E = u_C(0)$. Значения $i_L(0)$ и $u_C(0)$ определяются в установившемся режиме с использованием законов Ома и Кирхгофа. При этом в случае электрических цепей постоянного тока индуктивность заменяется короткозамкнутым участком, а емкость – разрывом, а для нахождения начальных условий в электрических цепях синусоидального тока применяется символический метод расчета.

6.3. Составление интегродифференциальных уравнений

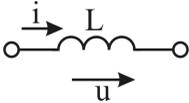
Задача расчета переходных процессов заключается в определении мгновенных значений токов в ветвях и напряжений на элементах электрической цепи после коммутации при $t > 0$. При составлении уравнений по законам Ома и Кирхгофа используются соотношения, связывающие мгновенные значения напряжений на пассивных элементах R , L , C электрических цепей с мгновенными значениями токов, протекающих через них (описывающих вольт-амперные характеристики элементов)

а) сопротивление



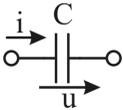
$$u_R = R \cdot i_R - \text{закон Ома} \quad (6.3)$$

б) индуктивность



$$u_L = L \frac{di}{dt} - \text{закон Фарадея} \quad (6.4)$$

в) емкость



$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt \quad (6.5)$$

С учетом этих соотношений уравнения, составленные по законам Ома и Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений, приобретают вид интегродифференциальных уравнений, которые могут быть преобразованы в дифференциальные уравнения. Порядок дифференциального уравнения n определяется количеством независимых реактивных элементов. Дифференциальные уравнения I порядка ($n=1$) описывают переходные процессы в электрических цепях с одним реактивным элементом (RL и RC – цепи). При $n=2$ электрическая цепь содержит L и C элементы и переходные процессы описываются дифференциальными уравнениями II порядка.

Примеры составления дифференциальных уравнений:

1. RL – цепь (рис. 6.2).

По 2-му закону Кирхгофа

$$u_L + u_R = e(t).$$

Учитывая (6.3) и (6.4), запишем

$$L \frac{di}{dt} + R_i = e.$$

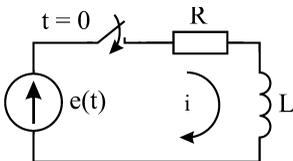


Рис. 6.2. Схема подключения источника ЭДС к RL цепи

Полученное соотношение является неоднородным дифференциальным урав-

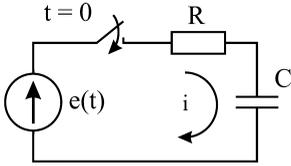


Рис. 6.3. Схема подключения источника ЭДС к RC цепи

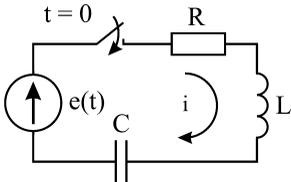


Рис. 6.4. Схема подключения источника ЭДС к последовательному колебательному контуру

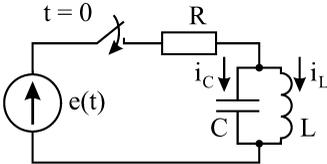


Рис. 6.5. Схема подключения источника ЭДС к параллельному колебательному контуру

Учитывая, что

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = u_C \text{ и } i_C = C \frac{dU_C}{dt} = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2},$$

записываем

$$R \left(i_L + LC \frac{d^2 i}{dt^2} \right) + L \frac{di}{dt} = e(t).$$

После преобразования имеем неоднородное дифференциальное уравнение II порядка

$$RLC \frac{d^2 i}{dt^2} + L \frac{di}{dt} + R i = e(t).$$

нением I-го порядка, где независимой переменной является ток $i(t)$.

2. RC – цепь (рис. 6.3).

По второму закону Кирхгофа

$$u_C + u_R = e(t).$$

Дифференцируя (1.5) записываем

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Далее получаем дифференциальное уравнение

$$R \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t).$$

3. RLC – последовательный колебательный контур (рис. 6.4).

По 1-му и 2-му законам Кирхгофа

$$u_R + u_L + u_C = e(t).$$

С учетом (6.3), (6.4), (6.5) имеем

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} + u_C = e(t).$$

Учитывая, что ток в цепи $i = C \frac{du_C}{dt}$

получаем

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t).$$

4. RLC – параллельный колебательный контур

По 1-му и 2-му законам Кирхгофа

$$i_R = i_L + i_C, \quad u_R + u_L = e(t).$$

6.4. Решение дифференциальных уравнений

В общем случае для переходных процессов в линейной электрической цепи с n независимыми реактивными элементами составляется неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$b_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x = W(t), \quad (6.6)$$

где $x(t)$ – независимая переменная (ток или напряжение), $W(t)$ – внешнее воздействие, коэффициенты $b_n \dots b_0$ определяются параметрами цепи. Решение уравнения (6.6) находится как сумма двух независимых решений

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{пр}(t), \quad (6.7)$$

где $x_{св}(t)$ – свободная составляющая, являющаяся общим решением однородного дифференциального уравнения [уравнения (6.6) с нулевой правой частью], $x_{пр}(t)$ – принужденная составляющая, частное решение неоднородного уравнения.

Принужденная составляющая находится в установившемся режиме при $t = \infty$ (после завершения переходных процессов) с учетом внешнего источника $W(t)$. Для расчета $x_{пр}(t)$ применяются такие же методы, что и при определении начальных условий, с учетом нового состояния электрической цепи. Для решения однородного дифференциального уравнения на основе (6.6) составляется характеристическое уравнение

$$b_n \cdot p^n + \dots + b_1 p + b_0 = 0, \quad (6.8)$$

где оператор $p^n = d^n x / dt^n$. Решением алгебраического уравнения (6.8) являются корни p_1, p_2, \dots, p_n , вид которых определяет характер свободной составляющей $x_{св}(t)$.

Если корни p_1, \dots, p_n вещественные и различные, свободная составляющая представляет собой сумму экспонент

$$x_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}, \quad (6.9)$$

где постоянные интегрирования A_1, \dots, A_n находятся из начальных условий.

Для случая вещественных и равных корней $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \alpha$ решение однородного дифференциального уравнения записывается в виде

$$x_{св}(t) = A_1 \cdot e^{\alpha t} + A_2 \cdot t \cdot e^{\alpha t} + \dots + A_n \cdot e^{\alpha t}. \quad (6.10)$$

Наиболее интересным является случай комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_c$. В этом случае каждой паре корней характеристического уравнения в выражении для $x_{св}(t)$ соответствует слагаемое

$$A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta),$$

где A и Θ – постоянные интегрирования, находятся из начальных условий.

Для упрощения решения задач расчета переходных процессов характеристическое уравнение составляется с использованием понятия обобщенного со-

противления цепи $Z(p)$, которое получается из комплексного сопротивления $\dot{Z}(j\omega)$ заменой $j\omega$ на оператор p . Комплексное сопротивление $\dot{Z}(j\omega)$ определяется для электрической цепи после коммутации при короткозамкнутых источниках ЭДС. Далее одна из ветвей размыкается и относительно места размыкания находится входное сопротивление. Например, для электрической цепи на рис. 6.5 входное сопротивление

$$\dot{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = R + \frac{\dot{Z}_L \cdot \dot{Z}_C}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_C} = R + \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Далее после преобразований и замены $j\omega$ на p получим характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

6.5. Переходные процессы в электрических цепях I порядка

Электрические цепи I порядка содержат один реактивный элемент и одно или несколько сопротивлений (RL и RC цепи). Они могут выполнять функции интегрирующих дифференцирующих цепочек.

Переходные процессы в них описываются дифференциальными уравнениями I порядка. Рассмотрим случаи подключения и отключения источников ЭДС к RL и RC цепям.

Подключение источника ЭДС к RL цепи (рис. 6.6).

До момента коммутации при $t < 0$ источник ЭДС отключен от электрической цепи, начальные условия нулевые $i(0) = 0$. В качестве независимой переменной принимаем ток через индуктивность $i_L(t) = i(t)$. Составим дифференциальное уравнение.

$$u_R + u_L = R \cdot i + L \frac{di}{dt} = e(t). \quad (6.11)$$

Решение дифференциального уравнения находится в виде суммы свободной и принужденной составляющих:

$$i(t) = i_{\text{св}}(t) + i_{\text{пр}}(t). \quad (6.12)$$

Свободная составляющая $i_{\text{св}}(t)$ является общим решением однородного дифференциального уравнения:

$$L \frac{di_{\text{св}}}{dt} + R i_{\text{св}} = 0. \quad (6.13)$$

Для дифференциальных уравнений 1-го порядка это решение имеет вид

$$i_{\text{св}}(t) = A \cdot e^{pt},$$

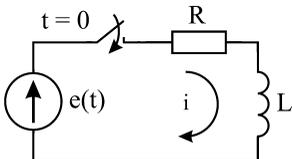


Рис. 6.6 Подключение источника ЭДС к RL цепи

где p – корень характеристического уравнения

$$pL + R = 0,$$

откуда

$$p = -\frac{R}{L} \text{ [1/c]}.$$

Вводят новый параметр цепи – постоянную времени

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right| = RC \text{ [c]}.$$

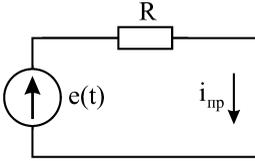


Рис. 6.7. Схема для определения принужденной составляющей в электрической цепи с источником ЭДС

При подключении к цепи источника постоянного напряжения $e(t) = E$ принужденная составляющая находится из схемы после коммутации (рис. 6.7)

$$i_{\text{пр}} = \frac{E}{R}.$$

Запишем решение уравнения (6.7) в виде суммы свободной и принужденной составляющих

$$i(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + E/R. \quad (6.14)$$

Для нахождения постоянной интегрирования A используем начальное условие $i_L(0) = 0$. Из (6.14) при $t = 0$ имеем

$$0 = A + E/R,$$

откуда

$$A = -\frac{E}{R}.$$

Тогда для тока в цепи во время переходных процессов окончательно запишем

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (6.15)$$

Для нахождения напряжения на индуктивности используем закон Фарадея

$$u_L = L \frac{di}{dt} = E \cdot e^{-t/\tau}. \quad (6.16)$$

Напряжение на сопротивлении находится по закону Ома:

$$u_R = R \cdot i = E \cdot e^{-t/\tau}. \quad (6.17)$$

Из выражений (6.15), (6.16), (6.17) следует, что переходные процессы в RL цепи протекают по экспоненциальному закону с постоянной времени $\tau = L/R$. Скорость переходных процессов определяется величиной постоянной времени τ , чем больше τ , тем медленнее протекают переходные процессы (рис. 6.8)

Переходные процессы принято изображать в виде временных диаграмм – зависимостей тока и напряжений от времени. Временные диаграммы, постро-

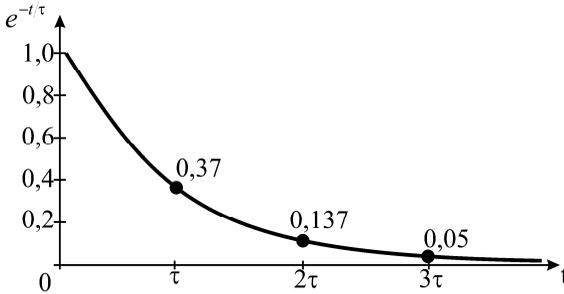


Рис. 6.8. Экспоненциальная функция и ее значения при $t=\tau, 2\tau, 3\tau$

енные по формулам (6.15), (6.16), (6.17), приведены на рис. 6.9. Подключение источника постоянной ЭДС можно рассматривать как воздействие на электрическую цепь напряжения вида $u_1(t) = E \cdot l(t)$, где $l(t)$ – единичная функция (функция включения). До момента коммутации $t = 0$ индуктивность разряжена, так как ток $i_L(0) = 0$. При подключении источника ЭДС начинается процесс заряда индуктивности, ток $i_L(t)$ возрастает по экспоненциальному закону, стремясь при $t = \infty$ к установившемуся значению $i_{np} = i_L(\infty) = E/R$. В момент коммутации напряжение на индуктивности скачком изменяется до величины E и по мере заряда индуктивности спадает по экспоненциальному закону. Напряжение на сопротивлении по форме совпадает с током $i(t)$, так как $u_R = R \cdot i$. Когда переходные процессы завершаются, ток в цепи достигает наибольшего значения

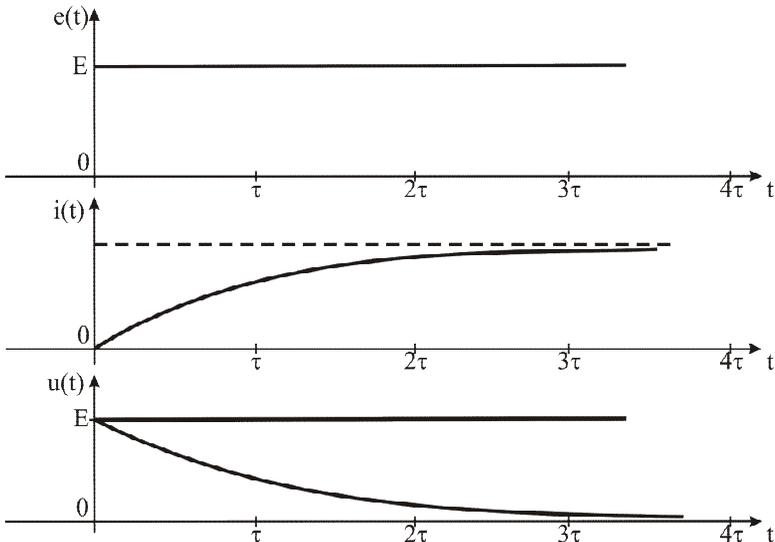


Рис. 6.9. Временные диаграммы переходного процесса в цепи при подключении источника постоянной ЭДС

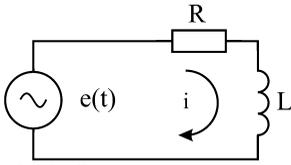


Рис. 6.10. Схема для определения принужденной составляющей в электрической цепи с источником гармонической ЭДС

$i_L(\infty) = E/R$, в индуктивности будет запасена энергия $W_L(\infty) = LE^2/2R^2$.

При подключении к электрической цепи источника синусоидального напряжения $e(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$ в решении (6.15) дифференциального уравнения (6.14) изменяется только принужденная составляющая, которая рассчитывается символическим методом в соответствии со схемой электрической цепи в установившемся режиме после коммутации (рис. 6.10):

$$i_{np}(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi),$$

где $I_m = E/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\varphi = \text{arctg}(\omega L/R)$.

Тогда выражение для тока в цепи в течение переходных процессов принимает вид

$$i(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi).$$

Используя начальное условие $i_L(0) = 0$, определяем значение постоянной интегрирования:

$$A = -I_m \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi).$$

Окончательно для тока в цепи записываем

$$i(t) = I_m \cdot (\sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi) - e^{-t/\tau} \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi)).$$

Временная диаграмма тока показана на рис. 6.11. Из него видно, что во время переходных процессов, возникающих при подключении нагрузок, в электрических цепях переменного тока возникают сверхтоки $I_{max} > I_m$. При больших постоянных времени мгновенные значения токов могут превышать амплитудное значение почти в два раза.

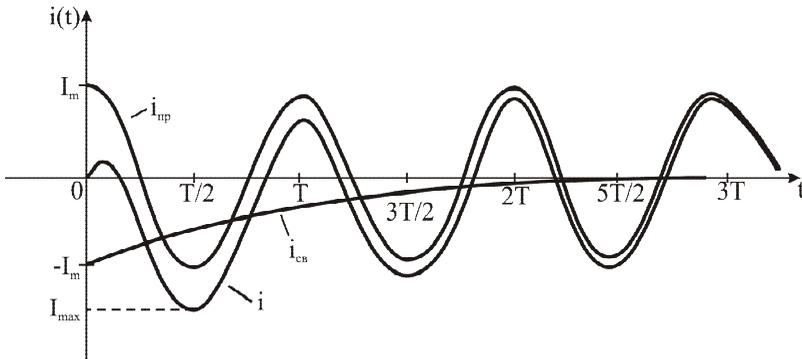


Рис. 6.11. Переходные процессы при подключении к RL цепи источника синусоидальной ЭДС

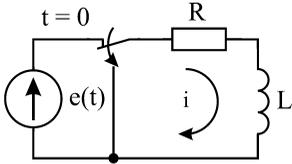


Рис. 6.12. Схема электрической цепи при отключении источника ЭДС

Отключение RL цепи от источника ЭДС.

Схема электрической цепи для этого случая представлена на рис. 6.12. В исходном состоянии до момента коммутации через индуктивность протекает ток $i_L(0) = E/R$.

В индуктивности запасена энергия $W_L = LE^2/2R^2$. После коммутации и завершения переходных процессов индуктивность полностью разряжается через сопротивление R и ее

ток $i_{пр} = i(\infty) = 0$. Поэтому решение дифференциального уравнения будет состоять только из свободной составляющей.

$$i(t) = i_{св}(t) = A \cdot e^{-t/\tau}.$$

Используя начальное условие $i_L(0) = E/R$, находим постоянную интегрирования

$$A = E/R$$

и записываем выражение для тока в цепи во время переходных процессов

$$i(t) = i_{св}(t) = A \cdot e^{-t/\tau}.$$

Далее находим напряжение на индуктивности и сопротивлении

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -E \cdot e^{-t/\tau},$$

$$U_R = R \cdot i = E \cdot e^{-t/\tau}.$$

Диаграммы переходного процесса при отключении источника ЭДС от RL цепи показаны на рис. 6.13.

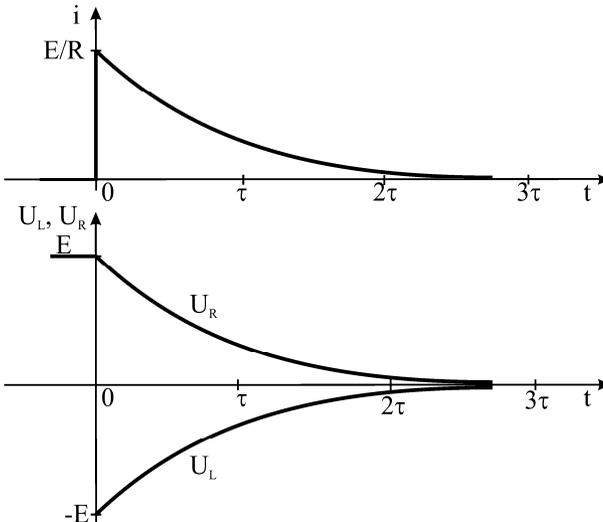


Рис. 6.13. Переходные процессы в RL цепи при отключении источника ЭДС

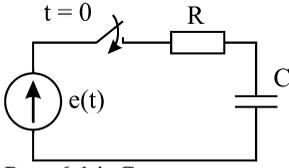


Рис. 6.14. Схема подключения источника ЭДС к RC цепи

Подключение источника ЭДС к RC цепи.

Схема электрической цепи для этого случая показана на рис. 6.14. Источник ЭДС в исходном состоянии при $t < 0$ отключен от цепи, начальные условия нулевые $u_C(0) = 0$. В качестве независимой переменной принимается напряжение на конденсаторе и составляется дифференциальное уравнение

$$u_R + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t).$$

Записываем характеристическое уравнение

$$RCp + 1 = 0$$

и находим его корень $p = -1/RC$.

В качестве параметра RC цепи используют постоянную времени $\tau = -1/p = RC$ [с].

Свободная составляющая переходного процесса описывается экспоненциальной функцией

$$u_{св}(t) = A \cdot e^{-t/\tau}.$$

При подключении источника постоянной ЭДС $e(t) = E$ принужденная составляющая $U_{пр} = E$, так как после завершения переходных процессов конденсатор заряжается до напряжения источника ЭДС. Тогда переходный процесс будет описываться функцией

$$u_C(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + E.$$

Используя начальное условие $u_C(0) = 0$, определяем значение постоянной интегрирования $A = -E$ и окончательно записываем

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}).$$

Ток в цепи во время переходного процесса

$$i(t) = i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Временные диаграммы переходного процесса в RC цепи при подключении постоянной ЭДС показаны на рис. 6.15. Во время переходного процесса происходит заряд емкости C от источника ЭДС через сопротивление R. В емкости запасается

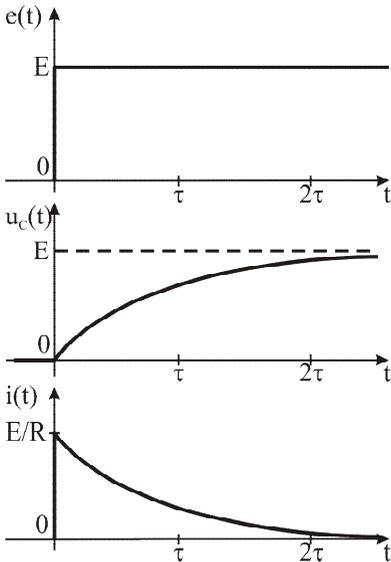


Рис. 6.15. Переходные процессы в RC цепи при подключении источника постоянной ЭДС

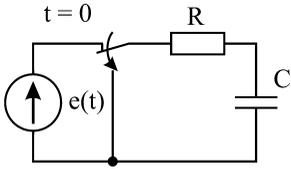


Рис. 6.16. Схема отключения от RC цепи источника ЭДС

энергия $W = CU^2/2$. Такая же энергия расходуется при протекании зарядного тока через сопротивление. Скорость заряда зависит от постоянной времени τ . С увеличением τ инерционность цепи увеличивается и заряд конденсатора происходит медленнее.

При отключении цепи от источника в схеме (рис. 6.16) происходит обратный процесс разряда конденсатора C через резистор R . В исходном состоянии при $t < 0$ конденсатор заряжен до напряжения источника ЭДС $u_C(0) = E$, а после завершения переходных процессов разряжается до нуля $u_C(\infty) = u_{np} = 0$. Тогда выражения для напряжения и тока во время переходного процесса примут вид

$$u_C(t) = E \cdot e^{-t/\tau},$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{R} \cdot e^{-t/\tau} \tau,$$

$$u_R(t) = R \cdot i = -E \cdot e^{-t/\tau}.$$

Подводя итог рассмотрению переходных процессов в линейных цепях I порядка, можно сделать следующие выводы:

1. Переходные процессы описываются дифференциальными уравнениями I порядка.
2. Переходные процессы протекают в соответствии с экспоненциальным законом.
3. Скорость переходных процессов определяется постоянной времени электрической цепи.

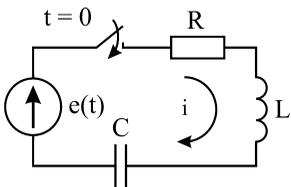


Рис. 6.17. Схема подключения источника ЭДС к последовательному колебательному контуру

6.6. Переходные процессы в электрических цепях II порядка

Линейная цепь II порядка содержит два реактивных элемента L и C . Примером электрической цепи II порядка является последовательный колебательный контур (рис. 6.17). Составим дифференциальное уравнение для переходного процесса:

$$u_R + u_L + u_C = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + u_C = e.$$

Учитывая, что $i = C \frac{du_C}{dt}$, записываем

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t). \quad (6.18)$$

Выражение (6.18) является дифференциальным уравнением II порядка. Его решение состоит из свободной и принужденной составляющих

$$u_c(t) = u_{cb} + u_{пр}.$$

Принужденная составляющая зависит от внешнего воздействия $e(t)$ и определяется в установившемся режиме при $t = \infty$. Свободная составляющая $u_{cb}(t)$ является решением однородного дифференциального уравнения

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + U_C = 0. \quad (6.19)$$

Для определения $u_{cb}(t)$ составляется характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (6.19):

$$\begin{aligned} LCp^2 + RCp + 1 &= 0, \\ p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} &= 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Находятся корни уравнения (6.20):

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Вводятся обозначения: $\alpha = R/2L$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – резонансная частота контура. Важным параметром, определяющим характер переходного процесса в колебательных контурах, является добротность

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0}{2\alpha}, \quad (6.21)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление контура. Используя выражение (6.21), корни характеристического уравнения можно представить в виде

$$p_{1,2} = \alpha(-1 \pm \sqrt{1 - 2Q}). \quad (6.22)$$

В зависимости от величины добротности могут быть три варианта корней характеристического уравнения и соответственно три вида свободной составляющей переходного процесса.

1. $Q < 0,5$, корни действительные и различные, переходный процесс носит аperiодический характер: $u_{cb}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$.

2. $Q = 0,5$, корни действительные, равные, переходный процесс носит промежуточный характер: $u_{cb}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{p t}$.

3. $Q > 0,5$, корни комплексно-сопряженные, переходный процесс носит колебательный затухающий характер: $u_{cb}(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \Theta)$,

где A_1, A_2, A, Θ – постоянные интегрирования, находятся из начальных условий, $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Рассмотрим переходные процессы в последовательном колебательном контуре при разряде емкости на RL цепь (схема на рис. 6.18). До коммутации емкость заряжена до величины $u_c(0) = E$ (ненулевые начальные условия), ток

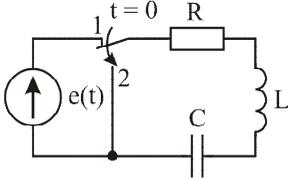


Рис. 6.18. Схема отключения источника ЭДС от последовательного резонансного контура

через индуктивность равен нулю $i_L(0) = 0$ (нулевые начальные условия). В конденсаторе запасена энергия $W_C(0) = CE^2/2$. После коммутации (в момент $t=0$ ключ переводится в положение 2) емкость начинает разряжаться через R, L элементы и в контуре возникает переходный процесс.

Напряжение на конденсаторе во время переходного процесса определяется суммой свободной и принужденной составляющих

$$u_C(t) = u_{св}(t) + u_{пр}.$$

Так как после коммутации при $t > 0$ источник ЭДС отключается от контура, принужденная составляющая $U_{пр} = 0$, решение дифференциального уравнения состоит только из свободной составляющей

$$u_C(t) = u_{св}(t).$$

Случай $Q < 0,5$, корни характеристического уравнения (6.20) вещественные и различные ($p_1 < 0, p_2 < 0$):

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha > \omega_0.$$

Свободная составляющая для этого случая состоит из двух компонент:

$$u_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 находим из начальных условий. Для использования начального условия для индуктивности $i_L(0) = 0$ определяем выражение для тока в электрической цепи

$$i(t) = i_c(t) = C \frac{du_C}{dt} = C(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}).$$

Подставляя при $t=0$ начальные условия для $u_C(0)$ и $i_L(0)$, получаем

$$\begin{cases} E = A_1 + A_2, \\ 0 = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, определяем значения постоянных интегрирования

$$A_1 = -\frac{p_2 E}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = \frac{p_1 E}{p_1 - p_2}.$$

Тогда напряжение на емкости во время переходного процесса будет описываться выражением

$$U_C(t) = \frac{E}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}),$$

а ток в контуре

$$i(t) = CE \left(\frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} - \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} \right).$$

Учитывая, что

$$p_1 \cdot p_2 = \alpha^2 - (\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})^2 = \omega_0^2 = 1/LC,$$

получаем

$$i(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}).$$

Используя выражение для тока $i(t)$, можно рассчитать

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t}).$$

Временные диаграммы напряжений и тока в контуре во время переходных процессов приведены на рис. 6.19. На интервале $0 - t_1$ происходит разряд конденсатора и заряд индуктивности, далее при $t > t_1$ конденсатор и индуктивность разряжаются. В течение всего интервала $t > 0$ через резистор R протекает ток и запасенная в реактивных элементах энергия постепенно расходуется до нуля. Так как напряжение на конденсаторе при его разряде изменяется монотонно (без колебаний), переходный процесс называют аperiодическим.

Случай $Q > 0,5$ ($\omega_0 > \alpha$), корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_c,$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ – частота собственных колебаний контура. Решение однородного дифференциального уравнения для этого случая записывается в виде

$$u_{св}(t) = Ae^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta), \quad (6.23)$$

где A и Θ – постоянные интегрирования. Для их определения начальные условия подставляются в выражения для напряжения на емкости (6.20) и тока через индуктивность

$$i_L(t) = i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\alpha \cdot C \cdot A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta) + \omega_c C \cdot A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_c t + \Theta).$$

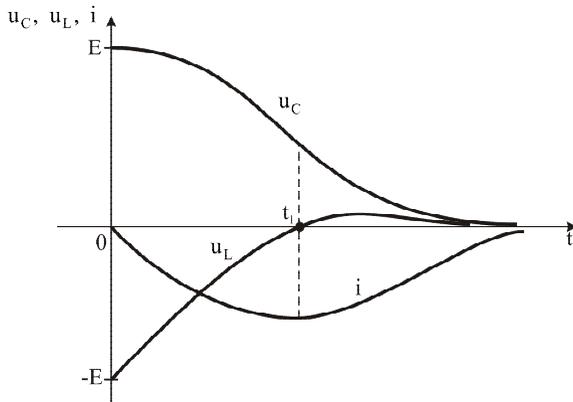


Рис. 6.19. Переходные процессы в RLC контуре с добротностью $Q < 0,5$

При $t = 0$ имеем

$$\begin{cases} E = A \cdot \sin \Theta, \\ 0 = -\alpha \cdot A \sin \Theta + \omega_c A \cos \Theta. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим

$$A = \frac{\omega_0}{\omega_c} E, \quad \Theta = \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{\alpha}.$$

При больших добротностях $Q \gg 0,5$ постоянная интегрирования $Q \approx 90^\circ$ и приближенно выражения для напряжений и токов во время переходного процесса можно записать в виде

$$u_C(t) \cong E \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos \omega_c t,$$

$$u_L(t) \cong -E \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos \omega_c t,$$

$$i_L(t) \cong -\frac{E}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t.$$

Временные диаграммы напряжений на реактивных элементах С и L и тока в контуре показаны на рис. 6.20.

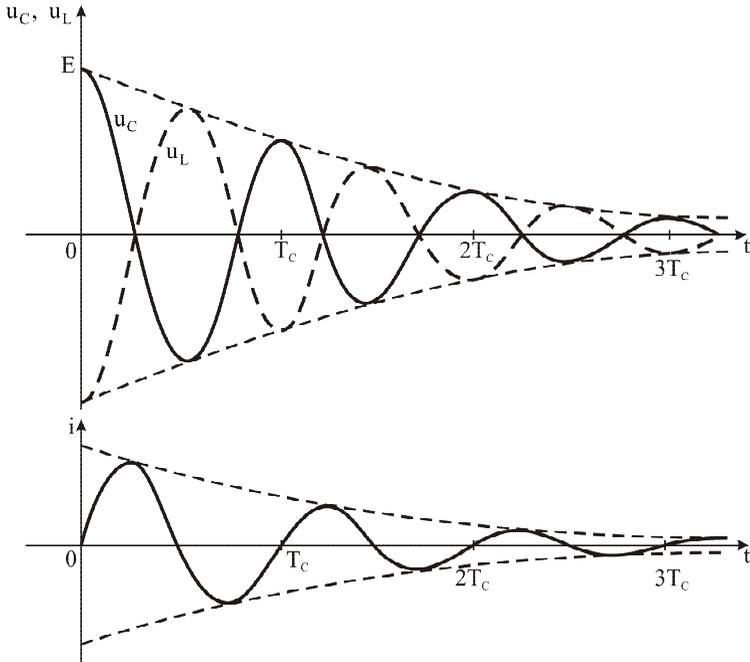


Рис. 6.20. Переходные процессы в RLC контуре с добротностью $Q > 0,5$

В контуре во время переходных процессов имеет место колебательный процесс обмена энергией между емкостью и индуктивностью с частотой $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Интервал $T=2\pi/\omega_c$ называют квазипериодом колебаний. Перезарядный ток $i(t)$ протекает через сопротивление R , и часть энергии, сосредоточенной в реактивных элементах, расходуется, поэтому переходный процесс имеет затухающий характер. Затухание происходит по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания $\alpha = R/2L$. Чем больше сопротивление R , тем больше коэффициент затухания и тем быстрее завершается переходный процесс. При $R = 2\rho$, когда $Q = 0,5$, переходный процесс из колебательного превращается в аperiодический. Теоретически можно представить себе контур без потерь с $R = 0$, в котором существуют незатухающие колебания с частотой $\omega_c = \omega_0$. В контуре без потерь имеет место переменный обмен энергией между C и L , при котором энергия электрического поля конденсатора преобразуется в энергию магнитного поля индуктивности, а затем наоборот. В реальных электрических цепях $R > 0$, поэтому переходный процесс имеет затухающий характер.

Рассмотрим переходные процессы при подключении источника постоянной ЭДС к параллельному колебательному контуру (схема на рис. 6.21).

За независимую переменную при анализе переходных процессов в схемах с параллельным соединением L и C принимают ток через индуктивность $i_L(t)$. В исходном состоянии при $t < 0$ источник ЭДС отключен от контура, $i_L(0) = 0$, $U_C(0) = 0$, начальные условия нулевые. Для составления характеристического уравнения найдем входное сопротивление цепи после коммутации

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R + \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + 1/j\omega C}.$$

После введения параметра $p = j\omega$ и преобразований получим характеристическое уравнение вида

$$p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (6.24)$$

Корни характеристического уравнения имеют вид

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Добротность параллельного контура определяется выражением

$$Q = R/\rho,$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление контура. При $Q > 0,5$ корни уравнения (6.24) комплексно-сопряженные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2},$$

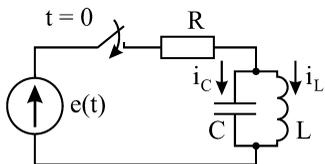


Рис. 6.21. Схема подключения источника ЭДС к параллельному контуру

где $\alpha = 1/2RC$ – коэффициент затухания.

Следует заметить, что в параллельном контуре, по схеме рис. 6.21, в отличие от последовательного контура (рис. 6.17) при увеличении сопротивления R затухание уменьшается, а добротность контура увеличивается.

Принужденная составляющая тока через индуктивность определяется после завершения переходных процессов при $t = \infty$:

$$i_{np} = E/R.$$

Для случая $Q > 0,5$ изменение тока через индуктивность во время переходного процесса будет описываться функцией

$$i_L(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta) + E/R.$$

После дифференцирования тока $i(t)$ находим напряжение на индуктивности, которое равно напряжению на емкости:

$$u_L(t) = u_C(t) = L \frac{di}{dt} = L \cdot A \cdot (-\alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta) + \omega_c \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_c t + \Theta)).$$

Подставляем в выражения для тока $i_L(t)$ и напряжения $U_C(t)$ начальные значения при $t = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = A \cdot \sin \Theta + E/R, \\ 0 = -\alpha \cdot \sin \Theta + \omega_c \cos \Theta. \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются постоянные интегрирования

$$A = -\frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{E}{R}, \quad \Theta = \arctg \frac{\omega_c}{\alpha}.$$

Тогда для тока в цепи во время переходных процессов запишем выражение

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right) e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta).$$

График изменения тока при добротности $Q \gg 1$, когда $\Theta = 90$, показан на рис. 6.22.

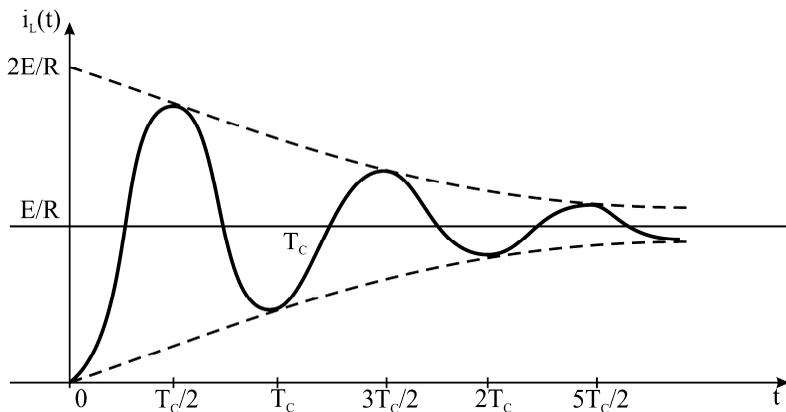


Рис. 6.22. Переходные процессы в параллельном контуре при подключении ЭДС

В исходном состоянии индуктивность и емкость разряжены: $i_L(0)=0$, $u_C(0)=0$. После замыкания ключа начинается заряд L и C через резистор. Причем в соответствии с законами коммутации ток через индуктивность нарастает плавно, а ток через емкость в момент $t=0$ скачком увеличивается до величины $i_C(0)=E/R$, а затем плавно изменяется. После коммутации имеет место периодический обмен энергией между L и C и переходный процесс носит колебательный характер.

7. Электрические цепи периодического несинусоидального тока

7.1. Общие сведения

В электротехнике и электронике наряду с переменными синусоидальными токами и напряжениями применяются периодические токи и напряжения других форм. Примеры таких токов показаны на рис. 7.1. Прямоугольное колебание – меандр (рис. 7.1, а) является дискретным аналогом гармонического колебания. Меандр характеризуется амплитудой колебания I_m и периодом T . С периодом связана частота колебаний $f = 1/T$ [Гц]. Наиболее распространенным видом периодического несинусоидального тока является последовательность прямоугольных импульсов (рис. 7.1, б), которая характеризуется амплиту-

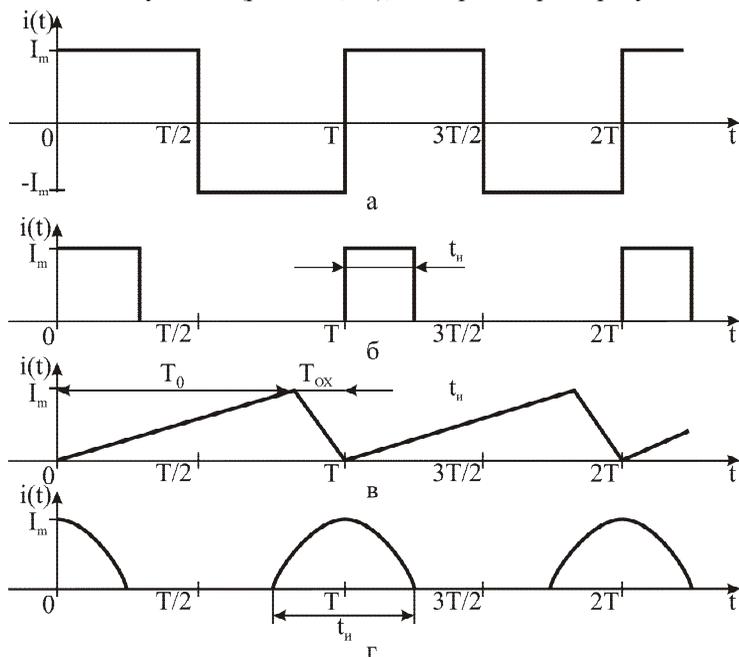


Рис. 7.1. Примеры периодических токов

дой I_m , периодом T (частотой $f = 1/T$) и длительностью импульсов $t_{и}$, а также скважностью $Q = T/t_{и}$. На рис. 7.1, в изображена последовательность пилообразных импульсов. Кроме амплитуды I_m и периода T параметрами пилообразного тока являются длительность прямого T_0 и обратного хода $T_{ок}$. К периодическим несинусоидальным колебаниям относится также последовательность косинусоидальных импульсов (рис. 7.1, г), для которых вводится дополнительный параметр – угол отсечки $\Theta = 2\pi \cdot t_{и}/T$.

Для расчета электрических цепей с источниками периодического несинусоидального тока или напряжения символический метод расчета цепей синусоидального тока непосредственно неприменим. Однако, раскладывая периодические несинусоидальные ЭДС на сумму синусоидальных составляющих (на сумму гармоник) и используя принцип суперпозиции, для расчета линейных электрических цепей несинусоидального тока можно использовать символический метод. Процедура расчета в этом случае состоит в разложении периодических несинусоидальных ЭДС на ряд синусоидальных ЭДС и расчете электрической цепи для каждой гармонической составляющей с последующим суммированием результатов расчета для каждой отдельной гармоники.

7.2. Разложение периодических функций в ряд Фурье

Известно, что периодические функции $f(x)$, удовлетворяющие некоторым условиям, могут быть представлены в виде линейной комбинации (суммы с весовыми коэффициентами) ортогональных функций:

$$f(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) + \dots \quad (7.1)$$

Ортогональной на отрезке $[a, b]$ называется система функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots,$$

удовлетворяющая условию

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ A_n & \text{при } n = m. \end{cases}$$

При разложении периодических функций в ряд Фурье в качестве ортогональных берут гармонические функции

$$1, \cos \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t, \dots$$

Для представления в виде ряда Фурье периодическая функция $f(t)$ должна удовлетворять условиям Дирихле: в пределах периода T функция имеет конечное число разрывов, максимумов и минимумов. Реальные ЭДС, токи и напряжения в электрических цепях удовлетворяют этим условиям. Таким образом, несинусоидальная периодическая функция $f(t) = f(t + T)$ может быть представлена в виде бесконечного гармонического ряда Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (7.2)$$

где A_0 – постоянная составляющая, A_n – амплитуда n -й гармоники, φ_n – начальная фаза n -й гармоники, $n\omega_1$ – частота n -й гармоники. Частота $\omega_1 = 2\pi/T$ назы-

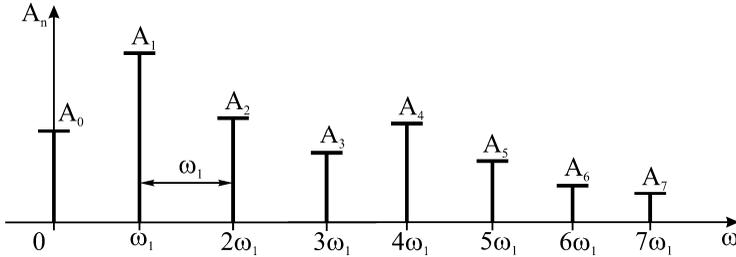


Рис. 7.2. Спектр амплитуд периодической функции

вается основной частотой. В ряде Фурье каждая гармоническая составляющая имеет свои амплитуду, частоту и начальную фазу. Используя тригонометрические преобразования, ряд Фурье можно представить в виде

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t, \quad (7.3)$$

где коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам, полученным на основе свойства ортогональности гармонических функций:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_1 t dt. \quad (7.4)$$

Между коэффициентами ряда Фурье в форме (7.2) и (7.3) существует связь:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctg a_n / b_n.$$

Для четных функций $b_n=0$, для нечетных функций $a_n=0$.

Набор коэффициентов ряда Фурье A_n и φ_n образует спектры амплитуд и фаз периодической несинусоидальной функции. Амплитудный спектр принято изображать в виде диаграммы (рис. 7.2).

Спектр периодических функций линейчатый. Расстояние между соседними линиями равно основной частоте $\omega_1 = 2\pi/T$.

7.3. Спектры некоторых периодических колебаний

Прямоугольное колебание (меандр) изображено на рис. 7.3.

При выбранном на рис. 7.3 начале отсчета времени функция $f(t)$ является нечетной. Коэффициенты ряда Фурье для нечетных функций $a_n=0$. Для коэффициентов b_n имеем

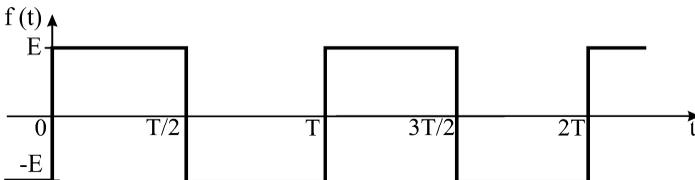


Рис. 7.3. Прямоугольное колебание

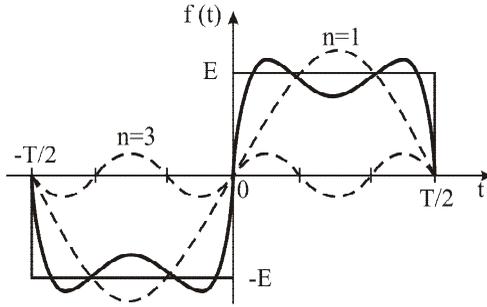


Рис. 7.4. Графическая интерпретация разложения в ряд Фурье

$$b_n = \frac{2E}{T} \int_0^{T/2} \sin n\omega_1 t \, dt - \frac{2E}{T} \int_{T/2}^T \sin n\omega_1 t \, dt = \frac{4E}{Tn\omega_1} (1 - \cos n\omega_1 T/2).$$

Учитывая, что $T\omega_1 = 2\pi$, получаем

$$b_n = \frac{2E}{\pi n} (1 - \cos \pi n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, 2, 4, \dots \\ 2E/\pi n & \text{при } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (7.5)$$

Начальные фазы равны 0 для всех гармоник. В тригонометрической форме ряд Фурье для прямоугольного колебания имеет вид

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right).$$

Графическая интерпретация ряда Фурье и спектр колебания представле-

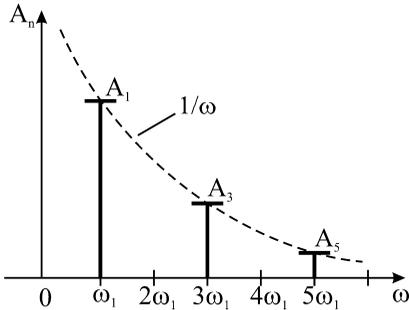


Рис. 7.5. Спектр прямоугольного колебания

ны на рис. 7.4, 7.5. Спектр прямоугольного колебания состоит из бесконечного количества нечетных гармоник. С увеличением числа гармоник сумма ряда приближается к функции $f(t)$. При ограниченном числе гармоник ряд Фурье лишь приближенно аппроксимирует прямоугольное колебание.

Последовательность прямоугольных импульсов (рис. 7.6).

В данном случае функция $f(t)$ четная и коэффициенты ряда Фурье $b_n = 0$.

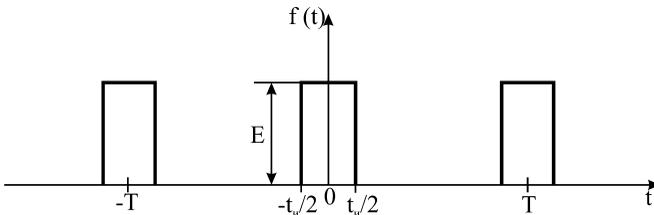


Рис. 7.6. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Значение средней (постоянной) составляющей

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-t_n/2}^{t_n/2} E dt = \frac{t_n}{T} E = \frac{E}{Q}.$$

Значения коэффициентов ряда Фурье

$$Q_n = \frac{2E}{T} \int_{-t_n/2}^{t_n/2} \cos n\omega_1 t dt = \frac{2E}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 t_n}{2}.$$

Таким образом,

$$f(x) = E \left(\frac{t_n}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\omega_1 t_n}{2} \cos n\omega_1 t \right). \quad (7.6)$$

Спектр последовательности прямоугольных импульсов изображен на рис. 7.7.

Спектр состоит из дискретных составляющих, амплитуда A_n которых определяется огибающей вида $(\sin x)/x$, где $x = n\omega_1 t_n/2$. Расстояние между соседними линиями спектра определяется периодом повторения $\omega_1 = 2\pi/T$.

Огибающая спектра имеет нули в точках $2\pi/t_n$, $4\pi/t_n$ и т. д. Спектр состоит из основного лепестка и ряда боковых лепестков. Протяженность основного лепестка $\Delta\omega = 2\pi/t_n$ принимается за условную ширину спектра. Учитывая, что $\omega = 2\pi f$, для ширины спектра в Гц получим $\Delta f = 1/t_n$. Откуда

$$\Delta f t_n = 1. \quad (7.7)$$

Это фундаментальное соотношение говорит о том, что произведение ширины спектра на длительность импульса остается постоянным. Поэтому более короткие импульсы имеют более широкий спектр.

Число дискретных линий в одном лепестке спектра равно скважности импульсной последовательности $Q = T/t_n$. При $T \rightarrow \infty$, $Q \rightarrow \infty$ периодическая последовательность вырождается в одиночный импульс. При этом расстояние между спектральными линиями $\omega_1 = 2\pi/T \rightarrow 0$ и спектр из линейчатого превращается в сплошной, но ширина спектра по-прежнему определяется соотношением (7.7).

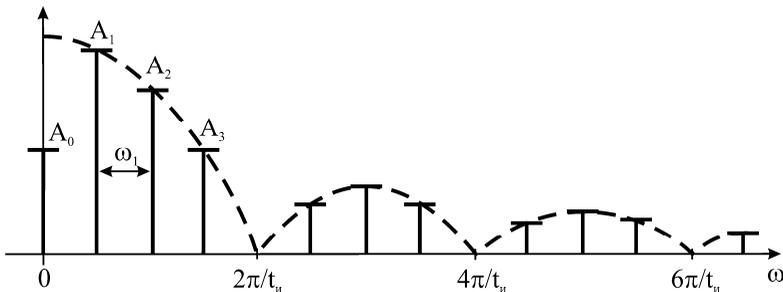


Рис. 7.7. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

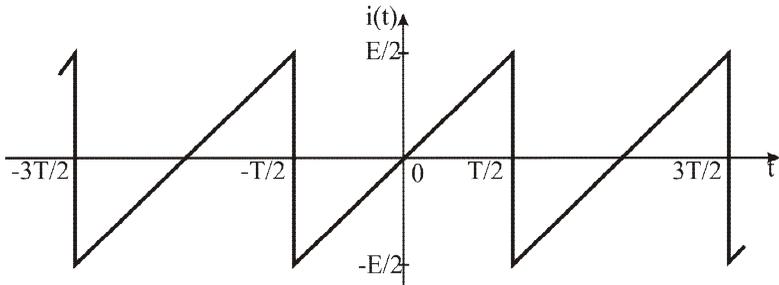


Рис. 7.8. пилообразное колебание

Пилообразное колебание используется в устройствах развертки в осциллографах и мониторах. Колебание (график на рис. 7.8) описывается нечетной функцией, и ряд Фурье для нее содержит только синусоидальные члены

$$U(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t - \dots \right). \quad (7.8)$$

Периодическая последовательность импульсов треугольной формы (рис. 7.9). Один импульс последовательности описывается выражением

$$e(t) = \begin{cases} 2E \cdot t/T, & 0 \leq t \leq T/2, \\ 2E \cdot (1 - t/T), & T/2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Постоянная составляющая напряжения последовательности импульсов треугольной формы равна

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{E \cdot T}{T} = \frac{E}{2}.$$

Форма этой последовательности импульсов описывается четной функцией, поэтому коэффициенты ряда Фурье $a_n = 0$, а коэффициенты b_n описываются выражением

$$b_n = \frac{4E}{\pi^2 n^2} \cos \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

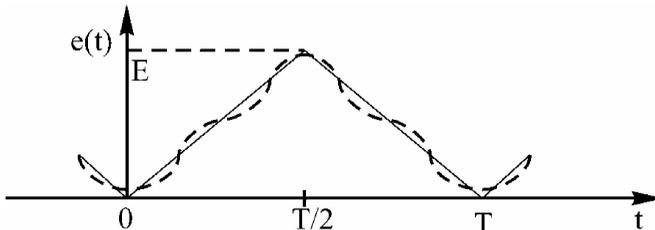


Рис. 7.9. Периодическое колебание треугольной формы и сумма трех первых гармоник ряда Фурье (пунктирная линия)

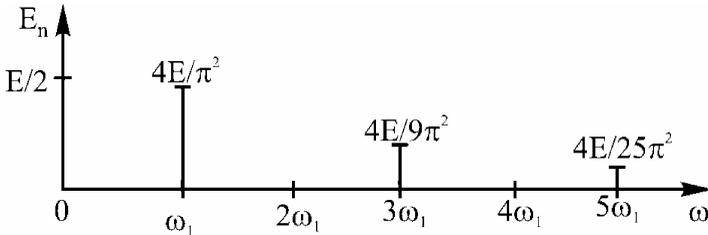


Рис. 7. 10. Спектр последовательности треугольных импульсов

Ряд Фурье для данной последовательности состоит из суммы постоянной составляющей и нечетных гармоник

$$e(t) = \frac{E}{2} - \frac{4E}{\pi^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_1 t + \dots + \frac{1}{n^2} \cos n \omega_1 t \right).$$

Спектральная диаграмма последовательности изображена на рис. 7. 10.

Периодическая последовательность косинусоидальных импульсов. Такая последовательность возникает при воздействии на нелинейные элементы гармонических колебаний. Примером нелинейного элемента может служить полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого в первом приближении описывается кусочно-линейной функцией (рис. 7.11).

Наклон ВАХ характеризуется крутизной $S = \Delta i / \Delta U$. Если к диоду приложить напряжение, состоящее из постоянной и переменной составляющих $u(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$, то при определенных соотношениях между величинами U_0 , U_m и напряжением отсечки диода U_1 ток диода будет иметь форму косинусоидальных импульсов с углом отсечки $\Theta = \arccos((U_1 - U_0)/U_m)$. Угол отсечки может изменяться в пределах от 0 (ток диода равен нулю) до 180° (режим

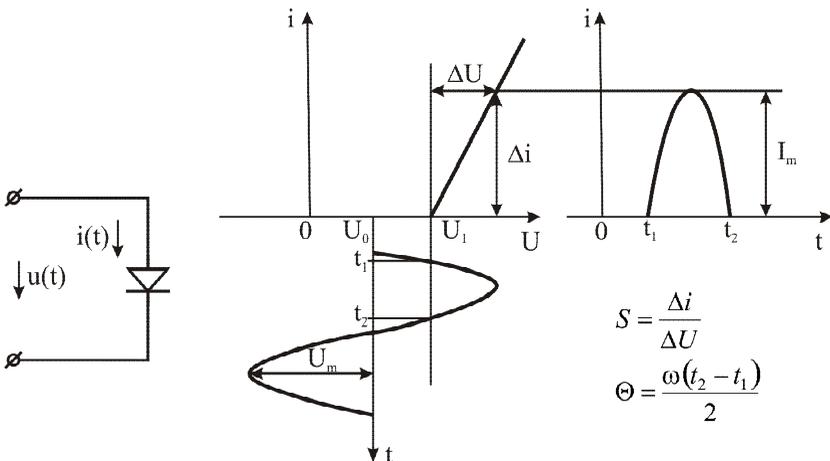


Рис. 7.11. Воздействие периодического напряжения на нелинейный элемент

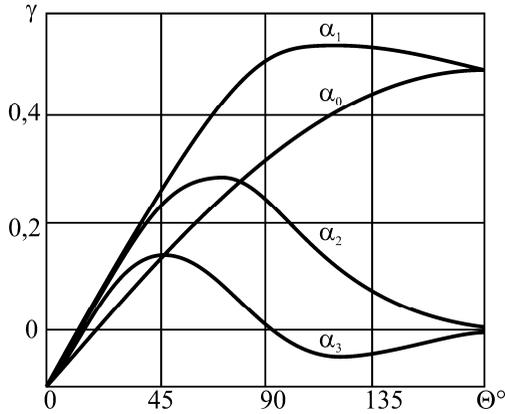


Рис. 7.12. Зависимости коэффициентов Берга от угла отсечки

без отсечки тока диода). Ток диода имеет форму периодических импульсов косинусоидальной формы, описываемых выражением

$$i(t) = \frac{I_m}{1 - \cos \Theta} (\cos \omega t - \cos \Theta), \quad -\Theta/\omega < t < \Theta/\omega,$$

где $I_m = S \cdot U_m (1 - \cos \Theta)$ – амплитуда импульсов тока.

Коэффициенты ряда Фурье для периодической последовательности косинусоидальных импульсов являются функциями угла отсечки:

$$I_0 = I_m \frac{\sin \Theta - \Theta \cos \Theta}{\pi(1 - \cos \Theta)}, \quad (7.9)$$

$$I_{m_n} = I_m \frac{2(\sin \Theta \cos \Theta - n \cos(n\Theta))}{\pi n(n^2 - 1)(1 - \cos \Theta)}.$$

Вводят нормированные параметры – коэффициенты Берга:

$$\alpha_0 = \frac{I_0}{I_m}, \quad \alpha_1 = \frac{I_1}{I_m}, \dots, \quad \alpha_n = \frac{I_n}{I_0}, \dots$$

Зависимости первых четырех коэффициентов от угла отсечки приведены на рис. 7.12.

7.4. Расчет электрических цепей несинусоидального тока с использованием разложения в ряд Фурье

Пусть требуется рассчитать ток в электрической цепи под действием периодической несинусоидальной ЭДС

$$e(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{m_n} \sin(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (7.10)$$

где U_{m_n} – амплитуда n -й гармоники ЭДС. В линейных электрических цепях токи в ветвях находятся методом наложения (суперпозиций), путем суммирова-

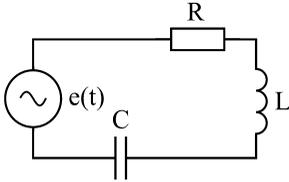


Рис. 7.13. Последовательный колебательный контур

ния токов, создаваемых каждым из слагаемых ЭДС (7.10). Для случая цепи, состоящей из последовательного соединения R, L, C элементов (рис. 7.13), имеем

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{m_n} \sin(n\omega_1 t + \varphi_n - \psi_n),$$

где $I_{m_n} = U_{m_n} / Z(n\omega_1)$ – амплитуда n -й гармоники тока,

$$Z(n\omega_1) = \sqrt{R^2 + (n\omega_1 L - 1/n\omega_1 C)^2} \text{ – полное}$$

сопротивление цепи на частоте $\omega_n = n\omega_1$, $\psi_n = \arctg((n\omega_1 L - 1/n\omega_1 C)/R)$.

Сопротивление цепи на постоянном токе ($\omega_n = 0$) равно $Z(0) = \infty$, поэтому постоянная составляющая тока $I_0 = U_0 / Z(0) = 0$. При увеличении номера гармоники, т.е. с увеличением частоты $\omega_n = n\omega_1$, индуктивное сопротивление возрастает $Z_L = n\omega_1 L$, а емкости уменьшаются $Z_C = 1/n\omega_1 C$, поэтому полное сопротивление цепи является функцией частоты $n\omega_1$. Если при некотором значении n выполняется условие $n\omega_1 L = 1/n\omega_1 C$, на частоте $\omega_n = n\omega_1$ возникает резонанс напряжения.

Расчет разветвленной цепи периодического несинусоидального тока ведется для каждой гармоники в символической форме. Полный ток находится суммированием мгновенных значений гармоник тока в ветвях, так как векторы комплексных токов имеют различную частоту вращения.

7.5. Действующее значение и мощность периодического несинусоидального тока

Действующее значение периодических токов (напряжений) определяется выражением

$$I_g = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}. \quad (7.11)$$

Для синусоидального тока действующее значение тока вычисляется по формуле

$$I_g = I_m / \sqrt{2}.$$

В случае периодического несинусоидального тока вычисления по формуле (7.11) с использованием разложения в ряд Фурье дают результат

$$I_g = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{m_n}^2 / 2}. \quad (7.12)$$

Так как $I_{m_n}^2 / 2 = I_{g_n}^2$ – квадрат действующего значения n -й гармоники, (7.12) можно записать в виде

$$I_g = \sqrt{I_0^2 + I_{g_1}^2 + I_{g_2}^2 + \dots}. \quad (7.13)$$

Таким образом, действующее значение периодического несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений гармоник, включая постоянную составляющую. Активная мощность периодического несинусоидального тока также может быть рассчитана с использованием разложения в ряд Фурье. Известно, что активная мощность равна среднему значению мощности за период

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt. \quad (7.14)$$

При разложении периодических токов и напряжений в ряд Фурье средняя мощность каждой гармоники рассчитывается по формуле

$$P_n = \frac{1}{T} \int_0^T U_{m_n} I_{m_n} \sin n\omega_1 t \cdot \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) dt = U_{g_n} I_{g_n} \cos \varphi_n, \quad (7.15)$$

где φ_n – сдвиг фазы между током и напряжением n -й гармоники. Интегрирование по формуле (7.14) с учетом ортогональности гармонических функций дает

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{g_n} I_{g_n} \cos \varphi_n. \quad (7.16)$$

Из (7.16) следует, что активная мощность в цепях периодического несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник и мощности постоянной составляющей. Для несинусоидальных токов также используют такие параметры, как коэффициент формы, коэффициент амплитуды и коэффициент гармоник. Коэффициент формы определяется как отношение действующего значения тока к среднему значению:

$$k_\Phi = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \bigg/ \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt. \quad (7.17)$$

Для синусоидального тока $k_\Phi = 1,11$. Коэффициент амплитуды определяется как отношение максимального значения к действующему значению:

$$k_A = \frac{I_m}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}}. \quad (7.18)$$

Для синусоидального тока $k_A = \sqrt{2}$.

Коэффициент гармоник определяется выражением

$$k_\Gamma = \frac{\sqrt{I_{2m}^2 + I_{3m}^2 + I_{4m}^2 + \dots}}{I_{m_1}}. \quad (7.19)$$

Коэффициент гармоник используется для оценки степени соответствия периодического тока синусоидальному току.

8. Линейные четырехполюсники

8.1. Системы уравнений четырехполюсников

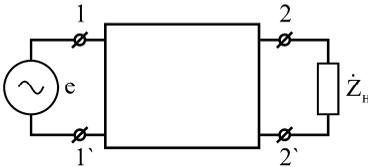


Рис. 8.1. Графическое изображение четырехполюсника

Электрическая цепь, имеющая две пары зажимов, называется четырехполюсником. Понятием четырехполюсника пользуются в тех случаях, когда необходимо знать токи и напряжения только в двух ветвях электрической цепи. Как четырехполюсники рассматриваются электрические фильтры, трансформаторы, длинные линии и др. Изображение четы-

рехполюсника на схемах электрических цепей показано на рис. 8.1.

К входным зажимам 1–1' подключается источник электрической энергии, к выходным – нагрузка. Часто одной входной и одной выходной зажимы соединяют между собой (зажимы 1' и 2') и называют общим зажимом.

Четырехполюсники могут быть линейными и нелинейными, активными и пассивными. Ниже рассматриваются линейные четырехполюсники, все элементы которых имеют линейные ВАХ. Активные четырехполюсники содержат источники электрической энергии, пассивные состоят только из нагрузок. Смысл использования четырехполюсников заключается в том, что сложная электрическая цепь может быть представлена с помощью небольшого набора обобщенных параметров. Пассивные четырехполюсники могут быть характеризованы всего тремя независимыми параметрами.

Обозначения направлений входных и выходных токов и напряжений показаны на рис. 8.2.

Напряжения и токи создаются подключением к одной или двум парам зажимов четырехполюсника активных цепей. При этом соотношения между токами и напряжениями на выходе и входе четырехполюсника устанавливаются системой двух уравнений. Существует шесть вариантов записи системы «Z» и «Y» уравнений. Наиболее распространенными являются системы «Z» и «Y» параметров. Уравнения в системе «Z» параметров:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{22}\dot{I}_2. \end{cases} \quad (8.1)$$

Уравнения в системе «Y» параметров

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2. \end{cases} \quad (8.2)$$

Коэффициенты в уравнениях (8.2) представляют собой входные, выходные и передаточные проводимости:

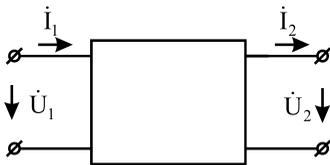


Рис. 8.2. Обозначение входных и выходных токов четырехполюсника

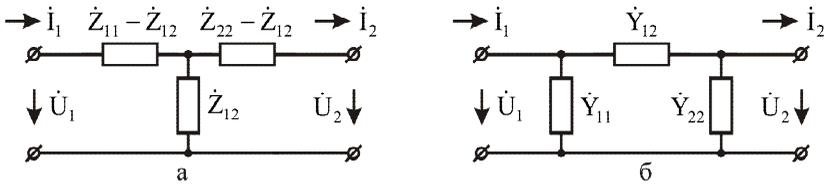


Рис. 8.3. Схемы замещения четырехполюсников

$\dot{Y}_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0}$ – входная проводимость при режиме короткого замыкания

на выходе;

$\dot{Y}_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}$ – выходная проводимость при режиме короткого замыкания на входе;

на входе;

$\dot{Y}_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0}$ – передаточная проводимость со входа на выход при режиме короткого замыкания на выходе;

на выходе;

$\dot{Y}_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}$ – передаточная проводимость с выхода на вход при режиме короткого замыкания на входе.

короткого замыкания на входе.

Если $\dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21}$, четырехполюсник является обратимым, если $\dot{Y}_{11} = \dot{Y}_{22}$ – симметричным. Симметричный четырехполюсник является обратимым. Систем уравнений (8.1) и (8.2) соответствуют эквивалентные схемы пассивных четырехполюсников на рисунках 8.3, а и б.

Четырехполюсники могут соединяться между собой различными способами. Наиболее распространенные способы соединения – последовательный, параллельный и каскадный – показаны на рис. 8.4, а, б и в.

Соединения четырехполюсников можно рассматривать как новый четырехполюсник с эквивалентными параметрами, которые определяются при последовательном соединении суммированием соответствующих Z параметров, а при параллельном соединении суммированием Y параметров исходных четырехполюсников. Важными параметрами четырехполюсников являются коэффициенты передачи по току и напряжению и входное сопротивление, определяемые как

$$\dot{K}_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1, \quad \dot{K}_I = \dot{I}_2 / \dot{I}_1, \quad \dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1. \quad (8.3)$$

Эти параметры могут быть выражены через исходные параметры четырехполюсников (\dot{Z} , \dot{Y} или другие) и сопротивление нагрузки \dot{Z}_2 . Например, входное сопротивление через Z параметры, выраженное из системы уравнений (8.1), вычисляется по формуле

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_{11} - \frac{\dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_{21}}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_{22}}. \quad (8.4)$$

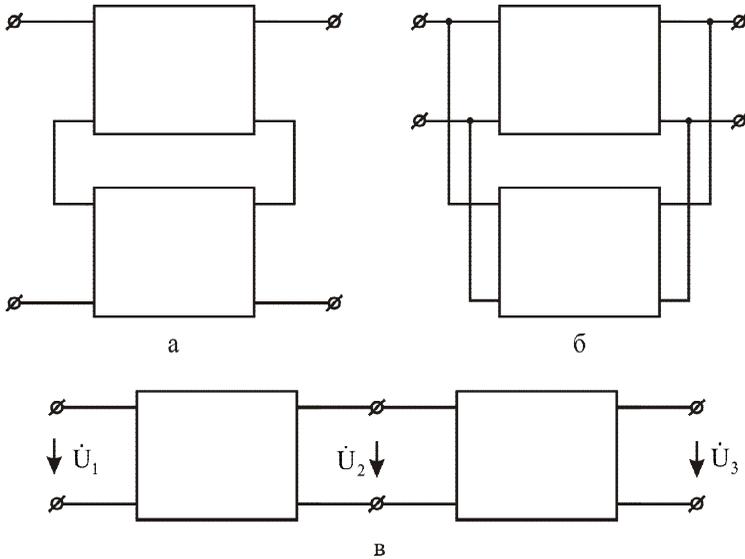


Рис. 8.4. Соединение четырехполюсников: а – последовательное, б – параллельное, в – каскадное

8.2. Характеристики линейных четырехполюсников

Характеризуют передачу воздействия от входа к выходу электрической цепи. Чаще всего используют передаточную характеристику по напряжению

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)},$$

где p – некоторый оператор. Если в качестве оператора рассматривают $p = j\omega$, функция $K(j\omega)$ принимает смысл комплексной частотной характеристики четырехполюсника

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)}. \quad (8.5)$$

Комплексную характеристику (коэффициент передачи) можно представить в виде

$$\dot{K}(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (8.6)$$

где $\dot{K}(j\omega) = |K(j\omega)|$ – называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), $\varphi(\omega)$ – фазочастотной характеристикой (ФЧХ) четырехполюсника. АЧХ – это зависимость коэффициента передачи четырехполюсника от частоты при воздействии на входе гармонического напряжения (тока). Если входное напряжение линейного четырехполюсника гармоническое:

$$u_1(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_1),$$

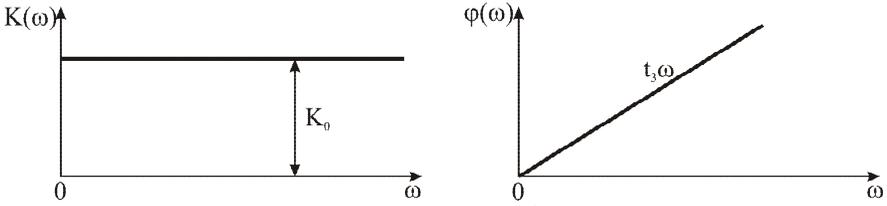


Рис. 8.5. Идеальные амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики
то выходное напряжение также является гармоническим с той же частотой и
другими значениями амплитуды U_{m_2} и фазы φ_2 :

$$u_2(t) = U_{m_2} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Тогда АЧХ и ФЧХ, как зависимости от частоты, определяются соотношениями

$$K(\omega) = \frac{U_{m_2}(\omega)}{U_{m_1}(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega). \quad (8.7)$$

Экспериментально АЧХ четырехполосника измеряется путем изменения частоты входного гармонического напряжения при постоянной амплитуде входного напряжения $U_{m_1}(\omega) = U_{m_1}$. При этом нормированная зависимость выходного напряжения от частоты $U_{m_2}(\omega)/U_{m_1}$ будет являться АЧХ четырехполосника.

Существует понятие идеального четырехполосника, АЧХ которого постоянная, а ФЧХ является линейной функцией (рис. 8.5).

При передаче через идеальные четырехполосники напряжений (токов) их форма не изменяется, а происходит лишь сдвиг во времени на величину $d\varphi(\omega)/d\omega = t_3$. Реальные четырехполосники содержат один или несколько реактивных элементов и их АЧХ и ФЧХ отличаются от идеальных. В этом случае форма выходной реакции четырехполосника не будет совпадать с формой входного воздействия. Для расчета выходной реакции $u_2(t)$ четырехполосника с заданным комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(j\omega)$ по известному входному воздействию $u_1(t)$ можно использовать спектральный метод, основанный на свойствах преобразования Фурье.

Известно, что для непериодических функций с помощью прямого преобразования Фурье можно определить спектральную функцию вида

$$\dot{S}_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (8.8)$$

Спектральная функция $\dot{S}_2(j\omega)$ выходной реакции $u_2(t)$ при прохождении воздействия $u_1(t)$ через линейный четырехполосник с комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(j\omega)$ находится как произведение:

$$\dot{S}_2(j\omega) = \dot{K}(j\omega) \cdot \dot{S}_1(j\omega). \quad (8.9)$$

Выходная реакция четырехполосника находится с помощью обратного преобразования Фурье

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega) \dot{S}_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.10)$$

АЧХ и ФЧХ определяют свойства линейных четырехполюсников в частной области. Те же свойства во временной области описываются с помощью импульсных и переходных характеристик.

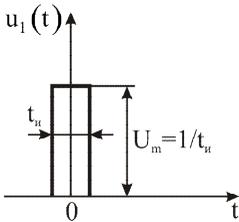


Рис. 8.6. Дельта-функция

Импульсной характеристикой $h(t)$ называют реакцию линейной цепи на воздействие типа дельта-функции $\delta(t)$. Дельта-функция (рис. 8.6) – это идеализированное воздействие, которое можно получить из прямоугольного импульса, если устремить длительность импульса $t_n \rightarrow 0$. При этом амплитуда импульса $U_m = 1/t_n$ стремится к ∞ , а площадь $t_n \cdot U_m = 1$.

Математически показано, что спектральная функция дельта-функции $\dot{S}_\delta(j\omega) = 1$. Тогда в соответствии с (8.10) импульсная характеристика определится как

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.11)$$

Переходной характеристикой $g(t)$ линейных четырехполюсников называется реакция на однократное воздействие (на скачок напряжения, рис. 8.7).

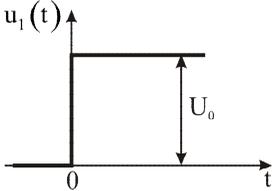


Рис. 8.7. Единичное воздействие

Единичное воздействие записывается через единичную функцию

$$u_1(t) = U_0 \cdot 1(t).$$

Спектральная плотность единичного воздействия $\dot{S}_1(j\omega) = 1/j\omega$. Тогда в соответствии с (8.9) спектральная функция переходной характеристики равна $\dot{S}_2(j\omega) = U_0 \cdot \dot{K}(j\omega)/j\omega$. Используя обратное преобразование Фурье (8.10), для переходной характеристики получим

$$g(t) = \frac{U_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{K}(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^t h(x) dx. \quad (8.12)$$

8.3. Примеры линейных четырехполюсников

Идеальный фильтр низких частот ФНЧ – используется как идеализированная модель реальных фильтров. Комплексный коэффициент передачи идеального ФНЧ описывается функцией вида

$$\dot{K}(j\omega) = \begin{cases} K_0 \cdot e^{jt_3\omega}, & 0 \leq \omega \leq \Omega_{cp}, \\ 0, & \omega > \Omega_{cp}, \end{cases} \quad (8.13)$$

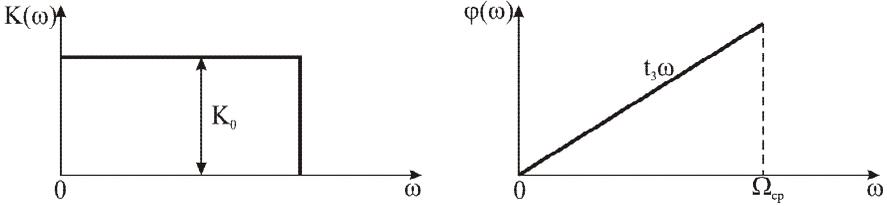


Рис. 8.8. АЧХ и ФЧХ идеального фильтра нижних частот

где Ω_{cp} – частота среза фильтра. АЧХ и ФЧХ идеального фильтра показаны на рис. 8.8. Коэффициент передачи идеального ФНЧ в полосе прозрачности $0 \leq \omega \leq \Omega_{cp}$ равен постоянной величине K_0 , а в полосе задержания $\omega > \Omega_{cp}$ равен 0. Фазочастотная характеристика идеального ФНЧ в полосе прозрачности описывается линейной функцией.

Используя (8.11) и (8.13), определяем импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот.

$$h(t) = \frac{K_0}{\pi} \int_0^{\Omega_{cp}} e^{j\omega t_3} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{K_0 \Omega_{cp}}{\pi} \frac{\sin \Omega_{cp}(t - t_3)}{\Omega_{cp}(t - t_3)}. \quad (8.14)$$

Входное воздействие в виде дельта-функции и импульсная характеристика идеального фильтра ФНЧ показаны на рис. 8.9

Импульсная характеристика идеального ФНЧ описывается функцией вида $(\sin x)/x$, где $x = \Omega_{cp}(t - t_3)$. Длительность главного максимума импульсной характеристики $2\pi/\Omega_{cp}$ зависит от частоты среза. Чем больше частота среза, тем короче импульсная реакция ФНЧ. Переходная характеристика фильтра может быть определена как интеграл от импульсной характеристики:

$$g(t) = \frac{K_0 \Omega_{cp}}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\sin x}{x} dx = \frac{K_0 \Omega_{cp}}{\pi} \Phi(t),$$

где $x = \Omega_{cp}(t - t_3)$, $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin x}{x} dx$ –

интегральный синус, табулированная функция.

Входное воздействие в виде единичного скачка напряжения и переходная характеристика идеального ФНЧ показаны на рис. 8.10.

При скачкообразном изменении напряжения на входе фильтра выходное напряжение изменяется с конечной скоростью, определяемой частотой среза. Для переходной характеристики

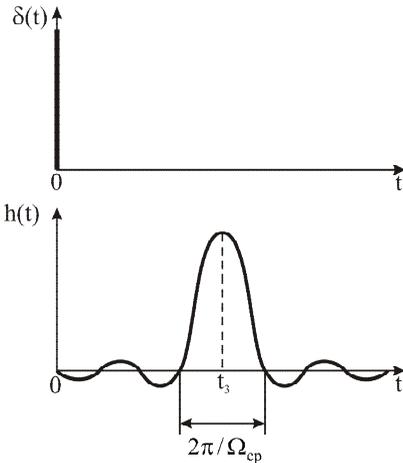


Рис. 8.9. Входное воздействие и импульсная характеристика идеального ФНЧ

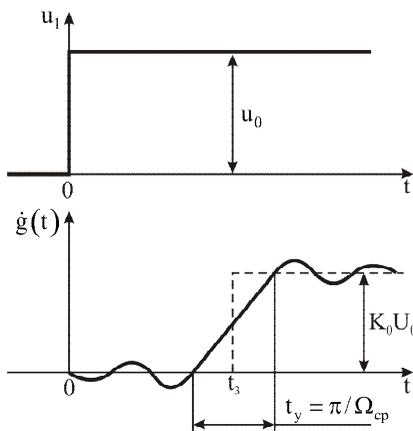


Рис. 8.10. Входное воздействие и переходная характеристика ФНЧ

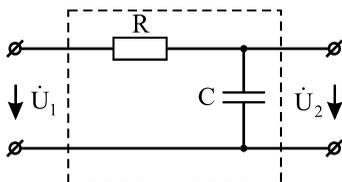


Рис. 8.11. Интегрирующая RC цепь

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}, \quad \varphi(\omega) = \text{arctg}(-\omega\tau). \quad (8.17)$$

Частотные характеристики цепочки показаны на рис. 8.12.

Частота Ω_{cp} , на которой коэффициент передачи снижается до уровня $1/\sqrt{2} = 0.707$, называется верхней:

$$\Omega_b = 1/\tau = 1/RC. \quad (8.18)$$

Переходная характеристика цепочки определяется с помощью соотношения (8.11)

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{K}(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{j\omega(1 + j\omega RC)} = 1 - e^{-t/\tau}. \quad (8.19)$$

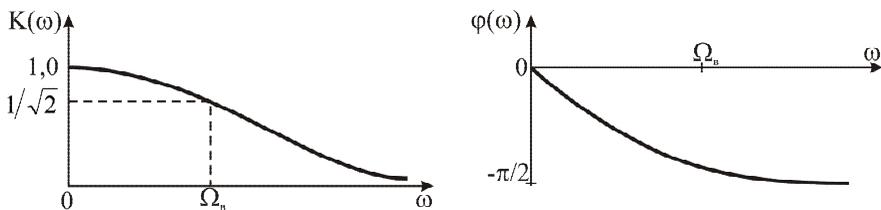


Рис. 8.12. АЧХ и ФЧХ интегрирующей цепи

ки вводят параметр – время установления t_y – это интервал, в течение которого напряжение на выходе изменяется от нулевого уровня до уровня установления:

$$t_y = \pi/\Omega_{cp}. \quad (8.15)$$

Чем выше частота среза, тем меньше время установления. Как видно из рис. 8.10, переходный процесс в идеальном ФНЧ носит колебательный характер.

Интегрирующая RC цепочка может рассматриваться как линейный четырехполюсник (рис. 8.11). Комплексный коэффициент передачи определяется как

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}. \quad (8.16)$$

Интегрирующая RC цепочка характеризуется параметром $\tau = RC$ – постоянной времени. Из (8.16) находим АЧХ и ФЧХ интегрирующей цепочки:

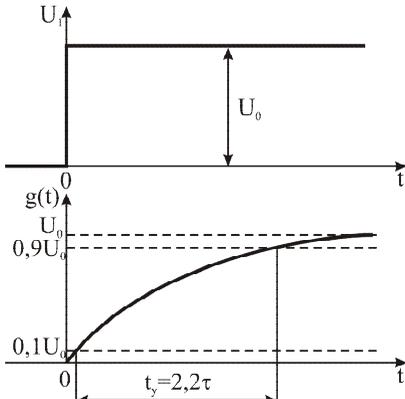


Рис. 8.13. Переходная характеристика интегрирующей цепи

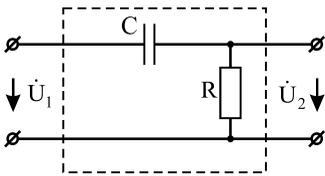


Рис. 8.14. Схема переходной RC цепи

$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg(1/\omega RC). \quad (8.22)$$

Параметром цепочки является $\tau = RC$ – постоянная времени. АЧХ и ФЧХ переходной цепочки показаны на рис. 8.15.

Переходная цепочка является фильтром верхних частот I порядка с частотой среза $\Omega_{cp} = 1/RC$.

Переходная характеристика цепочки описывается экспоненциальной функцией

$$g(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}. \quad (8.23)$$

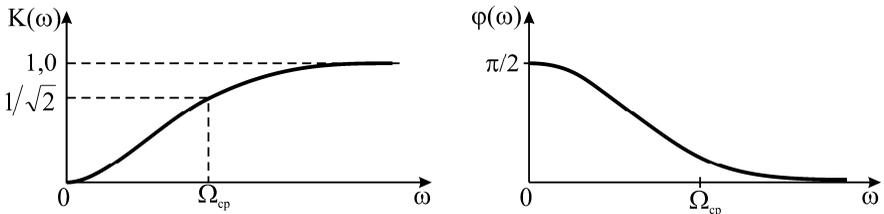


Рис. 8.15. АЧХ и ФЧХ переходной цепи

Переходная характеристика описывается экспоненциальной функцией (рис. 8.13), что соответствует характеру переходных процессов в линейных цепях I порядка. Время установления переходной характеристики, определенное по уровням $0,1U_0$ и $0,9U_0$, вычисляется по формуле

$$t_y = 2,2 \cdot \tau = 2,2 \cdot RC. \quad (8.20)$$

Следует отметить, что интегрирующая цепочка является фильтром нижних частот I порядка с частотой среза $\Omega_{cp} = 1/RC$.

Переходная RC цепочка (рис. 8.14).

Находим комплексный коэффициент передачи переходной цепочки

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}. \quad (8.21)$$

АЧХ и ФЧХ цепочки описываются выражениями

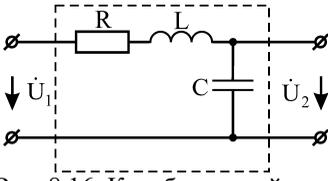


Рис. 8.16. Колебательный контур как четырехполюсник

Последовательный колебательный контур может использоваться как четырехполюсник (рис. 8.16) и в зависимости от добротности Q иметь различные частотные характеристики. Комплексный коэффициент передачи описывается выражением

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{1}{1 - \xi^2 + j\xi/Q}, \quad (3.24)$$

где $\xi = \omega/\omega_0$ – нормированная частота, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – резонансная частота контура, $Q = \rho/R$ – добротность контура.

АЧХ контура при нескольких значениях добротности показаны на рис. 8.17

При низких добротностях АЧХ приближается к характеристике интегрирующей цепочки, а при $Q \gg 1$ имеет вид резонансной кривой. При добротностях $Q \approx 0,5$ RLC цепь может использоваться как ФНЧ II порядка.

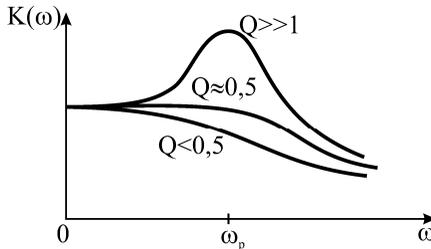


Рис. 8.17. АЧХ последовательного RLC контура

9. Цепи с распределенными параметрами

9.1. Понятие цепи с распределенными параметрами

При исследовании цепей с сосредоточенными параметрами считают, что электрическое поле сосредоточено только на отдельных участках цепи, например в конденсаторах. Электрическое поле на участке цепи не учитывается, если оно не оказывает существенного влияния на распределение токов и напряжений. Также выделяются отдельные участки цепи, например катушки индуктивности, трансформаторы, в которых сосредоточено магнитное поле. Эти участки на схемах изображаются индуктивностями. Участки электрической цепи, в которых существенное значение имеет необратимое преобразование электромагнитной энергии в тепловую, химическую или механическую, на схемах представляются сопротивлениями.

В электротехнике, однако, часто приходится встречаться и с такими цепями, в которых нельзя выделить участки сосредоточенного электрического поля, магнитного поля или необратимого преобразования энергии. Эти цепи называют **цепями с распределенными параметрами** (или **длинными линиями**), так как электрическое поле, магнитное поле и потери энергии распределены (равномерно или неравномерно) вдоль всех участков цепи.

В цепях с распределенными параметрами напряжения и токи различны не только на отдельных участках, но изменяются в пределах каждого участка, то есть зависят от пространственной координаты каждого участка. К цепям с распределенными параметрами относятся длинные линии электропередачи, линии телефонной связи, линии телеуправления и телеизмерения, антенны радиопередатчиков и радиоприемников, обмотки электрических машин и трансформаторов, линии для формирования коротких импульсов, линии-фильтры, линии-элементы настройки контуров, а на сверхвысоких частотах – волноводы и резонаторы.

9.2. Токи и напряжения в однородной линии

Будем считать все параметры распределенными вдоль линии равномерно. Такие линии называются **однородными**. Токи и напряжения в длинных линиях являются функциями двух независимых переменных – времени t и координаты x .

Поскольку линия является распределенной системой, к ней неприменимы обычные законы электрических цепей. Однако если представить линию в виде последовательного соединения элементарных отрезков длиной dx с параметрами rdx , Ldx , Cdx (рис. 9.1), то каждый из этих четырехполюсников можно описать методами, принятыми в теории цепей. Токи в проводах линии и напряжения между проводами однородной линии передач в любой момент времени определяются так называемыми «телеграфными уравнениями»:

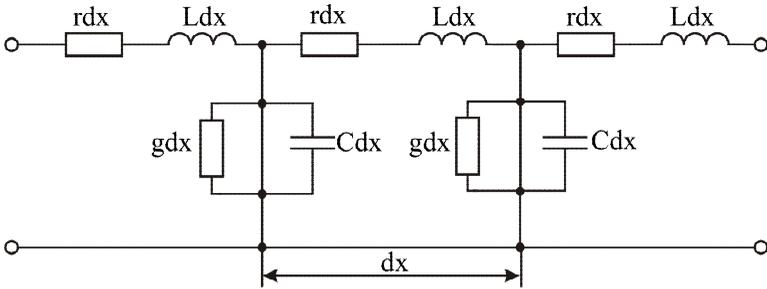


Рис. 9.1. К выводу «телеграфных уравнений»

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (9.1)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (9.2)$$

Здесь L и r – индуктивность и сопротивление пары проводов однородной линии на единицу её длины, C и g – емкость и проводимость утечки между проводами на единицу длины линии. Совместное решение уравнений (9.1) и (9.2) дает искомые зависимости $i=i(x, t)$ и $u=u(x, t)$.

Если ток и напряжение в однородной линии изменяются во времени по синусоидальному закону с частотой ω , уравнения (9.1) и (9.2) можно переписать, вводя комплексные действующие значения напряжения \dot{U} и тока \dot{I} и заменяя операцию дифференцирования по времени множителем $j\omega$:

$$-\frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = r\dot{I} + j\omega L\dot{I} = Z\dot{I}, \quad (9.3)$$

$$-\frac{\partial \dot{I}}{\partial x} = g\dot{U} + j\omega C\dot{U} = Y\dot{U}, \quad (9.4)$$

где $Z = r + j\omega L$ – комплексное продольное сопротивление единицы длины линии; $Y = g + j\omega C$ – комплексная поперечная проводимость единицы длины линии.

Продифференцируем уравнения (9.3) и (9.4) по x :

$$-\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z \frac{d\dot{I}}{dx}, \quad (9.5)$$

$$-\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Y \frac{d\dot{U}}{dx} \quad (9.6)$$

и, произведя замену, получим:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = ZY\dot{U}, \quad (9.7)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = ZY \dot{I}. \quad (9.8)$$

Используя уравнения (9.5), (9.7) и (9.8), перепишем:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C) \dot{U} = \gamma^2 \dot{U}, \quad (9.9)$$

где

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta. \quad (9.10)$$

Постоянную γ называют **коэффициентом распространения линии**; величины α и β – **коэффициентами затухания** и **фазы** соответственно.

Уравнение (9.9) – это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение имеет вид:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x} = \dot{A}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \dot{A}_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \quad (9.11)$$

где \dot{A}_1 и \dot{A}_2 – комплексные постоянные интегрирования.

Подставим (9.11) в выражение (9.4) для тока:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{r + j\omega L} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}) = \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \frac{1}{Z_c} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}), \end{aligned} \quad (9.12)$$

где $Z_c = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}$ – **волновое** или **характеристическое сопротивление линии** (единица измерения – Ом).

9.3. Волны напряжения и тока в линии. Бегущие и стоячие волны

Коэффициенты \dot{A}_1 и \dot{A}_2 в выражении для напряжения (9.11) имеют размерность напряжения, их можно выразить в показательной форме:

$$\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1} \quad \text{и} \quad \dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}.$$

Тогда

$$\dot{U} = A_1 e^{j\psi_1} e^{-(\alpha + j\beta)x} + A_2 e^{j\psi_2} e^{(\alpha + j\beta)x} = A_1 e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \psi_1)} + A_2 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \psi_2)}. \quad (9.13)$$

Перейдем от действующего значения напряжения к мгновенному:

$$u(x, t) = A_1 \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + A_2 \sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2). \quad (9.14)$$

То есть напряжение (так же, как и ток) в линии в каждый момент времени является синусоидальной функцией координаты. Это синусоидальное распределение напряжения, или, как говорят, **волна напряжения**, перемещается вдоль линии. Волны такого рода называются **бегущими**. При $\alpha > 0$ наличие множителя $e^{-\alpha x}$ показывает, что амплитуда волны вдоль линии затухает по показательному закону. Таким образом, коэффициент α характеризует изменение амплитуды волны напряжения (тока) и определяется в децибелах, деленных на единицу длины линии. Коэффициент β характеризует изменение фазы волны и

определяется в радианах, деленных на единицу длины линии. Распределение напряжения такой волны вдоль линии может в любой момент времени быть изображено синусоидой, затухающей по тому же закону $e^{-\alpha x}$ (рис. 9.2). С течением времени ($t_1 < t_2 < t_3$) эта синусоида будет перемещаться в направлении увеличения координаты.

Основными характеристиками бегущей волны являются **фазовая скорость** v_ϕ и **длина волны** λ . **Фазовая скорость** – это скорость перемещения фазы колебания, которая с течением времени t и с расстоянием x , пройденным волной, остается постоянной, то есть $\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const}$.

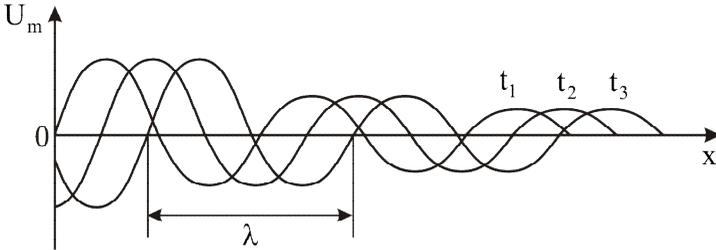


Рис. 9.2. Распределение амплитуды волны напряжения вдоль линии

Тогда

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = 0 \quad (9.15)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = v_\phi = \frac{\omega}{\beta}. \quad (9.16)$$

В линии могут существовать как **прямые волны** (движущиеся от начала к концу линии), так и **обратные** (движущиеся от конца линии). В выражении (9.14) первое слагаемое описывает прямую волну, а второе – обратную. Для обратных волн справедливо равенство:

$$v_\phi = -\frac{\omega}{\beta}. \quad (9.17)$$

Фазовая скорость волны в воздушной линии $v_\phi \approx 3 \cdot 10^8$ м/с, то есть близка к скорости света.

Длина волны в линии λ – это расстояние между двумя ближайшими точками, взятое в направлении распространения волны, фазы в которых различаются на 2π :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (9.18)$$

Длину волны λ можно ещё определить как путь, который проходит волна за период T изменения напряжения или тока:

$$\lambda = v_{\phi} T. \quad (9.19)$$

Отношение напряжения прямой волны к току прямой волны равно волновому сопротивлению линии; для обратных волн – со знаком «минус»:

$$\frac{\dot{U}_{\text{пр}}}{\dot{I}_{\text{пр}}} = Z_c; \quad \frac{\dot{U}_{\text{обр}}}{\dot{I}_{\text{обр}}} = -Z_c.$$

Появление обратных волн можно рассматривать как результат отражения прямых волн от конца линии. Соответственно прямые волны называют также **падающими**, а обратные – **отраженными**:

$$\dot{U}_{\text{пр}} = \dot{U}_{\text{пад}}; \quad \dot{U}_{\text{обр}} = \dot{U}_{\text{отр}}.$$

Отражение может происходить как от нагрузки в конце линии, так и от любого сечения линии, в котором есть какая-либо неоднородность. Отношение отраженной волны к прямой волне напряжения называют **коэффициентом отражения по напряжению** $\dot{\Gamma}_u$:

$$\dot{\Gamma}_u = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = |\Gamma_u| e^{j\phi}, \quad (9.20)$$

где $|\dot{\Gamma}_u|$ и ϕ – амплитуда и фаза коэффициента отражения.

Аналогично определяется коэффициент отражения по току $\dot{\Gamma}_i$.

В конце линии:

$$\dot{\Gamma}_u = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{Z}_n - \dot{Z}_c}{\dot{Z}_c + \dot{Z}_n}; \quad (9.21)$$

$$\dot{\Gamma}_i = \frac{\dot{Z}_c - \dot{Z}_n}{\dot{Z}_n + \dot{Z}_c}, \quad (9.22)$$

где \dot{Z}_n – сопротивление нагрузки линии. (В дальнейшем мы будем пользоваться только коэффициентом отражения по напряжению, обозначая его $\dot{\Gamma}$.)

Видно, что если линия замкнута на сопротивление, равное волновому, то $\dot{\Gamma}_u = \dot{\Gamma}_i = 0$. Это означает, что в линии будут отсутствовать отраженные волны. Такая нагрузка называется согласованной.

При этом в любой точке линии $\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{\dot{I}_{\text{пад}}} = \dot{Z}_n = \dot{Z}_c$.

Введем понятие **входного сопротивления линии** $\dot{Z}_{\text{вх}}$: под ним понимают такое сосредоточенное сопротивление, которым можно заменить линию вместе с нагрузкой при расчете режима в начале линии. Тогда в произвольном сечении:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}; \quad (9.23)$$

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{I}\dot{Z}_{\text{вх}} - \dot{I}\dot{Z}_c}{\dot{I}\dot{Z}_{\text{вх}} + \dot{I}\dot{Z}_c} = \frac{\dot{Z}_{\text{вх}} - \dot{Z}_c}{\dot{Z}_{\text{вх}} + \dot{Z}_c}. \quad (9.24)$$

Отсюда

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_c \frac{1 + \dot{\Gamma}}{1 - \dot{\Gamma}}. \quad (9.25)$$

9.4. Режимы работы линии

В зависимости от условий на конце линии в ней могут существовать режимы бегущих или стоячих волн напряжения и тока, а также смешанный режим. Стоячая волна в линии образуется из-за интерференции падающей и отраженной волн. При наличии отражения от некоторого сечения x_0 линии распределение напряжения вдоль линии в любой момент времени можно рассматривать как результат наложения напряжений двух волн – падающей и отраженной, перемещающихся вдоль линии в противоположных направлениях с одинаковой фазовой скоростью:

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{пад}} e^{-\gamma(x-x_0)} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{\gamma(x-x_0)}. \quad (9.26)$$

В данном выражении x отсчитывается в направлении распространения падающей волны. Если начало координат поместить в плоскость x_0 и отсчитывать текущую координату в направлении, противоположном направлению распространения падающей волны, то есть от нагрузки, то (9.26) можно представить следующим образом:

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{пад}} (1 - \dot{\Gamma}_n e^{-2\gamma l}), \quad (9.27)$$

где l – расстояние от нагрузки до сечения, в котором определяется напряжение; $\dot{\Gamma}_n$ – коэффициент отражения от нагрузки (при $l = 0$).

Чисто стоячие волны возникают при условии $|\dot{\Gamma}_n| = 1$, то есть потоки мощности падающей и отраженной волны равны и противоположно направлены. В случае когда $|\dot{\Gamma}_n| = 0$ (режим согласования), отраженные волны отсутствуют и в линии распространяется чисто бегущая волна. В режиме смешанных волн $0 < |\dot{\Gamma}_n| < 1$. Для количественного описания степени выраженности стоячей волны вводят **коэффициент стоячей волны (КСВ)**, равный отношению максимального значения амплитуды напряжения (или тока) волны к минимальному:

$$\text{КСВ} = \frac{U_{\text{m max}}}{U_{\text{m min}}} = \frac{1 + |\dot{\Gamma}_n|}{1 - |\dot{\Gamma}_n|}. \quad (9.28)$$

Иногда для характеристики эффекта отражения от нагрузки вводят коэффициент бегущей волны (КБВ) как величину, обратную КСВ:

$$\text{КБВ} = 1/\text{КСВ}. \quad (9.29)$$

В линии без потерь постоянная распространения $\gamma = j\beta$ и модуль комплексной амплитуды напряжения в каждом сечении линии можно определить по формуле

$$|\dot{U}| = |\dot{U}_{\text{пад}}| \sqrt{1 + |\dot{\Gamma}_n|^2 + 2|\dot{\Gamma}_n| \cos(\varphi - 2\beta l)}. \quad (9.30)$$

В режиме согласования чисто бегущая волна в линии имеет амплитуду $\dot{U} = \dot{U}_{\text{пад}}$.

Если на конце линии имеет место короткое замыкание (сопротивление нагрузки равно нулю), то $\Gamma_n = -1$ и в линии устанавливается стоячая волна:

$$|\dot{U}| = 2|\dot{U}_{\text{пад}}| |\sin \beta l|. \quad (9.31)$$

Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии в такой волне показано на рис. 9.3, б.

В случае разомкнутого конца линии (режим холостого хода) сопротивление нагрузки равно бесконечности и $\Gamma_n = 1$. В линии также имеет место стоячая волна:

$$|\dot{U}| = 2|\dot{U}_{\text{пад}}| |\cos \beta l|. \quad (9.32)$$

Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии в такой волне показано на рис. 9.3, а. В случае когда сопротивление нагрузки не равно волновому сопротивлению, нулю или бесконечности, в линии имеет место смешанный режим работы, характеризующийся конечным КСВ, не равным единице.

Величина $|\dot{U}_{\text{пад}}| = \sqrt{2P_{\text{пад}} Z_c}$, где $P_{\text{пад}}$ – мощность, переносимая падающей волной.

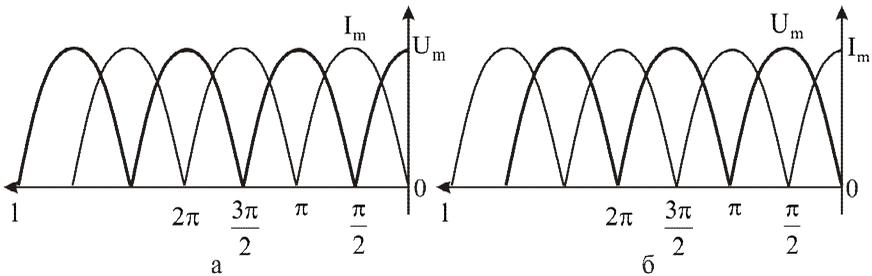


Рис. 9.3. Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии в режиме XX (а) и КЗ (б)

9.5. Трансформирующие свойства отрезков линии

Отрезки длинных линий могут применяться для согласования, например, линии и сопротивления нагрузки или двух несогласованных линий.

Входное сопротивление отрезка линии без потерь длиной l определяется соотношением:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_c \frac{\dot{Z}_n + j\dot{Z}_c \operatorname{tg} \beta l}{\dot{Z}_c + j\dot{Z}_n \operatorname{tg} \beta l}, \quad (9.33)$$

где l – расстояние от нагрузки до текущего сечения линии.

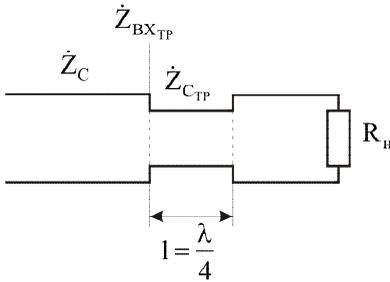


Рис. 9.4. К согласованию линии с нагрузкой

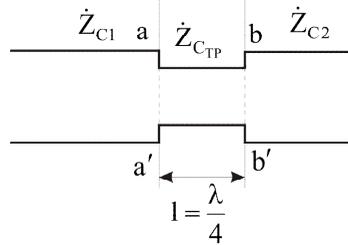


Рис. 9.5. К согласованию двух линий

Рассмотрим несколько конкретных примеров для различных значений l .

1. Четвертьволновой отрезок линии: $l = \lambda/4$.

В этом случае:

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}. \quad (9.34)$$

Разделим числитель и знаменатель выражения (9.33) на $\operatorname{tg}\beta l$ и, учитывая, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$, получаем выражение для входного сопротивления четвертьволнового отрезка линии:

$$\dot{Z}_{\text{BX}}(l) = \dot{Z}_C \frac{\dot{Z}_n / \operatorname{tg}\beta l + j\dot{Z}_C}{\dot{Z}_C / \operatorname{tg}\beta l + j\dot{Z}_n} = \frac{\dot{Z}_C^2}{\dot{Z}_n}. \quad (9.35)$$

На свойствах четвертьволновых отрезков линии основан принцип действия четвертьволновых согласующих устройств (согласующих трансформаторов). Они согласуют активные сопротивления, не равные волновому.

Рассмотрим схему, представленную на рис. 9.4.

Здесь $\dot{Z}_{\text{C}_\text{TP}}$ – волновое сопротивление трансформатора. В соответствии с формулой (9.35):

$$\dot{Z}_{\text{BX}_\text{TP}}(l) = \frac{\dot{Z}_{\text{C}_\text{TP}}^2}{R_n}.$$

Для согласования нужно, чтобы выполнялось равенство:

$$\dot{Z}_{\text{BX}_\text{TP}}(l) = \dot{Z}_C.$$

Тогда $\dot{Z}_C = \frac{\dot{Z}_{\text{C}_\text{TP}}^2}{R_n}$, откуда $\dot{Z}_{\text{C}_\text{TP}} = \sqrt{\dot{Z}_C R_n}$ – отрезок линии с таким волновым сопротивлением согласует сопротивление нагрузки R_n с линией, обладающей волновым сопротивлением Z_C .

Аналогично могут быть согласованы две линии с разными волновыми сопротивлениями \dot{Z}_{C_1} и \dot{Z}_{C_2} (рис. 9.5).

Согласно (9.35) и из условия согласования:

$$\dot{Z}_{\text{BX,TP}}(l) = \frac{\dot{Z}_{\text{C,TP}}^2}{\dot{Z}_{\text{C2}}} = \dot{Z}_{\text{C1}}.$$

Тогда $\dot{Z}_{\text{C,TP}} = \sqrt{\dot{Z}_{\text{C1}} \dot{Z}_{\text{C2}}}$.

Физический смысл такого способа согласования состоит в том, что волны, отраженные от сечений a-a' и b-b', имеют одинаковые амплитуды и складываются в сечении b-b' в противофазе.

2. Полуволновой отрезок линии: $l = \lambda / 2$.

Тогда

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi. \quad (9.36)$$

Преобразуя аналогично (9.35) и учитывая, что $\text{tg } \pi = 0$, получаем выражение для входного сопротивления полуволнового отрезка линии:

$$\dot{Z}_{\text{BX}}(l) = \dot{Z}_{\text{C}} \frac{\dot{Z}_{\text{H}} + j\dot{Z}_{\text{C}} \text{tg} \beta l}{\dot{Z}_{\text{C}} + j\dot{Z}_{\text{H}} \text{tg} \beta l} = \dot{Z}_{\text{H}}. \quad (9.37)$$

3. Согласование с помощью реактивного шлейфа

Согласующий реактивный шлейф представляет собой короткозамкнутый либо разомкнутый на конце отрезок линии, подключаемый параллельно основной линии на некотором расстоянии от нагрузки (рис. 9.6).

Суть согласования состоит в следующем. Место подключения шлейфа выбирают в таком сечении линии, где активная составляющая её входного сопротивления R_{BX} равна волновому сопротивлению Z_{C} . Затем подбирают длину шлейфа таким образом, чтобы его входное сопротивление было равно реактивной составляющей входного сопротивления линии, взятой с обратным знаком. При этом реактивные сопротивления линии и шлейфа компенсируют друг друга.

Таким образом, вначале определяем место подключения шлейфа в линию из условия равенства

$$\text{Re}(\dot{Z}_{\text{BX}}) = Z_{\text{C}}.$$

В случае чисто активной нагрузки активную и реактивную составляющие входного сопротивления можно получить преобразованием формулы (9.33):

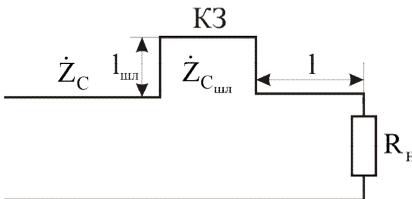


Рис. 9.6. К согласованию с помощью шлейфа

$$R_{\text{BX}} = Z_{\text{C}} \frac{\frac{R_{\text{H}}}{Z_{\text{C}}} (1 + \text{tg}^2 \beta l)}{1 + \frac{R_{\text{H}}^2}{Z_{\text{C}}^2} \text{tg}^2 \beta l}; \quad (9.38)$$

$$X_{\text{BX}} = Z_{\text{C}} \frac{\left(1 + \frac{R_{\text{H}}}{Z_{\text{C}}}\right) \text{tg} \beta l}{1 + \frac{R_{\text{H}}^2}{Z_{\text{C}}^2} \text{tg}^2 \beta l}. \quad (9.39)$$

Приравнявая $R_{вх}$ к Z_C , получаем:

$$\operatorname{tg}\beta l = \sqrt{\frac{Z_C}{R_H}}, \quad (9.40)$$

откуда можно определить расстояние l от нагрузки до места подключения шлейфа.

Подставив (9.40) в (9.39), найдём $X_{вх}$. Длина шлейфа определяется из условия $X_{вх} = -X_{шл}$. Если шлейф короткозамкнутый, то:

$$X_{шл} = Z_{шл} \operatorname{tg}\beta l_{шл}, \quad (9.41)$$

откуда

$$\beta l_{шл} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{X_{вх}}{Z_{Cшл}} \right). \quad (9.42)$$

10. Электромагнитное поле

10.1. Основные величины, характеризующие электромагнитное поле

Электромагнитное поле проявляется в силовом воздействии на заряженные тела; эти силы, в свою очередь, представляются векторами. Таким образом, электромагнитное поле может быть описано с помощью математической модели – векторного поля.

Электрическое поле характеризуется силовым взаимодействием как с неподвижными, так и с движущимися зарядами, причем кинетическая энергия движущейся частицы при этом взаимодействии изменяется. **Напряженность \vec{E} электрического поля** – это векторная величина, определяющая силу \vec{F} , действующую на частицу, имеющую единичный заряд q , со стороны электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \text{ В/м.}$$

Направление вектора \vec{E} совпадает с направлением действия силы. Заряд – скалярная величина. Если заряд отрицателен, то направление действия силы и направление вектора напряженности электрического поля противоположны. Определив напряженность поля во всех его точках, можно провести ряд линий

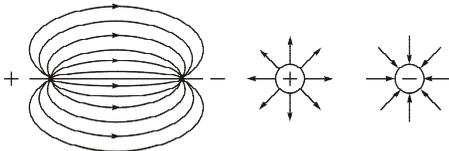


Рис. 10.1. Силовые линии электрического поля

так, чтобы в каждой точке этих линий касательные к ним совпадали по направлению с вектором напряженности (рис. 10.1). Это – силовые линии поля; их совокупность дает картину поля.

Силловые линии имеют начало и конец; они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных; силловые линии всегда перпендикулярны к поверхности проводника.

Для материальных сред вводят второе векторное поле \vec{D} , названное полем **электрического смещения** или **электрической индукции**. Величины \vec{D} и \vec{E} в вакууме связаны соотношением:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad [\text{Кл/м}^2],$$

где $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – постоянная, найденная экспериментально и названная **электрической постоянной вакуума**.

Если в электрическое поле поместить непроводник (**диэлектрик**), то часть электрического поля будет обусловлена **поляризацией** диэлектрика и направлена против внешнего поля \vec{E}_0 . Напряженность электрического поля уменьшится с \vec{E}_0 до \vec{E} . Отношение этих значений напряженности электрического поля называется **относительной диэлектрической проницаемостью**:

$$\varepsilon' = \frac{\vec{E}_0}{\vec{E}}.$$

Она показывает, во сколько раз сила взаимодействия между электрическими зарядами в данной среде меньше, чем в вакууме.

Абсолютную диэлектрическую проницаемость представляют в виде произведения двух величин:

$$\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon_0.$$

Свойства среды могут либо изменяться по определенному закону от точки к точке – такие среды называют **неоднородными**, либо в любой точке оставаться неизменными – это **однородные** среды. Среда, физические свойства которых вокруг любой точки одинаковы по всем направлениям, – **изотропные**. Величина ε для изотропных сред постоянна. Среда, свойства которых различны по разным направлениям, – **анизотропные**.

Магнитное поле характеризуется силовым взаимодействием лишь с движущимися зарядами, причем кинетическая энергия заряженных тел остается при этом постоянной. Как и при электрическом взаимодействии, магнитное поле в вакууме может быть описано с помощью единственного векторного поля. Это поле **магнитной индукции** \vec{B} [Тл]. Принцип его определения основан на том, что точечный заряд q , движущийся в электромагнитном поле со скоростью \vec{v} , испытывает действие силы, называемой силой Лоренца:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}].$$

Первый член в этом выражении обусловлен действием электрического поля, второй – магнитного. Магнитная часть силы Лоренца всегда действует перпендикулярно к траектории частицы.

В природе существует довольно большой класс веществ, помещенные которых в магнитное поле приводит к его изменению. Они называются **магнетиками**. Для явлений в магнетиках задание векторного поля \vec{B} оказывается недостаточным. Поэтому вводится второе векторное поле \vec{H} [А/м], называемое

напряженностью магнитного поля. В вакууме векторы \vec{B} и \vec{H} связаны между собой следующим соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

где $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнитная постоянная вакуума. Величина $\mu = \mu' \mu_0$ учитывает свойства среды и называется магнитной проницаемостью (здесь μ' – относительная магнитная проницаемость).

Если соотношения $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ и $\vec{B} = \mu \vec{H}$ для какой-либо среды линейны, то такая среда также называется **линейной**.

10.2. Законы электромагнетизма, лежащие в основе теории электромагнитного поля

Сила взаимодействия между неподвижными зарядами подчиняется **закону Кулона**:

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0,$$

где R – расстояние между зарядами q_1 и q_2 , \vec{R}_0 – единичный вектор, ϵ_0 – электрическая постоянная вакуума.

Закон Ома в дифференциальной форме связывает плотность тока проводимости и напряженность электрического поля:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

где σ – удельная электрическая проводимость вещества.

Закон Гаусса устанавливает связь между напряженностью поля \vec{E} и величиной порождающего это поле заряда:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_\Sigma}{\epsilon},$$

где q_Σ – суммарный электрический заряд, заключенный в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью S . Если заряд распределен непрерывно, то q_Σ определяется интегрированием плотности заряда ρ по объёму V :

$$q_\Sigma = \int_V \rho dV.$$

Закон Ампера гласит, что циркуляция по контуру L вектора напряженности магнитного поля, вызванного протеканием токов через площадку, охватываемую этим контуром, равна полному току I_Σ :

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_\Sigma.$$

Закон электромагнитной индукции (**закон Фарадея**) связывает изменение во времени магнитного поля с возникновением в пространстве электрического поля:

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} d\bar{S}.$$

Здесь $\int_S \bar{B} d\bar{S} = \Phi$ [Вб] – магнитный поток. **Принцип непрерывности**

магнитного потока утверждает, что линии магнитной индукции всюду непрерывны. Другими словами: магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\int_S \bar{B} d\bar{S} = 0.$$

Принцип непрерывности электрического тока: линии тока нигде не прерываются, всюду оставаясь замкнутыми:

$$\oint_S \bar{j}_\Sigma d\bar{S} = 0.$$

Здесь полный ток учитывает токи проводимости, переноса и смещения, о которых более подробно будет сказано ниже.

10.3. Уравнения Максвелла

Обобщением экспериментальных законов электромагнетизма являются **уравнения Максвелла**.

Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$1. \quad \oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S (\bar{j}_{np} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}) d\bar{S} = I_\Sigma, \quad \text{где } \bar{j}_{np} = \sigma \bar{E} - \text{плотность тока проводимости;}$$

выражение $\epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ определяет плотность тока смещения.

$$2. \quad \oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} d\bar{S}.$$

$$3. \quad \oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{или} \quad \oint_S \bar{D} d\bar{S} = q = \int_V \rho dV.$$

$$4. \quad \oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0.$$

Полная система уравнений электромагнитного поля включает ещё **материальные уравнения среды**.

$$5. \quad \bar{D} = \epsilon \bar{E}.$$

$$6. \quad \bar{B} = \mu \bar{H}.$$

Чаще всего при решении задач электродинамики используют уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Входящие в них операции rot и div выражаются через комбинации первых частных производных от проекций соответствующих векторных полей. При этом достаточно определить один электрический и один магнитный вектор, так как остальные два вектора могут быть однозначно получены из материальных уравнений поля.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

1. $\text{rot}\bar{H} = \bar{j}_\Sigma$, где $\bar{j}_\Sigma = \sigma\bar{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$.
2. $\text{rot}\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$.
3. $\text{div}\bar{D} = \rho$.
4. $\text{div}\bar{B} = 0$.
5. $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$.
6. $\bar{B} = \mu\bar{H}$.

10.4. Граничные условия

Под **граничными** понимают условия, которым подчиняется поле на границе раздела двух сред с разными электрическими свойствами.

Для упрощения решения задачи нахождения граничных условий векторы электромагнитного поля принято разлагать на нормальные и тангенциальные составляющие и рассматривать отдельно поведение нормальных и тангенциальных составляющих.

1. Граничные условия для нормальных составляющих векторов магнитного поля

Пусть S – поверхность раздела двух сред 1 и 2 (рис. 10.2). Выделим в окрестности точки A , лежащей на поверхности S , элементарный цилиндрический объём с основанием ΔS и высотой Δh .

Вектор магнитной индукции \bar{B} представим в виде суммы нормальной и тангенциальной составляющих:

$$\bar{B} = B_\tau \bar{i}_\tau + B_n \bar{i}_n \quad (10.1)$$

и рассмотрим поведение нормальной и тангенциальной составляющих отдельно. Поток магнитной индукции через суммарную поверхность элементарного цилиндра:

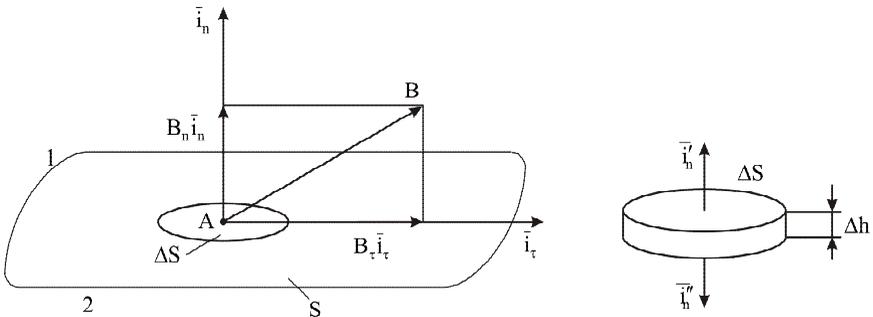


Рис. 10.2. К определению нормальных составляющих векторов магнитного поля

$$\oint_{S_{\Sigma}} \overline{B} d\overline{S} \cong \overline{B}_1 \overline{i}_n' \Delta S + \overline{B}_2 \overline{i}_n'' \Delta S + \overline{\Phi} \Delta h, \quad (10.2)$$

где $\overline{B}_1, \overline{B}_2$ – векторы магнитной индукции в средах 1 и 2; $\overline{\Phi} \Delta h$ – поток через боковую поверхность; $\overline{i}_n', \overline{i}_n''$ – единичные векторы нормали к поверхности раздела в средах 1 и 2 ($\overline{i}_n' = -\overline{i}_n''$). При $\Delta S \rightarrow 0$ приближенное равенство становится точным. При $\Delta h \rightarrow 0$ поток через боковую поверхность равен нулю – $\overline{\Phi} \Delta h \rightarrow 0$:

$$\lim_{S_{\Sigma}} \oint \overline{B} d\overline{S} = \overline{B}_1 \overline{i}_n \Delta S - \overline{B}_2 \overline{i}_n \Delta S. \quad (10.3)$$

Из закона непрерывности магнитных силовых линий

$$\overline{B}_1 \overline{i}_n - \overline{B}_2 \overline{i}_n = 0 \text{ или } B_{1n} = B_{2n}, \quad (10.4)$$

то есть нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред непрерывны.

Соответственно напряженность магнитного поля на границе раздела испытывает скачок – изменяется обратно пропорционально магнитной проницаемости:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}. \quad (10.5)$$

На границе с идеальным проводником $H_n = 0$.

2. *Граничные условия для нормальных составляющих векторов электрического поля*

Методика определения граничных условий для нормальных составляющих электрического поля такая же, как и для магнитного поля, но для электрического поля $\text{div} \overline{D} = \rho$. При наличии поверхностных электрических зарядов ($\rho_{\text{пов}} \neq 0$) можно записать аналогично случаю магнитного поля:

$$\lim_{S_{\Sigma}} \oint \overline{D} d\overline{S} = \overline{D}_1 \overline{i}_n \Delta S - \overline{D}_2 \overline{i}_n \Delta S = \rho_{\text{пов}} \Delta S, \quad (10.6)$$

где $\rho_{\text{пов}} = \lim_{\Delta S} \frac{\Delta q}{\Delta S}$; q – заряд, располагающийся в поверхностном слое.

Тогда

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_{\text{пов}}. \quad (10.7)$$

Это означает, что при наличии заряженной поверхности раздела двух сред нормальная составляющая вектора электрического смещения изменяется скачком на величину плотности поверхностного заряда в исследуемой точке.

На границе двух идеальных диэлектриков ($\rho_{\text{пов}} = 0$)

$$D_{1n} = D_{2n}; \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}. \quad (10.8)$$

На границе с идеальным проводником

$$D_n = \rho_{\text{пов}}; \quad E_n = \frac{\rho_{\text{пов}}}{\varepsilon}. \quad (10.9)$$

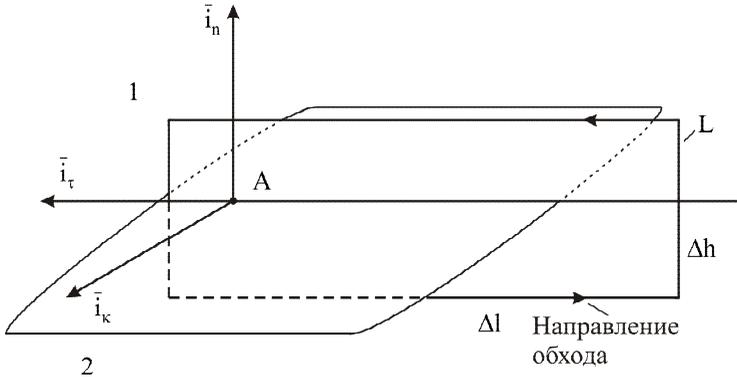


Рис. 10.3. К определению тангенциальных составляющих векторов магнитного поля

3. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов магнитного поля

Выделим в окрестностях точки А на границе раздела двух сред (рис. 10.3) достаточно малый (чтобы считать векторы \vec{H} в пределах его сторон постоянными) прямоугольный контур L со сторонами Δl и Δh в плоскости векторов \vec{i}_n и \vec{i}_τ . Вектор \vec{i}_k образует нормаль к плоскости, образованной векторами \vec{i}_n и \vec{i}_τ , и лежит в плоскости границы раздела. В обеих областях (1 и 2) протекают токи, которые могут включать как токи проводимости, так и токи смещения. Применяя закон полного тока, получаем:

$$\begin{aligned} \oint_{L_\Sigma} \vec{H} d\vec{l} &= (\vec{H}_1 \vec{i}_\tau - \vec{H}_2 \vec{i}_\tau) \Delta l + (\text{циркуляция по боковым сторонам}) = \\ &= (\vec{J}_{\text{пр}} \vec{i}_k + \vec{J}_{\text{см}} \vec{i}_k) \Delta l \Delta h. \end{aligned} \quad (10.10)$$

При $\Delta h \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\vec{J}_{\text{пр}} \vec{i}_k + \vec{J}_{\text{см}} \vec{i}_k) \Delta l \Delta h = 0, \quad (10.11)$$

Тогда

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{L_\Sigma} \vec{H} d\vec{l} = \vec{H}_1 \vec{i}_\tau \Delta l - \vec{H}_2 \vec{i}_\tau \Delta l = 0 \quad (10.12)$$

или

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (10.13)$$

то есть тангенциальные составляющие вектора напряженности магнитного поля на границе раздела двух сред непрерывны (в случае сред с конечной проводимостью).

Если же одна из сред – идеальный проводник, проводимость его бесконечна и глубина проникновения поля равна нулю на любой частоте. В результате токи проводимости протекают по поверхностному слою нулевой толщины, поэтому выражение (10.11) становится не равным нулю.

Для характеристики поверхностных токов вводят понятие плотности поверхностного тока:

$$\vec{j}_{\text{пов}} = \vec{i}_0 \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l}, \quad (10.14)$$

где \vec{i}_0 – единичный вектор, касательный к линиям тока в данной точке; Δl – пересекемый током отрезок линии, перпендикулярной к вектору \vec{i}_0 .

Тогда формула для циркуляции вектора напряженности переписывается в виде:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{L_\Sigma} \vec{H} d\vec{l} = \vec{H}_1 \vec{i}_\tau \Delta l - \vec{H}_2 \vec{i}_\tau \Delta l = \vec{j}_{\text{пов}} \vec{i}_k \Delta l. \quad (10.15)$$

С учетом того, что поле в идеальном проводнике равно нулю ($H_{2\tau} = 0$):

$$\vec{H}_1 \vec{i}_\tau = \vec{j}_{\text{пов}} \vec{i}_k. \quad (10.16)$$

Эта формула позволяет определить плотность поверхностного тока по известному магнитному полю на границе идеального проводника.

С учетом того, что $\vec{i}_\tau = -[\vec{i}_n \times \vec{i}_k]$, можно записать:

$$\vec{j}_{\text{пов}} = [\vec{i}_n \times \vec{H}_1], \quad (10.17)$$

то есть поверхностный ток на границе раздела с идеальным проводником протекает в направлении, перпендикулярном к вектору \vec{H}_1 , и численно равен напряженности магнитного поля.

4. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов электрического поля

Методика определения граничных условий для тангенциальных составляющих векторов электрического поля такая же, как и для векторов магнитного поля, но вместо закона полного тока следует воспользоваться законом электромагнитной индукции. В соответствии с этим законом

$$\oint_{L_\Sigma} \vec{E} d\vec{l} = \vec{E}_1 \vec{i}_\tau \Delta l - \vec{E}_2 \vec{i}_\tau \Delta l + = - \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \vec{i}_k \Delta l \Delta h, \quad (10.18)$$

отсюда для границы раздела двух диэлектриков

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; D_{1\tau} \varepsilon_2 = D_{2\tau} \varepsilon_1. \quad (10.19)$$

На границе с идеальным проводником $E_{1\tau} = 0$, то есть существует только нормальная составляющая вектора электрического поля.

10.5. Электростатическое поле

10.5.1. Понятие электростатического потенциала

В зависимости от класса электромагнитных явлений используются различные частные случаи уравнений электромагнитного поля. Наиболее простым является случай неизменных во времени полей в пространстве без токов. В этом случае связь между электрическим и магнитным полями исчезает и получаются две независимые системы уравнений.

Электростатическими называют стационарные во времени электрические поля при отсутствии токов.

При этом уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$1. \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \left(\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \right).$$

$$2. \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \left(\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \right).$$

$$3. \vec{D} = \varepsilon \vec{E}.$$

Поле, выраженное первым уравнением, называется потенциальным. Напряженность такого поля может быть представлена как градиент некоторой скалярной функции U , которая называется **электростатическим потенциалом**. Принято писать

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U, \quad (10.20)$$

то есть напряженность в какой-либо точке равна скорости изменения потенциала в этой точке с обратным знаком. Запишем это выражение в декартовых координатах:

$$\vec{E} = -\left(\vec{i}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (10.21)$$

где $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ – единичные векторы соответствующих осей.

Напряженность \vec{E} определяется как сила, действующая на помещенный в поле единичный точечный заряд. При перемещении этого заряда вдоль элементарного отрезка $\Delta \vec{l} = \vec{i}_x \Delta x + \vec{i}_y \Delta y + \vec{i}_z \Delta z$ сила поля совершает работу:

$$\Delta A = \vec{E} \Delta \vec{l}. \quad (10.22)$$

Работа по переносу заряда из точки M_1 в точку M_2 :

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} d\vec{l}. \quad (10.23)$$

Если переписать стоящее под знаком интеграла произведение в декартовых координатах, то получим:

$$\vec{E} d\vec{l} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \quad (10.24)$$

и видно, что оно представляет собой взятый с обратным знаком полный дифференциал функции U :

$$\vec{E}d\vec{l} = -dU. \quad (10.25)$$

Отсюда

$$A = - \int_{M_1}^{M_2} dU = U_1 - U_2, \quad (10.26)$$

то есть работа, совершаемая при перемещении единичного положительного точечного заряда в электростатическом поле, равна разности потенциалов начальной и конечной точек. Она не зависит от вида пути. Работа при обходе замкнутого контура равна нулю:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0. \quad (10.27)$$

В электростатике обычно принимают, что потенциал в бесконечно удаленных точках равен нулю. Тогда потенциал в произвольной точке М численно равен работе, совершаемой при перемещении единичного заряда из этой точки в бесконечность:

$$U = \int_M^{\infty} \vec{E}d\vec{l} = - \int_{\infty}^M \vec{E}d\vec{l}. \quad (10.28)$$

10.5.2. Определение потенциала по заданному распределению зарядов

Поле единичного заряда легко найти, применив теорему Гаусса: поместим заряд в центр мысленной сферы радиусом r и вычислим выходящий из неё поток индукции:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi r^2 D. \quad (10.29)$$

Применяя закон Гаусса, получаем

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (10.30)$$

и для напряженности соответственно:

$$E = \frac{q}{\varepsilon 4\pi r^2}. \quad (10.31)$$

Принимая равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек, получаем

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}. \quad (10.32)$$

Выражение для потенциала точечного заряда дает возможность найти для однородной среды общий метод вычисления потенциала при заданном распределении электрических зарядов в конечной области пространства.

Разбив все распределенные в пространстве заряды на элементарные части dq , будем рассматривать эти элементы как точечные заряды (рис. 10.4).

Потенциал в точке А, определяемый каждым таким элементом:

$$dU = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dq}{4\pi r}. \quad (10.33)$$

Потенциал, определяемый совокупностью всех зарядов:

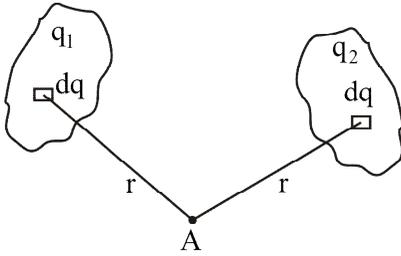


Рис. 10.4. К определению потенциала по заданному распределению зарядов

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq}{r}. \quad (10.34)$$

Если электрический заряд распределен по объёму V , а объёмная плотность заряда в некоторой точке ρ , то следует разбить весь объём на элементы dV . Тогда

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (10.35)$$

Если заряд распределен в тонких поверхностных слоях, то можно считать, что заряд распределен по поверхности тела:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\rho_{\text{пов}} dS}{r}, \quad (10.36)$$

где $\rho_{\text{пов}}$ – поверхностная плотность заряда.

Если заряд распределен по проводнику, то

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\tau dl}{r}, \quad (10.37)$$

где τ – линейная плотность заряда.

И, наконец, при известном числе n зарядов

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k}. \quad (10.38)$$

10.5.3. Уравнения Пуассона и Лапласа. Поле системы заряженных тел

Подставим третье уравнение Максвелла во второе:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (10.39)$$

В случае когда ϵ не зависит от координат, то есть среда однородна, заменяя вектор \vec{E} градиентом потенциала, получаем:

$$\text{div grad} U = -\frac{\rho}{\epsilon} = \nabla(\nabla U) = \nabla^2 U. \quad (10.40)$$

Перепишем (10.40) в виде

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (10.41)$$

Полученное уравнение называют **уравнением Пуассона**, оно устанавливает связь между потенциалом U и плотностью распределения заряда ρ .

Учитывая, что векторный дифференциальный оператор второго порядка ∇^2 в декартовой системе координат записывается как

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (10.42)$$

можно переписать уравнение Пуассона в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (10.43)$$

Для областей, в которых заряд отсутствует:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{или} \quad \nabla^2 U = 0. \quad (10.44)$$

Это уравнение называют **уравнением Лапласа** (фактически оно является частным случаем уравнения Пуассона).

Таким образом, в электростатике задача определения поля в каждой точке сводится к задаче расчета электростатического потенциала по известному распределению зарядов и при известной конфигурации электродов. Затем поле определяется как градиент потенциала.

Примеры применения уравнения Лапласа для расчета электростатических полей

Пример 1. Поле плоского конденсатора

Требуется рассчитать поле между двумя находящимися в однородной среде бесконечными параллельными пластинами А и В, имеющими потенциалы $U_A=0$ и $U_B=U_0$; d – расстояние между пластинами (рис. 10.5).

В такой задаче поле зависит только от координаты x , поэтому в уравнении Лапласа остается только одно слагаемое:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = 0.$$

Решение этого уравнения будет иметь вид:

$$U = C_1 x + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

$$U=0 \text{ при } x=0; \quad U=U_0 \text{ при } x=d.$$

Тогда $C_2=0$ и $C_2=U_0/d$. Таким образом,

$$U = C_1 x + C_2 = \frac{U_0}{d} x.$$

Напряженность поля определяется как градиент потенциала:

$$\vec{E} = -\text{grad}U = -\vec{i}_x \frac{dU}{dx}; \quad \vec{E} = -\frac{U_0}{d} \vec{i}_x.$$

Напряженность постоянна во всех точках поля и при $U_0 > 0$ направлена в сторону, противоположную оси x .

Учитывая, что у поверхности проводника напряженность по внешней нормали в сторону проводника определяется как

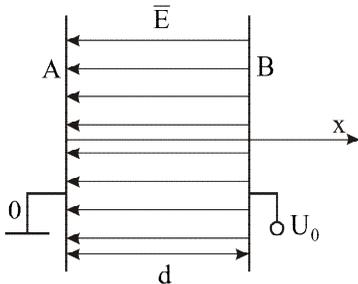


Рис. 10.5. К расчету поля плоского конденсатора

$$E_n = \frac{\rho_{\text{пов}}}{\varepsilon},$$

можно определить поверхностную плотность заряда для пластин **A** и **B** как

$$\rho_{\text{повA}} = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{U_0}{d} \text{ и } \rho_{\text{повB}} = \varepsilon \frac{U_0}{d} \text{ соответственно.}$$

Общий заряд на площадке величиной S равен

$$q_A = \rho_{\text{пов}} S = \frac{U_0 S \varepsilon}{d} = -q_B.$$

Для ёмкости плоского конденсатора с площадью S :

$$C = \left| \frac{q_A}{U_A - U_B} \right| = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Пример 2. Поле двух проводников

Рассмотрим бесконечно тонкие (линейные) проводники, имеющие линейные плотности заряда τ и $-\tau$ (рис. 10.6).

Потенциал одиночного проводника:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\tau dl}{r}.$$

Потенциал в любой точке пространства найдём наложением потенциалов от первого и второго проводников с учетом их знаков:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r_1 - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Из полученного соотношения следует, что все точки, лежащие на кривой $r_1/r_2 = \text{const}$, имеют один и тот же потенциал. Поскольку известно, что точки с постоянным отношением расстояний до двух фиксированных точек образуют окружность, то эквипотенциальные кривые в плоскости чертежа – это окружности. Силовые линии поля должны быть перпендикулярны к эквипотенциальным линиям, а следовательно, также представляют собой окружности.

Найдем уравнение эквипотенциальной окружности, соответствующее некоторому постоянному значению:

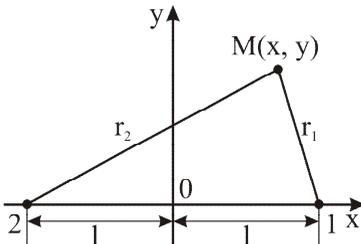


Рис. 10.6. К расчету поля двух проводников

$$r_1 / r_2 = k.$$

Расстояние между проводниками $2l$, тогда

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = k.$$

Возведем в квадрат обе части последнего равенства и преобразуем:

$$x^2 + y^2 - 2l \frac{1+k^2}{1-k^2} x = -l^2.$$

Прибавим к левой и правой частям выражение $(l(1+k^2)/(1-k^2))^2$, получим

$$\left(x - \frac{1+k^2}{1-k^2}l\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kl}{1-k^2}\right)^2.$$

Это и есть уравнение окружности с центром в точке, имеющей координаты

$$x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}l \text{ и } y_0 = 0.$$

Радиус этой окружности определяется как

$$r_0 = \frac{2k}{1-k^2}l.$$

Все точки найденной окружности имеют значение потенциала, равное

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln k.$$

10.5.4. Расчет поля, создаваемого зарядами вблизи проводящих поверхностей

В случае когда поле создается электрическими зарядами вблизи проводящих поверхностей, необходимо решать уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}.$$

Решением этого уравнения является интеграл вида

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

где \mathbf{r}' – координата размещения заряда в объеме V' , \mathbf{r} – координата, в которой вычисляется потенциал.

Существует метод, позволяющий существенно упростить решение этой задачи. Это искусственный прием расчета, при котором кроме заданных зарядов, вводят дополнительные являющиеся как бы зеркальными изображениями первоначальных, таким образом, что полное поле будет удовлетворять граничным условиям на поверхности проводника.

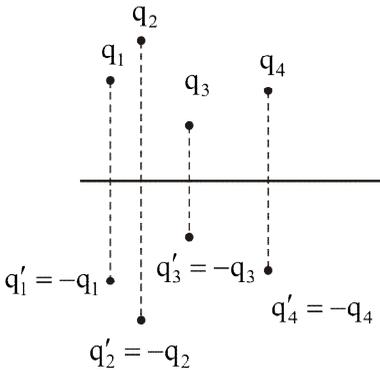


Рис. 10.7. Метод эквивалентных зарядов

Пусть имеется бесконечная эквипотенциальная плоскость, над которой задано некоторое распределение зарядов. Требуется определить поле, созданное этими зарядами над плоскостью (см. рис. 10.7). Определить поле непосредственным суммированием полей отдельных зарядов в такой задаче невозможно, поскольку необходимо знать

распределение индуцированных зарядов на плоскости.

Поле, которое требуется определить, должно удовлетворять уравнению Лапласа для всего свободного от зарядов пространства и, кроме того, удовлетворять граничным условиям: заданным значениям зарядов и постоянству потенциала на плоскости. При этом значение потенциала на плоскости можно, в принципе, положить равным нулю, не нарушая общности решения. Легко видеть, что если взамен индуцированных на плоскости зарядов ввести симметрично фиктивные заряды, обратные по знаку заданным ($-q'_1, -q'_2$), то общее поле всех зарядов будет удовлетворять в верхнем полупространстве тем же граничным условиям, что и поле зарядов $q_1, q'_2 \dots$ и т.д. над проводящей плоскостью. Введённые фиктивные заряды называются **электрическими изображениями** реальных зарядов.

Приведём несколько примеров расчета поля методом зеркальных изображений.

Пример 1. Поле точечного заряда над плоскостью

Введем фиктивный заряд $q' = -q$ (рис. 10.8). Тогда потенциал от зарядов q и q' в точке наблюдения (точка А)

$$U(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right).$$

В то же время это выражение определяет потенциал поля, созданного зарядом q над плоскостью. Теперь можно найти распределение зарядов на плоскости. Для составляющей электрического поля, нормальной к плоскости:

$$E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right).$$

А поскольку из геометрии видно, что $r = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$ и $r' = \sqrt{x^2 + (y + h)^2}$, где h – расстояние от заряда до плоскости, то получим

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{y - h}{r^3} - \frac{y + h}{r'^3} \right).$$

Для точек, расположенных на плоскости (т.е. $r=r'$), $E_y = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{h}{r^3}$.

Поверхностная плотность заряда, индуцированного на плоскости:

$$\rho_{\text{пов}} = \epsilon E_y = -\frac{q}{2\pi} \frac{h}{r^3}.$$

Можно убедиться (непосредственным интегрированием) в том, что потенциал, созданный в произвольной точке А индуцированным зарядом такой плотности, совпадает с выражением $q/4\pi\epsilon r'$, то есть с потенциалом от электрического изображения.

Пример 2. Поле проводника бесконечной длины над заряженной плоскостью

Будем считать проводник бесконечно тонким. Провод 1 с линейной плотностью заряда τ расположен на высоте h над плоскостью. Введём симметрично плоскости проводник 2 с линейной плотностью заряда $-\tau$ (рис. 10.9). Потенциал в произвольной точке A пространства найдём наложением потенциалов первого и второго проводов. Потенциал одного провода:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\tau dl}{r}$$

Следовательно, потенциал двух проводов

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r_1 - \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Таким образом, мы получили задачу о двух проводниках, рассмотренную в п. 10.5.3.

10.6. Магнитное поле постоянного тока

Для случая постоянного тока система уравнений электромагнитного поля имеет следующий вид.

Уравнения электростатики:

$$1). \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0);$$

$$2). \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q);$$

$$3). \vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Уравнения, характеризующие магнитное поле:

$$1). \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I);$$

$$2). \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0);$$

$$3). \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

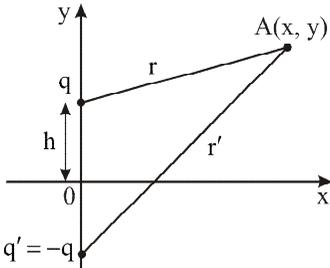


Рис. 10.8. К определению поля точечного заряда над плоскостью

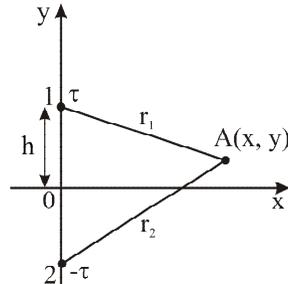


Рис. 10.9. К определению поля проводника над плоскостью

10.6.1. Магнитостатика

Рассматривает лишь области, не содержащие тока ($\vec{j} = 0$). В этом случае верхняя строчка системы уравнений магнитного поля будет иметь вид:

$$\text{rot} \vec{H} = 0 \quad \left(\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0 \right). \quad (10.45)$$

Тогда из уравнения (10.45) следует: в областях, где $\vec{j} = 0$, магнитное поле можно рассматривать как **потенциальное** (по аналогии с электростатическим), то есть как поле, каждая точка которого имеет скалярный магнитный потенциал φ_M . Тогда

$$\vec{H} = -\text{grad} \varphi_M. \quad (10.46)$$

Так как

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \mu \vec{H} = 0, \quad (10.47)$$

то при $\mu = \text{const}$ получим

$$\text{div} \vec{H} = 0. \quad (10.48)$$

Заменив \vec{H} на $-\text{grad} \varphi_M$, получим

$$\text{div} \text{grad} \varphi_M = 0. \quad (10.49)$$

Таким образом, скалярный потенциал магнитного поля φ_M подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_M = 0. \quad (10.50)$$

Кроме того, граничные условия для вектора \vec{H} (10.5), (10.13) точно такие же, как и для вектора \vec{E} (10.8), (10.19). Отсюда очевидный вывод: решения задач магнитостатики формально аналогичны решениям соответствующих задач электростатики и могут быть получены простой заменой \vec{E} на \vec{H} и ϵ на μ . На самом деле на практике не каждой электростатической задаче можно сопоставить магнитостатическую. Явлений магнитостатики гораздо меньше в природе, так как не существует свободных магнитных зарядов.

Разность скалярных магнитных потенциалов между точками 1 и 2 (рис. 10.10) называют **падением магнитного напряжения** между этими точками.

Падение магнитного напряжения между точками 1 и 2 по какому-либо одному пути (например, по пути 1-3-2) равно падению магнитного напряжения между теми же точками по какому-либо другому пути (например, 1-4-2) в том случае, когда эти пути образуют замкнутый контур, ток внутри которого равен нулю.

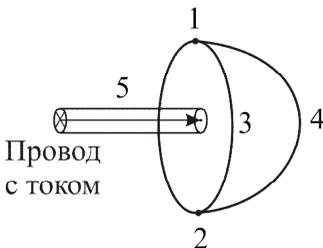


Рис. 10.10. К определению магнитного напряжения

Если же замкнутый контур, образованный двумя путями, охватывает некоторый не равный нулю ток, то падение магнитного напряжения по первому пути не равно падению магнитного напряжения по второму пути: они

будут различаться на величину тока, охваченного контуром. (Это вытекает из закона полного тока.)

$$\int_{152} \bar{H}d\bar{l} \neq \int_{132} \bar{H}d\bar{l}, \quad (10.51)$$

так как из закона полного тока следует, что $\int_{132} \bar{H}d\bar{l} + \int_{152} \bar{H}d\bar{l} = -I$.

Таким образом, с помощью скалярного потенциала нельзя решить задачу о связи магнитного поля и постоянного тока. С этой целью вводится **векторный потенциал** (или **вектор-потенциал**) магнитного поля. Это – некая вспомогательная функция (обозначим её \bar{A}), плавно изменяющаяся от точки к точке; её ротор равен магнитной индукции:

$$\bar{B} = \text{rot}\bar{A}. \quad (10.52)$$

Определим \bar{A} так, чтобы уравнения магнитного поля $\text{rot}\bar{H} = \bar{j}$ (1); $\text{div}\bar{B} = 0$ (2) $\bar{B} = \mu\bar{H}$ (3) выполнялись во всем пространстве: и там, где токов нет, и там, где есть токи ($\bar{j} \neq 0$).

Уравнение (2) выполняется, так как $\text{div}\text{rot}\bar{A} = 0$. Рассмотрим оставшиеся два уравнения.

Ограничимся рассматриванием однородной среды $\mu = \text{const}$. Умножим правую и левую части уравнения (1) на μ :

$$\mu \text{rot}\bar{H} = \text{rot}\mu\bar{H} = \text{rot}\bar{B} = \mu\bar{j}, \quad (10.53)$$

а так как $\bar{B} = \text{rot}\bar{A}$, то $\text{rot}\text{rot}\bar{A} = \mu\bar{j}$.

Операция взятия ротора от ротора – это операция раскрытия двойного векторного произведения, выполняется так:

$$\text{rot}\text{rot}\bar{A} = [\nabla[\nabla\bar{A}]] = \text{grad}\text{div}\bar{A} - \nabla^2\bar{A} = \mu\bar{j}.$$

Из курса математики известно, что двойное векторное произведение раскрывается следующим образом:

$$[\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]] = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}).$$

В нашем случае роль векторов \bar{a} и \bar{b} играет оператор ∇ , а роль вектора \bar{c} – вектор-потенциал \bar{A} , то есть:

$$[\nabla[\nabla\bar{A}]] = \nabla(\nabla\bar{A}) - \bar{A}(\nabla\nabla) = \text{grad}\text{div}\bar{A} - \nabla^2\bar{A}.$$

До сих пор никаких дополнительных требований к векторному потенциалу не предъявлялось, кроме того, что он должен быть функцией, имеющей пространственные производные. Так как \bar{A} есть расчетная функция, то в магнитном поле постоянного тока ее можно подчинить требованию

$$\text{div}\bar{A} = 0, \quad (10.54)$$

то есть поле вектора \bar{A} не имеет источников. Тогда

$$\nabla^2\bar{A} = -\mu\bar{j}. \quad (10.55)$$

Это уравнение аналогично уравнению Пуассона для электростатического потенциала и может быть записано в виде трёх скалярных:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu \bar{j}_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu \bar{j}_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu \bar{j}_z \end{aligned} \right\}.$$

(10.56)

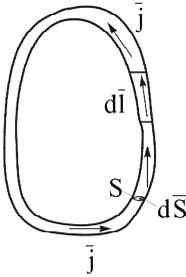


Рис. 10.11. К определению поля линейного тока

Решение этих уравнений можно записать аналогично решению уравнения Пуассона для электростатического потенциала (заменив U на A_x и ρ/ϵ на ρ/ϵ):

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j_x dV}{r},$$

(10.57)

так же и для других составляющих (A_y и A_z). Тогда векторная запись решения уравнения Пуассона для векторного потенциала будет выглядеть так:

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\bar{j} dV}{r},$$

(10.58)

где r – расстояние от центра элемента объема dV , в котором существует ток \bar{j} , до точки, в которой определяется \bar{A} .

Полученное выражение справедливо везде, в том числе и там, где токи отсутствуют ($\bar{j} \neq 0$). Полученный результат позволяет по заданному току найти векторный потенциал \bar{A} и затем по нему определить поле, то есть индукцию \bar{B} и напряженность \bar{H} .

10.6.2. Магнитное поле линейного тока

Рассмотрим теперь способ нахождения магнитного поля в наиболее распространенном случае линейного тока (т.е. когда поперечные размеры проводника малы по сравнению с его длиной и по сравнению с расстоянием до точки, в которой определяются \bar{A}). Элемент объема проводника $dV = d\bar{l} d\bar{S}$, где $d\bar{S}$ – элемент поперечного сечения; $d\bar{l}$ – элемент длины (рис. 10.11).

Выберем направление $d\bar{l}$ всюду так, чтобы оно совпадало с направлением вектора плотности тока \bar{j} . Тогда:

$$\bar{j}(d\bar{S} d\bar{l}) = (\bar{j} d\bar{S}) d\bar{l},$$

(10.59)

следовательно,

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{L S} \bar{j} \frac{(d\bar{S} d\bar{l})}{r} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{L S} (\bar{j} d\bar{S}) \frac{(d\bar{l})}{r}.$$

(10.60)

Считая, что расстояния до точки, в которой определяется \bar{A} , одинаковы для всех $d\bar{S}$ данного сечения s и одинаковы все отрезки $d\bar{l}$, получаем

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{L} \frac{(d\bar{l})}{r} \int_S \bar{j} d\bar{S} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{L} \frac{I d\bar{l}}{r},$$

(10.61)

где $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ - ток в проводнике.

Отсюда

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L I \text{rot} \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L \left[\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right]. \quad (10.62)$$

10.7. Переменные электромагнитные поля

10.7.1. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд поля

Теория переменных электромагнитных процессов основана на системе уравнения Максвелла в ее полном виде. Входящие в эти уравнения операции rot и div выражаются через комбинации частных производных от проекций векторных полей \vec{D} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} . При этом достаточно определить один электрический и один магнитный вектор; другие два вектора могут быть получены из материальных уравнений.

Таким образом, уравнение Максвелла представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно шести неизвестных функций (например: E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z). Решение такой системы – это, вообще говоря, достаточно сложная задача. Но для практических целей оказывается возможным ввести некоторые упрощения.

Например, наиболее часто на практике встречается случай, когда электромагнитный процесс является монохроматическим, т.е. изменение полей во времени представляется гармоническими колебаниями с некоторой частотой ω .

В общем случае вектор какого-либо поля (например \vec{E}), изменяющийся во времени по гармоническому закону, в некоторой точке пространства запишется следующим образом:

$$\vec{E}(t) = E_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{i}_x + E_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) \vec{i}_y + E_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z) \vec{i}_z. \quad (10.63)$$

Или можно записать в комплексной форме

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= \text{Re} \left\{ \left[E_{mx} e^{j\varphi_x} \vec{i}_x + E_{my} e^{j\varphi_y} \vec{i}_y + E_{mz} e^{j\varphi_z} \vec{i}_z \right] e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \text{Re} \left[\vec{E}_m e^{j\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Комплексный вектор вида $\vec{E} = E_{mx} e^{j\varphi_x} \vec{i}_x + E_{my} e^{j\varphi_y} \vec{i}_y + E_{mz} e^{j\varphi_z} \vec{i}_z$ называется комплексной амплитудой поля \vec{E} .

Здесь метод комплексных амплитуд отличается от аналогичного в электротехнике. В теории поля комплексные амплитуды полей всегда представляют собой трёхмерные пространственные векторы. Экспоненциальные множители с мнимыми показателями, стоящие при комплексных амплитудах, характеризуют фазовые соотношения между величинами.

Комплексные амплитуды могут быть введены в уравнения Максвелла.

1-е уравнение тогда запишется как

$$\operatorname{rot} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{H}} e^{j\omega t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{D}} e^{j\omega t} \right] + \sigma \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \right]. \quad (10.65)$$

Допустимо изменить порядок следования дифференциальных операций и операций взятия вещественной части и сократить на общий множитель $e^{j\omega t}$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \dot{\vec{D}} + \sigma \dot{\vec{E}}, \quad (10.66)$$

т.е. переход к комплексным амплитудам совершен по тем же правилам, что и в электротехнике: дифференцирование по времени мгновенного значения поля заменяется на множитель $j\omega$: $\frac{\partial \dot{\vec{E}} e^{j\omega t}}{\partial t} = j\omega \dot{\vec{E}} e^{j\omega t}$, т.е. $\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \dot{\vec{E}}$.

Система уравнений Максвелла в комплексном виде:

- 1). $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \dot{\vec{D}} + \sigma \dot{\vec{E}}$;
- 2). $\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \dot{\vec{B}}$;
- 3). $\operatorname{div} \dot{\vec{D}} = \rho$;
- 4). $\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = 0$;
- 5). $\dot{\vec{D}} = \epsilon \dot{\vec{E}}$;
- 6). $\dot{\vec{B}} = \mu \dot{\vec{H}}$.

10.7.2. Комплексные параметры среды

Первое уравнение Максвелла можно переписать, воспользовавшись материальным уравнением среды:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \epsilon \dot{\vec{E}} + \sigma \dot{\vec{E}} = (j\omega \epsilon + \sigma) \dot{\vec{E}} = j\omega \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) \dot{\vec{E}}. \quad (10.67)$$

Величину $\epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \dot{\epsilon}$ называют **комплексной диэлектрической проницаемостью среды**. Она позволяет учитывать как диэлектрические, так и проводящие свойства среды.

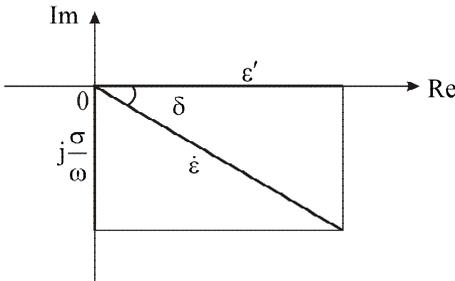


Рис. 10.12. Представление $\dot{\epsilon}$ на комплексной плоскости

Запишем комплексную диэлектрическую проницаемость в виде

$$\dot{\epsilon} = \epsilon' + j\epsilon''. \quad (10.68)$$

Мнимая часть здесь характеризует плотность токов проводимости.

Изображая $\dot{\epsilon}$ на комплексной плоскости (рис. 10.12), можно характеризовать соотношение между вещественной и мнимой частями с помощью угла δ (он называется **углом диэлектрических потерь**).

Чем больше этот угол, тем большая часть электромагнитной энергии рассеивается в виде тепла при протекании токов проводимости. На практике чаще пользуются тангенсом этого угла $\operatorname{tg}\delta = \sigma/\omega\epsilon$. Для проводников $\operatorname{tg}\delta \gg 1$; для диэлектриков $\operatorname{tg}\delta \ll 1$.

Аналогично можно ввести и понятие тангенса магнитных потерь. Уравнения Максвелла с учетом комплексных параметров среды:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -j\omega\vec{\mu}\vec{H}; & \vec{B} &= \vec{\mu}\vec{H}; \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= j\omega\vec{\epsilon}\vec{E}; & \vec{D} &= \vec{\epsilon}\vec{E}. \end{aligned}$$

10.7.3. Волновой характер электромагнитного поля

Электромагнитное поле, возникающее в некоторой области пространства, не заполняет его мгновенно, а распространяется с конечной скоростью, зависящей от свойств среды. При распространении периодического процесса с конечной скоростью происходит запаздывание его по фазе, следствием этого является волновой характер распространения.

Докажем волновой характер электромагнитного поля математически, сводя уравнение Максвелла к уравнениям известного вида, которые заведомо описывают волновой процесс.

Первые два уравнения Максвелла в комплексном виде: $\operatorname{rot}\vec{E} = -j\omega\vec{\mu}\vec{H}$ и $\vec{B} = \vec{\mu}\vec{H}$ могут быть приведены к одному. Для этого применим операцию rot к правой и левой частям первого уравнения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = j\omega\vec{\epsilon}\operatorname{rot}\vec{E}. \quad (10.69)$$

Отсюда с помощью второго уравнения можно исключить \vec{E} :

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \omega^2\vec{\epsilon}\vec{\mu}\vec{H}. \quad (10.70)$$

Пусть среда изотропна и однородна и плотность зарядов ρ отсутствует ($\rho=0$). Используем известное соотношение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \underbrace{\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H}}_0 - \nabla^2\vec{H} = -\nabla^2\vec{H}; \quad (10.71)$$

$$\nabla^2\vec{H} + \omega^2\vec{\epsilon}\vec{\mu}\vec{H} = 0, \quad (10.72)$$

где $\omega^2\vec{\epsilon}\vec{\mu} = k^2$, k – **постоянная распространения** электромагнитной волны (иногда используются термины «фазовая постоянная», «волновое число»).

Аналогично можно получить уравнение относительно \vec{E} :

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0. \quad (10.73)$$

Уравнения (10.72) и (10.73) в математической физике называются уравнениями Гельмгольца (волновыми уравнениями). Эти уравнения описывают стационарные волновые процессы, то есть распространение в пространстве волн с некоторой постоянной частотой. Таким образом, переменность во времени электрических или магнитных полей неизбежно приводит к распространению в пространстве электромагнитных волн.

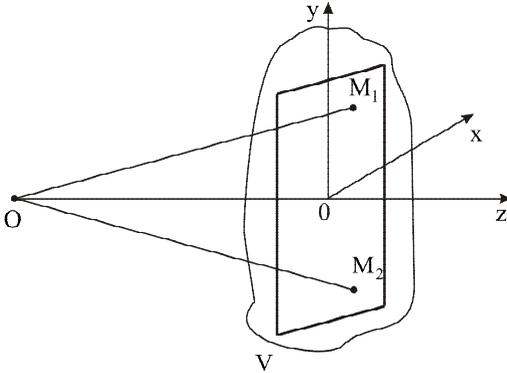


Рис. 10.13. К выводу решения волнового уравнения

Получим простейшее решение волнового уравнения и выясним его физический смысл.

В системе координат, изображенной на рис. 10.13, исследуемая область V лежит далеко от источника O , так что любые две ее точки, расположенные на перпендикулярной к оси OZ площадке, можно считать находящимися на одинаковых расстояниях от O . Тогда можно считать отрезки OM_1 и OM_2 равными и параллельными, т.е. точки M_1

и M_2 по отношению к источнику совершенно равноправны. Тогда изменениями электромагнитного поля от OM_1 к OM_2 можно пренебречь и считать, что во всей области V процесс не зависит от координат x и y :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Отсюда вытекает упрощение оператора Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (10.74)$$

и волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \ddot{\vec{H}}}{\partial z^2} + k^2 \ddot{\vec{H}} = 0. \quad (10.75)$$

Решение такого уравнения известно:

$$\ddot{\vec{H}} = \vec{h}_0 (\dot{A}' e^{-jkz} + \dot{B}' e^{jkz}). \quad (10.76)$$

Здесь \dot{A}' и \dot{B}' – произвольные коэффициенты, включающие множитель $e^{j\omega t}$; \vec{h}_0 – единичный вектор, указывающий направление $\ddot{\vec{H}}$.

Выделим временной множитель:

$$\ddot{\vec{H}} = \vec{h}_0 [A e^{j(\omega t - kz)} + B e^{j(\omega t + kz)}] \quad (10.77)$$

и, выделив вещественную часть, получим выражение вектора $\dot{\vec{H}}$:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{h}_0 [A \cos(\omega t - kz) + B \cos(\omega t + kz)] \quad (10.78)$$

(коэффициенты A и B считаем вещественными).

В момент времени t_1 магнитное поле, выражаемое первым членом (10.78), распределяется вдоль оси z по закону: $A \cos(\omega t_1 - kz)$, а по прошествии времени Δt в момент $t_2 = t_1 + \Delta t$ это распределение примет вид: $A \cos(\omega t_1 + \omega \Delta t - kz)$, т.е. окажется смещенным в положительном направлении на расстояние Δz , которое

легко определить из условия $\omega\Delta t - kz = 0$. Отсюда с учетом $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ найдем скорость перемещения $\Delta z / \Delta t$, которая равна фазовой скорости волны

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (10.79)$$

То есть гармоническое распределение поля непрерывно перемещается в направлении положительной оси z с постоянной скоростью v . Это – бегущая волна, а v – ее фазовая скорость. В вакууме $v = c = 1/\epsilon_0 \mu_0 = 2,998 \cdot 10^8$ м/с.

В среде с проницаемостями ϵ и μ фазовая скорость волны меньше в $\sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}}$ раз. Длина волны

$$\lambda = 2\pi \frac{v}{\omega} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f}. \quad (10.80)$$

Второй член уравнения (10.78) отличается только знаком при k , следовательно, соответствует волне, распространяющейся со скоростью $(-v)$, т.е. в противоположном направлении. В рассмотренном примере обратная волна должна отсутствовать ($B=0$). Найденная волна является **плоской** и **однородной**. «Плоская» волна означает, что в любой плоскости $z = \text{const}$ в заданный момент времени фаза процесса постоянна. С течением времени плоскость постоянной фазы перемещается в направлении распространения волны со скоростью v и называется **фронтом волны**. «Однородная» волна означает, что амплитуда волны постоянна (не зависит от координат).

Сферические волны возбуждаются точечным источником. Они имеют волновые фронты в виде концентрических сфер.

Цилиндрические волны возбуждаются бесконечной нитью. Они имеют волновые фронты в виде цилиндров.

10.7.4. Уравнения баланса энергии электромагнитного поля

Впервые вопрос об энергии электромагнитного поля был рассмотрен Максвеллом, который показал, что полная энергия поля, заключенного внутри

объема V , складывается из энергии электрического поля $W_{\text{Э}} = \int_V \frac{\overline{E} \overline{D}}{2} dV$ и энер-

гии магнитного поля $W_{\text{М}} = \int_V \frac{\overline{H} \overline{B}}{2} dV$:

$$W = W_{\text{Э}} + W_{\text{М}}.$$

Подынтегральные выражения показывают плотность энергии:

$$W'_{\text{Э}} = \frac{\overline{E} \overline{D}}{2} = \frac{\epsilon \overline{E}^2}{2}; \quad W'_{\text{М}} = \frac{\overline{H} \overline{B}}{2} = \frac{\mu \overline{H}^2}{2}.$$

Перепишем первое и второе уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \overline{H} = \epsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \vec{j}; \quad \text{rot} \overline{E} = -\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}.$$

Умножим первое уравнение на \vec{E} , а второе на \vec{H} и вычтем из первого уравнения второе:

$$\varepsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{j} \vec{E}. \quad (10.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \vec{E} \times \vec{H} - \vec{j} \vec{E}, \quad (10.82)$$

Проинтегрируем правую и левую части:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \right) dV = \int_V \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) dV + \int_V \vec{j} \vec{E} dV. \quad (10.83)$$

По теореме Остроградского – Гаусса

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \right) dV = \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) dS + \int_V \vec{j} \vec{E} dV. \quad (10.84)$$

Энергия электромагнитного поля, заключенного внутри объема V , не остается постоянной по следующим причинам:

- 1) превращение энергии электромагнитного поля в энергию других видов: например, в механическую энергию частиц вещества, связанную с тепловым движением из-за протекания токов проводимости;
- 2) работа сторонних источников;
- 3) обмен энергией между выделенным объемом и окружающими областями пространства - специфический процесс, называемый **излучением энергии**.

Интенсивность процесса излучения характеризуют так называемым вектором Пойнтинга. Физический смысл вектора Пойнтинга заключается в следующем: его модуль и направление в каждой точке характеризуют величину и направление потока энергии излучения.

Вектор Пойнтинга выражается через мгновенные значения полей $\vec{E}(t)$ и $\vec{H}(t)$ как их векторное произведение:

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad [\text{ВТ}/\text{м}^2]. \quad (10.85)$$

Ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} относительно $\vec{\Pi}$ показана на рис. 10.14. Полная убыль энергии электромагнитного поля, заключенного внутри объема V с поверхностью S в единицу времени, обусловленная излучением, определяется как $\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}$; если знак этого интеграла отрицате-

лен, то поток энергии направлен не из объема, а внутрь его.

Перепишем соотношение (10.84):

$$-\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{j} \vec{E} dV + \int_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \quad (10.86)$$

Это уравнение баланса энергии электромагнитного поля носит название **теоре-**

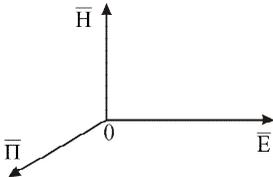


Рис. 10.14. Взаимная ориентация векторов \vec{E} , \vec{H} и $\vec{\Pi}$

мы Умова – Пойнтинга.

Уравнение утверждает, что изменение запаса электромагнитной энергии в произвольном объеме обусловлено, во-первых, превращением ее в тепло (при конечной проводимости среды) и, во-вторых, движением энергии в пространстве через поверхность, ограничивающую объем.

10.7.5. Свойства однородной плоской электромагнитной волны

Определим соотношение электрического и магнитного векторов в такой волне и их ориентацию в пространстве, для этого рассмотрим ряд условий.

1. Так как волна плоская и однородная:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

2. Комплексный вектор Пойнтинга ориентирован вдоль оси z , откуда следует, что продольные составляющие электрического и магнитного полей равны нулю $E_z = H_z = 0$.

3. Выберем направление осей Ox и Oy так, чтобы вектор \vec{E} был направлен по оси Ox . Это можно сделать, если вектор \vec{E} всегда остается параллельным некоторому направлению (такие условия, в частности, обеспечиваются при излучении электромагнитных волн неподвижной антенной).

В таком случае $E_y = 0$.

Таким образом, электрический вектор колеблется в плоскости XOZ . Тогда уравнение Гельмгольца приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + k^2 \dot{E}_x = 0. \quad (10.87)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\dot{E}_x = \dot{A}' e^{-jkz} + \dot{B}' e^{jkz}, \quad (10.88)$$

или, если предположить, что обратная волна отсутствует,

$$\dot{E}_x = \dot{A}' e^{-jkz}, \quad (10.89)$$

где $\dot{A}' = e^{j\omega t} e^{-jkz}$.

Найдем магнитный вектор в такой волне. Для этого воспользуемся уравнением Максвелла в комплексном виде

$$\text{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu \dot{\vec{H}}, \quad (10.90)$$

откуда

$$\dot{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot} \dot{\vec{E}}. \quad (10.91)$$

Представляя операцию rot в декартовых координатах, получаем:

$$\dot{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \cdot \vec{i}_y = \frac{k}{\omega\mu} \dot{E}_x \vec{i}_y. \quad (10.92)$$

Таким образом, вектор магнитного поля в данной плоской волне имеет только составляющую \dot{H}_y и, следовательно, перпендикулярен к вектору электрического поля.

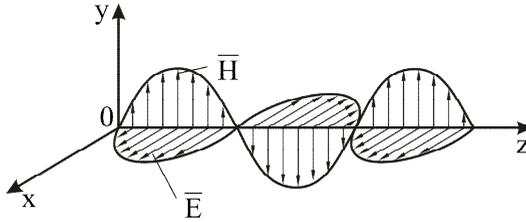


Рис. 10.15. Взаимная ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} в плоской волне

Закон изменения по оси z этих двух составляющих одинаков. Следовательно, электромагнитную волну вдоль оси z в фиксированный момент времени можно изобразить так, как показано на рис. 10.15.

Векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения электромагнитной волны. Такие волны называют поперечными или Т-волнами. В любой плоскости $z=\text{const}$ волна имеет фазу: $\omega t - kz = \text{const}$ – это уравнение определяет плоскость одинаковых фаз волны или **волновой фронт**. **Волновое число** (или **постоянная распространения**) $k = \beta - j\alpha$ – в общем случае комплексное.

β – фазовая постоянная, она показывает, на сколько радиан изменится фаза волны при прохождении 1 метра пути. α – постоянная затухания, она характеризует изменение амплитуды волны за счет различного рода потерь.

Отношение амплитуд $\dot{E}_m / \dot{H}_m = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_C$ – постоянное для данной среды и называется **волновым** или **характеристическим сопротивлением**.

Для вакуума

$$Z_{C0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi, \text{ Ом.} \quad (10.93)$$

Мгновенная плотность потока энергии, переносимой волной:

$$\vec{\Pi} = [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}], \quad (10.94)$$

а средняя плотность определяется выражением

$$\bar{\Pi}_{\text{средн}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}] = \frac{1}{2} \frac{|E_m|^2}{Z_{C0}} \vec{i}_z, \quad (10.95)$$

где \vec{i}_z – единичный вектор.

Рассмотрим общее решение волнового уравнения

$$\dot{E}_x = \dot{A}' e^{-jkz} + \dot{B}' e^{jkz} = \dot{A}' e^{-jkz} \left(1 + \frac{\dot{B}'}{\dot{A}'} e^{2jkz} \right). \quad (10.96)$$

Предположим, что на пути волны стоит проводящая стенка, перпендикулярная к оси z . Тогда на этой стенке в соответствии с граничными условиями $\dot{E}_x = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\dot{B}'}{\dot{A}'} e^{2jkz} = -1. \quad (10.97)$$

Отношение \dot{B}'/\dot{A}' называют **коэффициентом отражения** $\dot{\Gamma}$. В рассмотренном случае $\dot{A}' = -\dot{B}'$; $\dot{\Gamma} = -1$.

Уравнение

$$\dot{E}_x = \dot{A} \cos(\omega t - kz) - \dot{A} \cos(\omega t + kz) = 2\dot{A} \sin \omega t \sin kz \quad (10.98)$$

описывает **стоячую волну**, так как при изменении z фаза волны не изменяется.

Рассмотрим электромагнитную волну, которая, в свою очередь, создается двумя монохроматическими волнами с близкими частотами ω_1 и ω_2 :

$$\begin{aligned} \ddot{E} &= \ddot{E}_1 + \ddot{E}_2 = \ddot{E}_{m1} e^{j(\omega_1 t - k_1 z)} + \ddot{E}_{m2} e^{j(\omega_2 t - k_2 z)} = \\ &= \ddot{E}_m e^{j(\omega_1 t - k_1 z)} \{1 + e^{j(\Delta\omega t - \Delta k z)}\}. \end{aligned} \quad (10.99)$$

Это уравнение описывает волну, которая имеет картину по оси z , представленную на рис. 10.16.

Несущая частота совпадает с частотой одной из рассмотренных волн; энергию переносит огибающая с частотой $\Delta\omega$, то есть движется волновой пакет.

Рассмотрим перемещение фиксированной точки, например амплитуды этого пакета. Условие постоянства выбранной точки можно записать в виде:

$$\Delta\omega t - \Delta k z = \text{const}. \quad (10.100)$$

Дифференцируя это выражение по t , находим скорость перемещения волнового пакета (переноса волной энергии), обычно называемую групповой скоростью $v_{\text{гр}}$:

$$\Delta\omega - \Delta k \frac{dz}{dt} = 0, \quad (10.101)$$

откуда

$$v_{\text{гр}} = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (10.102)$$

Рассматривая непрерывный частотный спектр колебания, в пределе можно записать

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (10.103)$$

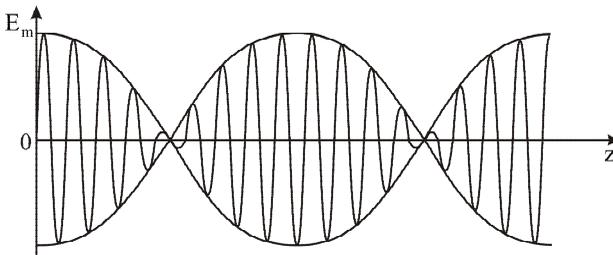


Рис. 10.16. Результат сложения двух волн с близкими частотами

10.7.6. Поляризация электромагнитных волн

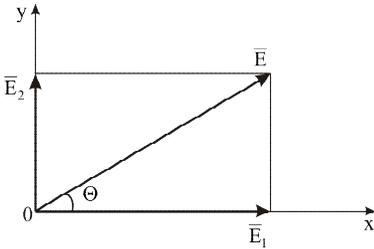


Рис. 10.17. К определению положения результирующего вектора \vec{E} двух ортогонально поляризованных волн \vec{E}_1 и \vec{E}_2

Электромагнитная волна может иметь произвольную ориентацию векторов электрического и магнитного поля. Для описания ориентации волны, распространяющейся в определенном направлении, существует понятие **поляризации** волны.

Плоскость поляризации волны – это плоскость, проходящая через вектор \vec{E} и направление распространения волны. В процессе распространения плоскость поляризации может изменяться, то есть векторы \vec{E} и \vec{H} могут

менять направление относительно первоначального.

Если положение плоскости поляризации в данной системе координат неизменно, то говорят, что волна имеет **линейную поляризацию**. Например, в рассмотренном выше случае плоской волны вектор \vec{E} колеблется в плоскости XOZ . Это случай волны с линейной поляризацией, а XOZ – плоскость поляризации данной волны.

Рассмотрим случай сложения двух волн, поляризованных ортогонально друг другу и имеющих различные фазы. Пусть первая волна линейно поляризована в плоскости XOZ , а вторая линейно поляризована в плоскости YOZ . Тогда мгновенные значения напряженностей электрического поля таких волн запишутся как

$$\vec{E}_1 = \vec{i}_x E_x \cos(\omega t - kz), \quad (10.104)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{i}_y E_y \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (10.105)$$

Пусть $z=0$. Рассмотрим поведение суммарного вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ во времени (см. рис. 10.17).

Угол Θ показывает положение плоскости поляризации.

Пусть $\varphi=90^\circ$, тогда

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin(\omega t - kz)}{\cos(\omega t - kz)} = \operatorname{tg}(\omega t - kz). \quad (10.106)$$

Таким образом, $\Theta=(\omega t - kz)$, то есть вектор \vec{E} с течением времени будет вращаться вокруг оси.

Если рассмотреть различные положения результирующего вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ в процессе распространения волн, то будет видно, что конец вектора описывает в пространстве винтовую линию. Аналогичным будет характер изменения в пространстве результирующего вектора $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$.

Это – плоская электромагнитная волна с **круговой вращающейся поляризацией**. В общем случае при неравных амплитудах $E_x \neq E_y$ поляризация будет **эллиптической**.

10.7.7. Плоские волны в однородных неограниченных средах

1. Вакуум

Фазовая скорость в вакууме определяется по общей формуле $v_\phi = \omega/k$. Поскольку волновое число в вакууме $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, то

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = c, \quad (10.107)$$

то есть скорость произвольной электромагнитной волны в вакууме равна скорости света независимо от частоты волны. **Среды**, в которых фазовая скорость не зависит от частоты, называют средами **без дисперсии**.

Волновое сопротивление в вакууме

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \text{ Ом}. \quad (10.108)$$

2. Диэлектрик без потерь

Рассмотрим случай немагнитного диэлектрика с $\mu=1$:

$$v_{\text{фдиэл}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (10.109)$$

то есть фазовая скорость, а следовательно и длина волны в диэлектрике, уменьшается в $\sqrt{\epsilon}$ раз по сравнению с вакуумом.

3. Диэлектрик с потерями

Для такой среды необходимо воспользоваться комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\dot{\epsilon} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = |\dot{\epsilon}|e^{-j\delta}, \quad (10.110)$$

$$\text{где } |\dot{\epsilon}| = \sqrt{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}; \quad \delta = \arctg\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right).$$

Комплексная постоянная распространения:

$$\dot{k} = \beta - j\alpha; \quad \dot{k} = \omega\sqrt{\dot{\epsilon}\mu} = \omega\sqrt{|\dot{\epsilon}|\mu}e^{-j\delta/2}. \quad (10.111)$$

Преобразуя по формуле Эйлера, получаем фазовую постоянную и постоянную затухания:

$$\beta = \omega\sqrt{|\dot{\epsilon}|\mu} \cos \frac{\delta}{2}; \quad (10.112)$$

$$\alpha = \omega\sqrt{|\dot{\epsilon}|\mu} \sin \frac{\delta}{2}. \quad (10.113)$$

Реальные диэлектрики характеризуются очень малыми углами потерь, поэтому можно считать, что $|\dot{\epsilon}| \approx \epsilon$; $\cos \delta/2 \approx 1$; $\sin \delta/2 \approx \delta/2$.

Тогда

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}; \quad (10.114)$$

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}; \quad (10.115)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\omega\delta}{2} = \frac{\beta\delta}{2}. \quad (10.116)$$

Таким образом, при расчетах фазовых соотношений в первом приближении можно не учитывать потери в материале. С другой стороны, коэффициент затухания амплитуды плоских волн в неидеальном диэлектрике прямо пропорционален углу диэлектрических потерь.

4. Волны в хорошо проводящих средах

Среда считается хорошо проводящей, если в такой среде плотность токов проводимости намного больше плотности токов смещения:

$$(\dot{J}_{\text{пр}} = \sigma\dot{E}) \gg (\dot{J}_{\text{см}} = j\omega\varepsilon\dot{E}) \text{ или } \sigma/\omega \gg \varepsilon,$$

то есть мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости должна быть значительно больше вещественной. Причем чем ниже частота, тем ближе среда к идеальному проводнику.

В этом случае вещественной частью комплексного параметра $\dot{\varepsilon}$ можно пренебречь и считать этот параметр чисто мнимым:

$$\dot{\varepsilon} = -j\frac{\sigma}{\omega}. \quad (10.117)$$

Постоянная распространения \dot{k} тогда запишется как

$$\dot{k} = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\mu} = \sqrt{-j\omega\mu\sigma}. \quad (10.118)$$

Так как $\sqrt{-j} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$, то можно переписать:

$$\dot{k}_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1-j), \quad (10.119)$$

откуда

$$\beta_{\text{пр}} = \alpha_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \quad (10.120)$$

следовательно, длина волны в проводнике

$$\lambda_{\text{пр}} = \frac{2\pi}{\beta_{\text{пр}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \quad (10.121)$$

Длина волны в проводнике сильно уменьшается по сравнению с длиной волны в свободном пространстве:

$$\frac{\lambda_{\text{пр}}}{\lambda_0} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{пр}}}{\sigma/\omega}} \ll 1. \quad (10.122)$$

Следовательно, в металле снижается и фазовая скорость волн.

Амплитуда электромагнитной волны в среде с потерями уменьшается по закону $e^{-\alpha z}$. Расстояние d , на котором амплитуда волны падает в e раз по сравнению с её начальным уровнем, называется **глубиной проникновения** или **глубиной поверхностного слоя**. Это расстояние, очевидно, удовлетворяет соотношению $\alpha d=1$, откуда

$$d = \frac{1}{\alpha_{\text{пр}}} \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}. \quad (10.123)$$

На таком расстоянии от поверхности волна затухает в e раз, то есть поле существует только в приповерхностном слое. Это явление называется **скин-эффектом**.

10.7.8. Отражение и преломление электромагнитных волн

Пусть плоская электромагнитная волна падает на плоскую границу раздела двух сред под произвольным углом φ ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$). При анализе введем три волны: падающую, отраженную и преломленную (см. рис. 10.18).

Векторы Пойнтинга $\vec{\Pi}_{\text{пад}}$, $\vec{\Pi}_{\text{отр}}$ и $\vec{\Pi}_{\text{пр}}$ всех трёх волн лежат в одной плоскости YOZ , называемой плоскостью падения; $\vec{r}_{\text{пад}}$, $\vec{r}_{\text{отр}}$ и $\vec{r}_{\text{пр}}$ – текущие координаты фронтов соответствующих волн; $\varepsilon_1, \mu_1, k_1$ – параметры первой среды; $\varepsilon_2, \mu_2, k_2$ – параметры второй среды.

Модули $r_{\text{пад}}$, $r_{\text{отр}}$ и $r_{\text{пр}}$ можно выразить через соответствующие углы $\varphi_{\text{пад}}$, $\varphi_{\text{отр}}$, $\varphi_{\text{пр}}$ и координаты y и z :

$$r_{\text{пад}} = y \sin \varphi_{\text{пад}} + z \cos \varphi_{\text{пад}}; \quad (10.124)$$

$$r_{\text{отр}} = y \sin \varphi_{\text{отр}} - z \cos \varphi_{\text{отр}}; \quad (10.125)$$

$$r_{\text{пр}} = y \sin \varphi_{\text{пр}} + z \cos \varphi_{\text{пр}}. \quad (10.126)$$

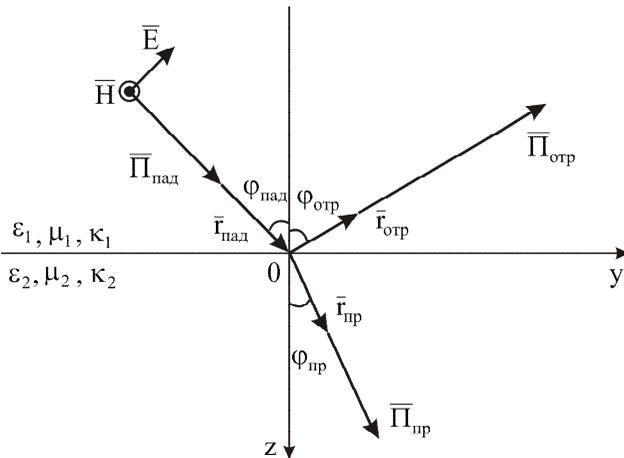


Рис. 10.18. Падение плоской волны на границу раздела двух сред

Тогда комплексные амплитуды падающей, отраженной и преломленной волн запишутся соответственно:

$$\vec{E}_{\text{пад}} = \dot{E}_{\text{пад}} e^{-jk_1 r_{\text{пад}}} = \dot{E} e^{-jk_1 (y \sin \varphi_{\text{пад}} + z \cos \varphi_{\text{пад}})} ; \quad (10.127)$$

$$\vec{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{отр}} e^{-jk_1 r_{\text{отр}}} = \dot{E} e^{-jk_1 (y \sin \varphi_{\text{отр}} - z \cos \varphi_{\text{отр}})} ; \quad (10.128)$$

$$\vec{E}_{\text{пр}} = \dot{E}_{\text{пр}} e^{-jk_2 r_{\text{пр}}} = \dot{E} e^{-jk_2 (y \sin \varphi_{\text{пр}} + z \cos \varphi_{\text{пр}})} . \quad (10.129)$$

На границе раздела, то есть в плоскости $z=0$, должны выполняться граничные условия $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}$ и $\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}$.

Тогда

$$\dot{E}_{\tau\text{пад}} e^{-jk_1 y \sin \varphi_{\text{пад}}} + \dot{E}_{\tau\text{отр}} e^{-jk_1 y \sin \varphi_{\text{отр}}} = \dot{E}_{\tau\text{пр}} e^{-jk_2 y \sin \varphi_{\text{пр}}} . \quad (10.130)$$

Чтобы условие на границе для \dot{E}_{τ} соблюдалось для всех y , нужно, чтобы показатели экспонент были одинаковы:

$$k_1 \sin \varphi_{\text{пад}} = k_1 \sin \varphi_{\text{отр}} = k_2 \sin \varphi_{\text{пр}} . \quad (10.131)$$

Отсюда два условия:

$$\varphi_{\text{пад}} = \varphi_{\text{отр}} \quad (10.132)$$

и

$$\frac{\sin \varphi_{\text{пад}}}{\sin \varphi_{\text{пр}}} = \frac{k_2}{k_1} . \quad (10.133)$$

Введем показатель $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ – показатель преломления данной среды, характеризующий её оптическую плотность.

Тогда справедливо равенство:

$$\frac{\sin \varphi_{\text{пад}}}{\sin \varphi_{\text{пр}}} = \frac{n_2}{n_1} . \quad (10.134)$$

Рассмотренные закономерности справедливы для любой ориентации векторов поля к плоскости падения.

Рассмотрим случай падения волны на границу раздела двух сред, когда одна из сред представляет собой проводник. В случае идеального проводника $\sigma = \infty$, поле $E=0$. Комплексный параметр $\dot{\epsilon}_2$ во второй среде стремится к бесконечности:

$$\dot{\epsilon}_2 = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \infty . \quad (10.135)$$

При этом

$$\dot{\epsilon}_2 = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \infty ; \quad \varphi_{\text{пр}} = 0 , \quad (10.136)$$

то есть преломленная волна стремится вглубь проводника по нормали к его поверхности. Но, с другой стороны, поле в идеальном проводнике равно нулю, то есть волна полностью отражается:

$$\varphi_{\text{пад}} = \varphi_{\text{отр}} . \quad (10.137)$$

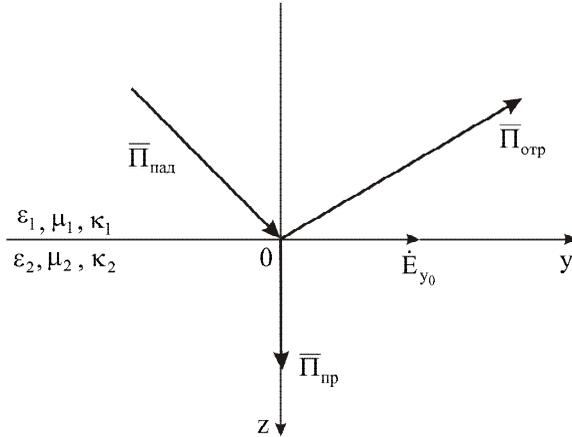


Рис. 10.19. Падение плоской волны на границу с проводником

Так как граничные условия для \dot{E}_τ на поверхности идеального проводника $\dot{E}_\tau = \dot{E}_{\tau\text{пад}} + \dot{E}_{\tau\text{отр}} = 0$, то $\dot{E}_{\tau\text{пад}} = -\dot{E}_{\tau\text{отр}}$.

Граничные условия для нормальных составляющих поля:

$$\dot{E}_{n\text{пад}} = \frac{\rho_{\text{пов}}}{\varepsilon_1}; \quad \dot{E}_{n\text{отр}} = \frac{\rho_{\text{пов}}}{\varepsilon_1}, \quad \text{то есть } \dot{E}_{n\text{пад}} = \dot{E}_{n\text{отр}}.$$

Следовательно, при падении на границу раздела с идеальным проводником волна затухает в бесконечно тонком приповерхностном слое.

Теперь рассмотрим падение электромагнитной волны на реальный проводник. Как уже было показано, в проводнике будут возникать плоские волны, уходящие вглубь проводника по нормали к поверхности раздела (в направлении оси z). В случае конечной проводимости на границе раздела появляется не равная нулю составляющая E_τ . Она направлена вдоль оси y , назовем её E_{y_0} (рис. 10.19). Тогда выражения для комплексных амплитуд векторов поля в проводнике запишутся следующим образом:

$$\dot{E}_{y_2} = \dot{E}_{y_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}; \quad (10.138)$$

$$\dot{H}_{x_2} = \dot{H}_{x_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}. \quad (10.139)$$

По мере проникновения волны вглубь проводника её амплитуда убывает по экспоненциальному закону. Скорость уменьшения амплитуды определяется величиной коэффициента затухания α . Чем лучше проводник, тем больше α , таким образом, в хорошо проводящих средах поле оказывается

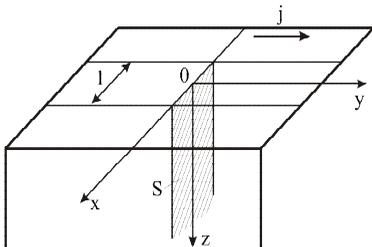


Рис. 10.20. К определению тока в проводнике

сосредоточенным лишь в очень тонком приповерхностном слое («скин-эффект»).

Определим плотность тока в проводнике:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad j = \sigma \dot{E}_{y_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = j_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad (10.140)$$

где $j_0 = \sigma \dot{E}_{y_0}$ – плотность тока на поверхности проводника. По мере удаления от поверхности проводника плотность тока убывает по тому же закону, что и амплитуда напряженности поля:

$$|j| = |j_0| e^{-\alpha z}. \quad (10.141)$$

Определим величину тока, текущего через поперечное сечение S проводника на единицу ширины проводника $l=1$ м (рис. 10.20):

$$I_S = \int_{z=0}^{\infty} j dz = \int_0^{\infty} \sigma \dot{E}_{y_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} dz = \sigma \dot{E}_{y_0} \left(\frac{1}{\alpha + j\beta} \right). \quad (10.142)$$

Учитывая, что для проводников $\alpha=\beta$

$$\dot{I}_S = \frac{\sigma \dot{E}_{y_0}}{\alpha(1+j)}. \quad (10.143)$$

Величина $\dot{Z}_S = \frac{\dot{E}_{y_0}}{\dot{I}_S} = \frac{\alpha(1+j)}{\sigma}$ называется удельным поверхностным сопротивлением проводника.

С учетом (10.143) запишем:

$$\dot{Z}_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j). \quad (10.144)$$

Это сопротивление имеет комплексный активно-индуктивный характер и определяет потери мощности на единицу площади проводника.

Библиографический список

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2003. – 762 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Ч.III Электромагнитное поле. – М.: Гардарики, 2001. – 316 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
4. Зевеке Г.В. Основы теории цепей: учебник для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 586 с.
5. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. – М.: Сов. радио, 1971. – 662 с.
6. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. – Л.: Энергоиздат, 1981.– Т.1, 533 с., – Т.2, 415 с.
7. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 2003. – 575 с.
8. Теоретические основы электротехники: методические указания к лабораторным работам № 3774. – Рязань: РГРТА, 2006. – 40 с.
9. Теоретические основы электротехники: методические указания к лабораторным работам № 3924. – Рязань: РГРТУ, 2007. – 32 с.
10. Теоретические основы электротехники: методические указания к расчетному заданию № 3987. – Рязань: РГРТУ, 2007. – 12 с.
11. Теоретические основы электротехники: методические указания к курсовой работе № 3917. – Рязань: РГРТУ, 2007. – 12 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Законы и элементы электрических цепей	3
1.1. Элементы электрических цепей	3
1.1.1. Приемники электрической энергии	4
1.1.2. Источники электрической энергии, соединительные линии, измерение токов и напряжений	6
1.2. Законы Ома и Кирхгофа	9
1.3. Способы соединения элементов электрических цепей	10
2. Электрические цепи постоянного тока	13
2.1. Понятие двухполюсника	13
2.2. Расчет простых цепей	14
2.3. Расчет сложных цепей	14
2.3.1. Расчет методом наложения	15
2.3.2. Баланс мощности	15
2.3.3. Расчет по законам Кирхгофа	15
2.3.4. Расчет методом контурных токов	16
2.3.5. Расчет методом эквивалентного генератора	17
2.3.6. Расчет методом двух узлов	18
2.3.7. Режимы работы электрической цепи	19
3. Электрические цепи переменного тока	20
3.1. Общие сведения	20
3.2. Средняя мощность и действующее значение переменного тока	20
3.3. Комплексное представление синусоидального тока	21
3.4. Синусоидальный ток в пассивных элементах	23
3.5. Символический метод расчета цепей переменного тока	25
3.6. Мощность в цепи переменного тока	30
3.7. Резонансы в электрических цепях \dot{e}	31
4. Электрические цепи с магнитно-связанными элементами	36
4.1. Магнитно-связанные катушки в цепи переменного тока	36
4.2. Трансформатор в цепи переменного тока	38
5. Трехфазные цепи переменного тока	43
5.1. Основные понятия и определения	43
5.2. Соединение фаз генератора и приемника «звездой»	45
5.2.1. Расчет четырехпроводной цепи при соединении фаз генератора и приемника «звездой»	47
5.2.1.1. Симметричная нагрузка приемника	47
5.2.1.2. Несимметричная нагрузка приемника	48
5.2.2. Расчет трехпроводной цепи при соединении фаз генератора и приемника «звездой»	49
5.3. Соединение фаз генератора и приемника «треугольником»	50
5.3.1. Симметричная нагрузка приемника	52
5.3.2. Несимметричная нагрузка приемника	53
5.4. Мощность трехфазной цепи	54
5.4.1. Соединение потребителей «звездой»	54

5.4.2. Соединение потребителей «треугольником»	54
6. Переходные процессы в линейных электрических цепях	56
6.1. Общие сведения о переходных процессах	56
6.2. Законы коммутации и начальные условия	57
6.3. Составление интегродифференциальных уравнений	58
6.4. Решение дифференциальных уравнений	60
6.5. Переходные процессы в электрических цепях I порядка	61
6.6. Переходные процессы в электрических цепях II порядка	67
7. Электрические цепи периодического несинусоидального тока	74
7.1. Общие сведения	74
7.2. Разложение периодических функций в ряд Фурье	75
7.3. Спектры некоторых периодических колебаний	76
7.4. Расчет электрических цепей несинусоидального тока с использованием разложения в ряд Фурье	81
7.5. Действующее значение и мощность периодического несинусоидального тока	82
8. Линейные четырехполюсники	84
8.1. Системы уравнений четырехполюсников	84
8.2. Характеристики линейных четырехполюсников	86
8.3. Примеры линейных четырехполюсников	88
9. Цепи с распределенными параметрами	93
9.1. Понятие цепи с распределенными параметрами	93
9.2. Токи и напряжения в однородной линии	93
9.3. Волны напряжения и тока в линии. Бегущие и стоячие волны	95
9.4. Режимы работы линии	98
9.5. Трансформирующие свойства отрезков линии	99
10. Электромагнитное поле	102
10.1. Основные величины, характеризующие электромагнитное поле	102
10.2. Законы электромагнетизма, лежащие в основе теории электромагнитного поля	104
10.3. Уравнения Максвелла	105
10.4. Граничные условия	106
10.5. Электростатическое поле	110
10.5.1. Понятие электростатического потенциала	110
10.5.2. Определение потенциала по заданному распределению зарядов	111
10.5.3. Уравнения Пуассона и Лапласа. Поле системы заряженных тел	112
10.5.4. Расчет поля, создаваемого зарядами вблизи проводящих поверхностей	115
10.6. Магнитное поле постоянного тока	117
10.6.1. Магнитостатика	118
10.6.2. Магнитное поле линейного тока	120
10.7. Переменные электромагнитные поля	121
10.7.1. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд поля	121
10.7.2. Комплексные параметры среды	122
10.7.3. Волновой характер электромагнитного поля	123

10.7.4. Уравнения баланса энергии электромагнитного поля	125
10.7.5. Свойства однородной плоской электромагнитной волны	127
10.7.6. Поляризация электромагнитных волн	130
10.7.7. Плоские волны в однородных неограниченных средах	131
10.7.8. Отражение и преломление электромагнитных волн	133
Библиографический список	137