УДК 53.087.5

И.В. Бодрова, О.А. Бодров, Д.А. Наумов

РАСЧЕТ МАТРИЦ РАССЕЯНИЯ СВЕТОВОГО ПУЧКА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЯМИ ТЕХНОГЕННЫХ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Составлена матрица рассеяния Мюллера, а также решена спектральная задача для рассеивающих световой поток металлических и диэлектрических поверхностей. Предложен расчет параметров Стокса падающего излучения с помощью полученной матрицы рассеяния металлической поверхностью. Выполненные результаты расчета могут быть использованы при фотополяриметрических исследованиях удаленных техногенных космических объектов.

Ключевые слова: *Вектор Стокса, матрица рассеяния Мюллера, техногенный космический мусор.*

Введение. В общей проблеме загрязнения околоземного пространства отдельно стоит проблема угрозы техногенного космического мусора. Эта проблема, в свою очередь, подразделяется на две части: опасность для биосферы Земли от падений достаточно крупных (от нескольких метров) фрагментов космических аппаратов и опасность для космической техники в околоземном пространстве. Основным средством анализа космического мусора является оптический мониторинг. При этом фотополяриметрические исследования могут дать полезную информацию о структуре, форме изучаемого космического объекта [1].

Цель работы – нахождение элементов матрицы рассеяния Мюллера при отражении светового пучка от поверхностей техногенного космического мусора, а также решение спектральной задачи.

Постановка задачи. Основной задачей фотополяриметрических исследований техногенных космических объектов является их идентификация. Оптические свойства поверхности исследуемого объекта имеют важное значение при решении этой задачи. В фотополяриметрии поверхность техногенного космического объекта модельно описывается матрицей рассеяния Мюллера, поэтому расчет таких матриц для различных типов поверхностей, а также дальнейшее составление каталогов матриц Мюллера является актуальной задачей. В данной работе рассматривается задача конструктивного составления матрицы рассеяния светового пучка металлическими и диэлектрическими поверхностями, а также применение построенной матрицы для расчета вектора Стокса падающего излучения.

Решение задачи. Построение матрицы рассеяния Мюллера.

Световой пучок, падающий на космический объект, представляется в виде тензора светового поля $\Phi = \sum_s E^s E^{*s}$, где E^s – гармоника с положительной частотой; E^{*s} – гармоника с отрицательной частотой [2].

Некогерентная простая волна с положительной частотой представляет собой вектор $\overline{\mathbf{E}} = E_x + iE_y$, где E_x, E_y – проекции вектора $\overline{\mathbf{E}}$ на оси, перпендикулярные к направлению распространения световой волны. Далее будут использоваться обозначения: $E_x = E_1$, $E_y = E_2$.

Четырехкомпонентный вектор Стокса $\overline{\mathbf{S}} = (J, Q, U, V)$ представляет собой вещественный вектор, компоненты которого являются комбинациями проекций $E_x = E_1$ и $E_y = E_2$:

$$J = |E_1|^2 + |E_2|^2;$$
$$Q = |E_1|^2 - |E_2|^2;$$
$$U = 2\,\mathrm{Re}\big(E_1 \overline{E}_2\big);$$
$$V = 2\,\mathrm{Im}\big(E_1 \overline{E}_2\big).$$

Первая компонента вектора Стокса J характеризует интенсивность светового потока, вторая компонента Q – степень поляризации [1, 2]. Компоненты вектора Стокса обладают следующими свойствами:

$$J \ge 0,$$
$$J \ge \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}.$$

Рассеяние светового потока рассеивающей техногенной поверхностью космического объекта модельно описывается операторным уравнением:

$$\overline{\mathbf{S}} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{S}}_{\mathbf{0}}, \qquad (1)$$

где $\overline{\mathbf{S}}_{\mathbf{0}} = (J_0, Q_0, U_0, V_0)$ – вектор Стокса падающего излучения; $\overline{\mathbf{S}} = (J, Q, U, V)$ – вектор Стокса рассеянного излучения; M – матрица рассеяния, характеризующая отражающие свойства рассеивающей поверхности и угол падения светового пучка [2, 3, 4].

Согласно формулам Френеля для металлов [5, 6]:

$$\sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\upsilon}; \qquad \cos \varphi = \frac{\sqrt{\upsilon^2 - \sin^2 \varphi}}{\upsilon},$$

φ – угол падения светового пучка,

φ – угол преломления светового пучка,

$\upsilon = n - i\chi$ – комплексный коэффициент преломления света металлом, где

n – показатель преломления, χ – показатель поглощения.

Известно, что амплитудные коэффициенты Френеля $r_1 = \dfrac{R_1}{E_1}$, $r_2 = \dfrac{R_2}{E_2}$ равны отношению амплитуд отраженной и падающей световой волны перпендикулярно и параллельно плоскости рассеяния соответственно [4].

$$r_1 = \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \varphi};$$

$$r_2 = \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \varphi},$$

где n_1 – коэффициент преломления первой среды, n_2 – коэффициент преломления второй среды. Для данной задачи $n_1 = 1$ (вакуум), $n_2 = \upsilon$ (металл). Следовательно,

$$r_1 = \frac{\cos \varphi - \upsilon \cos \varphi}{\cos \varphi + \upsilon \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\upsilon^2 - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\upsilon^2 - \sin^2 \varphi}}; \qquad (2)$$

$$r_2 = \frac{\upsilon \cos \varphi - \dfrac{\sqrt{\upsilon^2 - \sin^2 \varphi}}{\upsilon}}{\upsilon \cos \varphi + \dfrac{\sqrt{\upsilon^2 - \sin^2 \varphi}}{\upsilon}} = \frac{\upsilon^2 \cos \varphi - \sqrt{\upsilon^2 - \sin^2 \varphi}}{\upsilon^2 \cos \varphi + \sqrt{\upsilon^2 - \sin^2 \varphi}}. \qquad (3)$$

Амплитудные коэффициенты r_1, r_2 являются комплексными, и при вычислении $\sqrt{\upsilon^2 - \sin^2 \varphi}$ выбирается значение корня с отрицательной мнимой частью [5].

Для составления матрицы линейного оператора рассеяния **M** рассмотрим преобразование компонентов вектора Стокса падающего излучения согласно формулам Френеля:

$$J_0 = |E_1|^2 + |E_2|^2;$$
$$J = |R_1|^2 + |R_2|^2,$$

где E_1, E_2 – перпендикулярная и параллельная амплитуды падающего излучения, R_1, R_2 – перпендикулярная и параллельная амплитуды отраженного излучения. Так как $R_1 = r_1 E_1$ и $R_2 = r_2 E_2$, следовательно

$$J = |r_1 E_1|^2 + |r_2 E_2|^2;$$

$$r_1 E_1 = (\operatorname{Re} r_1 + i \operatorname{Im} r_1)(\operatorname{Re} E_1 + i \operatorname{Im} E_1) =$$

$$= (\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} E_1 - \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} E_1) + i(\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} E_1 + \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Re} E_1);$$

$$|r_1 E_1|^2 = (\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} E_1 - \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} E_1)^2 +$$

$$+ (\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} E_1 + \operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} r_1)^2.$$

Соответственно

$$|r_2 E_2|^2 = (\operatorname{Re} r_2 \operatorname{Re} E_2 - \operatorname{Im} r_2 \operatorname{Im} E_2)^2 +$$
$$+ (\operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} E_2 + \operatorname{Re} E_2 \operatorname{Im} r_2)^2.$$

Тогда

$$J = |r_1 E_1|^2 + |r_2 E_2|^2 = (\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} E_1)^2 =$$
$$= (\operatorname{Re} r_1)^2((\operatorname{Re} E_1)^2 + (\operatorname{Im} E_1)^2) + (\operatorname{Im} r_1)^2((\operatorname{Re} E_1)^2 +$$
$$+ (\operatorname{Im} E_1)^2) + (\operatorname{Re} r_2)^2((\operatorname{Re} E_2)^2 + (\operatorname{Im} E_2)^2) +$$
$$+ (\operatorname{Im} r_2)^2((\operatorname{Re} E_2)^2 + (\operatorname{Im} E_2)^2) = ((\operatorname{Re} E_1)^2 +$$
$$+ (\operatorname{Im} E_1)^2)((\operatorname{Re} r_1)^2 + (\operatorname{Im} r_1)^2) +$$
$$+ ((\operatorname{Re} E_2)^2 + (\operatorname{Im} E_2)^2)((\operatorname{Re} r_2)^2 + (\operatorname{Im} r_2)^2) =$$
$$= |E_1|^2 |r_1|^2 + |E_2|^2 |r_2|^2.$$

Выразим $|E_1|^2, |E_2|^2$ через компоненты вектора Стокса падающего потока J_0, Q_0. Так как $J_0 = |E_1|^2 + |E_2|^2$, $Q_0 = |E_1|^2 - |E_2|^2$, то $|E_1|^2 = \dfrac{J_0 + Q_0}{2}$, $|E_2|^2 = \dfrac{J_0 - Q_0}{2}$. Следовательно,

$$J = \frac{J_0 + Q_0}{2} \cdot |r_1|^2 + \frac{J_0 - Q_0}{2} \cdot |r_2|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2} J_0 \left(|r_1|^2 + |r_2|^2 \right) + \frac{1}{2} \left(|r_1|^2 - |r_2|^2 \right).$$

Вторая компонента вектора Стокса рассеянного излучения выражается через компоненты вектора Стокса падающего излучения следующим образом:

$$\begin{aligned} Q = |r_1 E_1|^2 - |r_2 E_2|^2 = ((\operatorname{Re} E_1)^2 + (\operatorname{Im} E_1)^2) \times \\ \times ((\operatorname{Re} r_1)^2 + (\operatorname{Im} r_1)^2) - ((\operatorname{Re} E_2)^2 + \\ + (\operatorname{Im} E_2)^2) \cdot ((\operatorname{Re} r_2)^2 + (\operatorname{Im} r_2)^2) = \\ = |E_1|^2 |r_1|^2 - |E_2|^2 |r_2|^2 = \frac{J_0 + Q_0}{2} \cdot |r_1|^2 - \\ - \frac{J_0 - Q_0}{2} \cdot |r_2|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q = \frac{1}{2} J_0 (|r_1|^2 - |r_2|^2) + \frac{1}{2} Q_0 (|r_1|^2 + |r_2|^2. \end{aligned}$$

Выразим третью компоненту вектора Стокса U через компоненты вектора Стокса падающего излучения:

$$\begin{aligned} U = 2 \operatorname{Re}(R_1 \overline{R}_2) = 2 \operatorname{Re}((r_1 E_1)(r_2 E_2)^*) = \\ = 2 \operatorname{Re}((\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Re} r_1 - \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Im} r_1) + i(\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} r_1 + \\ + \operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} E_1))((\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Re} r_2 - \operatorname{Im} E_2 \operatorname{Im} r_2) - \\ - i(\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Im} r_2 + \operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} E_2)) = \\ = 2((\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Re} r_1 - \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Im} r_1)(\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Re} r_2 - \\ - \operatorname{Im} E_2 \operatorname{Im} r_2) + (\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} r_1 + \\ + \operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} E_1)(\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Im} r_2 + \operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} E_2)) = \\ = 2((\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Re} E_2 (\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} r_2 + \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} r_2) + \\ + \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Im} E_2 (\operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} r_2 + \operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} r_2) + \\ + \operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} E_2 (\operatorname{Im} r_1 \operatorname{Re} r_2 - \operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} r_2) + \\ + \operatorname{Re} E_2 \operatorname{Im} E_1 (\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} r_2 - \operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} r_1) = \\ = 2((\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} r_2 + \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} r_2)(\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Re} E_2 + \\ + \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Im} E_2) + (\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} r_2 - \\ - \operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} r_1)(\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Im} E_1 - \operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} E_2)) = \\ = 2(\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} r_2 + \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} r_2)(\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Re} E_2 + \\ + \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Im} E_2) - 2(\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} r_1 - \\ - \operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} r_2)(\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Im} E_1 - \operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} E_2) = \\ = \operatorname{Re}(r_1 \bar{r}_2) 2 \operatorname{Re}(E_1 \overline{E}_2) - \operatorname{Im}(r_1 \bar{r}_2) 2 \operatorname{Im}(E_1 \overline{E}_2). \end{aligned}$$

Так как $U_0 = 2\operatorname{Re}(E_1 \overline{E}_2), V_0 = 2\operatorname{Im}(E_1 \overline{E}_2)$, то $U = \operatorname{Re}(r_1 \bar{r}_2) U_0 - \operatorname{Im}(r_1 \bar{r}_2) V_0$.

Рассмотрим четвертую компоненту V вектора Стокса отраженного излучения. Соответствующая компонента вектора Стокса падающего излучения имеет вид $V_0 = 2\operatorname{Im}(E_1 \overline{E}_2)$. Следовательно:

$$\begin{aligned} V = 2 \operatorname{Im}(R_1 \overline{R}_2) = 2 \operatorname{Im}((r_1 E_1)(r_2 E_2)^*) = \\ = 2 \operatorname{Im}((\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Re} r_1 - \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Im} r_1) + \\ + i(\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} r_1 + \operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} E_1))((\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Re}_2 - \\ - \operatorname{Im} E_2 \operatorname{Im} r_2) - i(\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Im} r_2 + \operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} E_2)) = \\ = 2((\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} r_1 + \operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} E_1)(\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Re} r_2 - \\ - \operatorname{Im} E_2 \operatorname{Im} r_2) - (\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Re} r_1 - \\ - \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Im} r_1)(\operatorname{Re} E_2 \operatorname{Im} r_2 + \operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} E_2)) = \\ = 2((\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Re} E_2 (\operatorname{Im} r_1 \operatorname{Re} r_2 - \operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} r_2) + \\ + \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Im} E_2 (\operatorname{Re} r_2 \operatorname{Im} r_1 - \operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} r_2) - \\ - \operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} E_2 (\operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} r_2 + \operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} r_2) + \\ + \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Re} E_2 (\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} r_2 + \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} r_2)) = \\ = 2(\operatorname{Im} r_1 \operatorname{Re} r_2 - \operatorname{Re} r_1 \operatorname{Im} r_2)(\operatorname{Re} E_1 \operatorname{Re} E_2 + \\ + \operatorname{Im} E_1 \operatorname{Im} E_2) + 2(\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} r_2 + \\ + \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} r_2)(\operatorname{Im} E_1 \operatorname{Re} E_2 - \operatorname{Re} E_1 \operatorname{Im} E_2) = \\ = \operatorname{Im}(r_1 \bar{r}_2) 2 \operatorname{Re}(E_1 \overline{E}_2) + \operatorname{Re}(r_1 \bar{r}_2) 2 \operatorname{Im}(E_1 \overline{E}_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow V = \operatorname{Im}(r_1 \bar{r}_2) U_0 + \operatorname{Re}(r_1 \bar{r}_2) V_0. \end{aligned}$$

Таким образом, получена зависимость между компонентами вектора Стокса падающего излучения, компонентами вектора Стокса отраженного излучения и амплитудными коэффициентами Френеля:

$$J = J_0 \left[\frac{|r_1|^2 + |r_2|^2}{2} \right] + Q_0 \left[\frac{|r_1|^2 - |r_2|^2}{2} \right];$$

$$Q = J_0 \left[\frac{|r_1|^2 - |r_2|^2}{2} \right] + Q_0 \left[\frac{|r_1|^2 + |r_2|^2}{2} \right];$$

$$U = U_0 \operatorname{Re}(r_1 \bar{r}_2) - V_0 \operatorname{Im}(r_1 \bar{r}_2);$$

$$V = U_0 \operatorname{Im}(r_1 \bar{r}_2) + V_0 \operatorname{Re}(r_1 \bar{r}_2).$$

Составим матрицу рассеяния Мюллера для отражающих металлических поверхностей:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где

$$M_{11} = M_{22} = \frac{|r_1|^2 + |r_2|^2}{2};$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{|r_1|^2 - |r_2|^2}{2};$$

$$M_{33} = M_{44} = \operatorname{Re}(r_1 \bar{r}_2);$$

$$M_{34} = -M_{43} = -\operatorname{Im}(r_1 \bar{r}_2).$$

Амплитудные коэффициенты r_1, r_2 определяются согласно (2, 3).

Таким образом, можно рассматривать линейное преобразование вектора $\overline{\mathbf{S}}_0$ в вектор $\overline{\mathbf{S}}$, а матрицу $\mathbf{M}$ – как матрицу данного линейного оператора [7].

Рассмотрим решение спектральной задачи для матрицы (4) линейного оператора $\mathbf{M}$: $\mathbf{M}\overline{\mathbf{v}} = \lambda\overline{\mathbf{v}}$ [7]. Собственные числа матрицы данного линейного оператора находятся из двух уравнений:

$$\left(\frac{1}{2}\left(|r_1|^2+|r_2|^2\right)-\lambda\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(|r_1|^2-|r_2|^2\right)\right)^2=0;$$

$$\left(\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)-\lambda\right)^2+\left(\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2\right)^2=0.$$

Для первого уравнения:

$$\left(\frac{1}{2}\left(|r_1|^2+|r_2|^2\right)-\lambda\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(|r_1|^2-|r_2|^2\right)\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{2}|r_1|^2+\frac{1}{2}|r_2|^2-\lambda-\frac{1}{2}|r_1|^2+\frac{1}{2}|r_2|^2\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}|r_1|^2+\frac{1}{2}|r_2|^2-\lambda+\frac{1}{2}|r_1|^2-\frac{1}{2}|r_2|^2\right)=$$

$$=\left(|r_2|^2-\lambda\right)\left(|r_2|^2-\lambda\right)=0.$$

Собственные числа, полученные из решения первого уравнения, $\lambda_1=|r_1|^2$, $\lambda_2=|r_2|^2$ вещественные, различные, им соответствует пара ортогональных собственных векторов $\bar{v}_1=(1,1,0,0)$ и $\bar{v}_2=(1,-1,0,0)$.

Для второго уравнения:

$$\left(\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)-\lambda\right)^2+\left(\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2)\right)^2=\left(\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)-\lambda\right)^2-$$

$$-i^2(\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2))^2=\left(\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)-\lambda+i\,\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2)\right)\times$$

$$\times\left(\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)-\lambda-i\,\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2)\right)=0.$$

Собственные числа λ_3,λ_4, являющиеся решениями второго уравнения являются комплексно-сопряженными:

$$\lambda_3=\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)+i\,\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2);$$

$$\lambda_4=\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)-i\,\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2)$$

или $\lambda_3=(r_1\bar{r}_2),\lambda_4=(\bar{r}_1 r_2)$.

Собственные векторы, соответствующие найденным собственным числам матрицы линейного оператора $\mathbf{M}$, найдены из решения уравнения:

$$\left(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{E}\right)\overline{\mathbf{v}}=0.$$

Собственным числам $\lambda_1=|r_1|^2$, $\lambda_2=|r_2|^2$ соответствует пара ортогональных собственных векторов $\overline{\mathbf{v}}_1=(1,1,00)$ и $\overline{\mathbf{v}}_2=(1,-1,0,0)$.

Собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_3,λ_4, имеют вид:

$$\overline{\mathbf{v}}_3=(0,0,1,i),\overline{\mathbf{v}}_4=(0,0,1,-i).$$

Таким образом, матрицу линейного оператора $\mathbf{M}$ можно привести к диагональному виду:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}|r_1|^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & |r_2|^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (r_1\bar{r}_2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\bar{r}_1 r_2)\end{pmatrix}.$$

Соответствующая собственная матрица линейного оператора рассеяния имеет вид:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & i & -i\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим далее метод составления матрицы рассеяния светового пучка для диэлектрической поверхности.

Для диэлектриков показатель преломления n является вещественным, причем $n=\dfrac{\sin\varphi}{\sin\phi}$, ($\varphi$ – угол падения, ϕ – угол преломления).

Следовательно, амплитудные коэффициенты r_1 и r_2 также являются вещественными [5, 6]:

$$r_1=\frac{\cos\varphi-\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi+\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}; \qquad (5)$$

$$r_2=\frac{n^2\cos\varphi-\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{n^2\cos\varphi+\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}. \qquad (6)$$

Таким образом, $\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)=r_1 r_2$, $\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2)=0$ и матрица рассеяния светового пучка диэлектрической поверхностью имеет вид:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\dfrac{|r_1|^2+|r_2|^2}{2} & \dfrac{|r_1|^2-|r_2|^2}{2} & 0 & 0\\ \dfrac{|r_1|^2-|r_2|^2}{2} & \dfrac{|r_1|^2+|r_2|^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & (r_1 r_2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & (r_1 r_2)\end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Амплитудные коэффициенты r_1,r_2 для диэлектриков определяются согласно (5, 6). Матрица рассеяния диэлектрической поверхностью $\mathbf{M}$ является симметричной и вещественной, следовательно, она имеет вещественные собственные числа и ортогональные собственные векторы [7].

Характеристическое уравнение для исследуемой матрицы M (7) имеет вид:

$$\left(\frac{1}{2}\left(|r_1|^2+|r_2|^2\right)-\lambda\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(|r_1|^2-|r_2|^2\right)\right)^2=0$$

$$\left((r_1r_2)-\lambda\right)^2=0.$$

Таким образом, спектр матрицы линейного оператора рассеяния диэлектрическими поверхностями состоит из четырех вещественных собственных чисел (два из них – кратных):

$$\lambda_n=\{|r_1|^2,|r_2|^2,(r_1r_2),(r_1r_2)\}.$$

Исследуемая матрица диагонализируется к виду:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}|r_1|^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & |r_2|^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & r_1r_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r_1r_2\end{pmatrix}$$

Собственный базис состоит из ортогональных векторов:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицы рассеяния для металлической и диэлектрической поверхностей космических объектов имеют следующие различия: третья и четвертая строки матриц, последние два собственных числа и соответствующие им собственные векторы. Матрица линейного оператора рассеяния диэлектрической поверхностью является симметричной. То есть, состав поверхности влияет на изменение третьей и четвертой компонент вектора Стокса U и V.

Применение матрицы рассеяния для расчета вектора Стокса падающего излучения.

При исследованиях поляризационных эффектов в фотометрии космических объектов считается, как правило, что на исследуемый объект падает естественный световой поток, имеющий нулевую поляризацию [2, 6]. То есть, вектор Стокса падающего излучения имеет координаты $\overline{\mathbf{S}}=(J,0,0,0)$. Но известно, что, проходя через слои ионосферы, световой поток приобретает некоторую поляризацию. В данной работе предложен метод определения поляризации падающего излучения с помощью найденных матриц рассеяния для металлов и диэлектриков.

Согласно (1) математической моделью рассеяния света от отражающей поверхности является операторное уравнение [2]:

$\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{M}\overline{\mathbf{S}}_\mathbf{0}$, где $\overline{S},\overline{S}_0,M$ определены выше.

Для нахождения вектора Стокса и поляризации падающего излучения использовались расчетные данные компонентов вектора Стокса рассеянного излучения для модельного объекта «Мир» с известным показателем преломления $\upsilon=1{,}4-i4{,}53$. Расчет компонент Стокса рассеянного излучения проводился согласно методике, описанной в [2].

Операторное уравнение $\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{M}\overline{\mathbf{S}}_\mathbf{0}$ для металлических поверхностей имеет вид:

$$\begin{pmatrix}J\\ Q\\ U\\ V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_{11} & M_{12} & 0 & 0\\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0\\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34}\\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}J_0\\ Q_0\\ U_0\\ V_0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, вычисление вектора Стокса падающего излучения сводится к решению системы:

$$\begin{cases}J_0=\dfrac{|r_1|^2(J-Q)+|r_2|^2(J+Q)}{2|r_1|^2|r_2|^2};\\ Q_0=\dfrac{|r_1|^2(Q-J)+|r_2|^2(J+Q)}{2|r_1|^2|r_2|^2};\\ U_0=\dfrac{\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)U+\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2)V}{|r_1\bar{r}_2|^2};\\ V_0=\dfrac{\mathrm{Re}(r_1\bar{r}_2)V-\mathrm{Im}(r_1\bar{r}_2)U}{|r_1\bar{r}_2|^2}.\end{cases}$$

Амплитудные коэффициенты для металлов определяются по формулам (2, 3).

По результатам данных исследований была разработана программная реализация, позволяющая определить компоненты вектора Стокса и поляризацию падающего излучения по параметрам Стокса рассеянного света и при известном коэффициенте преломления поверхности. Для расчета вектора Стокса падающего излучения составлена программа на языке Delphi, позволяющая осуществлять:

– загрузку данных из файлов формата xls;

– расчет вектора Стокса падающего излучения;

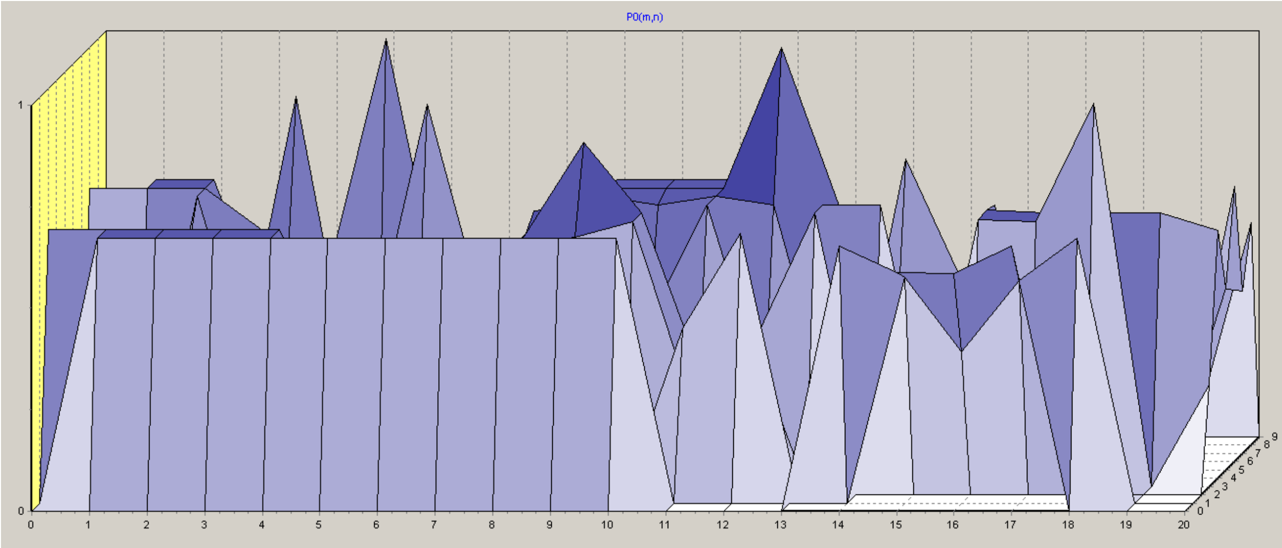
– расчет вектора Стокса рассеянного излучения;

– построение полей рассеяния компонентов вектора Стокса и коэффициента поляризации;

– экспорт результатов расчета в графическом и табличном видах.

Поле рассеяния коэффициента поляризации падающего излучения в сферической системе координат показано на рисунке.

Заключение. Предложен расчет параметров Стокса падающего излучения с помощью полученной матрицы рассеяния. Таким образом, выполненные результаты расчета могут быть использованы при фотополяриметрических исследованиях удаленных космических объектов.



Поле рассеяния коэффициента поляризации падающего излучения

Библиографический список

1. *Муртазов А.К.* Мониторинг загрязнения околоземного пространства оптическими средствами. Рязань, 2010. 248 с.

2. *Розенберг Г.В.* Вектор-параметр Стокса. // Успехи физических наук. М. 1955. С. 77-110.

3. *Бодрова И.В., Бодров О.А., Солдатов В.В.* Влияние параметров Стокса на коэффициент поляризации при исследованиях фотометрических характеристик космического мусора // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 50-1. С.17-21.

4. *Бодрова И.В., Бодров О.А.* Разработка схемы определения параметров Стокса поляризационного излучения рассеивающей поверхности космических объектов // Современные концепции научных исследований. М. 2014. С. 24-26.

5. *Сивухин Д.В.* Курс общей физики. IV том. Оптика. М. 2002. 792 С.

6. *Белошенков А.В.* Поляризационные индикатрисы рассеяния в прямой и обратной задачах фотометрии удаленных космических объектов: дисс.- Саратов.- 1996. – 111 с.

7. *Геворкян П.С.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия – Физматлит. 2011. – 205 с.